ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NORBERT ROBY

Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 3 (1963), p. 213-348
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_3_213_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 213 à 348.

LOIS POLYNOMES ET LOIS FORMELLES EN THÉORIE DES MODULES (1)

PAR M. NORBERT ROBY,

Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

INTRODUCTION.

L'idée qui nous fit entreprendre le travail que nous présentons ici a son origine dans le souci d'élargir l'arsenal des applications dont on dispose communément en algèbre. L'analyse classique dans les espaces $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ utilise une grande diversité de fonctions ou d'applications (continues, différentiables, analytiques, holomorphes, etc.); il en est de même, par exemple, dans l'étude des variétés pour lesquelles $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ servent de modèle local. Mais dès qu'on considère des espaces vectoriels plus généraux, et pis encore s'il s'agit de modules, on ne dispose plus guère que d'applications et de formes linéaires.

Cependant, certains développements ont nécessité la considération de classes d'applications plus étendues. Les plus fréquemment employées sont les « applications polynomes » d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre; par exemple, Chevalley en fait un fréquent usage dans son traité des Groupes de Lie. De même, la théorie des variétés algébriques demande, par essence même, l'emploi de « fonctions polynomes » dans un espace vectoriel sur un corps K.

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1963.

Dans le but de traiter systématiquement d'une théorie acceptable des applications intéressantes d'un module dans un autre, il semble donc qu'une première étape consiste à formuler de façon satisfaisante le concept d'application polynome. De fait, certains auteurs ont pensé trouver une « bonne classe » de fonctions définies sur un module et à valeurs dans l'anneau de base en considérant l'algèbre engendrée par les formes linéaires. Mais l'étude de cette algèbre présente des phénomènes désagréables; par exemple, on y voit mal les relations entre générateurs. Il nous a semblé qu'en fait elle est trop petite et mal adaptée à une théorie générale. En outre, pour définir de manière naturelle à partir de là les applications polynomes d'un module dans un autre, on est gêné dès que le second module n'a plus nécessairement de base.

Dans un ordre d'idées analogue, on peut songer à définir ces applications polynomes comme étant celles qui s'expriment sous la forme $x \to \varphi(x, \ldots, x)$, où φ est une application multilinéaire, le plus souvent symétrique.

Là encore, dans les cas usuels, on retrouve les applications polynomes courantes. Mais dans des cas plus généraux, et même pour des espaces vectoriels si le corps de base est fini, on est vite gêné par des apparitions de factorielles qui posent des problèmes de caractéristique ou de divisibilité; en outre, la représentation d'une application sous la forme $x \to \varphi(x, \ldots, x)$ n'est plus unique.

L'idée que nous avons suivie est celle-ci. Si M et N sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, de bases respectives $(e_1, \ldots, e_n)$, $(e'_1, \ldots, e'_m)$, on appelle « application polynome » de M dans N une application f définie par une relation de la forme

$$f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e'_i,$$

où les P_i sont des fonctions polynomes. Il revient au même de dire qu'à tout système fini $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de M on peut faire correspondre au moins un système fini $(y_1, \ldots, y_q)$ d'éléments de N et des fonctions polynomes $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_q$ telles qu'on ait identiquement

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p) = \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Q}_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\, y_i.$$

Cette dernière définition a l'avantage de pouvoir se transporter, telle quelle, au cas où K est un *anneau commutatif quelconque* et où M et N sont des K-modules quelconques. On pourrait donc penser qu'on a donné là la « bonne définition » d'une application polynome.

Cependant, la théorie qui en découlerait ne correspond pas exactement à ce que nous aurions désiré. Dans le cas où M a une base de n éléments et où $N = K$, la théorie ainsi définie n'est rien d'autre que la théorie des *fonctions polynomes* à n variables sur l'anneau K. L'étude de ces fonctions est, certes, intéressante. Néanmoins, il existe une théorie plus intéressante encore : c'est celle des *polynomes* proprement dits à n indéterminées; d'ailleurs, une théorie complète des anneaux de polynomes contient en fait celle des anneaux de fonctions polynomes, qui en sont des anneaux quotients. Nous parvenons ainsi à cette conclusion que ce n'est pas tellement la notion de « fonction polynome » qu'il conviendrait de généraliser aux modules, mais celle de *polynome* tout court.

Remarquons qu'un *polynome* n'étant plus une application de K^n dans K, sa généralisation ne sera pas, non plus, une application du module M dans le module N. Toutefois, en remplaçant les λ_i précédents par des indéterminées T_i, la généralisation en vue devrait conduire à associer, à « quelque chose » qui s'écrirait : $x_1 T_1 + \ldots + x_p T_p$, une « autre chose » qui s'écrirait

$$\sum_{i=1}^{q} y_i Q_i(T_1, \ldots, T_p),$$

les Q_i étant cette fois des polynomes. Manifestement s'introduisent ici les modules produits tensoriels $M \otimes K(T_1, \ldots, T_p)$ et $N \otimes K(T_1, \ldots, T_p)$. Et comme, en fait, p est un entier quelconque, on doit considérer plutôt les modules $M \otimes E(K)$ et $N \otimes E(K)$, où $E(K)$ est l'algèbre des polynomes à coefficients dans K et à une infinité dénombrable d'indéterminées T_i $(i \geq 1)$. L'objet qui nous intéresse devrait donc être, en principe, une application f de $M \otimes E(K)$ dans $N \otimes E(K)$. Mais cette application ne peut pas être quelconque. Il n'y a aucune raison de supposer que les indéterminées introduites jouent individuellement des rôles différents; autrement dit, le fait de changer les indices des indéterminées dans l'élément à transformer doit se traduire par le même changement d'indices dans l'élément transformé. Plus généralement, le fait de substituer aux indéterminées $T_1, \ldots, T_n$ de l'élément à transformer des polynomes $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ doit entraîner la même substitution dans l'élément transformé.

De manière générale, nous désignons par « spécialisation $T_i \to r_i$ » de $E(K)$ dans une K-algèbre R l'unique homorphisme d'algèbres u de K dans R telle que $u(T_i) = r_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Alors, la définition précise que nous prendrons pour une « *loi polynome sur le couple* (M, N) » est la suivante : c'est une application f de $M \otimes E(K)$ dans $N \otimes E(K)$ telle que pour toute spécialisation u de E (K) dans lui-même, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes E(K) & \xrightarrow{f} & N \otimes E(K) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ M \otimes E(K) & \xrightarrow{f} & N \otimes E(K) \end{array}$$

Cette définition conduit à une théorie tout à fait satisfaisante, qui généralise à la fois la notion de *polynome* et celle d'application *polynome* dans tous les cas où cette notion a été utilisée (c'est-à-dire si K est un corps infini).

Mais il y a mieux. S'il est exact que la théorie puisse se faire à l'aide de la seule algèbre E (K), on peut noter qu'à toute loi polynome f sur le couple (M, N) correspond la donnée, pour toute K-algèbre associative commutative et unitaire R, d'une application f_R de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ de telle sorte que, pour tout homomorphisme $u : R \to R'$ d'algèbres unitaires, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes R & \xrightarrow{f_R} & N \otimes R \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ M \otimes R' & \xrightarrow{f_{R'}} & N \otimes R' \end{array}$$

On peut alors donner une définition fonctorielle des lois polynomes; elle justifie le nom employé de « loi ». C'est celle que nous donnons au chapitre I. L'équivalence avec la définition qui précède sera établie au chapitre IV.

Dans les chapitres I et II, on élabore une théorie élémentaire de la famille $\mathfrak{P}$ (M, N) les lois polynomes sur un couple (M, N) de modules. Cette théorie correspond à la théorie élémentaire des polynomes : structure de module, structure particulière dans des cas particuliers, théorie de la graduation et de la multigraduation, polarisation, différentielles et formule de Taylor. Cette théorie renferme en soi, comme cas d'espèces, celle des applications linéaires, multilinéaires, quadratiques.

Le chapitre III est consacré à un ordre d'idées différent. Nous y donnons un exposé systématique de la théorie des algèbres de puissances divisées de modules. Ces algèbres ont déjà été utilisées, en particulier par H. Cartan; je dois à P. Cartier de les connaître. Mais comme il ne semble pas en exister d'exposition qui se veuille complète, ce travail de rédaction qui m'a été demandé pourra probablement rendre des services aux utilisateurs.

Naturellement, ce n'est pas sans raison que ce chapitre s'insère là. Dès le chapitre IV, l'algèbre des puissances divisées est mise en relation fondamentale avec la théorie des lois polynomes et l'éclaire d'un jour tout nouveau. Si $\Gamma(M)$ est l'algèbre des puissances divisées du module M, une loi polynome sur le couple (M, N) correspond, grâce à un phénomène de caractère universel, à une application linéaire de $\Gamma(M)$ dans N. Ainsi, le linéaire est comme le naturel : prétend-on le chasser qu'il revient au galop !

Cette situation, cette interaction entre les deux théories jusqu'ici menées séparément, va tout au cours du chapitre IV permettre d'approfondir chacune d'elles. Les choses sont en cela si bien faites que des résultats pas trop immédiats pour l'une d'elles ne sont que la traduction de résultats aisés à obtenir dans l'autre. C'est ainsi que certaines suites exactes au sens de Grothendieck sont étudiées concernant $\Gamma(M)$ et qu'est précisée la structure de $\mathcal{P}(M, N)$ quand M est un module produit.

Le chapitre V est l'étude du cas où le second module est l'anneau A de base; on montre que $\mathcal{P}(M, A)$ est une algèbre qu'on met en relation avec l'algèbre duale de la coalgèbre $\Gamma(M)$.

Ici se termine la première partie de ce travail, consacrée aux lois polynomes. La seconde partie est consacrée aux *lois formelles*, qui sont aux lois polynomes ce que les séries formelles sont aux polynomes. C'est en quelque sorte un essai d'une théorie des « applications analytiques » d'un module dans un autre. Naturellement, le point de vue « formel » ne se prête pas à une notion de convergence analogue à celle des fonctions holomorphes; mais on sait que, même dans la théorie classique des variétés analytiques, les questions de convergence pour les séries entières qui se présentent ne jouent pas toujours un rôle essentiel.

Au chapitre VI, on commence par donner une définition fonctorielle des lois formelles et on les met en relation avec les lois polynomes. Puis on fait ce que l'évidence commandait d'entreprendre; on établit, par exemple, un théorème des fonctions implicites et un théorème du jacobien. Au chapitre VII on fait une théorie des formes formelles et des champs formels avec dérivations et crochets. Ce n'est pas que nous pensions que la nature des choses devait nécessairement, par priorité, nous mener dans cette direction d'études. Mais c'est que nous avions un but plus précis.

Il se trouve que nous nous étions posé des problèmes relativement à l'itération des transformations analytiques d'un espace vectoriel réel ou complexe — plus précisément à l'itération des germes de transformations analytiques qui laissent fixe l'origine. Si f est un tel germe, inversible, il s'agit de plonger le groupe des itérés d'ordre entier de f dans un groupe continu à un paramètre. Le problème revient à exprimer un automorphisme de l'algèbre des germes de fonctions analytiques comme une exponentielle de dérivation. Bien que le problème se situe à un échelon assez élémentaire (espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie), la théorie des lois formelles permet de le formuler de manière commode et d'y apporter un formalisme très adéquat; aussi est-ce dans ce cadre général, développé au chapitre VIII, que nous en faisons l'étude.

PREMIÈRE PARTIE.

LOIS POLYNOMES.

CHAPITRE I.

Les modules de lois polynomes.

1. Introduction. — Tout au long de ce travail, A désigne un anneau commutatif possédant un élément unité. Tous les A-modules considérés sont unitaires.

Sauf précision contraire, nous entendons par « algèbre » une algèbre *commutative*, associative et unitaire sur A. Tous les éléments unités des algèbres, en particulier celui de A, seront représentés par le symbole 1.

Étant données deux algèbres R et R′, on appelle *homomorphisme d'algèbres* de R dans R′ toute application de R dans R′ qui est à la fois un homomorphisme de A-modules et un homomorphisme unitaire d'anneaux.

Sauf précision contraire, le produit tensoriel $M \otimes N$ de deux A-modules M et N sera le produit tensoriel *sur A*, c'est-à-dire $M \underset{A}{\otimes} N$.

Si $\alpha : M \to M'$ et $\beta : N \to N'$ sont des homomorphismes de A-modules, $\alpha \otimes \beta$ désignera l'homomorphisme de $M \otimes N$ dans $M' \otimes N'$ défini par

$$(\alpha \otimes \beta)\,(x \otimes y) = \alpha\,(x) \otimes \beta\,(y).$$

Pour tout ensemble E, ε_E désigne l'application identique de E sur lui-même.

Soit $A\,(T_i)_{i \in I}$ une algèbre de polynomes à coefficients dans A. Pour toute algèbre R et toute famille $(r_i)_{i \in I}$ d'éléments de R, il existe un homomorphisme d'algèbres u et un seul de $A\,(T_i)_{i \in I}$ dans R tel que $u\,(T_i) = r_i$. Nous dirons que u est la *spécialisation* de $A\,(T_i)_{i \in I}$ dans R définie par $T_i \to r_i$. Plus généralement, pour tout A-module M, le module $M \otimes A\,(T_i)_{i \in I}$ se notera aussi $M\,(T_i)_{i \in I}$ et ses éléments s'appelleront les *polynomes à coefficients dans* M par rapport aux indéterminées T_i. Si $u : T_i \to r_i$ $(i \in I)$ est une spécialisation de $A\,(T_i)_{i \in I}$ dans R, l'application $(\varepsilon_M \otimes u)$ de $M\,(T_i)_{i \in I}$ dans $M \otimes R$ s'appellera encore la spécialisation définie par $T_i \to r_i$.

2. Lois polynomes. Définition. — Soient M et N deux A-modules. On appelle « *loi polynome f sur le couple* (M, N) » la donnée, pour toute

algèbre R, d'une application f_R de l'ensemble $M \otimes R$ dans l'ensemble $N \otimes R$ de telle sorte que, quelles que soient les algèbres R et R' et pour tout homomorphisme d'algèbres $u : R \to R'$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes R & \xrightarrow{f_R} & N \otimes R \\ {\scriptstyle \varepsilon_M \otimes u} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varepsilon_N \otimes u} \\ M \otimes R' & \xrightarrow{f_{R'}} & N \otimes R' \end{array}$$

L'application f_R s'appellera l'*application polynome* de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ induite par la loi polynome f. Par un abus de notation bien commode, si $z \in M \otimes R$, l'élément $f_R(z)$ de $N \otimes R$ se notera aussi $f(z)$ et, d'une façon générale, f_R se notera aussi f.

3. Détermination d'une loi polynome.

Théorème I.1. — *Soit f une loi polynome sur un couple* (M, N). *Soit $x_1, \ldots, x_n$ une famille finie d'éléments de* M. *Alors, pour tout système $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers $\geqq 0$, il existe un élément $y_{k_1, \ldots, k_n}$ de* N, *de telle sorte que :*

1° *tous les éléments $y_{k_1, \ldots, k_n}$ sont nuls sauf un nombre fini;*

2° *pour toute algèbre* R *et toute famille $r_1, \ldots, r_n$ d'éléments de* R *on a*

$$f_R(x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_n \otimes r_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} y_{k_1, \ldots, k_n} \otimes r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}. \tag{1}$$

Un tel système d'éléments $y_{k_1, \ldots, k_n}$ est unique et il ne dépend que de $x_1, \ldots, x_n$.

Réciproquement, si les x_i forment une base de M, *quels que soient les éléments $y_{k_1, \ldots, k_n}$ en nombre fini de* N, *la formule précédente définit une loi polynome sur le couple* (M, N).

Démonstration. — Prenons d'abord pour algèbre R l'algèbre de polynomes $A_n = A(T_1, \ldots, T_n)$. On aura

$$f_{A_n}(x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_n \otimes T_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} y_{k_1, \ldots, k_n} \otimes T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n},$$

où les y sont des éléments de N déterminés de manière unique et vérifient 1°. Si R est une algèbre quelconque, la formule (1) s'en déduit en considérant la spécialisation de A_n dans R définie par $T_i \to r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

La réciproque est immédiate, car si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de M, tout élément de $M \otimes R$ admet une écriture unique de la forme $\sum_i x_i \otimes r_i$, de sorte que la formule (1) permet bien de définir une application f_R;

il est trivial de vérifier que la donnée des f_R est une loi polynome sur le couple (M, N).

Le théorème précédent donne une justification de la dénomination de « loi polynome ».

Comme corollaire à la démonstration, on voit qu'on connaît f dès qu'on connaît les applications f_{A_n} pour tout entier $n > 0$. Désignons alors par E (A) l'algèbre des polynomes à coefficients dans A par rapport à une infinité dénombrable d'indéterminées $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ et posons, pour tout module M, $E(M) = M \otimes E(A)$. Alors, on voit qu'une loi polynome f sur un couple (M, N) est parfaitement déterminée quand on connaît l'application induite $f_{E(A)}$ de E (M) dans E (N). Il résulte de là que *les lois polynomes sur un couple donné* (M, N) *constituent une ensemble*, qu'on pourrait identifier à une partie de l'ensemble des applications de E (M) dans E (N).

Pour qu'une application f de E (M) dans E (N) soit la restriction à E (M) d'une loi polynome, il est naturellement nécessaire que, pour toute spécialisation u de E (A) dans lui-même, on ait

$$(\varepsilon_N \otimes u) \circ f = f \circ (\varepsilon_M \otimes u).$$

Nous verrons au chapitre IV que *cette condition est aussi suffisante.*

Dans toute la suite, *nous désignerons par* $\mathfrak{P}$ (M, N) *l'ensemble des lois polynomes sur un couple* (M, N).

4. Premiers exemples de lois polynomes.

Remarque. — Soit f une loi polynome sur un couple (M, N). Prenons pour algèbre R l'anneau A lui-même. En identifiant, de manière classique, tout module P avec $P \otimes A$, on a en particulier une application $f_A : M \to N$, qui est l'application polynome de M dans N induite par f. Nous verrons des cas où la connaissance de cette application suffit à déterminer la loi f. En général, il n'en est pas ainsi.

Considérons un homomorphisme de modules $\alpha : M \to N$. Pour toute algèbre R, désignons par α_R l'application de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ égale à $\alpha \otimes \varepsilon_R$. Pour tout homomorphisme d'algèbres $u : R \to R'$, il est clair que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \otimes R \arrow[r, "\alpha_R"] \arrow[d, "\varepsilon_M \otimes u"'] & N \otimes R \arrow[d, "\varepsilon_N \otimes u"] \\ M \otimes R' \arrow[r, "\alpha_{R'}"] & N \otimes R' \end{tikzcd}$$

La donnée des α_R constitue donc une loi polynome sur le couple (M, N). L'application de M dans N induite par cette loi est α. En outre, toutes les α_R sont des applications linéaires. Nous nommerons cette loi polynome *la loi polynome linéaire qui prolonge canoniquement l'application linéaire* α. Il s'est avéré commode de désigner cette loi polynome par la même notation α que celle qui désigne sa restriction à M; aucune confusion n'en résultera.

Soit, maintenant, un élément y de N. Pour toute algèbre R, soit y_R l'application constante de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ qui applique $M \otimes R$ sur $y \otimes 1$. Il est clair que la donnée des y_R constitue une loi polynome sur le couple (M, N). Nous l'appellerons *la loi polynome constante définie par* y et il sera commode de la désigner elle-même par la notation y. Ainsi, y_A est l'application constante de M sur y.

5. STRUCTURE DE MODULE SUR $\mathfrak{P}$ (M, N). — Soient deux lois polynomes f et $g \in \mathfrak{P}(M, N)$. Pour toute algèbre R, soit h_R l'application de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ définie par

$$h_R = f_R + g_R.$$

Il est clair que la donnée des h_R est une loi polynome h sur le couple (M, N). Nous disons que h est *la somme* des lois f et g et nous écrivons : $h = f + g$. Il est trivial de constater que cette addition fait de $\mathfrak{P}$ (M, N) un groupe abélien. En particulier, le zéro de ce groupe est la loi constante définie par $0 \in N$.

Pour tout scalaire λ, on définit de même la loi λf par la relation $(\lambda f)_R = \lambda f_R$ et l'on vérifie sans peine que, muni de l'addition et de la loi externe ainsi définie, l'ensemble $\mathfrak{P}$ (M, N) *est un* A-*module unitaire.*

Les applications

$$\mathcal{L}(M, N) \to \mathfrak{P}(M, N) \qquad \text{et} \qquad N \to \mathfrak{P}(M, N)$$

qui associent canoniquement une loi polynome à toute application linéaire de M dans N ou à tout élément de N sont, on le voit trivialement, des homomorphismes de modules; elles sont injectives.

Nous allons maintenant généraliser quelque peu la notion d'addition dans $\mathfrak{P}$ (M, N). Soit (f_n) $(n \geqq 0)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{P}$ (M, N). Nous disons que *la suite* f_n *est localement finie* si, pour toute algèbre R et pour tout $z \in M \otimes R$, la suite des éléments de $N \otimes R$ définie par $(f_n)_R(z)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Dans ces conditions, on peut définir une application

$$g_R : \quad M \otimes R \to N \otimes R$$

en posant

$$g_R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n)_R(z);$$

cette sommation est en effet finie. On constate immédiatement que la donnée des g_R est une loi polynome $g \in \mathcal{P}(M, N)$. On pose

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

et l'on dit que g *est la somme localement finie de la famille des* f_n.

6. Composition des lois polynomes. — Soient trois modules M, N, P et deux lois polynomes

$$f \in \mathcal{P}(M, N) \qquad \text{et} \qquad g \in \mathcal{P}(N, P).$$

Pour tout homomorphisme d'algèbres $u : R \to R'$, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes R & \xrightarrow{f_R} & N \otimes R & \xrightarrow{g_R} & P \otimes R \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_M \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_N \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_P \otimes u} \\ M \otimes R' & \xrightarrow{f_{R'}} & N \otimes R' & \xrightarrow{g_{R'}} & P \otimes R' \end{array}$$

montre que les applications $h_R = g_R \circ f_R$ déterminent une loi polynome $h \in \mathcal{P}(M, P)$. Nous posons

$$h = g \circ f \qquad \text{ou} \qquad h = g(f)$$

et nous disons que h *est la loi polynome composée des lois* g *et* f.

Supposons que N soit un module produit : $N = N_1 \times \ldots \times N_p$. Nous identifierons toujours, de manière canonique, chaque module N_i à un sous-module de N, de sorte que N s'identifie aussi à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} N_i$. Alors, pour toute algèbre R, le module

$$N \otimes R = \left(\bigoplus_{i=1}^{p} N_i\right) \otimes R$$

s'identifie aussi au module $\bigoplus_{i=1}^{p} (N_i \otimes R)$. Chaque $N_i \otimes R$ est ainsi identifié à un sous-module de $N \otimes R$. Si l'on a une loi polynome $f_i \in \mathcal{P}(M, N_i)$ pour toute algèbre R on sait que $(f_i)_R$ est une application de $M \otimes R$, dans $N_i \otimes R$; c'est donc aussi bien une application de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$, dont il est trivial de voir qu'elle définit une loi polynome sur le couple (M, N). On peut donc considérer que $f_i \in \mathcal{P}(M, N)$. On identifie ainsi $\mathcal{P}(M, N_i)$ à un sous-module de $\mathcal{P}(M, N)$. En fait, l'identification ainsi faite résulte de la composition de f_i avec la loi polynome linéaire définie par l'injection canonique de N_i dans N.

Réciproquement, d'ailleurs, soit $f \in \mathcal{P}(M, N)$. Alors, l'application f_R de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ résulte d'une suite d'applications $(f_i)_R$ de $M \otimes R$

dans $N_i \otimes R$; il est trivial de voir que, pour tout i, $(f_i)_R$ définit une loi polynome $f_i \in \mathfrak{P}(M, N_i)$; cette f_i n'est autre que la loi polynome composée de f et de la loi polynome linéaire définie par la projection canonique de N sur N_i. En identifiant, comme plus haut, chaque f_i à un élément de $\mathfrak{P}(M, N)$, on a alors

$$f = \sum_{i=1}^{p} f_i.$$

Cette décomposition est, naturellement, unique. Finalement, on voit qu'*on peut identifier, de manière canonique, les deux modules*

$$\mathfrak{P}\left(M, \bigoplus_{i=1}^{p} N_i\right) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{P}(M, N_i).$$

Par la suite, nous ferons toujours cette identification. A la notation $f = \sum_{i=1}^{p} f_i$ précédente, nous préférerons la notation

$$f = \bigoplus_{i=1}^{p} f_i.$$

Cela étant, soient donc un module $N = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i$, deux modules M et P et des lois polynomes

$$f_i \in \mathfrak{P}(M, N_i) \quad (i = 1, \ldots, p) \qquad \text{et} \qquad g \in \mathfrak{P}(N, P).$$

D'après ce qui précède, on peut considérer la loi polynome

$$\bigoplus_{i=1}^{p} f_i = f \in \mathfrak{P}(M, N,)$$

et la composer avec la loi g. On obtient alors une loi polynome $h \in \mathfrak{P}(M, P)$. Conformément à la notation déjà définie, nous pourrions écrire

$$h = g(f_1 \oplus \ldots \oplus f_p).$$

Mais nous préférons introduire la notation suivante :

$$h = g(f_1, \ldots, f_p).$$

Nous disons que h est *la loi composée de g et des lois polynomes f_i.*

Par exemple (et en changeant nos notations), supposons que M soit un module produit : $M = M_1 \times \ldots \times M_p$, et soit f une loi polynome sur le couple (M, N) (N n'étant plus ce qui précède). Désignons par m_i l'élément de $\mathfrak{P}(M, M_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ qui prolonge canoniquement la projection canonique de M sur M_i. Autrement dit, pour toute algèbre R, $(m_i)_R$ est la projection canonique de $M \otimes R$ sur $M_i \otimes R$. Alors, il est clair qu'on peut écrire : $f = f(m_1, \ldots, m_p)$. Ce formalisme, qui tend à réhabiliter la « mauvaise notation » des fonctions, est très commode. *Les m_i s'appellent les lois coordonnées sur le module* M.

Signalons, en particulier, le cas d'un module M qui n'est « produit que de lui-même » (i. e. $p = 1$). L'application identique de M définit une loi coordonnée $m \in \mathfrak{L}(M, M)$ et, pour tout $f \in \mathfrak{L}(M, N)$, on peut écrire : $f = f(m)$.

Remarque. — On voit immédiatement qu'une expression telle que $g(f_1, \ldots, f_p)$ dépend linéairement de la loi g. Par contre, elle ne dépend, en général, pas linéairement des lois $f_1, \ldots, f_p$. Nous verrons pourtant au paragraphe suivant un cas important où il en est ainsi.

7. Autres exemples de lois polynomes : les lois multilinéaires. — Soit un module produit $M = M_1 \times \ldots \times M_p$ et un module N. Soit f une application p-linéaire de M dans N. Pour toute algèbre R, l'application

$$M_1 \times R \times \ldots \times M_p \times R \to N \otimes R$$

définie par

$$(x_1, r_1, \ldots, x_p, r_p) \to f(x_1, \ldots, x_p) \otimes r_1 \ldots r_p$$

est $(2p)$-linéaire. Elle définit donc une application linéaire

$$f_R^* : \quad M_1 \otimes R \otimes \ldots \otimes M_p \otimes R \to N \otimes R,$$

avec

$$f_R^*(x_1 \otimes r_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes r_p) = f(x_1, \ldots, x_p) \otimes r_1 \ldots r_p.$$

Mais f_R^* définit une application p-linéaire

$$f_R : \quad (M_1 \otimes R) \times \ldots \times (M_p \otimes R) \to N \otimes R,$$
$$f_R(x_1 \otimes r_1, \ldots, x_p \otimes r_p) = f(x_1, \ldots, x_p) \otimes r_1 \ldots r_p.$$

Conformément à nos conventions, le module $\prod_{i=1}^{p}(M_i \otimes R)$ est identifié au module $M \otimes R$, de sorte que f_R applique $M \otimes R$ dans $N \otimes R$.

Si $u : R \to R'$ est un homomorphisme d'algèbres, on a

$$\begin{aligned} f_{R'} \circ (\varepsilon_M \otimes u)\,(x_1 \otimes r_1, \ldots, x_p \otimes r_p) &= f_{R'}(x_1 \otimes ur_1, \ldots, x_p \otimes ur_p). \\ = f(x_1, \ldots, x_p) \otimes ur_1 \ldots ur_p &= (\varepsilon_N \otimes u) \circ f_R(x_1 \otimes r_1, \ldots, x_p \otimes r_p). \end{aligned}$$

Donc, la donnée des f_R est une loi polynome sur le couple (M, N). La restriction f_A de cette loi à M coïncide avec f; nous noterons encore f la loi elle-même. En outre, f_R est une application p-linéaire. *Nous dirons que f est la loi polynome multilinéaire qui prolonge canoniquement l'application multilinéaire donnée de* M *dans* N.

Si $p = 1$, nous retrouvons le prolongement canonique déjà défini d'une application linéaire.

8. Lois polynomes homogènes et multihomogènes. — Notons que, pour toute algèbre R, le A-module $M \otimes R$ est, de manière classique, muni aussi d'une structure de R-module. Si $z \in M \otimes R$ et $r \in R$, nous noterons zr le produit de z par r pour cette structure. D'autre part, nous convenons une fois pour toutes que, dans toute algèbre, l'écriture 0^0 représente l'élément-unité.

Définition. — Une loi polynome $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ est dite *homogène de degré* n ($n \geq 0$) si, pour toute algèbre R, pour tout $z \in M \otimes R$ et tout $r \in R$, on a

$$f_R(zr) = f_R(z)\, r^n.$$

Exemple. — La loi nulle est homogène de tous les degrés.

Proposition I.1. — *Pour qu'une loi polynome f sur le couple* (M, N) *soit homogène de degré p, il faut et il suffit que, pour tout système $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de* M *on ait, avec les notations du théorème* I.1,

$$y_{k_1, \ldots, k_n} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 + \ldots + k_n = p.$$

La condition est trivialement suffisante. On voit qu'elle est nécessaire en prenant pour R une algèbre de polynomes.

Définition. — Soit $M = M_1 \times \ldots \times M_p$ un module produit. Une loi polynome $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ est dite multihomogène de multidegré $(n_1, \ldots, n_p)$ si, pour toute algèbre R, pour toute famille d'éléments $z_i \in M_i \otimes R$ et toute famille d'éléments $r_i \in R$ ($i = 1, \ldots, p$), on a

$$f_R(z_1 r_1, \ldots, z_p r_p) = f_R(z_1, \ldots, z_p)\, r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p}.$$

Par exemple, il est clair, en se reportant à la définition, qu'une loi multilinéaire sur le couple $(M_1 \times \ldots \times M_p, N)$ est multihomogène de multidegré $(1, \ldots, 1)$. Une loi constante est multihomogène de multidegré $(0, \ldots, 0)$.

Proposition I.2. — *Soient* M, N, P *trois modules. On suppose que*

$$M = M_1 \times \ldots \times M_p \qquad \textit{et que} \qquad N = N_1 \times \ldots \times N_q.$$

Soient $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ et $g \in \mathfrak{P}(N, P)$. Soit

$$f = \bigoplus_{i=1}^{q} f_i, \qquad f_i \in \mathfrak{P}(M, N_i)$$

la décomposition canonique de f. On suppose que chaque f_i est multihomogène, de multidegré $(n_{i1}, \ldots, n_{ip})$, et que g est multihomogène de multidegré $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$.

Alors, la loi composée $g(f) = g(f_1, \ldots f_q)$ *est multihomogène de multidegré* $(n'_1, \ldots, n'_p)$, *où*

$$n'_j = \sum_{i=1}^{q} n_{ij}\nu_i \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Quels que soient

$$r_1, \ldots, r_p \in R \qquad \text{et} \qquad z_i \in M_i \otimes R \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

on a, en effet,

$$\begin{aligned}(g\circ f)_R(z_1 r_1, \ldots, z_p r_p) &= g_R(\ldots, f_i(z_1 r_1, \ldots, z_p r_p), \ldots)\\ &= g_R(\ldots, f_i(z_1, \ldots, z_p)\, r_1^{n_{i1}} \ldots r_p^{n_{ip}}, \ldots)\\ &= (g\circ f)_R(z_1, \ldots, z_p) \prod_{i=1}^{q} (r_1^{n_{i1}} \ldots r_p^{n_{ip}})^{\nu_i}\\ &= (g\circ f)_R(z_1, \ldots, z_p)\, r_1^{n'_1} \ldots, r_p^{n'_p},\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

En particulier, si $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ est homogène de degré n et si $g \in \mathfrak{P}(N, P)$ est homogène de degré ν, alors $f \circ g \in \mathfrak{P}(M, P)$ est homogène de degré $n\nu$.

Proposition I.3. — *Soient* $M = M_1 \times \ldots \times M_p$ *et* N *deux modules. Pour tout système de p entiers* $\geqq 0$ $(n_1, \ldots, n_p)$, *soit* $\mathfrak{P}_{n_1, \ldots, n_p}(M, N)$ *l'ensemble des lois polynomes sur le couple* (M, N) *qui sont multihomogènes et de multidegré* $(n_1, \ldots, n_p)$. *Alors,* $\mathfrak{P}_{n_1, \ldots, n}(M, N)$ *est un sous-module du module* $\mathfrak{P}(M, N)$.

La démonstration est immédiate.

Ainsi, pour $n \geqq 0$, $\mathfrak{P}_n(M, N)$ désignera le module des lois polynomes sur le couple (M, N) qui sont homogènes de degré n.

9. Composantes homogènes et multihomogènes des lois polynomes. — Soit $f \in \mathfrak{P}(M, N)$, où $M = M_1 \times \ldots \times M_p$. A toute algèbre R, nous associons l'algèbre $R_p = R(T_1, \ldots, T_p)$ (que nous considérons comme algèbre sur A). On a un isomorphisme évident $R_p = R \otimes A_p$ et, pour tout module M,

$$M \otimes R_p = (M \otimes R) \otimes A_p.$$

Tout élément $z \in M \otimes R$ s'écrit, d'une manière et d'une seule

$$z = z_1 + \ldots + z_p, \qquad \text{avec} \quad z_i \in M_i \otimes R \subset M \otimes R.$$

A z nous associons l'élément

$$\bar{z} = z_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p \otimes T_p \quad \text{de } M \otimes R_p$$

et nous considérons l'élément

$$f_{R_p}(\bar{z}) \in N \otimes R_p = (N \otimes R) \otimes A_p.$$

Nous avons une écriture de la forme

$$f_{R_p}(\bar z) = \sum_{n_1, \ldots, n_p} a_{n_1, \ldots, n_p} \otimes T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p},$$

où $a_{n_1, \ldots, n_p}$ est un élément *bien déterminé* de $N \otimes R$. Pour tout système $(n_1, \ldots, n_p)$ de p entiers $\geqq 0$, nous poserons

$$(f_{n_1, \ldots, n_p})_R(z) = a_{n_1, \ldots, n_p}.$$

De façon précise, $(f_{n_1, \ldots, n_p})_R(z)$ est le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ dans le développement de $f_{R_p}(\bar z)$.

Nous définissons ainsi, pour toute algèbre R, une application $(f_{n_1, \ldots, n_p})_R$ de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$, dont nous allons montrer qu'elle détermine une loi polynome sur le couple (M, N), multihomogène et de multidegré $(n_1, \ldots, n_p)$.

Soit, d'abord, un homomorphisme d'algèbres $u : R \to R'$. Posons

$$Z = (f_{n_1, \ldots, n_p})_{R'} \circ (\varepsilon_M \otimes u)(z);$$

Z est le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ dans l'expression de $f_{R'_p}\left(\overline{(\varepsilon_M \otimes u)\, z}\right)$. Or, il est clair que

$$\overline{(\varepsilon_M \otimes u)\, z} = (\varepsilon_M \otimes u')\, \bar z,$$

où u' est l'homomorphisme d'algèbres $R_p \to R'_p$ égal à $u \otimes \varepsilon_{A_p}$. Donc, Z est le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ dans

$$f_{R'_p} \circ (\varepsilon_M \otimes u')\, \bar z = (\varepsilon_N \otimes u') \circ f_{R_p}(\bar z).$$

Or, l'application $\varepsilon_N \otimes u'$ de $N \otimes R_p$ dans $N \otimes R'_p$ n'opérant que sur les éléments de R, on en conclut que Z n'est autre que le transformé du coefficient $(f_{n_1, \ldots, n_p})_R(z)$ par l'opération $\varepsilon_N \otimes u$. Ainsi

$$(f_{n_1, \ldots, n_p})_{R'} \circ (\varepsilon_M \otimes u) = (\varepsilon_N \otimes u) \circ (f_{n_1, \ldots, n_p})_R.$$

On a donc bien défini une loi polynome, qu'on notera $f_{n_1, \ldots, n_p}$. Vérifions maintenant la multihomogénéité. Calculons pour cela

$$(f_{n_1, \ldots, n_p})_R(z_1 r_1, \ldots, z_p r_p) \qquad r_i \in R).$$

C'est le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ dans $f_{R_p}(z_1 r_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p r_p \otimes T_p)$. Notons que, dans $N \otimes R_p$, on a

$$z_i r_i \otimes T_i = z_i \otimes r_i T_i.$$

En considérant que f_{R_p} « commute » avec la spécialisation $T_i \to r_i T_i$ de R_p dans lui-même, on voit que $f_{R_p}(z_1 r_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p r_p \otimes T_p)$ se déduit de $f_{R_p}(z_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p \otimes T_p)$ par la substitution de $r_i T_i$ à chacun des T_i; le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ s'y retrouve donc multiplié par $r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p}$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION. — La loi $f_{n_1,\ldots,n_p}$ qu'on vient de construire s'appelle la *composante multihomogène*, de multidegré $(n_1, \ldots, n_p)$, de la loi polynome f.

Supposons que f elle-même soit multihomogène de multidegré $(n'_1, \ldots, n'_p)$. On a alors

$$f_{\mathrm{R}_p}(z_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + z_p \otimes \mathrm{T}_p) = f_{\mathrm{R}_p}(z_1, \ldots, z_p) \otimes \mathrm{T}_1^{n'_1} \ldots \mathrm{T}_p^{n'_p}.$$

Dans le dernier membre, on peut remplacer le symbole f_{R_p} par le symbole f_{R}, cela se voit comme ci-dessous. On en déduit que f est sa propre composante multihomogène de multidegré $(n'_1, \ldots, n'_p)$ et que toutes ses autres composantes multihomogènes sont nulles. Cela prouve que, *pour une loi multihomogène non nulle, son multidegré est unique*.

Reprenons la formule

$$(f_{\mathrm{R}_p})(z_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + z_p \otimes \mathrm{T}_p) = \sum_{n_1, \ldots, n_p} (f_{n_1,\ldots,n_p})_{\mathrm{R}}(z_1, \ldots, z_p) \otimes \mathrm{T}_1^{n_1} \ldots \mathrm{T}_p^{n_p}.$$

En fait, pour z donné, la sommation du second membre est finie. En outre, transformons les deux membres par la spécialisation de R_p dans R définie par $\mathrm{T}_i \to 1$ pour tout i. On obtient

$$f_{\mathrm{R}}(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{n_1, \ldots, n_p} (f_{n_1,\ldots,n_p})_{\mathrm{R}}(z_1, \ldots, z_p).$$

Cela prouve la

PROPOSITION I.4. — *Toute loi polynome est la somme localement finie de ses composantes multihomogènes.*

Remarques. — 1° Nous donnerons au chapitre IV un exemple de loi polynome qui possède une *infinité* de composantes homogènes non nulles.

2° La décomposition d'une loi polynome comme somme localement finie de ses composantes multihomogènes est *unique;* en effet, la définition donnée était la seule qui soit compatible avec une telle décomposition.

3° Le module $\mathcal{P}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ des lois homogènes de degré n est la somme directe des modules $\mathcal{P}_{n_1,\ldots,n_p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, avec $n_1 + \ldots + n_p = n$. Pour voir cela, il suffit de remarquer que

$$\mathcal{P}_{n_1,\ldots,n_p}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \subset \mathcal{P}_{n_1+\ldots+n_p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$$

et cette inclusion se démontre en faisant $r_1 = \ldots = r_p$ dans la définition d'une loi multihomogène.

4° L'existence possible d'une infinité de composantes homogènes non nulles empêche de dire que $\mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est la *somme directe* des sous-modules $\mathcal{P}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Mais le fait que la somme des composantes homogènes est localement finie empêche aussi de dire que $\mathfrak{P}(M, N)$ est le *produit* des sous-modules $\mathfrak{P}_n(M, N)$. Le module $\mathfrak{P}(M, N)$ se situe donc « entre » la somme directe et le produit des sous-modules $\mathfrak{P}_n(M, N)$.

La proposition I.4 donne une importance particulière aux lois polynomes homogènes et multihomogènes. Nous allons étudier quelques cas particuliers.

10. Lois homogènes de degré o.

Proposition I.5. — *Les seules lois homogènes et de degré* o *sur un couple* (M, N) *sont les lois constantes.*

On sait déjà que les lois constantes sont homogènes et de degré o. Réciproquement, si f est homogène et de degré o, pour toute algèbre R pour tout $z \in M \otimes R$ et tout $r \in R$, on a

$$f_R(zr) = f_R(z)\, r^0 = f_R(z).$$

En particulier, pour $r = 0$,

$$f_R(z) = f_R(0).$$

Posons $f_A(0) = y$. Soit $u : A \to R$ l'homomorphisme d'algèbres défini par $\lambda \to \lambda 1$. On a

$$f_R(0) = f_R \circ (\varepsilon_M \otimes u)(0) = (\varepsilon_N \otimes u) \circ f_A(0) = y \otimes 1.$$

On voit donc que f est la loi polynome constante définie par y.

11. Lois multihomogènes de multidegré (1, ..., 1) :

Proposition I.6. — *Si* $M = M_1 \times \ldots \times M_p$, *les seules lois multihomogènes de multidegré* (1, ..., 1) *sur le couple* (M, N) *sont les lois multilinéaires.*

On sait déjà que les lois multilinéaires sont multihomogènes et de multidegré (1, ..., 1). Examinons la réciproque.

Avec les notations du paragraphe 9, on a par hypothèse

$$f_{R_p}(z_1 \otimes T_1, \ldots, z_p \otimes T_p) = f_R(z_1, \ldots, z_p) \otimes T_1 \ldots T_p \qquad (z_i \in M_i \otimes R).$$

Nous allons d'abord montrer que f_R est une application multilinéaire. Par exemple, nous montrerons que f_R est linéaire par rapport à z_1. L'homogénéité résulte de la définition d'une loi multihomogène; ou encore, on la retrouve en faisant, dans la formule précédente, la spécialisation de R_p dans R définie par

$$T_1 \to \lambda 1 \quad (\lambda \in A) \qquad \text{et} \qquad T_i \to 1 \quad \text{si } i > 1.$$

Pour l'additivité, soient z_1 et $z'_1 \in M \otimes R$ et T'_1 une autre indéterminée. Formons le polynome (à coefficients dans $N \otimes R$)

$$P = f_{R_{p+1}}(z_1 \otimes T_1 + z'_1 \otimes T'_1, z_2 \otimes T_2, \ldots, z_p \otimes T_p).$$

Calculons, dans P, la somme des coefficients des monomes qui sont, soit de degré 1 en T_1 et de degré 0 en T'_1, soit de degré 0 en T_1 et de degré 1 en T'_1. On peut opérer de deux manières :

1° On fait la spécialisation $T'_1 \to 0$ et l'on cherche les termes de degré 1 en T_1. On obtient $f_{R_p}(z_1 \otimes T_1, \ldots, z_p \otimes T_p)$ et le coefficient est $f_R(z_1, \ldots, z_p)$. Puis on fait de même la spécialisation $T_1 \to 0$ et l'on cherche les termes de degré 1 en T'_1 ; on trouve un coefficient égal à $f_R(z'_1, \ldots, z_p)$. La somme des coefficients est $f_R(z_1, \ldots, z_p) + f_R(z'_1, \ldots, z_p)$.

2° On peut commencer par faire la spécialisation de R_{p+1} dans R_p définie par $T'_1 \to T_1$ et chercher ensuite le coefficient des monomes de degré 1 en T_1. On trouve ainsi $f_R(z_1 + z'_1, \ldots, z_p)$. On a donc bien la propriété voulue d'additivité.

En particulier, f_A est une application multilinéaire de M dans N. Soient $x_1, \ldots, x_p$ des éléments respectifs de $M_1, \ldots, M_p$. On a

$$\begin{aligned} f_{R_p}(x_1 \otimes 1 \otimes T_1, \ldots, x_p \otimes 1 \otimes T_p) &= f_R(x_1 \otimes 1, \ldots, x_p \otimes 1) \otimes T_1 \ldots T_p \\ &= f_A(x_1, \ldots, x_p) \otimes 1 \otimes T_1 \ldots T_p. \end{aligned}$$

Transformons les deux membres par la spécialisation de R_p dans R définie par $T_i \to r_i$ ($r_i \in R$; $i = 1, \ldots, p$). On obtient

$$f_R(x_1 \otimes r_1, \ldots, x_p \otimes r_p) = f_A(x_1, \ldots, x_p) \otimes r_1 \ldots r_p.$$

On reconnaît ainsi que f est la loi multilinéaire qui prolonge canoniquement l'application linéaire f_A, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. — *Une loi polynome et homogène de degré* 1 *sur un couple* (M, N) *est une loi linéaire, prolongement canonique d'une application linéaire de* M *dans* N.

Les deux propositions précédentes permettent d'identifier de manière canonique : d'une part, les deux modules $\mathcal{P}_0$ (M, N) *et* N; *d'autre part, les deux modules* $\mathcal{P}_1$ (M, N) *et* $\mathcal{L}$ (M, N).

12. ÉTUDE DE $\mathcal{P}$ (M, N) SI M EST UN MODULE LIBRE DE DIMENSION FINIE. — On suppose que M est un module libre de dimension finie n, dont nous considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Soit $f \in \mathcal{P}$ (M, N). Il résulte du théorème I.1 et de sa démonstration que f est parfaitement déterminé quand on connaît l'élément $\tilde{f}$ de $N(T_1, \ldots, T_n)$ défini par

$$\tilde{f} = f_{A_n}(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n).$$

En outre, tout élément, $\tilde{f} \in N(T_1, \ldots, T_n)$ détermine une loi polynome f et une seule. Il est trivial de vérifier que l'application bijective : $f \to \tilde{f}$ de $\mathcal{P}$ (M, N) dans $N(T_1, \ldots, T_n)$ est un isomorphisme de modules.

C'est même un isomorphisme de modules multigradué quand on considère, d'une part la multigraduation de $\mathcal{P}$ (M, N) qui résulte de la décomposition $M = A^n$ associée à la base de M considérée, et, d'autre part, la multigraduation évidente du module de polynomes $N(T_1, \ldots, T_n)$. Donc :

Proposition I.7. — *Si* M *est un module libre de dimension finie n, à toute base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* M *correspond un isomorphisme entre les modules multigradués* $\mathcal{P}$ (M, N) *et* $N \otimes A(T_1, \ldots, T_n)$. *On peut identifier ces deux modules en identifiant tout élément* $f \in \mathcal{P}(M, N)$ *à l'élément*

$$\tilde{f} = f_{A_n}(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n) \in N \otimes A(T_1, \ldots, T_n).$$

Supposons, en outre, que N soit aussi un module libre. Soit $(e'_i)_{i\in I}$ une base de N. Alors, f se met, d'une façon et d'une seule, sous la forme

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^{m} e'_j \otimes P_j(T_1, \ldots, T_n),$$

où les P_j sont des polynomes. Pour la restriction f_A de f au module M, on a donc

$$f_A(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \sum_{j=1}^{m} P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e'_j.$$

Autrement dit :

Si M est libre, de dimension finie, et si N est libre, une application polynome f de M dans N est une application telle que, pour tout $x \in M$, $f(x)$ soit un élément de N dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf un nombre fini d'entre elles qui s'expriment par des fonctions polynomes (au sens ordinaire) des coordonnées de x.

Cette situation justifie amplement le nom d'« application polynome » que nous avons introduit dans le cas général.

Le cas où M est simplement de type fini sera étudié plus loin, au chapitre II.

13. Un cas ou tout élément de $\mathcal{P}$ (M, N) est déterminé par sa restriction à M.

Proposition I.8. — *Si l'anneau* A *est intègre et infini et si le module* N *est tel que, pour tout élément* $y \neq 0$ *de* N, *il existe une forme linéaire* ξ *sur* N *telle que* $\xi(y) \neq 0$, *alors, pour tout module* M, *une loi polynome sur le couple* (M, N) *est déterminée par sa restriction à* M.

Il suffit de montrer, sous les hypothèses faites, que pour toute loi polynome $f \in \mathcal{P}(M, N)$ la condition $f_A = 0$ entraîne $f = 0$. Supposons donc $f_A = 0$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de M et soient $y_{k_1, \ldots, k_n}$ les éléments de N qui leur correspondent d'après le théorème I.1.

Supposons que l'un au moins de ces éléments $y_{k_1,\ldots,k_n}$ ne soit pas nul, et soit ξ une forme linéaire sur N qui ne l'annule pas. On peut écrire, quels que soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$,

$$o = f_A(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} y_{k_1,\ldots,k_n}$$

et, en appliquant la forme linéaire ξ,

$$o = \sum_{k_1,\ldots,k_n} \xi(y_{k_1,\ldots,k_n})\, \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n}.$$

Le second membre est, maintenant, une fonction polynome (ordinaire) par rapport aux λ_i. Comme elle est identiquement nulle et que A est intègre et infini, on en déduit que tous ses coefficients sont nuls, en contradiction avec l'hypothèse que l'un au moins d'entre eux ne l'est pas. Donc, tous les $y_{k_1,\ldots k_n}$ sont nuls. Il en résulte clairement que $f = o$.

Remarque. — Quels que soient l'anneau A et les modules M et N, une loi polynome sur le couple (M, N), homogène et de degré o ou 1, est toujours déterminée par sa restriction à M. On verra au chapitre suivant qu'il en est encore de même pour les lois homogènes de degré 2.

CHAPITRE II.

Polarisation et contraction des lois polynomes. Dérivées partielles. Formule de Taylor.

1. Polarisées d'une loi polynome. — Pour tout module M, on note m la loi identique de M.

La polarisation est un procédé qui permet, à partir d'une loi polynome sur un couple (M, N), de construire une loi polynome sur le couple (M^p, N) $(p \geqq 1)$. Soit donc un entier $p \geqq 1$ et considérons le module M^p. Nous désignons par m_i la $i^{\text{ième}}$ loi coordonnée sur le couple (M^p, M) c'est-à-dire la loi linéaire qui prolonge la $i^{\text{ième}}$ projection canonique de M^p sur M $(i = 1, \ldots, p)$. Nous désignons par $\sum_{i=1}^{p} m_i$ la loi polynome somme de ces lois coordonnées; c'est donc un élément de $\mathcal{P}_1(M^p, M)$.

Définition. — Pour toute loi polynome $f \in \mathcal{P}(M, N)$ et tout entier $p \geqq 1$. nous désignons par $\Pi_p(f)$ et nous appelons *polarisée d'ordre p de f* la loi polynome sur le couple (M^p, N) qui est la loi composée de f et de $\sum_{i=1}^{p} m_i$. Autrement dit, $\Pi_p(f)$ est défini par la relation

$$(\Pi_p f)(m_1, \ldots, m_p) = f(m_1 + \ldots + m_p).$$

De manière explicite, pour toute algèbre R et pour des $z_i \in M \otimes R$ $(i = 1, \ldots, p)$, on a

$$(\Pi_p f)_R(z_1, \ldots, z_p) = f_R(z_1 + \ldots + z_p).$$

Si f est homogène, $\Pi_p f$ est homogène et de même degré.

Définition. — Pour toute loi polynome $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ et tout système de p entiers $n_1, \ldots, n_p$ $(p \geqq 1)$, on désignera par $\Pi^{n_1, \ldots, n_p} f$ la composante multihomogène de multidegré $(n_1, \ldots, n_p)$ de la loi polynome $\Pi_p f$. Donc $(\Pi^{n_1, \ldots, n_p} f)_R(z_1, \ldots, z_p)$ est le coefficient de $T_1^{n_1} \ldots T_p^{n_p}$ dans $f_{R_p}(z_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p \otimes T_p)$.

Remarque. — Si $f \in \mathfrak{P}_n(M, N)$, on a

$$\Pi^{n_1, \ldots, n_p} f = 0 \quad \text{si} \quad n_1 + \ldots + n_p \neq n,$$

car $\Pi_p f$ est homogène de degré n.

Exemple : Polarisée complète d'une loi homogène. — Si f est homogène de degré p, on appelle *polarisée complète de* f et l'on note Pf la loi multilinéaire $\Pi^{1, \ldots, 1} f$. Ainsi, $(Pf)_R(z_1, \ldots, z_p)$ est le coefficient de $T_1 \ldots T_p$ dans $f_{R_p}(z_1 \otimes T_1 + \ldots + z_p \otimes T_p)$.

La polarisée complète est, outre multilinéaire, également *symétrique* (en un sens évident).

2. Contraction d'une loi polynome. — Soit f une loi polynome sur un couple (M^p, N) $(p \geqq 1)$. L'application diagonale : $x \to (x, \ldots, x)$ de M dans M^p se prolonge de manière unique en une loi linéaire sur le couple (M, M^p) qui n'est autre que $\underbrace{m \oplus \ldots \oplus m}_{p}$.

Définition. — On appelle *contraction* de la loi polynome $f \in \mathfrak{P}(M^p, N)$ $(p \geqq 1)$ la loi polynome $\chi f \in \mathfrak{P}(M, N)$ définie par

$$(\chi f)(m) = f(m, \ldots, m).$$

Autrement dit, pour $z \in M \otimes R$, on a

$$(\chi f)_R(z) = f_R(z, \ldots, z).$$

Si f est homogène, χf est homogène de même degré; en effet, l'application diagonale est linéaire.

THÉORÈME II.1. — *Soit* $f \in \mathfrak{P}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *une loi polynome homogène de degré* n. *Soit* $(n_1, \ldots, n_p)$ *un système d'entiers tels que* $n_1 + \ldots + n_p = n$. *Alors :*

$$(\chi \Pi^{n_1, \ldots, n_p} f = ((n_1, \ldots, n_p))f.$$

[On a posé : $((n_1, \ldots, n_p)) = n!/n_1! \ldots n_p!$].

Pour toute algèbre R et tout $z \in \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$, soit en effet

$$\mathrm{Z} = (\chi \Pi^{n_1, \ldots, n_p} f)_{\mathrm{R}}(z).$$

On a

$$\mathrm{Z} = (\Pi^{n_1, \ldots, n_p} f)_{\mathrm{R}}(z, \ldots, z).$$

Z est donc le coefficient de $\mathrm{T}_1^{n_1} \ldots \mathrm{T}_p^{n_p}$ dans l'expression

$$f_{\mathrm{R}_p}(z \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + z \otimes \mathrm{T}_p) = f_{\mathrm{R}_p}(z \otimes (\mathrm{T}_1 + \ldots + \mathrm{T}_p)),$$

qui s'écrit aussi, puisque f est homogène de degré n,

$$f_{\mathrm{R}}(z) \otimes (\mathrm{T}_1 + \ldots + \mathrm{T}_p)^n.$$

Donc

$$\mathrm{Z} = ((n_1, \ldots, n_p)) f_{\mathrm{R}}(z),$$

C. Q. F. D.

Cas particulier : $n = p$ et $n_1 = \ldots = n_p = 1$. — On a alors

$$\chi \mathrm{P}(f) = p!\, f \quad \text{si } f \text{ est homogène de degré } p.$$

Donc, *si dans l'anneau* A *on peut diviser par* $p!$, *toute loi polynome homogène de degré* p *est la contraction d'une loi multilinéaire symétrique.*

Cette loi est $\mathrm{P}f/p!$.

Réciproquement, soit f une loi polynome p-linéaire symétrique sur le couple $(\mathrm{M}^p, \mathrm{N})$. Calculons $\mathrm{P}\chi f$. Pour $z_i \in \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ $(i = 1, \ldots, p)$, $(\mathrm{P}\chi f)_{\mathrm{R}}(z_1, \ldots, z_p)$ est le coefficient de $\mathrm{T}_1 \ldots \mathrm{T}_p$ dans

$$(\chi f)_{\mathrm{R}_p}(z_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + z_p \otimes \mathrm{T}_p) = f_{\mathrm{R}_p}(z_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots \\ + z_p \otimes \mathrm{T}_p, \ldots, z_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + z_p \otimes \mathrm{T}_p).$$

L'application f_{R_p} étant multilinéaire et symétrique, le coefficient de $\mathrm{T}_1 \ldots \mathrm{T}_p$ est alors égal à $p!\, f_{\mathrm{R}}(z_1, \ldots, z_p)$. Donc

$$\mathrm{P}\chi f = p!\, f.$$

Si, dans l'anneau A, *on peut diviser par* $p!$, *toute loi polynome multilinéaire symétrique est la polarisée complète d'une loi homogène.*

Les deux remarques qui précèdent nous montrent donc que *si l'anneau* A *contient un sous corps de caractéristique* 0, *les modules* $\mathfrak{P}_p(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *sont isomorphes aux modules des applications multilinéaires symétriques de* M *dans* N.

3. Caractérisation des lois polynomes homogènes de degré 2.

Définition. — Soient M et N deux A-modules. On appelle *application quadratique de* M *dans* N une application $Q : M \to N$ telle que :

1° Pour tout $x \in M$ et tout $\lambda \in A$, on a

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x);$$

2° L'application $B : M \times M \to N$ définie par

$$B(x, x') = Q(x + x') - Q(x) - Q(x')$$

est bilinéaire.

Proposition II.1. — *La restriction à* M *d'une loi polynome homogène de degré* 2 *sur un couple* (M, N) *est une application quadratique de* M *dans* N.

Réciproquement, toute application quadratique de M *dans* N *se prolonge, et d'une seule manière, en une loi polynome homogène de degré* 2 *sur le couple* (M, N).

Première partie :

Soit $f \in \mathcal{P}_2(M, N)$. Soient x_1 et x_2 dans M et formons $f_{A(T_1, T_2)}(x_1 \otimes T_1 + x_2 \otimes T_2)$. C'est un polynome à coefficients dans N, homogène de degré 2, de la forme

$$A \otimes T_1^2 + B \otimes T_1 T_2 + C \otimes T_2^2.$$

Soit Q la restriction de f à M. Faisant les spécialisations : $T_1 \to 0$ et $T_2 \to 1$, ou bien $T_1 \to 1$ et $T_2 \to 0$, on trouve

$$A = Q(x_1) \qquad \text{et} \qquad B = Q(x_2).$$

Quant à l'application : $(x_1, x_2) \to B(x_1, x_2)$, *c'est la restriction à* $M \times M$ *de la polarisée complète de f;* c'est donc une application bilinéaire.

Or, en faisant la spécialisation $T_1 \to 1$ et $T_2 \to 1$, on a

$$Q(x_1 + x_2) - Q(x_1) - Q(x_2) = B(x_1, x_2).$$

La relation $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ étant, par ailleurs, évidente à cause de l'homogénéité de f, on voit donc que Q est une application quadratique de M dans N. Nous montrons maintenant que la connaissance de Q détermine f. Il suffit de montrer que la connaissance de Q permet de calculer l'expression

$$f_{A_n}(x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_n \otimes T_n) \qquad (x_i \in M).$$

Or, on a une expression de la forme

$$f_{A_n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes T_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes T_i^2 + \sum_{i<j} B_{ij} \otimes T_i T_j.$$

Annulant, par spécialisation, tous les T_i sauf l'un d'eux, on trouve : $A_i = Q(x_i)$; puis, annulant par spécialisation tous les T_i sauf deux d'entre eux, on trouve : $B_{ij} = B(x_i, x_j)$. Donc : une loi polynome homogène de degré 2 est parfaitement déterminée par sa restriction à M.

Deuxième partie :

Réciproquement, soit Q une application quadratique de M dans N et soit B la forme bilinéaire associée. On va la prolonger en loi polynome homogène de degré 2 (l'unicité étant déjà assurée).

Pour toute algèbre R et tout $z \in M \otimes R$ s'écrivant

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes r_i,$$

posons

$$f_R(z) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) \otimes r_1^2 + \sum_{i<j} B(x_i, x_j) \otimes r_i r_j.$$

Pour montrer qu'on détermine bien ainsi une application f_R de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$, il faut vérifier que f_R ne dépend pas de l'écriture choisie pour représenter z. Or, on sait que si l'on a une seconde écriture pour z, on passe de l'une à l'autre par une succession finie d'*opérations élémentaires* qui sont : 1° la permutation de deux monomes $x_i \otimes r_i$ et $x_j \otimes r_j$; 2° le remplacement d'un monome $(x_1 + x'_1) \otimes r_1$ par le binome $x_1 \otimes r_1 + x'_1 \otimes r_1$; 3° le remplacement d'un monome $x_1 \otimes (r_1 + r'_1)$ par le binome $x_1 \otimes r_1 + x_1 \otimes r'_1$; 4° le remplacement d'un monome $x_1 \otimes \lambda r_1$ $(\lambda \in A)$ par le monome $\lambda x_1 \otimes r_1$; 5° les opérations inverses des précédentes. Il suffit donc de vérifier que $f_R(z)$ reste invariant par ces opérations élémentaires. Or;

1° La permutation de deux indices n'affecte pas l'expression donnée de $f_R(z)$. C'est évident pour le premier $\sum$; quant au second $\sum$, étant donnée la symétrie en i et j de l'expression $B(x_i, x_j) \otimes r_i r_j$, on peut considérer qu'il s'étend, en fait, à l'ensemble de tous les couples non ordonnés distincts (i, j); une permutation sur les indices le laisse donc inchangé.

2° Le remplacement de $(x_1 + x'_1) \otimes r_1$ par $x_1 \otimes r_1 + x'_1 \otimes r_1$ a pour effet de remplacer l'expression

$$Q(x_1 + x'_1) \otimes r_1^2 + \sum_{j>1} B(x_1 + x'_1, x_j) \otimes r_1 r_j$$

par l'expression

$$Q(x_1)\otimes r_1^2 + Q(x'_1)\otimes r_1^2 + \sum_{j>1} B(x_1, x_j)\otimes r_1 r_j + \sum_{j>1} B(x'_1, x_j)\otimes r_1 r_j + B(x_1, x'_1)\otimes r_1^2.$$

qui lui est égale.

3° Le remplacement de $x_1 \otimes (r_1 + r'_1)$ par $x_1 \otimes r_1 + x_1 \otimes r'_1$ a pour effet de remplacer l'expression

$$Q(x_1)\otimes (r_1 + r'_1)^2 + \sum_{j>1} B(x_1, x_j)\otimes (r_1 + r'_1) r_j$$

par l'expression

$$Q(x_1)\otimes r_1^2 + Q(x_1)\otimes r_1'^2 + \sum_{j>1} B(x_1, x_j)\otimes r_1 r_j \\ + \sum_{j>1} B(x_1, x_j)\otimes r'_1 r_j + B(x_1, x_1)\otimes r_1 r'_1$$

qui lui est égale [car $B(x_1, x_1) = 2Q(x_1)$].

4° Le remplacement de $x_1 \otimes \lambda r_1$ par $\lambda x_1 \otimes r_1$ a pour effet de remplacer l'expression

$$Q(x_1)\otimes (\lambda r_1)^2 + \sum_{j>1} B(x_1, x_j)\otimes \lambda r_1 r_j$$

par l'expression

$$Q(\lambda x_1)\otimes r_1^2 + \sum_{j>1} B(\lambda x_1, x_j)\otimes r_1 r_j$$

qui lui est égale.

Il est donc vérifié que nous avons bien défini une application f_R. Maintenant, il est évident que les f_R ont la propriété caractéristique d'une donnée de loi polynome sur le couple (M, N). La loi polynome f qui en résulte est, trivialement, homogène et de degré 2. Enfin, la restriction de f à M est l'application Q elle-même. La proposition est démontrée.

4. Différentielles d'une loi polynome.

Définition. — Soit $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ une loi polynome. On appelle *différentielle* (d'ordre 1) de f, et l'on note Df, la loi polynome sur le couple (M^2, N) définie par la formule

$$Df = \sum_{p=0}^{\infty} \Pi^{p,1} f \quad \text{(somme localement finie)}.$$

Autrement dit, pour toute algèbre R et pour z et z' dans $M \otimes R$, $(Df)_R(z, z')$ est la somme des coefficients des monomes du premier degré en T_2 dans l'expression $f_{R(T_1, T_2)}(z \otimes T_1 + z' \otimes T_2)$. Il revient au même de dire que $(Df)_R(z, z')$ *est le coefficient de* T *dans l'expression* $f_{R(T)}(z + z' \otimes T)$.

Notons que $(Df)(m, m')$ *est une loi linéaire relativement à* m'.

On vérifie que Dm est la loi linéaire qui prolonge la seconde projection canonique de M^2 sur M.

Définition. — Soient $f \in \mathfrak{L}(M, N)$ et $n \geq 0$. On appelle *différentielle d'ordre n de f* et l'on note $D^n f$ la loi polynome sur le couple (M^2, N) définie par la formule

$$D^n f = \sum_{p=0}^{\infty} \Pi^{p,n} f.$$

Alors, $(D^n f)_R(z, z')$ est le coefficient de T^n dans $f_{R(T)}(z + z' \otimes T)$.

On a naturellement la formule

$$f(m + m') = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n f)(m, m') \qquad [= \Pi_2 f(m, m')].$$

5. Dérivées partielles et dérivées partielles divisées. Formule de Taylor. — Écrivons $M^2 = M_1 \times M_2$, où $M_1 = M_2 = M$. Soit $f \in \mathfrak{L}(M, N)$. Considérons la loi polynome sur le couple (M, N) égale à $(Df)(m, x)$, où m est la loi linéaire définie par l'injection identique de M dans M_1 et x la loi constante définie par l'application constante de M sur l'élément $x \in M_2$. Cette loi polynome se notera $(D_x f)(m)$ et s'appellera *la dérivée partielle de f par rapport à l'élément x de* M. On la notera aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Pour une algèbre R et $z \in M \otimes R$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_R(z)$ est le coefficient de T dans $f_{R(T)}(z + x \otimes T)$.

L'application $\dfrac{\partial}{\partial x} : f \to \dfrac{\partial f}{\partial x}$ est, de toute évidence, un endomorphisme de module. On l'appellera *la dérivation partielle par rapport à x.* L'endomorphisme $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^n$ se notera aussi $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$.

Plus généralement, on peut considérer de même la loi polynome sur le couple (M, N) égale à $(D^n f)(m, x)$. Nous la noterons $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} f$ et nous l'appellerons la $n^{\text{ième}}$ *dérivée partielle divisée de f par rapport à x.* Pour une algèbre R et $z \in M \otimes R$, $\left(\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} f\right)_R(z)$ est le coefficient de T^n dans $f_{R(T)}(z + x \otimes T)$. L'application $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ de $\mathfrak{L}(M, N)$ dans lui-même est, de toute évidence, un endomorphisme de module.

Si f est homogène de degré p, $(D^n f)(m, m')$ est la composante bihomogène de bidegré $(p - n, n)$ de $\Pi_2 f$. Il en résulte que $(D^n f)(m, x)$ est homogène de degré $p-n$ si $p \geqq n$, ou nulle si $p < n$. Donc : *l'opérateur* $\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ *abaisse le degré d'une loi homogène de n unités — ou l'annule.*

Ces opérateurs se composent ainsi : pour n et $p \geqq 0$, on a

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} \frac{\partial^{[p]}}{\partial x^{[p]}} = ((n, p)) \frac{\partial^{[n+p]}}{\partial x^{[n+p]}}.$$

Considérons, en effet, l'expression $f_{R(T_1, T_2)}(z + x \otimes (T_1 + T_2))$ et cherchons le coefficient de $T_1^n T_2^p$. On peut d'abord prendre le coefficient [élément de $N \otimes R(T_1)$] de T_2^p, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial^{[p]}}{\partial x^{[p]}} f\right)_{R(T_1)} (z + x \otimes T_1),$$

et prendre dans ce dernier le coefficient de T_1^n; on obtient

$$\left(\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} \frac{\partial^{[p]}}{\partial x^{[p]}} f\right)_R (z).$$

Mais on peut aussi dire que le coefficient de $T_1^n T_2^p$ est égal au produit de $((n, p))$ par le coefficient de T^{n+p} dans $f_{R(T)}(z + x \otimes T)$; il est alors égal à

$$((n, p)) \left(\frac{\partial^{[n+p]}}{\partial x^{[n+p]}} f\right)_R (z).$$

C. Q. F. D.

L'ensemble des deux formules :

Proposition II.2 :

$$f(m+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} f\ (m) \quad \text{(somme localement finie)},$$

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} \frac{\partial^{[p]}}{\partial x^{[p]}} = ((n, p)) \frac{\partial^{[n+p]}}{\partial x^{[n+p]}}$$

constitue la « formule de Taylor pour les lois polynomes ».

6. Expression de la différentielle a l'aide des dérivées partielles.

Proposition II.3. — *Soient* $f \in \mathfrak{L}(M, N)$ *et* R *une algèbre. Si* z *et* z' *sont des éléments de* $M \otimes R$ *et si* $z' = \sum_i x_i \otimes r_i$, *alors*

$$(Df)_R(z, z') = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_R (z)\, r_i.$$

D'après la linéarité en m' de $Df(m, m')$, il suffit de savoir que

$$(Df)_R(z, x \otimes 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_R (z),$$

ce qui est la définition de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

7. Étude générale des dérivations partielles. — Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de M, le produit $\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}$ d'opérateurs de $\mathfrak{P}$ (M, N) se notera aussi : $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

Proposition II.4. — *Soit une algèbre* R *et* z *un élément de* $M \otimes R$. *Alors, pour tout* $f \in \mathfrak{P}$ (M, N), $\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\right)_R (z)$ *est le coefficient du monome* $T_1 \ldots T_n$ *dans l'expression* $f_{R(T_1, \ldots, T_n)}(z + x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_n \otimes T_n)$.

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la proposition est exacte. Faisons l'hypothèse de récurrence jusqu'au rang $n - 1$. Pour prendre le coefficient de $T_1 \ldots T_n$ dans l'expression considérée, on peut commencer par prendre le coefficient [élément de $N \otimes R(T_1)$] de $T_2 \ldots T_n$, ce qui donne déjà

$$\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \ldots \partial x_n} f\right)_{R(T_1)} (z + x_1 \otimes T_1).$$

Il ne reste plus qu'à prendre le coefficient de T_1 dans cette dernière expression; on trouve bien

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} f\right)_R (z).$$

C. Q. F. D.

Remarquons que le coefficient de $T_1 \ldots T_n$ reste le même si l'on effectue une permutation sur l'ensemble des indéterminées T_i; or, effectuer une permutation sur les T_i revient aussi bien à effectuer une permutation sur les x_i. Donc :

Proposition II.5. — *Les dérivations partielles par rapport à divers éléments de* M *commutent entre elles.*

D'une façon plus générale, on verrait de même que le coefficient de $T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}$ dans $f_{R(T_1, \ldots, T_n)}(z + x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_n \otimes T_n)$ est égal à

$$\left(\frac{\partial^{[k_1]}}{\partial x_1^{[k_1]}} \cdots \frac{\partial^{[k_n]}}{\partial x_n^{[k_n]}} f\right)_R (z)$$

et que deux opérateurs tels que $\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ et $\frac{\partial^{[m]}}{\partial x^{[m]}}$ commutent entre eux.

Nous expliciterons maintenant l'effet d'une dérivation partielle sur des lois polynomes particulières.

Dérivée partielle d'une loi constante. — On sait qu'une dérivation partielle abaisse le degré d'une unité — ou annule. Donc, toute dérivée partielle d'une loi constante est nulle.

Dérivée partielle d'une loi linéaire. — Soit

$$f \in \mathcal{P}_1(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathrm{M}.$$

Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une loi constante. Le coefficient de T dans

$$f_{\mathrm{R(T)}}(z + x \otimes \mathrm{T}) \qquad (= f_{\mathrm{R}}(z) + f(x) \otimes \mathrm{T}) \quad \text{est } f(x).$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x).$$

Dérivée partielle d'une loi homogène de degré 2. — C'est une loi linéaire. Soit $f \in \mathcal{P}_2$ (M, N) et soit Q l'application quadratique induite de M dans N; soit B la forme bilinéaire associée à Q. On a vu que B était la polarisée d'ordre 2 de f; par conséquent, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{\mathrm{A}}(y)$, qui est le coefficient de T dans l'expression $f_{\mathrm{A(T)}}(y + x \otimes \mathrm{T})$, est égal à B (y, x). Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie par l'application linéaire : $y \to \mathrm{B}(y, x)$ de M dans N.

8. Linéarité de l'application : $x \to \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Proposition II.6. — *L'application du module* M *dans le module des endomorphismes de* $\mathcal{P}$ (M, N) *définie par* $x \to \dfrac{\partial}{\partial x}$, *est une application linéaire.*

On a, en effet,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(m) = (\mathrm{D}f)(m, x).$$

La proposition résulte de la linéarité, par rapport à m', de la différentielle $(\mathrm{D}f)(m, m')$.

Nous sommes en mesure de déterminer le noyau de l'application $x \to \dfrac{\partial}{\partial x}$. Supposons que $x_0 \in \mathrm{M}$ soit dans ce noyau. Pour toute application linéaire $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, on aura

$$\alpha(x_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_0} = 0.$$

Ainsi, toute application linéaire de M dans N s'annule en x_0. Supposons, réciproquement, que toute application linéaire de M dans N s'annule en x_0. Soient $f \in \mathcal{P}$ (M, N) et $\mathrm{Z} \in \mathrm{E}$ (M) (*cf.* chap. I, § 3). Alors, l'application

$$x \to \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\mathrm{Z})$$

est une application linéaire de M dans E (N). Mais comme E (A) est un module libre sur A, le module $E(N) = N \otimes E(A)$ est isomorphe à une somme directe de modules égaux à N; l'application linéaire précédente résulte donc d'une famille d'applications linéaires de M dans N. Chacune d'elles s'annulant en x_0, on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)(Z) = 0.$$

Alors, la restriction de la loi $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ à E (M) est nulle, donc cette loi est nulle. On a donc $\frac{\partial}{\partial x_0} = 0$. Ainsi :

Proposition II.7. — *Le noyau de l'application* $x \to \frac{\partial}{\partial x}$ *est le plus grand sous-module de* M *sur lequel s'annulent toutes les applications linéaires de* M *dans* N.

9. Applications aux dérivées partielles sur un module produit. — Si M est un module produit, $M = M_1 \times \ldots \times M_p$, alors tout $x \in M$ s'écrit et d'une seule manière

$$x = x_1 + \ldots + x_p \qquad (x_i \in M_i).$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p}.$$

Plus généralement, nous allons voir que les opérateurs $\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ s'expriment à l'aide des opérateurs $\frac{\partial^{[n]}}{\partial x_i^{[n]}}$. Cela résultera de la

Proposition II.8. — *Pour tout couple d'éléments* x, y *d'un module* M *et tout* $n \geqq 0$, *on a*

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial (x+y)^{[n]}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{[k]}}{\partial x^{[k]}} \frac{\partial^{[n-k]}}{\partial y^{[n-k]}}.$$

En effet, pour toute algèbre R et tout $z \in M \otimes R$, considérons l'expression

$$f_{R(T_1, T_2)}(z + x \otimes T_1 + y \otimes T_2).$$

Cherchons la somme des coefficients des monomes de degré total n en T_1 et T_2. On peut, d'une part, prendre le coefficient de $T_1^k T_2^{n-k}$ et sommer pour $k = 0, \ldots, n$; on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{[k]}}{\partial x^{[k]}} \frac{\partial^{[n-k]}}{\partial y^{[n-k]}} f\right)_R (z).$$

On peut aussi faire, d'abord, la spécialisation $T_2 \to T_1$ et prendre ensuite le coefficient de T_1^n; on obtient ainsi

$$\left(\frac{\partial^{[n]}}{\partial (x+y)^{[n]}} f\right)_R (z).$$

C. Q. F. D.

On en déduit par récurrence que, quels que soient $x_1, \ldots, x_p \in M$, on a

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial (x_1 + \ldots + x_p)^{[n]}} = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \frac{\partial^{[k_1]}}{\partial x_1^{[k_1]}} \cdots \frac{\partial^{[k_p]}}{\partial x_p^{[k_p]}}.$$

Revenons au cas, envisagé ci-dessus, d'un module produit. En portant, dans la formule de Taylor établie au paragraphe 5, les résultats précédents concernant la décomposition de x dans les modules facteurs, on a la

Proposition II.9. — *Formule de Taylor pour les lois polynomes sur un couple* $(M_1 \times \ldots \times M_p, N)$

$$f(m_1 + x_1, \ldots, m_p + x_p) = \sum_{k_1, \ldots, k_p} \left(\frac{\partial^{[k_1]}}{\partial x_1^{[k_1]}} \cdots \frac{\partial^{[k_p]}}{\partial x_p^{[k_p]}} f\right)(m_1, \ldots, m_p) \qquad (x_i \in M_i),$$

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial x_i^{[n]}} \frac{\partial^{[m]}}{\partial x_i^{[m]}} = ((m, n)) \frac{\partial^{[m+n]}}{\partial x_i^{[m+n]}} \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Nous terminons ce chapitre par une étude qui, sans y être tout à fait à sa place, en utilisera quelques résultats.

10. Étude de $\mathfrak{P}(M, N)$ quand M est un module de type fini. — Nous supposons que M est un module de type fini, dont nous désignons par $e_1, \ldots, e_n$ un système de générateurs. Pour toute algèbre R, un élément $z \in M \otimes R$ s'écrit, d'une manière au moins, sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes r_i \qquad (r_i \in R).$$

Il en résulte, comme dans le cas d'un module libre de dimension finie, qu'une loi polynome $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ est parfaitement déterminée quand on connaît l'élément $f_{A_n}(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n)$ de $N(T_1, \ldots, T_n)$, que nous notons $\tilde{f}$. L'application $f \to \tilde{f}$ est une injection de $\mathfrak{P}(M, N)$ dans $N(T_1, \ldots, T_n)$ dont l'image sera notée $\tilde{\mathfrak{P}}(M, N)$. Ainsi, toute loi polynome se trouve représentée par un certain polynome $\tilde{f}$ (à coefficients dans N); mais, en raison des relations éventuelles entre les e_i, ce polynome $\tilde{f}$ ne peut pas, en général, être quelconque. Nous nous proposons donc de caractériser les éléments de $\tilde{\mathfrak{P}}(M, N)$.

Il est, tout d'abord, intéressant de regarder ce qui correspond, par l'identification de f à $\tilde{f}$, à une dérivation partielle dans $\mathfrak{L}$ (M, N). Soit donc $f \in \mathfrak{L}$ (M, N), qu'on identifie à

$$\tilde{f} = f(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n) \in N(T_1, \ldots, T_n).$$

Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ s'identifie à $\left(\dfrac{\partial f}{\partial e_i}\right)(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n)$, qui est le coefficient de T dans

$$f(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_i \otimes (T_i + T) + \ldots + e_n \otimes T_n) = \tilde{f}(T_1, \ldots, T_i + T, \ldots, T_n)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ s'identifie donc à $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial T_i}(T_1, \ldots, T_n)$. Ainsi, à $\dfrac{\partial}{\partial e_i}$ correspond $\dfrac{\partial}{\partial T_i}$.

Plus généralement, si l'on a $x \in M$, avec

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \qquad (a_i \in A),$$

alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ s'identifie au polynome

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial T_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial T_n}\right) \tilde{f}(T_1, \ldots, T_n).$$

On démontrerait de même que l'opérateur $\dfrac{\partial^{[k_1]}}{\partial e_1^{[k_1]}} \cdots \dfrac{\partial^{[k_n]}}{\partial e_n^{[k_n]}}$ de $\mathfrak{L}$ (M, N) correspond à l'opérateur de dérivée divisée $\Delta_{k_1, \ldots, k_n}$ de $N(T_1, \ldots, T_n)$ où, pour tout $P \in N(T_1, \ldots, T_n)$, $\Delta_{k_1, \ldots, k_n} P$ est le coefficient de $S_1^{k_1} \ldots S_n^{k_n}$ dans $P(T_1 + S_1, \ldots, T_n + S_n)$. Ce dernier polynome est donc égal à

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} (\Delta_{k_1, \ldots, k_n} P)(T_1, \ldots, T_n) S_1^{k_1} \ldots S_n^{k_n})$$

et l'on peut vérifier la relation

$$\Delta_{k_1, \ldots, k_n} \Delta_{h_1, \ldots, h_n} = ((k_1, h_1)) \ldots ((k_n, h_n)) \Delta_{k_1 + h_1, \ldots, k_n + h_n}.$$

Les deux derniers résultats constituent la formule de Taylor pour les polynomes usuels. On voit donc que, par l'identification de f à $\tilde{f}$, la formule de Taylor relative aux lois polynome se traduit par la formule de Taylor de type courant.

On observe donc, déjà, que $\tilde{\mathfrak{L}}$ (M, N) est un sous-module de $N(T_1, \ldots, T_n)$ stable pour les opérateurs de dérivation divisée. Passons à la caractérisation.

Proposition II.10. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément* $P \in N(T_1, \ldots, T_n)$ *appartienne à* $\tilde{\mathfrak{L}}$ (M, N) *est que, pour tout système de scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, *et en désignant par* S *une indéterminée distincte de* $T_1, \ldots, T_n$, *le polynome* $P(T_1 + \lambda_1 S, \ldots, T_n + \lambda_n S)$ *soit indépendant de* S.

La condition est nécessaire :

Soit

$$f \in \mathcal{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n) = f_{\mathrm{A}_n}(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n)$$

Si $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, on a

$$\mathrm{P}(\ldots, \mathrm{T}_i + \lambda_i \mathrm{S}, \ldots) = f_{\mathrm{A}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n, \mathrm{S})}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (\mathrm{T}_i + \lambda_i \mathrm{S})\right).$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (\mathrm{T}_i + \lambda_i \mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \mathrm{T}_i.$$

Donc, $\mathrm{P}(\ldots, \mathrm{T}_i + \lambda_i \mathrm{S}, \ldots)$ est indépendant de S.

La condition est suffisante :

Soit P un polynome à coefficients dans N, possédant la propriété indiquée. Pour toute famille finie d'indices α et pour des indéterminées S_α toutes distinctes et distinctes des T_i, on a aussi la propriété suivante : $\mathrm{P}\left(\ldots, \mathrm{T}_i + \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \mathrm{S}_\alpha, \ldots\right)$ est indépendant des S_α dès que, pour tout α, les scalaires λ_i^α vérifient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha e_i = 0$. On démontre aisément cette propriété par récurrence sur le nombre des indices α. Par spécialisation, on en déduit que, pour toute algèbre R et quels que soient les éléments r_i et r_α de R, les conditions $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha e_i = 0$ pour tout α entraînent

$$\left(\ldots, r_i + \sum_\alpha \lambda_i^\alpha r_\alpha, \ldots\right) = \mathrm{P}(\ldots, r_i, \ldots).$$

Identifions M à un module quotient de A^n par un sous-module Λ, l'application canonique de A^n sur M étant définie par

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

On a la suite exacte

$$0 \to \Lambda \to \mathrm{A}^n \to \mathrm{M} \to 0.$$

Pour toute algèbre R, on en déduit la suite exacte

$$\Lambda \otimes \mathrm{R} \xrightarrow{u} \mathrm{R}^n \xrightarrow{v} \mathrm{M} \otimes \mathrm{R} \to 0,$$

où l'on a identifié les deux modules $\mathrm{A}^n \otimes \mathrm{R}$ et R^n de manière classique. L'application v est définie par

$$(r_1, \ldots, r_n) \to e_1 \otimes r_1 + \ldots + e_n \otimes r_n$$

et u est définie par linéarité à partir de

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \otimes r \to (\lambda_1 r, \ldots, \lambda_n r).$$

Donc, si dans $M \otimes R$, on a $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes r_i = 0$, alors il existe un nombre fini de scalaires λ_i^α et d'éléments r_α de R tels que

$$r_i = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha r_\alpha, \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1^\alpha, \ldots, \lambda_n^\alpha) \in \Lambda.$$

Il en résulte qu'on définit une application f_R de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ en posant, si $z \in M \otimes R$ s'écrit

$$z = \sum_{j=1}^{n} e_i \otimes r_i, \qquad f_R(z) = P(r_1, \ldots, r_n).$$

En effet, si l'on a une seconde écriture pour z, on peut, d'après ce qui précède, la mettre sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(r_i + \sum_\alpha \lambda_i^\alpha r_\alpha \right);$$

or, on sait que

$$P(\ldots, r_i, \ldots) = P\left(\ldots, r_i + \sum_\alpha \lambda_i^\alpha r_\alpha, \ldots\right),$$

de sorte que le résultat est bien indépendant de l'écriture choisie.

Il est trivial de vérifier que les f_R constituent une donnée de loi polynome sur le couple (M, N); on a enfin $\tilde{f} = P$. C. Q. F. D.

Il nous sera possible d'expliciter un peu plus la condition trouvée dans le cas où le groupe abélien N est sans torsion sur les entiers (c'est-à-dire si la relation $ky = 0$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $y \in N$ ne peut avoir lieu que si $k = 0$ ou $y = 0$). Il est clair que si le groupe abélien N est sans torsion, il en est de même du groupe abélien $N(T_1, \ldots, T_n)$.

Lemme. — *Soit* N' *un module dont le groupe abélien est sans torsion. Soit* $P \in N'(S)$ *un polynome à une indéterminée à coefficients dans* N'. *La condition nécessaire et suffisante pour que* P *ne dépende pas de* S *est* $\frac{\partial P}{\partial S} = 0$.

La condition est naturellement nécessaire. Elle suffit, car si

$$a_1 + 2 a_2 \otimes S + \ldots + n a_n \otimes S^{n-1} = 0 \qquad (a_i \in N'),$$

alors

$$a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Supposons donc que le groupe abélien N soit sans torsion; il en est de même pour $N' = N(T_1, \ldots, T_n)$. Le fait que $P(\ldots, T_i + \lambda_i S, \ldots)$ ne dépend pas de S équivaut donc à

$$\frac{\partial}{\partial S} P(\ldots, T_i + \lambda_i S, \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial P}{\partial T_i}\right)(\ldots, T_i + \lambda_i S, \ldots) = 0.$$

On déduit de là, en faisant $S = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial P}{\partial T_i}\right)(\ldots, T_i, \ldots) = 0;$$

mais réciproquement, de cette dernière relation, on déduit la précédente en faisant la substitution : $T_i \to T_i + \lambda_i S$. Donc :

Proposition II.11. — *Si le groupe abélien* N *est sans torsion sur les entiers, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément* $P \in N(T_1, \ldots, T_n)$ *appartienne à* $\tilde{\mathfrak{X}}(M, N)$ *est que, pour tout système de scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, *on ait*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial P}{\partial T_i} = 0.$$

Cette condition signifie aussi que, pour tout P de la forme $\tilde{f}$, il existe une application linéaire φ de M dans $N(T_1, \ldots, T_n)$ telle que

$$\varphi(e_i) = \frac{\partial P}{\partial T_i}.$$

L'existence d'une telle application était prévisible *a priori*. En effet, φ n'est autre que l'application linéaire définie par $x \to \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$. L'aspect intéressant de la proposition précédente est donc la suffisance.

Dans le cas général, il ne semble pas qu'il y ait intérêt à remplacer l'énoncé de la proposition II.10 par une formulation plus compliquée qui ne ferait pas intervenir l'indéterminée S.

CHAPITRE III.

L'algèbre des puissances divisées d'un module et l'algèbre des tenseurs symétriques.

1. Définition. — Soit M un A-module. A tout $x \in M$ et à tout entier $n \geq 0$ associons une indéterminée $X_{(x,n)}$. Formons l'algèbre $\mathcal{G} = A(X_{(x,n)})_{x \in M, n \geq 0}$ des polynomes à coefficients dans A par rapport à l'ensemble des indéter-

minées $X_{(x,n)}$. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{G}$ engendré par l'ensemble des polynomes suivants :

(1) $$X_{(x,0)} - 1 \qquad (x \in M),$$

(2) $$X_{(\lambda x,n)} - \lambda^n X_{(x,n)} \qquad (\lambda \in A,\ x \in M,\ n \geqq 0),$$

(3) $$X_{(x,m)} X_{(x,n)} - ((m,\ n)) X_{(x,m+n)} \qquad (x \in M,\ m \geqq 0,\ n \geqq 0),$$

(4) $$X_{(x+y,n)} - \sum_{i=0}^{n} X_{(x,i)} X_{(y,n-i)} \qquad (x \in M,\ y \in M,\ n \geqq 0).$$

L'algèbre quotient $\Gamma(M) = \mathcal{G}/\mathcal{J}$ s'appelle *l'algèbre des puissances divisées du module* M. Nous noterons $x^{[n]}$ l'image canonique de $X_{(x,n)}$ dans ce quotient. Les $x^{[n]}$ $(x \in M,\ n \geqq 0)$ forment un système de générateurs de $\Gamma(M)$ qui, compte tenu de la composition de l'idéal $\mathcal{J}$, vérifient les relations suivantes :

(I) $$x^{[0]} = 1,$$

(II) $$(\lambda x)^{[n]} = \lambda^n x^{[n]},$$

(III) $$x^{[m]} x^{[n]} = ((m,\ n)) x^{[m+n]},$$

(IV) $$(x+y)^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} x^{[i]} y^{[n-i]}.$$

2. Propriétés élémentaires de $\Gamma(M)$. — Il existe une graduation de $\mathcal{G}$ et une seule, compatible avec sa structure d'algèbre, telle que dans cette graduation $X_{(x,n)}$ ait le degré n. Comme les éléments qui engendrent $\mathcal{J}$ sont alors homogènes, $\mathcal{J}$ est un idéal homogène et, par passage au quotient, on en déduit une graduation de l'algèbre $\Gamma(M)$ dans laquelle $x^{[n]}$ est de degré n. On désignera, pour $n \geqq 0$, par $\Gamma_n(M)$ le module des éléments de $\Gamma(M)$ qui sont homogènes de degré n.

L'ensemble $\mathcal{G}_0$ des éléments de degré 0 de $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ qu'on peut identifier à l'algèbre $A(X_{(x,0)})_{x \in M}$. L'ensemble $\mathcal{J} \cap \mathcal{G}_0$ est, comme on le vérifie sans peine, l'idéal de $\mathcal{G}_0$ engendré par les polynomes $X_{(x,0)} - 1$ $(x \in M)$. L'application quotient q

$$\mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_0/\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{J} = \Gamma_0(M)$$

a donc même noyau que l'homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{G}_0$ *sur* A qui envoie chaque $X_{(x,0)}$ sur 1. *On peut donc identifier* A *et* $\Gamma_0(M)$, en identifiant $\lambda \in A$, avec $\lambda 1 \in \Gamma_0(M)$. Nous ferons désormais cette identification.

De même, si $\mathcal{G}_1$ désigne le sous-module de $\mathcal{G}$ formé des éléments homogènes de degré 1, $\mathcal{G}_1$ est l'ensemble des polynomes de degré quelconque par rapport aux indéterminées $X_{(x,0)}$, homogènes et de degré 1 en les indéterminées $X_{(x,1)}$ et ne faisant pas intervenir les $X_{(x,n)}$ pour $n > 1$.

On vérifie aisément que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{J}$ est le sous-module de $\mathcal{G}_1$ engendré par les éléments du type suivant :

1° $(X_{(x,0)} - 1)P_1$, où $P_1 \in \mathcal{G}_1$;
2° $X_{(\lambda x,1)} - \lambda X_{(x,1)}$;
3° $X_{(x+y,1)} - X_{(x,1)} - X_{(y,1)}$.

Le module $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{J}$ est donc le noyau de l'application linéaire composée

$$\mathcal{G}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{G}'_1 \xrightarrow{g} \mathrm{M},$$

où $\mathcal{G}'_1$ est le sous-module des combinaisons linéaires des indéterminées $X_{(x,1)}$, où f est l'application qui consiste à substituer 1 à chaque indéterminée $X_{(x,0)}$ et où g est définie par $X_{(x,1)} \to x$. Comme $g \circ f$ est surjective, il en résulte un isomorphisme canonique entre M et $\Gamma_1(\mathrm{M})$, qui associe x à $x^{[1]}$. *Désormais, nous identifierons toujours* M *et* $\Gamma_1(\mathrm{M})$, x *et* $x^{[1]}$.

Nous ne noterons par aucun signe spécifique la multiplication dans $\Gamma(\mathrm{M})$. Pour $n \geqq 1$, la relation (III) entraîne $x(x)^{[n-1]} = nx^{[n]}$; d'où, par récurrence sur n,

$$x^n = n!\, x^{[n]} \quad \text{pour tout} \quad n \geqq 0.$$

Si A contient un sous-corps de caractéristique 0, $n!$ est inversible dans A et l'on a $x^{[n]} = x^n/n!$. Les relations (I), (II), (III), (IV) sont alors des conséquences triviales de celle-là. On voit ainsi l'origine de l'expression « puissance divisée ».

De (II), on déduit, en faisant $\lambda = 0$, $0^{[n]} = 0$ pour $n \geqq 1$.

De (III), on déduit, par récurrence sur p,

$$x^{[n_1]} \ldots x^{[n_p]} = ((n_1, \ldots, n_p))\, x^{[n_1+\ldots+n_p]}.$$

De même, on déduit de (IV),

$$(x_1 + \ldots + x_p)^{[n]} = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}.$$

3. Lien avec l'algèbre symétrique. — Nous désignons par $\mathrm{S}(\mathrm{M})$ l'algèbre symétrique du module M et par $\vee$ le signe de la multiplication dans $\mathrm{S}(\mathrm{M})$. L'injection canonique $\mathrm{M} \to \Gamma(\mathrm{M})$ se prolonge en un homomorphisme d'algèbres : $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \to \Gamma(\mathrm{M})$, qui envoie $x^{\vee n}$ sur x^n.

Si l'anneau A contient un sous-corps de caractéristique 0, considérons l'homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{G}$ dans $\mathrm{S}(\mathrm{M})$ défini par $X_{(x,n)} \to x^{\vee n}/n!$. Il est clair que cet homomorphisme s'annule sur l'idéal $\mathcal{J}$. On en déduit, par passage au quotient, un homomorphisme de l'algèbre $\Gamma(\mathrm{M})$ dans l'algèbre $\mathrm{S}(\mathrm{M})$, qui envoie $x^{[n]}$ sur $x^{\vee n}/n!$. Il en résulte immédiatement que les deux homomorphismes précédents sont inverses l'un de l'autre, donc bijectifs.

4. Le foncteur Γ. — Soient M, N deux A-modules et f une application linéaire de M dans N. Relativement à M, construisons l'algèbre $\mathcal{G}$ comme précédemment et soit φ l'homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{G}$ dans $\Gamma(\mathrm{N})$ qui envoie $X_{(x,n)}$ sur $(f(x))^{[n]}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{J}$ est dans le noyau de φ. On en déduit, par passage au quotient, un homomorphisme d'algèbres

$$\Gamma(f): \quad \Gamma(\mathrm{M}) \to \Gamma(\mathrm{N}),$$

qui envoie $x^{[n]}$ sur $(f(x))^{[n]}$.

Tout homomorphisme d'algèbres vérifiant la même condition coïncide avec $\Gamma(f)$, car les $x^{[n]}$ forment un système de générateurs de $\Gamma(\mathrm{M})$. Si l'on a des homomorphismes de modules

$$\mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{N} \xrightarrow{f} \mathrm{L},$$

il est alors clair que

$$\Gamma(f \circ g) = \Gamma(f) \circ \Gamma(g).$$

Par ailleurs, $\Gamma(\varepsilon_{\mathrm{M}}) = \varepsilon_{\Gamma(\mathrm{M})}$.

La correspondance $\Gamma : \mathrm{M} \Rightarrow \Gamma(\mathrm{M})$ *est donc un foncteur covariant*, défini sur la catégorie des A-modules, à valeurs dans la catégorie des algèbres sur A.

5. L'algèbre des tenseurs symétriques d'un module. — Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations des n premiers entiers. Quels que soient les entiers positifs $m_1, \ldots, m_p$ nous désignons par $\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_p}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{m_1+\ldots+m_p}$ (isomorphe à $\mathfrak{S}_{m_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{m_p}$) formé des permutations qui conservent (globalement) chacun des groupements $(m_0 = 1, \ldots, m_1)$; $(m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2)$; $\ldots$; $(m_1 + \ldots + m_{p-1} + 1, \ldots, m_1 + \ldots + m_p)$. L'indice de $\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_p}$ dans $\mathfrak{S}_{m_1+\ldots+m_p}$ est

$$(m_1 + \ldots + m_p)!/m_1! \ldots m_p! = ((m_1, \ldots, m_p)).$$

Nous désignons par $\mathrm{K}_{m_1,\ldots,m_p}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_{m_1+\ldots+m_p}$ formé des permutations σ telles que, en posant $\mathrm{M}_0 = 0$ et $\mathrm{M}_i = m_1 + \ldots + m_i$ pour $i = 1, \ldots, p$, on ait

$$\sigma(\mathrm{M}_{i-1} + 1) < \sigma(\mathrm{M}_{i-1} + 2) < \ldots < \sigma(\mathrm{M}_i) \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

C'est un ensemble à $((m_1, \ldots, m_p))$ élément qui constitue un système de représentants pour les classes à gauche de $\mathfrak{S}_{m_1+\ldots m_p}$ modulo $\mathrm{H}_{m_1,\ldots,m_p}$.

Si m, n, p sont des entiers, nous plongeons $\mathfrak{S}_{m+n}$ dans $\mathfrak{S}_{m+n+p}$ en posant, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ $\sigma(i) = i$ pour $i > m + n$. Alors, $\mathrm{H}_{m,n}$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{H}_{m,n,p}$ et $\mathrm{K}_{m,n}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathrm{K}_{m,n,p}$.

Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme. — *Si* $\sigma \in \mathrm{K}_{m+n,p}$ *et* $\tau \in \mathrm{K}_{m,n}$ *on a* $\sigma\tau \in \mathrm{K}_{m,n,p}$. *L'application de* $\mathrm{K}_{m+n,p} \times \mathrm{K}_{m,n}$ *dans* $\mathrm{K}_{m,n,p}$ *définie par* $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$ *est bijective.*

Nous avons, par hypothèse,

$$\tau(1) < \ldots < \tau(m); \quad \tau(m+1) < \ldots < \tau(m+n); \quad \tau(j) \leqq m+n \quad \text{si } j \leqq m+n;$$
$$\tau(m+n+i) = m+n+i \quad (1 \leqq i \leqq p),$$

et aussi

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(m+n); \quad \sigma(m+n+1) < \ldots < \sigma(m+n+p).$$

Il est alors clair que

$$\sigma\tau(1) < \ldots < \sigma\tau(m); \quad \sigma\tau(m+1) < \ldots < \sigma\tau(m+n);$$
$$\sigma\tau(m+n+1) < \ldots < \sigma\tau(m+n+p).$$

Donc $\sigma\tau \in \mathrm{K}_{m,n,p}$. D'autre part, l'application $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$ est injective, car si $\sigma\tau = \sigma'\tau'$ on a, pour $1 \leqq i \leqq p$,

$$\sigma\tau(m+n+i) = \sigma'\tau'(m+n+i),$$

soit

$$\sigma(m+n+i) = \sigma'(m+n+i).$$

Or σ, comme σ', est entièrement déterminée par la manière dont elle opère sur $(m+n+1, \ldots, m+n+p)$; en effet, on connaît alors, par complémentarité, l'image de $(1, \ldots, m+n)$, donc aussi l'image de chacun des éléments de cet intervalle puisque σ y est croissante. Donc, $\sigma = \sigma'$ et aussi $\tau = \tau'$. Comme $\mathrm{K}_{m+n,p} \times \mathrm{K}_{m,n}$ possède $((m+n, p))\,((m, n))$ éléments, nombre égal au nombre $((m, n, p))$ des éléments de $\mathrm{K}_{m,n,p}$, l'application considérée est bien bijective. C. Q. F. D.

Soient M un A-module, T (M) son algèbre tensorielle, $\mathrm{T}_n(\mathrm{M})$ le module des tenseurs homogènes de degré n. On fait, de manière classique, opérer le groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathrm{T}_n(\mathrm{M})$ en posant, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

On obtient ainsi une représentation du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe des automorphismes du module $\mathrm{T}_n(\mathrm{M})$.

Un tenseur homogène $t \in \mathrm{T}_n(\mathrm{M})$ est dit *symétrique* si $\sigma t = t$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Un élément $t \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$ est dit symétrique si chacune de ses composantes homogènes est symétrique. On désignera par $\mathrm{TS}_n(\mathrm{M})$ le module des tenseurs homogènes symétriques de degré n et par TS (M) le module des éléments symétriques de T (M). TS (M) est la somme directe des $\mathrm{TS}_n(\mathrm{M})$. Naturellement, $\mathrm{TS}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et $\mathrm{TS}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

Soient

$$t \in \mathrm{TS}_m(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad t' \in \mathrm{TS}_n(\mathrm{M}).$$

Le tenseur $t \otimes t' \in \mathrm{T}_{m+n}(\mathrm{M})$ est invariant par le groupe $\mathrm{H}_{m,n}$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$, $\sigma(t \otimes t')$ ne dépend donc que de la classe à gauche $\sigma\mathrm{H}_{m,n}$.

Si donc $\sigma_1, \ldots, \sigma_{((m,n))}$ sont un système de représentants pour chacune de ces classes, le tenseur

$$t \star t' = \sum_{i=1}^{((m,n))} \sigma_i(t \otimes t')$$

ne dépend pas du choix de ces représentants et, d'autre part, c'est un tenseur symétrique. On pourra poser

$$t \star t' = \sum_{\sigma \in K_{m,n}} \sigma(t \otimes t').$$

L'application de $TS_m(M) \times TS_n(M)$ dans $TS_{m+n}(M)$ définie par $(t, t') \to t \star t'$ est visiblement bilinéaire. En outre, on vérifie que $t \star t' = t' \star t$. En effet, soit σ la permutation circulaire qui transforme $(1, \ldots, m+n)$ en $(m+1, \ldots, m+n, 1, \ldots, m)$. On a

$$t' \otimes t = \tau(t \otimes t'), \qquad \text{donc} \qquad t' \star t = \sum_{\sigma \in K_{n,m}} \sigma\tau(t \otimes t');$$

mais quand σ parcourt $K_{n,m}$, $\sigma\tau$ parcourt $K_{m,n}$.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant que si

$$t \in T_m(M), \qquad t' \in T_n(M), \qquad t'' \in T_p(M),$$

on a

$$(t \star t') \star t'' = t \star (t' \star t'').$$

En effet,

$$(t \star t') \star t'' = \sum_{\sigma \in K_{m+n,p}} \sigma((t \star t') \otimes t'') = \sum_{\substack{\sigma \in K_{m+n,p} \\ \tau \in K_{m,n}}} \sigma\tau(t \otimes t' \otimes t'').$$

D'après le lemme démontré plus haut, on a donc

$$(t \star t') \star t'' = \sum_{\sigma \in K_{m,n,p}} \sigma(t \otimes t' \otimes t'').$$

On démontre comme déjà fait dans le cas de deux facteurs que la dernière expression reste inchangée si l'on permute circulairement les facteurs. Donc

$$(t \star t') \star t'' = (t' \star t'') \star t = t \star (t' \star t'').$$

C. Q. F. D.

On définit alors une multiplication dans TS (M) de manière évidente : si $t = \sum_n t_n$ et $t' = \sum_m t'_m$ (t_n, t'_m homogènes) sont des tenseurs symétriques quelconques, on pose

$$t \star t' = \sum_{n,m} t_n \star t'_m.$$

TS (M) devient alors, comme on le vérifie trivialement, une algèbre commutative, associative et unitaire sur l'anneau A. Nous l'appellerons *l'algèbre des tenseurs symétriques sur le module* M.

On peut montrer que, pour des tenseurs symétriques

$$t_i \in \mathrm{TS}_{m_i}(\mathrm{M}) \qquad (i=1, \ldots, p)$$

on a

$$t_1 \star \ldots \star t_p = \sum_{\sigma \in \mathrm{K}_{m_1, \ldots, m_p}} \sigma(t_1 \otimes \ldots \otimes t_p).$$

6. Homomorphismes canoniques.

Proposition III.1. — *Il existe un homomorphisme d'algèbres et un seul de* Γ (M) *dans* TS (M) *qui applique* $x^{[n]}$ *sur* $x^{\otimes n}$.

L'unicité est évidente. Pour l'existence, soit φ l'homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{G}$ (définie au paragraphe 1) dans TS (M) qui applique $\mathrm{X}_{(x,n)}$ sur $x^{\otimes n}$. Il suffit de démontrer que φ s'annule sur l'idéal $\mathcal{J}$. Or on a :

1° $\varphi(\mathrm{X}_{(x,0)} - 1) = x^{\otimes 0} - 1 = 0$;

2° $\varphi(\mathrm{X}_{(\lambda x, n)} - \lambda^n \mathrm{X}_{(x,n)}) = (\lambda x)^{\otimes n} - \lambda^n x^{\otimes n} = 0$;

3° $\varphi(\mathrm{X}_{(x,m)} \mathrm{X}_{(x,n)} - ((m, n)) \mathrm{X}_{(x,m+n)}) = x^{\otimes m} \star x^{\otimes n} - ((m, n)) x^{\otimes (m+n)}$.

Or

$$x^{\otimes m} \star x^{\otimes n} = \sum_{\sigma \in \mathrm{K}_{m,n}} \sigma x^{\otimes (m+n)} = ((m, n)) x^{\otimes (m+n)}.$$

4° $\varphi(\mathrm{X}_{(x_1+x_2, n)}) = (x_1 + x_2)^{\otimes n} = \sum_{f \in \mathcal{F}} x_{f(1)} \otimes \ldots \otimes x_{f(n)}$,

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des applications f de $(1, \ldots, n)$ dans $(1, 2)$. Soit $\mathcal{F}_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des f tels que la suite $(f(1), \ldots, f(n))$ contienne k fois 1 et $(n - k)$ fois 2, et posons

$$t_k = \sum_{f \in \mathcal{F}_k} x_{f(1)} \otimes \ldots \otimes x_{f(n)}.$$

Pour une telle suite $(f(1), \ldots, f(n))$, il existe un $\sigma \in \mathrm{K}_{k, n-k}$ et un seul tel que

$$(f(1), \ldots, f(n)) = \sigma(1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2)$$

(1 figure k fois, 2 figure $n - k$ fois). Alors, on a

$$t_k = \sum_{\sigma \in \mathrm{K}_{k, n-k}} \sigma(x_1^{\otimes k} \otimes x_2^{\otimes n-k}) = x_1^{\otimes k} \star x_2^{\otimes n-k} = \varphi(\mathrm{X}_{(x_1,k)} \mathrm{X}_{(x_2, n-k)}).$$

D'où

$$\varphi(\mathrm{X}_{(x_1+x_2, n)}) = \sum_{k=0}^{n} t_k = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}_{(x_1,k)} \mathrm{X}_{(x_2, n-k)}\right).$$

C. Q. F. D.

Considérons l'homomorphisme d'algèbres composé des homomorphismes canoniques déjà définis : $S(M) \to \Gamma(M) \to TS(M)$. Par cet homomorphisme, le générateur $x^{\vee n}$ de $S(M)$ est envoyé sur $x^{\star n}$ (par l'intermédiaire de x^n). C'est donc l'homomorphisme canonique de $S(M)$ dans $TS(M)$ déduit de l'injection canonique de M dans $TS(M)$.

Désignons par π l'opérateur de symétrisation de $T(M)$, dont la restriction π_n à $T_n(M)$ est définie par $\pi_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$.

Lemme. — *On a*

$$\pi_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \star \ldots \star x_n.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$. Alors

$$\begin{aligned} x_1 \star \ldots \star x_n = \pi_{n-1}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n-1}) \star x_n &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} (x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n-1)}) \star x_n \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1} \\ \tau \in K_{n-1,1}}} x_{\tau\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\tau\sigma(n-1)} \otimes x_{\tau(n)}. \end{aligned}$$

Or, on peut identifier $\mathfrak{S}_{n-1}$ et $H_{n-1,1}$; alors, $x_{\tau(n)} = x_{\tau\sigma(n)}$ et, quand σ et τ décrivent $H_{n-1,1}$ et $K_{n-1,1}$ respectivement, leur produit décrit $\mathfrak{S}_n$ de manière bijective. Le lemme est démontré.

On sait, d'autre part, que $S(M)$ est une algèbre quotient de $T(M)$ par une application q qui envoie $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ sur $x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Proposition III.2. — *L'opérateur de symétrisation* π *de* $T(M)$ *est un homomorphisme d'algèbres de* $T(M)$ *dans* $TS(M)$; *il est composé des applications canoniques déjà définies*

$$T(M) \xrightarrow{q} S(M) \to \Gamma(M) \to TS(M).$$

En effet, partons du générateur $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, de degré n, de $T(M)$. Il se transforme successivement en

$$x_1 \vee \ldots \vee x_n, \qquad x_1 \ldots x_n, \qquad x_1 \star \ldots \star x_n = \pi_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).$$

On peut aussi considérer la restriction de q à $TS(M)$: c'est une application de $TS(M)$ dans $S(M)$ qui est un *homomorphisme de module gradué* (et non un homomorphisme d'algèbres). On est alors en présence du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(M) \arrow[dr, "\beta"] & \\ S(M) \arrow[ur, "\alpha"] & & TS(M) \arrow[ll, "q"] \end{tikzcd}$$

où α et β sont les homomorphismes d'*algèbres* déjà définis et q l'homomorphisme de *modules* précédent.

PROPOSITION III.3. — *Tout élément homogène de degré n de* S (M), Γ (M) *ou* TS (M) *se retrouve multiplié par n ! après avoir effectué un tour dans le diagramme précédent.*

1° Si l'on part du générateur $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ du module S_n (M), il devient $x_1 \star \ldots \star x_n$ dans TS (M), c'est-à-dire (lemme)

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

En appliquant q, on obtient

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \vee \ldots \vee x_{\sigma(n)}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad n\,!\, x_1 \vee \ldots \vee x_n,$$

car S (M) est commutative.

2° Si l'on part d'un élément t de TS_n (M), le tour complet équivaut à π_n (propos. III.2). Or $\pi_n t = n\,!\, t$, car t est symétrique.

3° Partons d'un générateur $x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}$ $(k_1 + \ldots + k_p = n)$ du module Γ_n(M). Il devient, dans TS (M) : $x_1^{\otimes k_1} \star \ldots \star x_p^{\otimes k_p}$. Ce dernier élément est la somme des tenseurs déduits de $x_1^{\otimes k_1} \otimes \ldots \otimes x_p^{\otimes k_p}$ par les $((k_1, \ldots, k_p))$ permutations appartenant à $K_{k_1, \ldots, k_p}$; comme S(M) est commutative, tous ces tenseurs ont la même image dans S(M). Le transformé par $q \circ \beta$ de l'élément considéré de Γ_n(M) est donc

$$((k_1, \ldots, k_p))\, x_1^{\vee k_1} \vee \ldots \vee x_p^{\vee k_p}.$$

En appliquant α, on trouve enfin

$$((k_1, \ldots, k_p))\, x_1^{k_1} \ldots x_p^{k_p} = ((k_1, \ldots, k_p))\, k_1\,! \ldots k_p\,!\, x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]};$$

or,

$$((k_1, \ldots, k_p))\, k_1\,! \ldots k_p\,! = n\,!.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Si l'anneau* A *contient un sous-corps de caractéristique* 0, *chacun des homomorphismes canoniques précédents est bijectif.*

Nous allons maintenant poursuivre l'étude des algèbres de puissances divisées, car ce sont elles qui joueront un grand rôle par la suite. L'étude qui vient d'être faite n'avait d'autre but que de situer l'algèbre des puissances divisées par rapport à d'autres algèbres plus connues.

7. SÉRIES FORMELLES DE TYPE EXPONENTIEL. — Soit R un anneau. Nous notons R ((T)) l'anneau des séries formelles à une indéterminée T, à coefficients dans R.

DÉFINITION. — Nous disons qu'un élément $S(T)$ de $R((T))$ est de *type exponentiel* si :

1° le terme constant de $S(T)$ est égal à 1;

2° en désignant par T' une indéterminée autre que T, on a

$$S(T+T') = S(T)\,S(T').$$

Exemple : la série formelle formée du seul élément unité de R.

Nous désignons par $\mathcal{E}(R)$ le sous-ensemble de $R((T))$ formé des séries de type exponentiel. Il est clair que $\mathcal{E}(R)$ est un sous-groupe multiplicatif du groupe des éléments inversibles de $R((T))$. Nous munirons $\mathcal{E}(R)$ de la structure de *groupe abélien* (avec notation multiplicative) qui en découle.

Si R est une algèbre sur un anneau A, *nous ferons de* $\mathcal{E}(R)$ *un* A-*module* en définissant, en outre, une loi externe de la manière suivante : pour $\lambda \in A$ et $S(T) \in \mathcal{E}(R)$, nous posons

$$(\lambda, S(T)) = S(\lambda T).$$

On définit bien ainsi une application de $A \times \mathcal{E}(R)$ dans $\mathcal{E}(R)$, car $(\lambda, S(T))$ a un terme constant égal à 1 et

$$(\lambda, S)(T+T') = S(\lambda T + \lambda T') = S(\lambda T)\,S(\lambda T') = (\lambda, S)(T)\,(\lambda, S)(T').$$

Cette loi externe est bien distributive à droite et à gauche, car

$$(\lambda, S(T)\,S'(T)) = S(\lambda T)\,S'(\lambda T) = (\lambda, S(T))\,(\lambda, S'(T))$$

et

$$(\lambda+\mu, S(T)) = S(\lambda T + \mu T) = S(\lambda T)\,S(\mu T) = (\lambda, S(T))\,(\mu, S(T)).$$

En outre :

$$(\lambda, (\mu, S(T))) = (\lambda, S(\mu T)) = S(\lambda\mu T) = (\lambda\mu, S(T))$$

et

$$(1, S(T)) = S(T).$$

Il est donc prouvé que $\mathcal{E}(R)$ est ainsi muni d'une structure de A-module unitaire.

THÉORÈME III.1. — *Soient* M *un* A-*module et* R *une algèbre. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des homomorphismes de l'algèbre* $\Gamma(M)$ *dans l'algèbre* R *et l'ensemble des homomorphismes du module* M *dans le module* $\mathcal{E}(R)$. *Si* $\alpha : \Gamma(M) \to R$ *et* $\beta : M \to \mathcal{E}(R)$ *se correspondent de cette manière, pour tout* $x \in M$, *on a*

$$\beta(x) = \sum_{n \geq 0} \alpha(x^{[n]})\, T^n.$$

1° Soit α un homomorphisme de l'algèbre $\Gamma(M)$ dans R. Pour tout $x \in M$, formons la série formelle

$$\beta(x) = \sum_{n \geqq 0} \alpha(x^{[n]}) T^n.$$

Montrons que $\beta(x) \in \mathcal{E}(R)$. Le terme constant de $\beta(x)$ est $\alpha(1) = 1$. En outre :

$$\left(\sum_{n \geqq 0} \alpha(x^{[n]}) T^n\right)\left(\sum_{m \geqq 0} \alpha(x^{[m]}) T'^m\right) = \sum_{m, n \geqq 0} \alpha(x^{[n]} x^{[m]}) T^n T'^m$$
$$= \sum_{m, n \geqq 0} \alpha(x^{[n+m]}) ((m, n)) T^n T'^m = \sum_{p \geqq 0} \alpha(x^{[p]}) (T + T')^p.$$

C. Q. F. D.

Montrons maintenant que l'application $\beta : M \to \mathcal{E}(R)$ définie par $x \to \beta(x)$ est un homomorphisme de modules. On a

$$\beta(x)\beta(y) = \sum_{m, n \geqq 0} \alpha(x^{[n]} y^{[m]}) T^{m+n} = \sum_{p \geqq 0} \alpha\left(\sum_{m+n=p} x^{[n]} y^{[m]}\right) T^p$$
$$= \sum_{p \geqq 0} \alpha((x+y)^{[p]}) T^p = \beta(x+y)$$

et

$$\beta(\lambda x) = \sum_{n \geqq 0} \alpha((\lambda x)^{[n]}) T^n = \sum_{n \geqq 0} \alpha(x^{[n]}) (\lambda T)^n = (\lambda, \beta(x)).$$

C. Q. F. D.

2° Réciproquement, soit un homomorphisme de modules $\beta : M \to \mathcal{E}(R)$. Posons

$$\beta(x) = \sum_{n \geqq 0} r(x, n) T^n.$$

Nous allons montrer qu'il existe un homomorphisme d'algèbres α, nécessairement unique, de $\Gamma(M)$ dans R, tel que $\alpha(x^{[n]}) = r(x, n)$ pour tout $x \in M$ et tout $n \geqq 0$. Il suffit de montrer que l'homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{G}$ dans R défini par $X_{(x, n)} \to r(x, n)$ s'annule sur $\mathcal{J}$, c'est-à-dire que les $r(x, n)$ vérifient les relations :

(1) $$r(x, 0) = 1;$$

(2) $$r(\lambda x, n) = \lambda^n r(x, n);$$

(3) $$r(x, n) r(x, m) = ((m, n)) r(x, m+n);$$

(4) $$r(x+y, n) = \sum_{k=0}^{n} r(x, k) r(y, n-k).$$

Or, la relation (1) est vérifiée, car $\beta(x) \in \mathcal{E}(\mathrm{R})$. La relation (2) l'est aussi, car

$$\beta(\lambda x) = (\lambda, \beta(x)).$$

Écrivons maintenant que $\beta(x)(\mathrm{T}+\mathrm{T}') = \beta(x)(\mathrm{T}).\beta(x)(\mathrm{T}')$,

$$\sum_{p \geqq 0} r(x, p)(\mathrm{T}+\mathrm{T}')^p = \sum_{m, n \geqq 0} r(x, n)\, r(x, m)\, \mathrm{T}^n \mathrm{T}'^m.$$

En égalant les coefficients de $\mathrm{T}^n \mathrm{T}'^m$ dans les deux membres, il vient

$$((m, n))\, r(x, m+n) = r(x, n)\, r(x, m),$$

ce qui est la relation (3). Écrivons enfin que $\beta(x+y) = \beta(x)\,\beta(y)$,

$$\sum_{n \geqq 0} r(x+y, n)\, \mathrm{T}^n = \sum_{h, k \geqq 0} r(x, k)\, r(y, h)\, \mathrm{T}^{h+k}.$$

En égalant les coefficients de T^n, il vient

$$r(x+y, n) = \sum_{h+k=n} r(x, k)\, r(y, h),$$

ce qui est la relation (4).

Le théorème est démontré. Nous allons immédiatement en donner une application.

Soient M un module et R une algèbre. Nous considérerons aussi l'algèbre $\Gamma(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}$, produit tensoriel des algèbres $\Gamma(\mathrm{M})$ et R. Nous écrirons $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}(\Gamma(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R})$.

Pour $x \in \mathrm{M}$ et $r \in \mathrm{R}$, considérons la série formelle, élément de $(\Gamma(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R})((\mathrm{T}))$,

$$\mathrm{S}_{(x, r)}(\mathrm{T}) = \sum_{n \geqq 0} (x^{[n]} \otimes r^n)\, \mathrm{T}^n.$$

On a

$$\mathrm{S}_{(x, r)}(\mathrm{T}) \in \mathcal{E}.$$

En effet, le terme constant de $\mathrm{S}_{(x, r)}$ est $1 \otimes 1$, élément unité de $\Gamma(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}$. En outre,

$$\mathrm{S}_{(x, r)}(\mathrm{T})\, \mathrm{S}_{(x, r)}(\mathrm{T}') = \sum_{m, n \geqq 0} (x^{[n]} x^{[m]} \otimes r^{m+n})\, \mathrm{T}^m \mathrm{T}'^n = \sum_{m, n \geqq 0} (x^{[m+n]} \otimes r^{m+n})\, ((m, n))\, \mathrm{T}^m \mathrm{T}'^n$$

$$= \sum_{p \geqq 0} (x^{[p]} \otimes r^p)(\mathrm{T}+\mathrm{T}')^p = \mathrm{S}_{(x, r)}(\mathrm{T}+\mathrm{T}').$$

C. Q. F. D.

Considérons alors l'application $\theta : M \times R \to \mathcal{E}$ définie par $(x, r) \to S_{(x,r)}$. Elle est bilinéaire. En effet,

$$\theta(x, r)\,\theta(y, r) = \sum_{m, n \geqq 0} (x^{[n]} y^{[m]} \otimes r^{m+n})\, T^{m+n} = \sum_{p \geqq 0} \left(\sum_{m+n=p} x^{[n]} y^{[m]} \otimes r^p \right) T^p$$

$$= \sum_{p \geqq 0} ((x+y)^{[p]} \otimes r^p)\, T^p = \theta(x+y, r)$$

et

$$\theta(\lambda x, r) = \sum_{m \geqq 0} ((\lambda x)^{[n]} \otimes r^n)\, T^n = \sum_{n \geqq 0} (x^{[n]} \otimes r^n)\, (\lambda T)^n = (\lambda, \theta(x, r)),$$

ce qui démontre la linéarité en x. De même,

$$\theta(x, r)\,\theta(x, r') = \theta(x, r + r')$$

démonstration très analogue à celle de la relation

$$S_{(x,r)}(T)\, S_{(x,r)}(T') = S_{(x,r)}(T + T'),$$

et

$$\theta(x, \lambda r) = (\lambda, \theta(x, r)),$$

d'où la linéarité en r.

Il en résulte une application linéaire β du module $M \otimes R$ dans le module $\mathcal{E}$, tel que

$$\beta(x \otimes r) = \sum_{n \geqq 0} (x^{[n]} \otimes r^n)\, T^n.$$

D'après le théorème précédent, il existe donc un homomorphisme, que nous notons ω_R, de l'algèbre $\Gamma(M \otimes R)$ dans l'algèbre $\Gamma(M) \otimes R$, tel qu'on ait

$$\omega_R((x \otimes r)^{[n]}) = x^{[n]} \otimes r^n.$$

Cet homomorphisme est unique. Résumons :

THÉORÈME III.2. — *Soit* M *un* A-*module*, R *une algèbre sur* A. *Il existe un homomorphisme d'algèbres* (*et un seul*) $\omega_R : \Gamma(M \otimes R) \to \Gamma(M) \otimes R$ *tel qu'on ait*

$$\omega_R((x \otimes r)^{[n]}) = x^{[n]} \otimes r^n \qquad (x \in M,\ r \in R).$$

Remarques. — *a.* Si $R = A$, l'application

$$\omega_A : \quad \Gamma(M \otimes A) = \Gamma(M) \to \Gamma(M) \otimes A = \Gamma(M)$$

est l'application identique de $\Gamma(M)$.

b. Si R′ est une seconde algèbre et si u est un homomorphisme de R dans R′, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}) & \xrightarrow{\omega_{\mathrm{R}}} & \Gamma(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R} \\ {\scriptstyle \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{M}}\otimes u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\Gamma(\mathrm{M})}\otimes u} \\ \Gamma(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}') & \xrightarrow{\omega_{\mathrm{R}'}} & \Gamma(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R}' \end{array}$$

En effet, partant d'un générateur $(x\otimes r)^{[n]}$ de $\Gamma(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R})$, les deux parcours possibles conduisent à l'élément $x^{[n]}\otimes u(r^n)$ de $\Gamma(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R}'$.

8. Extension de l'anneau de base. — Dans ce paragraphe, nous désignons par $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ l'algèbre sur A des puissances divisées du A-module M. Soit R une algèbre sur A. Si B est un R-module, nous pouvons considérer, outre l'algèbre sur A, $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ où B est considéré comme A-module, l'algèbre (sur R) $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$. Si $x\in\mathrm{B}$, nous désignerons encore par $x^{[n]}$ sa puissance $n^{\text{ième}}$ divisée dans $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$; sa puissance $n^{\text{ième}}$ divisée dans $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$ se notera $x^{\{n\}}$.

Proposition III.4. — *Soit un* R-*module* B. *Il existe un* A-*homomorphisme et un seul de l'algèbre* $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *dans l'algèbre* $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$ *qui applique* $x^{[n]}$ *sur* $x^{\{n\}}$.

L'unicité est évidente. Pour l'existence, il faut montrer, en vertu d'un principe déjà rencontré, que les $x^{\{n\}}$ satisfont aux relations structurales des puissances divisées, ce qui est évident aussi.

Nous allons maintenant prouver l'existence d'un isomorphisme canonique entre les deux R-algèbres suivantes : $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R})$ et $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R}$. Notons que, puisque $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R}$ est une algèbre sur R, l'ensemble $\mathcal{E}$ du paragraphe précédent peut être muni d'une structure de R-module, la « multiplication par r » dans $\mathcal{E}$ étant le remplacement de T par $r\mathrm{T}$ ($r\in\mathrm{R}$). Or, nous avons montré l'existence d'une application A-linéaire β de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}$ dans $\mathcal{E}$, telle que

$$\beta(x\otimes r)=\sum_{n\geq 0}(x^{[n]}\otimes r^n)\,\mathrm{T}^n.$$

Il est clair que β est aussi R-linéaire. Il résulte du théorème III.1 qu'il existe un R-homomorphisme d'algèbres de $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R})$ dans $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\otimes\mathrm{R}$, qui applique $(x\otimes r)^{\{n\}}$ sur $x^{[n]}\otimes r^n$; il revient au même de dire que cet homomorphisme envoie $(x\otimes 1)^{\{n\}}$ sur $x^{[n]}\otimes 1$.

Réciproquement, l'application A-linéaire de M dans $\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}$ définie par $x\to x\otimes 1$ se prolonge en un A-homomorphisme d'algèbres

$$x^{[n]}\to(x\otimes 1)^{[n]}\quad\text{de }\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\qquad\text{dans}\quad\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}).$$

En vertu de la proposition III.4, on a aussi un A-homomorphisme d'algèbres de $\Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R})$ dans $\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R})$, d'où finalement un A-homomorphisme d'algèbres

$$\delta:\ \Gamma_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\to\Gamma_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{R}),\qquad\text{tel que}\quad\delta(x^{[n]})=(x\otimes 1)^{\{n\}}.$$

L'application de $\Gamma_A(M) \times R$ dans $\Gamma_R(M \otimes R)$ définie, pour $\gamma \in \Gamma_A(M)$ et $r \in R$, par $(\gamma, r) \to \delta(\gamma)r$ est A-bilinéaire, d'où une application A-linéaire

$$\varphi: \quad \Gamma_A(M) \otimes R \to \Gamma_R(M \otimes R), \qquad \text{telle que} \quad \varphi(\gamma \otimes r) = \delta(\gamma)\, r.$$

Il est clair que φ est aussi R-linéaire et que c'est également un homomorphisme unitaire d'anneaux; φ est donc un R-homomorphisme d'algèbres, et il applique le générateur $x^{[n]} \otimes 1$ de $\Gamma_A(M) \otimes R$ sur le générateur $(x \otimes 1)^{\{n\}}$ de $\Gamma_R(M \otimes R)$. Nous venons donc de construire l'homomorphisme inverse de celui qui avait été défini plus haut. Donc :

Théorème III.3. — *Il existe un* R-*isomorphisme des algèbres* $\Gamma_R(M \otimes R)$ *et* $\Gamma_A(M) \otimes R$, *qui associe le générateur* $(x \otimes 1)^{\{n\}}$ *de la première au générateur* $x^{[n]} \otimes 1$ *de la seconde.*

9. L'algèbre des puissances divisées d'un module produit.

Théorème III.4. — *Soient* M *et* N *deux* A-*modules. Il existe un isomorphisme canonique entre les algèbres* $\Gamma(M \times N)$ *et* $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$, *tel que l'élément* $(x, y)^{[n]}$ *de la première corresponde à l'élément* $\sum_{i=0}^{n} x^{[i]} \otimes y^{[n-i]}$ *de la seconde* ($x \in M$, $y \in N$, $n \geq 0$).

a. On définit un homomorphisme d'algèbres φ de $\Gamma(M \times N)$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$. L'application linéaire

$$(x, y) \to x \otimes 1 \quad \text{de } M \times N \qquad \text{dans} \quad M \otimes \Gamma(N)$$

se prolonge en un homomorphisme d'algèbres

$$(x, y)^{[n]} \to (x \otimes 1)^{[n]} \quad \text{de } \Gamma(M \times N) \qquad \text{dans} \quad \Gamma(M \otimes \Gamma(N));$$

d'après le théorème III.2, on a un homomorphisme de $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N))$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$, qui envoie $(x \otimes 1)^{[n]}$ sur $x^{[n]} \otimes 1$; d'où un homomorphisme de $\Gamma(M \times N)$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$, qui envoie $(x, y)^{[n]}$ sur $x^{[n]} \otimes 1$. D'après le théorème III.1, il existe donc un homomorphisme du module $M \times N$ dans le module $\mathcal{E}(\Gamma(M) \otimes \Gamma(N))$, soit β_1, défini par

$$\beta_1(x, y) = \sum_{n \geq 0} (x^{[n]} \otimes 1)\, T^n;$$

il existe de même un homomorphisme β_2 du module $M \times N$ dans le module $\mathcal{E}(\Gamma(M) \otimes \Gamma(N))$ tel que

$$\beta_2(x, y) = \sum_{m \geq 0} (1 \otimes y^{[m]})\, T^m.$$

Soit β la « somme », au sens de la théorie des modules, des applications β_1 et β_2; la loi abélienne de $\mathcal{E}(\Gamma(M) \otimes \Gamma(N))$ étant notée multiplicativement, on a en fait $\beta = \beta_1 \beta_2$ et

$$\beta(x, y) = \left(\sum_{n \geqq 0} (x^{[n]} \otimes 1) T^n\right)\left(\sum_{m \geqq 0} (1 \otimes y^{[m]}) T^m\right)$$
$$= \sum_{m, n \geqq 0} (x^{[n]} \otimes y^{[m]}) T^{m+n}.$$

En réutilisant le théorème III.1, on en déduit l'existence d'un homomorphisme d'algèbres

$$\varphi : \quad \Gamma(M \times N) \to \Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$$

tel que

$$\varphi((x, y)^{[p]}) = \sum_{m+n=p} x^{[n]} \otimes y^{[m]}.$$

b. On définit maintenant un homomorphisme

$$\psi : \quad \Gamma(M) \otimes \Gamma(N) \to \Gamma(M \times N).$$

Les injections canoniques $M \to M \times N$ et $N \to M \times N$ se prolongent en homomorphismes d'algèbres

$$\psi_M : \quad \Gamma(M) \to \Gamma(M \times N) \qquad \text{et} \qquad \psi_N : \quad \Gamma(N) \to \Gamma(M \times N).$$

Si $r \in \Gamma(M)$ et $s \in \Gamma(N)$, on pose

$$\psi(r \otimes s) = \psi_M(r)\, \psi_N(s).$$

On définit ainsi un homomorphisme de modules, ψ, de $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$ dans $\Gamma(M \times N)$. On vérifie immédiatement que ψ est aussi un homomorphisme d'algèbres.

c. On vérifie que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ sont des applications identiques.

1° Partons d'un générateur $(x, y)^{[n]}$ de $\Gamma(M \times N)$. On a

$$\psi \circ \varphi((x, y)^{[n]}) = \psi\left(\sum_{i=0}^{n} x^{[i]} \otimes y^{[n-i]}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (x, 0)^{[i]} (0, y)^{[n-i]} = (x, y)^{[n]}.$$

2° Partons d'un générateur $x^{[m]} \otimes y^{[n]}$ de $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$. On a

$$\varphi \circ \psi(x^{[m]} \otimes y^{[n]}) = \varphi((x, 0)^{[m]} (0, y)^{[n]})$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^{[i]} 0^{[j]} \otimes 0^{[m-i]} y^{[n-j]} = x^{[m]} \otimes y^{[n]}$$

(car seul n'est pas nul le terme pour lequel $i = m$ et $j = 0$).

Le théorème est démontré.

Remarques. — *a.* L'algèbre $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N)$, produit tensoriel de deux algèbres graduées, est canoniquement bigraduée. Il en est donc de même pour $\Gamma(M \times N)$. Pour p et $q \geqq 0$, on désignera par $\Gamma_{p,q}(M \times N)$ le sous-module de $\Gamma(M \times N)$ qui, par l'isomorphisme canonique, correspond à $\Gamma_p(M) \otimes \Gamma_q(N)$. Comme cet isomorphisme conserve visiblement les degrés, la structure graduée ordinaire de $\Gamma(M \times N)$ se retrouve ainsi

$$\Gamma_n(M \times N) = \bigoplus_{p+q=m} \Gamma_{p,q}(M \times N).$$

b. On étendrait aisément tous ces résultats au cas d'un module produit d'un nombre fini quelconque de modules.

10. Lien avec les opérateurs de dérivation divisée. — Soient M et N deux A-modules. Pour tout $x \in M$ et tout entier $n \geqq 0$, on a défini l'opérateur de dérivation divisée $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ du module $\mathfrak{L}(M, N)$ des lois polynomes sur le couple (M, N). Nous désignons par $\mathcal{O}$ l'algèbre (commutative) engendrée par ces opérateurs dans l'anneau des endomorphismes de $\mathfrak{L}(M, N)$.

Proposition III.5. — *Il existe un homomorphisme d'algèbres (et un seul) de l'algèbre* $\Gamma(M)$ *dans l'algèbre* $\mathcal{O}$, *qui envoie* $x^{[n]}$ *sur* $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$.

L'unicité est évidente. Pour l'existence, il suffit de vérifier que les $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$ vérifient les relations structurales suivantes :

1° $\dfrac{\partial^{[0]}}{\partial x^{[0]}} = \varepsilon_{\mathfrak{L}(M,N)}$.

Cette relation est évidente par définition même.

2° $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial (\lambda x)^{[n]}} = \lambda^n \dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$.

Cette relation vient de ce que $\left(\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}} f\right)(m) = D^n f(m, x)$ et de ce que $D^n f(m, m')$ est homogène de degré n par rapport à m'.

3° $((m, n)) \dfrac{\partial^{[m+n]}}{\partial x^{[m+n]}} = \dfrac{\partial^{[m]}}{\partial x^{[m]}} \dfrac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}$.

Cette relation est une partie de la « formule de Taylor » (chap. II, § 5).

4° $\dfrac{\partial^{[n]}}{\partial (x+y)^{[n]}} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\partial^{[k]}}{\partial x^{[k]}} \dfrac{\partial^{[n-k]}}{\partial y^{[n-k]}}$.

Cette formule constitue la proposition II.8.

La proposition est démontrée.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE COMBINÉE DES LOIS POLYNOMES ET DES ALGÈBRES DE PUISSANCES DIVISÉES.

1. LOIS POLYNOMES UNIVERSELLES SUR UN MODULE. — Soient M un A-module et n un entier $\geqq 0$. Pour toute algèbre R, désignons par $\gamma_{\mathrm{R}}^{[n]}$ l'application de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ dans $\Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R})$ définie par $\gamma_{\mathrm{R}}^{[n]}(z) = z^{[n]}$ ($z \in \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$). En composant $\gamma_{\mathrm{R}}^{[n]}$ avec l'application canonique ω_{R} de $\Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R})$ dans $\Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}$ définie par le théorème III.2 du chapitre précédent, on obtient une application de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ dans $\Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}$, que nous notons $l_{n,\mathrm{R}}$ $(= \omega_{\mathrm{R}} \circ \gamma_{\mathrm{R}}^{[n]})$.

PROPOSITION (ET DÉFINITION) IV.1. — *La donnée, pour toute algèbre* R, *de l'application* $l_{n,\mathrm{R}} : \mathrm{M} \otimes \mathrm{R} \to \Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}$ *détermine une loi polynome homogène et de degré* n *sur le couple* $(\mathrm{M}, \Gamma_n(\mathrm{M}))$. *La loi polynome* $l_n \in \mathfrak{P}_n(\mathrm{M}, \Gamma_n(\mathrm{M}))$ *ainsi définie s'appelle la* loi polynome universelle de degré n *sur le module* M.

Si la donnée des $l_{n,\mathrm{R}}$ détermine une loi polynome sur le couple $(\mathrm{M}, \Gamma_n(\mathrm{M}))$, elle sera bien homogène de degré n. En effet, si $z \in \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ et si $r \in \mathrm{R}$, on aura, en se reportant à la définition de ω_{R}

$$l_{n,\mathrm{R}}(zr) = \omega_{\mathrm{R}}((zr)^{[n]}) = \omega_{\mathrm{R}}(z^{[n]})\, r^n = l_{n,\mathrm{R}}(z)\, r^n.$$

Il reste à montrer, pour tout homomorphisme d'algèbres $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{M} \otimes \mathrm{R} & \xrightarrow{l_{n,\mathrm{R}}} & \Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R} \\
{\scriptstyle \varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\Gamma_n(\mathrm{M})} \otimes u} \\
\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}' & \xrightarrow{l_{n,\mathrm{R}'}} & \Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}'
\end{array}$$

Or, pour voir cela, il suffit de coupler le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{M} \otimes \mathrm{R} & \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{R}}^{[n]}} & \Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}) \\
{\scriptstyle \varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u)} \\
\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}' & \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{R}'}^{[n]}} & \Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}')
\end{array}$$

[qui est commutatif d'après la définition même de l'application $\Gamma(\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u)$] avec le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}) & \xrightarrow{\omega_{\mathrm{R}}} & \Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R} \\
{\scriptstyle \Gamma(\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\Gamma_n(\mathrm{M})} \otimes u} \\
\Gamma_n(\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}') & \xrightarrow{\omega_{\mathrm{R}'}} & \Gamma_n(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{R}'
\end{array}$$

dont la commutativité a été démontrée à la fin du paragraphe 7 du précédent chapitre.

Cela étant, pour tout module N et toute application linéaire φ_n de $\Gamma_n(M)$ dans N, l'application composée $f_R = (\varphi_n \otimes \varepsilon_R) \circ l_{n,R}$ de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ définit une loi polynome f, homogène de degré n, sur le couple (M, N); f n'est autre que la composée $\varphi_n \circ l_n$ de la loi polynome $l_n \in \mathcal{P}_n(M, \Gamma_n(M))$ et de la loi polynome homogène de degré 1 : $\varphi_n \in \mathcal{P}_1(\Gamma_n(M), N)$. Nous allons montrer qu'on obtient de cette manière *tous* les éléments de $\mathcal{P}_n(M, N)$.

2. La factorisation canonique des lois polynomes homogènes.

Théorème IV.1. — *Soient* M *et* N *deux* A-*modules, n un entier* ≥ 0. *Il existe un isomorphisme canonique entre les deux modules* $\mathcal{P}_n(M, N)$ *et* $\mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$, *tel que si* $f_n \in \mathcal{P}_n(M, N)$ *et* $\varphi_n \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ *se correspondent, f_n soit la loi composée de la loi universelle* $l_n \in \mathcal{P}_n(M, \Gamma_n(M))$ *et de la loi linéaire* $\varphi_n : f_n = \varphi_n \circ l_n$.

S'il existe une correspondance bijective entre les $f_n \in \mathcal{P}_n(M, N)$ et les $\varphi_n \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ qui soit synonyme de « $f_n = \varphi_n \circ l_n$ », cette correspondance sera bien un isomorphisme de modules, en vertu du fait, mentionné au chapitre I, qu'une loi polynome de la forme $g \circ f$ dépend linéairement de g. Il reste à montrer l'existence de cette correspondance. Autrement dit, il faut montrer que l'application de $\mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ dans $\mathcal{P}_n(M, N)$ qui, à φ_n, associe $f_n = \varphi_n \circ l_n$, est à la fois injective et surjective.

Nous commençons par expliciter la façon dont opère la loi polynome $f_n = \varphi_n \circ l_n$. Soit R une algèbre et soit

$$z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p \in M \otimes R.$$

On a

$$z^{[n]} = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} (x_1 \otimes r_1)^{[k_1]} \ldots (x_p \otimes r_p)^{[k_p]},$$

$$l_{n,R}(z) = \omega_R(z^{[n]}) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]} \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Enfin,

$$f_{n,R}(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \varphi_n(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Il en résulte que les éléments $y_{k_1,\ldots,k_p}$ de N définis par le théorème I.1 sont égaux, respectivement, à $\varphi_n(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]})$. Or, si $f_n = 0$, tous les $y_{k_1,\ldots,k}$ sont nuls d'après leur unicité; quels que soient p et les x_i on a donc

$$\varphi_n(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) = 0;$$

mais comme les $x_1^{[k_1]}\dots x_p^{[k_p]}$ engendrent linéairement $\Gamma_n(M)$, on a $\varphi_n = 0$. Autrement dit, l'application $\varphi_n \to f_n = \varphi_n \circ l_n$ est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit donc f_n un élément de $\mathcal{P}_n(M, N)$. Pour $x_1, \dots, x_p \in M$, soient $y_{k_1,\dots,k_p}$ les éléments de N qui leur correspondent d'après le théorème I.1. D'après la proposition I.1, on peut supposer que $k_1 + \dots + k_p = n$. On sait que $y_{k_1,\dots,k_p}$ est le coefficient de $T_1^{k_1}\dots T_p^{k_p}$ dans $f_{A(T_1,\dots,T_p)}(x_1 \otimes T_1 + \dots + x_p \otimes T_p)$. D'après la remarque qui suit la proposition II.5 (chap. II, § 7), on a donc

$$y_{k_1,\dots,k_p} = \left(\frac{\partial^{[k_1]}}{\partial x_1^{[k_1]}}\cdots\frac{\partial^{[k_p]}}{\partial x_p^{[k_p]}} f\right)(0).$$

Or, d'après la proposition III.5 (chap. III, § 10), il existe une application linéaire θ_n de $\Gamma_n(M)$ dans $\mathcal{O}$ telle que

$$\theta_n(x_1^{[k_1]}\dots x_p^{[k_p]}) = \frac{\partial^{[k_1]}}{\partial x_1^{[k_1]}}\cdots\frac{\partial^{[k_p]}}{\partial x_p^{[k_p]}}.$$

Si, pour $f \in \mathcal{P}(M, N)$, ρ_f est l'application linéaire de $\mathcal{O}$ dans N définie par $\Delta \to (\Delta f)(0)$ $(\Delta \in \mathcal{O})$, alors l'application $\varphi_n = \rho_{f_n} \circ \theta_n$ de $\Gamma_n(M)$ dans N est linéaire, et l'on a

$$\varphi_n(x_1^{[k_1]}\dots x_p^{[k_p]}) = y_{k_1,\dots,k_p}.$$

Il résulte alors du calcul fait plus haut qu'on a

$$f_n = \varphi_n \circ l_n.$$

Le théorème est démontré.

3. Étude complémentaire des lois polynomes non nécessairement homogènes. — Si $f \in \mathcal{P}(M, N)$ est une loi polynome quelconque, elle est la somme localement finie de ses composantes homogènes f_n. A chaque $f_n \in \mathcal{P}_n(M, N)$ correspond, par le théorème précédent, une application linéaire

$$\varphi_n \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N),$$

et la suite des φ_n définit une application linéaire φ de $\Gamma(M)$ dans N.

Réciproquement, la donnée d'une application linéaire φ de $\Gamma(M)$ dans N équivaut à la donnée d'une suite de φ_n, donc d'une suite de f_n; mais il n'y a aucune raison pour que la série formée avec ces f_n soit localement finie : la preuve, c'est que la suite des φ_n, donc celle des f_n, peut être choisie arbitrairement. Il y a donc lieu de caractériser les applications linéaires de $\Gamma(M)$ dans N qui déterminent une loi polynome.

Pour tout sous-module M′ de M, nous désignons par $\Gamma'(M')$ la sous-algèbre graduée de $\Gamma(M)$ qui est l'image de l'application canonique $\Gamma(M') \to \Gamma(M)$ prolongeant l'injection $M' \to M$. Autrement dit, $\Gamma'(M')$

est la sous-algèbre de $\Gamma(M)$ engendrée par les éléments $x'^{[n]}$ $(n \geqq 0$, $x' \in M' \subset M)$.

Pour tout module N, nous désignons par $\mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$ le module des applications linéaires φ de $\Gamma(M)$ dans N telles que, pour tout sous-module M′ *de type fini* de M, la restriction de φ à $\Gamma_n(M')$ soit nulle, sauf pour un nombre fini de degrés n. Alors :

Proposition IV.2. — *Pour tout couple* M, N *de* A-*modules, il existe un isomorphisme canonique entre les modules* $\mathcal{P}(M, N)$ *et* $\mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$, *de telle sorte que : si* $f \in \mathcal{P}(M, N)$ *et* $\varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$ *se correspondent par cet isomorphisme, alors, pour tout* $n \geqq 0$, *la composante homogène* f_n *de* f *et la restriction* φ_n *de* φ *à* $\Gamma_n(M)$ *sont liés par l'isomorphisme canonique résultant du théorème* IV.1.

1° Soient $f \in \mathcal{P}(M, N)$, f_n sa composante homogène de degré n, φ_n l'application linéaire de $\Gamma_n(M)$ dans N définie par f_n, φ l'application linéaire de $\Gamma(M)$ dans N définie par les φ_n. Il faut montrer que

$$\varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(M), N).$$

Soit M′ un sous-module de type fini de M, engendré par des éléments $x_1, \ldots, x_p$. Il faut montrer que

$$\varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) = 0 \qquad \text{pour} \quad k_1 + \ldots + k_p \text{ suffisamment grand.}$$

Or, cet élément de N est le coefficient de $T_1^{k_1} \ldots T_p^{k_p}$ dans le polynome, à coefficients dans N, $f(x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_p \otimes T_p)$. Comme le degré total de ce polynome est fini, la propriété à vérifier est évidente.

2° Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$. Soit $f_n = \varphi_n \circ l_n$. Soit

$$z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p \in M \otimes R.$$

On a

$$f_n(z) = \sum_{k_1 + \ldots + k_p = n} \varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Par hypothèse, $\varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]})$ est nul pour $k_1 + \ldots + k_p$ assez grand; donc $f_n(z) = 0$ pour n assez grand. La sommation $\sum_n f_n$ étant, ainsi, localement finie, elle définit bien une loi polynome f, laquelle est bien associée à φ. La proposition est démontrée.

Formule de Taylor générale. — Si

$$f \in \mathcal{P}(M, N) \qquad \text{et} \qquad \varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$$

sont associées, si R est une algèbre et si

$$z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p \in M \otimes R,$$

on a

$$f_{\mathrm{R}}(z) = \sum_{k_1, \dots, k_p \geqq 0} \varphi(x_1^{[k_1]} \dots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \dots r_p^{k_p}.$$

Cette puissante formule, qu'on peut appeler la « *formule de Taylor générale* », contient en puissance toute la théorie des lois polynomes. Elle peut s'écrire aussi

$$f_{\mathrm{R}}(z) = \sum_{n \geqq 0} (\varphi_n \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}})\, \omega_{\mathrm{R}}\, z^{[n]}.$$

Nous terminerons ce paragraphe par la remarque suivante. Soient M, M′, N, N′ quatre A-modules, et des applications linéaires $\theta : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ et $\psi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$. On en déduit canoniquement un homomorphisme

$$\mathfrak{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathfrak{P}(\mathrm{M}', \mathrm{N}')$$

de la manière suivante : à $f \in \mathfrak{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ ont fait correspondre

$$f' = \psi \circ f \circ \theta \in \mathfrak{P}(\mathrm{M}', \mathrm{N}').$$

On définit également un homomorphisme

$$\mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}), \mathrm{N}) \to \mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}'), \mathrm{N}')$$

comme suit : à $\varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}), \mathrm{N})$ on fait correspondre

$$\varphi' = \psi \circ \varphi \circ \Gamma(\theta)$$

(nous verrons ci-après que φ' est bien dans $\mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}'), \mathrm{N}')$. Alors :

PROPOSITION IV.3. — *Étant donnés quatre modules* M, M′, N, N′ *et des applications linéaires* $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ *et* $\mathrm{N} \to \mathrm{N}'$, *le diagramme suivant qui en résulte canoniquement est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(\mathrm{M}', \mathrm{N}') \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}), \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathcal{L}'(\Gamma(\mathrm{M}'), \mathrm{N}')
\end{array}$$

Avec les notations précédentes, il faut montrer que si φ est associée à f, alors φ' est associée à f'. Or, si

$$z' = x'_1 \otimes r_1 + \dots + x'_p \otimes r_p$$

appartient à $\mathrm{M}' \otimes \mathrm{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'_{\mathrm{R}}(z') &= \sum_{k_1, \dots, k} \psi \circ \varphi((\theta x'_1)^{[k_1]} \dots (\theta x'_p)^{[k_p]}) \otimes r_{r_1}^{k_1} \dots r_p^{k_p} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_p} \psi \circ \varphi \circ \Gamma(\theta)\, (x'^{[k_1]}_1 \dots x'^{[k_p]}_p) \otimes r_1^{k_1} \dots r_p^{k_p}. \end{aligned}$$

C. Q. D. F.

4. Détermination d'une loi polynome sur un couple (M, N) par sa restriction à E (M). — Nous reprenons les notations du chapitre I (§ 3). Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble des applications f de E (M) dans E (N) qui « commute avec les spécialisations de E (A) dans lui-même », c'est-à-dire telles que, pour toute spécialisation $u : \mathrm{E}(\mathrm{A}) \to \mathrm{E}(\mathrm{A})$, on ait

$$(\varepsilon_{\mathrm{N}} \otimes u) \circ f = f \circ (\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u).$$

Nous allons montrer que tout élément f de $\mathfrak{T}$ est la restriction à E (M) d'une loi polynome sur le couple (M, N).

Il est clair que $\mathfrak{T}$ est un sous-module du module des applications de E (M) dans E (N). Soit $\mathrm{Z} \in \mathrm{E}(\mathrm{M})$ et soit T une indéterminée qui ne figure pas dans Z. Soient x un élément de M et n un entier $\geqq 0$. Nous notons $(\Delta_{x[n]} f)(\mathrm{Z})$ le coefficient [élément de E (N)] de T^n dans $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T})$; il ne dépend pas du choix de l'indéterminée T.

L'application $\Delta_{x[n]} f : \mathrm{E}(\mathrm{M}) \to \mathrm{E}(\mathrm{N})$ ainsi définie appartient encore à $\mathfrak{T}$. En effet, si u est une spécialisation de E (A) dans lui-même, on peut choisir T de manière qu'il ne figure ni dans Z ni dans $(\varepsilon_{\mathrm{N}} \otimes u)\,\mathrm{Z}$, que nous notons $u\mathrm{Z}$. Le coefficient de T^n dans $f(u\mathrm{Z})$ s'obtient alors en transformant par u le coefficient de T^n dans $f(\mathrm{Z})$, donc $\Delta_{x[n]} f$ « commute » bien avec les spécialisations.

L'application $\Delta_{x[n]} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ définie par $f \to \Delta_{x[n]} f$ est un endomorphisme. Ces opérateurs ont les propriétés suivantes :

1° $\Delta_{x[0]} = \varepsilon_{\mathfrak{T}}$. On voit cela en faisant la spécialisation $\mathrm{T} \to 0$ dans $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T})$.

2° $\Delta_{(\lambda x)[n]} = \lambda^n \Delta_{x[n]}$: On voit cela en observant que $f(\mathrm{Z} + \lambda x \otimes \mathrm{T})$ se déduit de $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T})$ par la spécialisation $\mathrm{T} \to \lambda\mathrm{T}$.

3° $\Delta_{x[n]} \Delta_{x[m]} = ((m, n))\, \Delta_{x[m+n]}$: Considérons, pour cela, $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T} + x \otimes \mathrm{T}')$, où T et T′ sont des indéterminées distinctes qui ne figurent pas dans Z. Le coefficient de $\mathrm{T}^n \mathrm{T}'^m$ est celui de T^n dans $(\Delta_{x[m]} f)(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T})$, c'est-à-dire $(\Delta_{x[n]} \Delta_{x[m]} f)(\mathrm{Z})$. Mais $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T} + x \otimes \mathrm{T}')$ se déduit de $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T})$ par la spécialisation $\mathrm{T} \to \mathrm{T} + \mathrm{T}'$, d'où le résultat.

4° Pour x et $y \in \mathrm{M}$,

$$\Delta_{(x+y)[n]} = \sum_{k=0}^{n} \Delta_{x[k]} \Delta_{y[n-k]}.$$

Considérons, en effet, $f(\mathrm{Z} + x \otimes \mathrm{T} + y \otimes \mathrm{T}')$ et cherchons le coefficient de $\mathrm{T}^k \mathrm{T}'^{n-k}$. Par un raisonnement analogue à celui de 3°, on voit qu'il est égal à $(\Delta_{x[k]} \Delta_{y[n-k]} f)(\mathrm{Z})$ (et l'on observe, en passant, que deux opérateurs tels que $\Delta_{x[n]}$ et $\Delta_{y[m]}$ commutent entre eux). En sommant pour $k = 0, \ldots, n$, on obtient la somme des coefficients des termes de degré total n en T et T′. On aurait eu le même résultat en faisant d'abord la spécialisation $T' \to T$ et en cherchant ensuite le coefficient de T^n dans l'expression obtenue, égale à $f(Z + (x+y) \otimes T)$; on aurait obtenu $\Delta_{(x+y)^{[n]}} f(Z)$.

C. Q. F. D.

Soit $\mathcal{O}$ l'algèbre d'opérateurs de $\mathfrak{T}$ engendrée par les $\Delta_{x^{[n]}}$ ($x \in M$, $n \geqq 0$). On a vu que $\mathcal{O}$ était commutative. Les relations 1° à 4° précédentes montrent alors qu'il existe un homomorphisme d'algèbres Δ de $\Gamma(M)$ dans $\mathcal{O}$, telle que

$$\Delta(x^{[n]}) = \Delta_{x^{[n]}}.$$

On vérifie trivialement que le coefficient de $T_1^{k_1} \dots T_p^{k_p}$ dans $f(Z + x_1 \otimes T_1 + \dots + x_p \otimes T_p)$ ($T_1, \dots, T_p$ ne figurant pas dans Z) est égal à $(\Delta_{x_1^{[k_1]}} \dots \Delta_{x_p^{[k_p]}} f)(Z)$. En particulier, le coefficient de $T_1^{k_1} \dots T_p^{k_p}$ dans $f(x_1 \otimes T_1 + \dots + x_p \otimes T_p)$ est $(\Delta x_1^{[k_1]} \dots x_p^{[k_p]}) f)(0)$. Pour f donnée, soit φ l'application linéaire de $\Gamma(M)$ dans N définie par

$$\gamma \to (\Delta(\gamma) f)(0).$$

Alors, on a

$$f(x_1 \otimes T_1 + \dots + x_p \otimes T_p) = \sum_{k_1, \dots, k_p} \varphi(x_1^{[k_1]} \dots x_p^{[k_p]}) \otimes T_1^{k_1} \dots T_p^{k_p}.$$

Il est clair que $\varphi \in \mathcal{L}'(\Gamma(M), N)$. D'autre part, la connaissance de $f(x_1 \otimes T_1 + \dots + x_p \otimes T_p)$ quels que soient p et les x_i détermine f, car par la spécialisation $T_i \to P_i$ on peut alors obtenir $f(x_1 \otimes P_1 + \dots + x_p \otimes P_p)$. On voit donc que f est la restriction à E (M) de la loi polynome associée à φ.

C. Q. F. D.

Ainsi :

Proposition IV.4. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de* E (M) *dans* E (N) *soit la restriction à* E (M) *d'une loi polynome sur le couple* (M, N) *est que, pour toute spécialisation u de* E (A) *dans lui-même, le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E(M) & \xrightarrow{f} & E(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_M \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_N \otimes u} \\ E(M) & \xrightarrow{f} & E(N) \end{array}$$

5. Application du théorème IV.1, à l'étude de l'algèbre des puissances divisées d'un module libre. — On sait que si M est un module libre de dimension finie p, de base $e_1, \dots, e_p$, le module $\mathfrak{T}(M, N)$ est isomorphe au module $N(T_1, \dots, T_p)$. De façon précise, une loi polynome f induit une application de $M(T_1, \dots, T_p)$ dans $N(T_1, \dots, T_p)$,

et l'on peut identifier f avec le polynome, à coefficients dans N, $f(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_p \otimes T_p)$. Si f est homogène de degré n, posons

$$f(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_p \otimes T_p) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} a_{k_1,\ldots,k_p} \otimes T_1^{k_1} \ldots T_p^{k_p}.$$

Pour déterminer la loi polynome f, il suffit de se donner les coefficients $a_{k_1,\ldots,k_p}$, le choix de cette donnée n'étant soumis à aucune restriction. Or, une telle loi détermine une application linéaire φ de $\Gamma_n(M)$ dans N, telle que

$$\varphi(e_1^{[k_1]} \ldots e_p^{[k_p]}) = a_{k_1,\ldots,k_p},$$

En particulier, si $N = A$, on voit qu'on peut toujours trouver une forme linéaire φ sur $\Gamma_n(M)$ qui prenne sur les éléments $e_1^{[k_1]} \ldots e_p^{[k_p]}$ $(k_1 + \ldots + k_p = n)$ des valeurs arbitrairement données. Cela prouve que ces éléments forment une famille libre dans $\Gamma_n(M)$. Comme, d'autre part, il est clair qu'ils engendrent $\Gamma_n(M)$, ils en forment une base.

Il est aisé d'étendre ce résultat au cas d'un module libre de dimension quelconque. Supposons que M admette une base $(e_i)_{i\in I}$. Il est évident que les éléments de $\Gamma_n(M)$ du type $e_{i_1}^{[k_1]} \ldots e_{i_h}^{[k_h]}$ $(k_1 + \ldots + k_h = n)$ engendrent $\Gamma_n(M)$. Montrons que cette famille est libre. Il suffit de montrer que chacune des sous-familles obtenues en ne faisant varier les indices i que dans une partie finie de I est libre. Supposons que cette partie ait p éléments, que nous notons 1, ..., p. Soient M_p le sous-module de M engendré par $e_1, \ldots, e_p$; M'_p le sous-module supplémentaire engendré par les autres e_i; α la projection de M sur M_p parallèlement à M'_p. A tout $f^{(p)} \in \mathfrak{P}_n(M_p, A)$ on peut associer

$$f = f^{(p)} \circ \alpha \in \mathfrak{P}_n(M, A).$$

Alors,

$$f(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_p \otimes T_p) = f^{(p)}(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_p \otimes T_p).$$

Mais $f^{(p)}$ peut être défini par une donnée arbitraire de coefficients $a_{k_1,\ldots,k_p}$ comme ci-dessus. Alors, à f correspondra une forme linéaire φ sur $\Gamma_n(M)$, laquelle prendra sur l'élément $e_1^{[k_1]} \ldots e_p^{[k_p]}$ la valeur arbitrairement choisie $a_{k_1,\ldots,k_p}$. L'ensemble de ces éléments forme donc bien une famille libre

Théorème IV.2. — *Si le module* M *admet une base* $(e_i)_{i\in I}$, *le module* $\Gamma_n(M)$ *est libre pour tout* $n \geq 0$ *et il admet une base formée des éléments du type* $e_{i_1}^{[k_1]} \ldots e_{i_h}^{[k_h]}$ $(k_1 + \ldots + k_h = n)$.

Comme corollaire de ce théorème, nous avons :

Proposition IV.5. — *Si* M *est un module libre, l'application canonique de* $\Gamma(M)$ *dans* TS (M) (*cf.* chap. III, prop. 1, § 6) *est un isomorphisme.*

En effet, l'isomorphisme en question applique l'élément de base $e_{i_1}^{[k_1]} \ldots e_{i_h}^{[k_h]}$ de $\Gamma(M)$ sur le tenseur symétrique $e_{i_1}^{\otimes k_1} \star \ldots \star e_{i_h}^{\otimes k_h}$. Il suffit de montrer que ces tenseurs-là forment une base de TS (M).

On sait qu'une base de $T_n(M)$ est formée des monomes $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ formellement distincts. Si $t \in TS_n(M)$ on pourra donc écrire

$$t = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}.$$

Comme t est symétrique, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$\lambda_{i_1, \ldots, i_n} = \lambda_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(n)}}.$$

Pour simplifier, supposons que l'ensemble I ait été ordonné. Disons que le monome $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ est propre si $i_1 \leqq \ldots \leqq i_n$. A tout monome $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ est associé, par permutation de ses éléments, un monome propre et un seul. Deux monomes seront dits appartenir à la même classe s'ils sont associés au même monome propre. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des classes. Si $t \in TS_n(M)$,

$$t = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n},$$

tous les monomes d'une même classe K ont le même coefficient, que nous notons λ_K. On peut alors écrire

$$t = \sum_{K \in \mathcal{K}} \lambda_K e_K,$$

où e_K représente la somme de tous les monomes de la classe K. Les e_K sont des tenseurs symétriques; ils engendrent $TS_n(M)$ comme on vient de le voir; en outre, ils sont linéairement indépendants car ils sont formés de groupements tous disjoints d'éléments de base de $T_n(M)$. Ils forment donc une base de $TS_n(M)$.

Une classe K est définie par son monome propre. Un tel monome s'écrit :

$$e_{i_1}^{\otimes k_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_h}^{\otimes k_h} \qquad (i_1 < \ldots < i_h;\ k_1 + \ldots + k_h = n.$$

Les autres éléments de K sont tous les monomes *distincts* obtenus à partir de celui-là par des permutations. La somme de tous ces éléments est alors

$$e_K = e_{i_1}^{\otimes k_1} \star \ldots \star e_{i_h}^{\otimes k_h};$$

ces derniers éléments forment donc bien une base de $TS_n(M)$.

C. Q. F. D.

6. Lois polynomes et limites inductives. — Soit I un ensemble ordonné filtrant croissant, et soit $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de A-modules. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in I \times I$, tel que $\alpha \leqq \beta$, on suppose donné un homomorphisme $\varphi_\alpha^\beta : M_\alpha \to M_\beta$ de telle sorte que :

1° $\varphi_\alpha^\alpha = \varepsilon_{M_\alpha}$ pour tout α;

2° si $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma : \varphi_\alpha^\gamma = \varphi_\beta^\gamma \circ \varphi_\alpha^\beta$.

Dans ces conditions, on sait définir le module limite inductive des M_α, noté $M = \varinjlim M_\alpha$ qu'on peut caractériser de la manière suivante (et à un isomorphisme près) : pour tout $\alpha \in I$, il existe un homomorphisme $\varphi_\alpha : M_\alpha \to M$, avec :

a. $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta$ si $\alpha \leqq \beta$;

b. si $x_\alpha \in M_\alpha$ et $x_\beta \in M_\beta$, la relation « $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$ » équivaut à : « il existe $\gamma \geqq \alpha$ et β », et un $x_\gamma \in M_\gamma$, tel que

$$x_\gamma = \varphi_\alpha^\gamma(x_\alpha) = \varphi_\beta^\gamma(x_\beta);$$

c. le module M est la réunion des modules $\varphi_\alpha(M_\alpha)$.

Soit alors R un autre module. Les applications

$$\psi_\alpha^\beta : \quad M_\alpha \otimes R \to M_\beta \otimes R$$

définies, si $\alpha \leqq \beta$, par $\psi_\alpha^\beta = \varphi_\alpha^\beta \otimes \varepsilon_R$ vérifient les conditions 1° et 2°. D'autre part, on montre que les applications

$$\psi_\alpha : \quad M_\alpha \otimes R \to M \otimes R$$

définies par $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \otimes \varepsilon_R$ vérifient, par rapport aux ψ_α^β, les conditions *a*, *b*, *c* (*cf.* Bourbaki, *Algèbre*, t. II, 3e édition). On peut donc dire que *le module* $M \otimes R$ *est la limite inductive des modules* $M_\alpha \otimes R$ *relativement aux applications* ψ_α^β.

Nous supposons maintenant que R est une algèbre. Nous considérons, d'autre part, un autre module N et nous supposons donnée, pour tout $\alpha \in I$, une loi-polynome $f_\alpha \in \mathfrak{P}(M_\alpha, N)$, de telle sorte que, si $\alpha \leqq \beta$, on ait

$$f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta.$$

Nous allons en déduire un élément $f \in \mathfrak{P}(M, N)$.

On définit une application

$$f_R : \quad M \otimes R \to N \otimes R$$

de la manière suivante. Pour $z \in M \otimes R$, soit un $\alpha \in I$ et un $z_\alpha \in M_\alpha \otimes R$ tel que $z = \psi_\alpha(z_\alpha)$. On pose alors

$$f_R(z) = f_{\alpha, R}(z_\alpha).$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer que $f_R(z)$ ne dépend pas de α ni de z_α choisis. Soient donc aussi

$$\beta \in I \quad \text{et} \quad z_\beta \in M_\beta \in R \qquad \text{tels que} \quad z = \psi_\beta(z_\beta).$$

Par définition de la limite inductive, il existe $\gamma \in I$, $\gamma \geqq \alpha$ et β, tel que

$$\psi_\alpha^\gamma z_\alpha = \psi_\beta^\gamma z_\beta = z_\gamma.$$

Pour montrer que $f_{\alpha,\mathrm{R}}(z_\alpha) = f_{\beta,\mathrm{R}}(z_\beta)$, on va montrer que chacun d'eux est égal à $f_{\gamma,\mathrm{R}}(z_\gamma)$. Or, on a

$$f_{\alpha,\mathrm{R}}(z_\alpha) = f_{\gamma,\mathrm{R}} \circ (\varphi_\alpha^\gamma \otimes \varepsilon_\mathrm{R})(z_\alpha) = f_{\gamma,\mathrm{R}} \circ \psi_\alpha^\gamma(z_\alpha) = f_{\gamma,\mathrm{R}}(z_\gamma).$$

et de même pour $f_{\beta,\mathrm{R}}(z_\beta)$,

C. Q. F. D.

Maintenant, si $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ est un homomorphisme d'algèbres, on a

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{R}'}((\varepsilon_\mathrm{M} \otimes u)\, z) &= f_{\mathrm{R}'}((\varepsilon_\mathrm{M} \otimes u)(\varphi_\alpha \otimes \varepsilon_\mathrm{R})\, z_\alpha) = f_{\mathrm{R}'}((\varphi_\alpha \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}'})(\varepsilon_\mathrm{M} \otimes u)\, z_\alpha) \\ &= f_{\alpha,\mathrm{R}'}((\varepsilon_\mathrm{M} \otimes u)\, z_\alpha) = (\varepsilon_\mathrm{N} \otimes u) f_{\alpha,\mathrm{R}}(z_\alpha) = (\varepsilon_\mathrm{N} \otimes u) f_\mathrm{R}(z). \end{aligned}$$

La donnée des f_R pour toute algèbre R détermine donc une loi polynome f sur le couple (M, N). Par construction même on a $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha$; cette relation est même pratiquement la définition de f. Donc :

Proposition IV.6. — *Soit* M *un module, limite inductive d'une famille de modules* $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$. *Soient* φ_α^β $(\alpha \leqq \beta)$ *l'homomorphisme canonique de* M_α *dans* M_β *et* φ_α *l'homomorphisme canonique de* M_α *dans* M. *Soit, pour tout* $\alpha \in \mathrm{I}$, *une loi polynome* $f_\alpha \in \mathfrak{P}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{N})$, *de telle sorte que, si* $\alpha \leqq \beta$, *on ait*

$$f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta.$$

Alors, il existe une loi polynome et une seule $f \in \mathfrak{P}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *telle que, pour tout* $\alpha \in \mathrm{I}$, *on ait*

$$f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha.$$

Voici une application de cette proposition. Supposons que l'anneau A soit *principal* (donc intègre) et *infini*, et supposons que M soit un module libre sur A (toutes ces hypothèses sont vérifiées, en particulier si A est un corps infini). Pour simplifier, nous supposons aussi que N = A.

On sait que tout sous-module de M est libre et que tout sous-module de type fini est de dimension finie. On sait aussi (*cf.* chap. I, § 13) qu'une loi polynome f sur le couple (M, A) est parfaitement déterminée par l'application polynome induite $f_\mathrm{A} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Une telle application s'appellera *une fonction polynome sur* M. Alors :

Proposition IV.7. — *Soit* M *un module libre sur l'anneau principal infini* A. *Pour qu'une application* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{A}$ *soit une fonction polynome sur* M *il faut et il suffit que la restriction de f à tout sous-module* M′ *de dimension finie s'exprime, dans une base de* M′, *par une fonction polynome* (*au sens usuel*) *des coordonnées.*

La condition est nécessaire : Soit f une fonction polynome sur M; soit $\tilde{f}$ la loi polynome qu'elle détermine. Soit M′ un sous-module de type fini de M, de base $e_1, \ldots, e_p$. L'image par $\tilde{f}_{E(A)}$ de $e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_p \otimes T_p$ est un polynome $P(T_1, \ldots, T_p)$. Alors, si

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p \in M',$$

on aura

$$f(x) = P(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

La condition est suffisante : On sait que M est la limite inductive de ses sous-modules de dimension finie M_α, la relation d'ordre étant la relation d'inclusion $\subset$ et les applications φ_β^α ou φ_α étant des injections identiques. La donnée, pour chaque M_α, d'une fonction polynome des coordonnées détermine, par une réciproque évidente de la démonstration précédente, une fonction polynome sur M_α. Donc, si une application $f : M \to A$ possède la propriété de l'énoncé IV.7, chacune de ses restrictions f_α à M_α détermine une loi polynome $\tilde{f}_\alpha \in \mathcal{P}(M_\alpha, A)$. Ces $\tilde{f}_\alpha$ vérifient trivialement les conditions de la proposition IV.6. Ils déterminent donc, d'après cette proposition, une loi polynome $\tilde{f}$ sur (M, A) dont la restriction aux M_α est f_α. L'application de M dans A induite par $\tilde{f}$ est donc f.

C. Q. F. D.

Le résultat précédent permet de donner un exemple d'une loi polynome ayant une infinité de composantes homogènes non nulles. Prenons pour M un espace vectoriel réel de dimension infinie dénombrable, de base $(e_n)_{n \geq 0}$. Si $x = \sum_n x_n e_n \in M$, posons

$$f(x) = \sum_n x_n^n.$$

Cette fonction $f(x)$ vérifie les conditions de la proposition IV.7. Soit, en effet, M' un sous-espace de M, de base finie $e'_1, \ldots, e'_p$. Il existe un nombre N et des coefficients a_{ij} tels que

$$e'_i = \sum_{j=0}^{N} a_{ij} e_j \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Si $x' = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i \in M'$, on a

$$x' = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{p} x'_i \alpha_{ij} e_j.$$

Donc

$$f(x') = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{in} x'_i \right)^n,$$

ce qui est une fonction polynome en $x'_1, \ldots, x'_p$.

Or,

$$f(\lambda x) = \sum_n \lambda^n x_n^n.$$

Si $\tilde{f}$ est la loi polynome définie par f et si $\tilde{f}_n$ est sa composante homogène de degré n, alors la fonction polynome f_n induite par $\tilde{f}_n$ sur M est définie par $f_n(x) = x_n^n$. Donc,

$$f_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_n \neq 0 \quad \text{quel que soit } n.$$

7. Application à l'algèbre des puissances divisées d'une limite inductive.

Théorème IV.3. — *Soit un module* M, *limite inductive d'une famille de modules* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$. *Soient* φ_α^β $(\alpha \leqq \beta)$ *l'homomorphisme canonique de* M_α *dans* M_β *et* φ_α *l'homomorphisme canonique de* M_α *dans* M. *Alors, relativement aux homomorphismes* $\Gamma(\varphi_\alpha^\beta)$, *la limite inductive des modules* $\Gamma_n(M_\alpha)$ *est le module* $\Gamma_n(M)$, *et l'homomorphisme canonique de* $\Gamma_n(M_\alpha)$ *dans* $\Gamma_n(M)$ *est* $\Gamma(\varphi_\alpha)$.

Si $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, on a bien

$$\Gamma(\varphi_\alpha^\gamma) = \Gamma(\varphi_\beta^\gamma \varphi_\alpha^\beta) = \Gamma(\varphi_\beta^\gamma) \circ \Gamma(\varphi_\alpha^\beta).$$

Cela a donc un sens de parler de la limite inductive des $\Gamma_n(M_\alpha)$ relativement à ces homomorphismes. Désignons par G cette limite inductive, et soit ψ_α l'homomorphisme canonique de $\Gamma_n(M_\alpha)$ dans G.

Relativement à l'application $\Gamma(\varphi_\alpha) : \Gamma_n(M_\alpha) \to \Gamma_n(M)$, on a la relation :

$$\text{si } \alpha \leqq \beta, \qquad \text{alors } \Gamma(\varphi_\alpha) = \Gamma(\varphi_\beta) \circ \Gamma(\varphi_\alpha^\beta).$$

Il résulte d'une propriété universelle des limites inductives (facile à établir) qu'il existe alors un homomorphisme θ de G dans $\Gamma_n(M)$ tel que

$$\Gamma(\varphi_\alpha) = \theta \circ \psi_\alpha \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in I.$$

D'autre part, l'application linéaire $\psi_\alpha : \Gamma_n(M_\alpha) \to G$ détermine une loi polynome f_α sur le couple (M_α, G). Si $\alpha \leqq \beta$, la relation

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \circ \Gamma(\varphi_\alpha^\beta)$$

montre, en vertu de la proposition IV.3, que

$$f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta.$$

D'après la proposition IV.6, il existe donc

$$f \in \mathcal{P}_n(M, G) \qquad \text{tel que} \quad f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha.$$

A cet f correspond une application linéaire $\sigma : \Gamma_n(M) \to G$ qui, d'après la proposition IV.3, vérifie

$$\psi_\alpha = \sigma \circ \Gamma(\varphi_\alpha).$$

Il en résulte que

$$\Gamma(\varphi_\alpha) = \theta \circ \sigma \circ \Gamma(\varphi_\alpha) \qquad \text{et que} \qquad \psi_\alpha = \sigma \circ \theta \circ \psi_\alpha.$$

Comme tout élément de G est dans l'image d'un ψ_α, on voit que $\sigma \circ \theta = \varepsilon_G$. Si l'on montre que tout élément de $\Gamma_n(M)$ est dans l'image d'un $\Gamma(\varphi_\alpha)$, on aura de même $\theta \circ \sigma = \varepsilon_{\Gamma_n(M)}$. Dès lors, σ et τ seront inverses l'un de l'autre et réaliseront un isomorphisme entre G et $\Gamma_n(M)$. En identifiant alors G et $\Gamma_n(M)$, on aura $\psi_\alpha = \Gamma(\varphi_\alpha)$, et le théorème sera démontré.

Or, tout élément de $\Gamma_n(M)$ est une combinaison des puissances divisées d'un nombre fini d'éléments de M, soient $x_1, \ldots, x_p$. Puisque M est la limite inductive des M_α, il existe un $\alpha \in I$ et des éléments

$$x_{1,\alpha}, \ldots, x_{p,\alpha} \in M_\alpha \qquad \text{tels que} \quad x_i = \varphi_\alpha(x_{i,\alpha}) \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Il est alors clair que l'élément considéré de $\Gamma_n(M)$ est dans l'image de $\Gamma(\varphi_\alpha)$. C. Q. F. D.

8. Suites exactes au sens de Grothendieck. — Pour énoncer commodément nos résultats ultérieurs, il sera commode d'utiliser les notions suivantes.

Définition 1. — On appelle *suite exacte de type* I (au sens de Grothendieck) et l'on note

$$A \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{g} C$$

la donnée de trois ensembles A, B, C, de deux applications f_1 et f_2 de A dans B et d'une application g de B dans C, de telle sorte que :

1° g est surjectif.

2° quels que soient $y_1, y_2 \in B$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. $g(y_1) = g(y_2)$;
b. il existe $x \in A$ tel que $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$.

Définition 2. — On appelle *suite exacte de type* II (au sens de Grothendieck) et l'on note

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} C$$

la donnée de trois ensembles A, B, C, d'une application f de A dans B et de deux applications g_1 et g_2 de B dans C, de telle sorte que :

1° f est injectif;

2° f applique A sur l'ensemble des éléments y de B pour lesquels $g_1(y) = g_2(y)$.

Si A, B, C sont trois modules sur le même anneau et si les applications considérées sont des homomorphismes, on peut ramener les deux notions précédentes à celle de suite exacte au sens ordinaire.

Pour le type I : On vérifie immédiatement que la suite exacte

$$\mathrm{A} \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{B} \xrightarrow{g} \mathrm{C} \tag{I}$$

est *équivalente* à la suite exacte ordinaire

$$\mathrm{A} \xrightarrow{u} \mathrm{B} \times \mathrm{B} \xrightarrow{v} \mathrm{C} \longrightarrow 0, \tag{I'}$$

où u est définie par

$$u(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

et où v est définie par

$$v(x, y) = g(x) - g(y) \qquad (= g(x - y)).$$

D'autre part, la même suite (I) *entraîne* la suite exacte ordinaire

$$\mathrm{A} \xrightarrow{f_1 - f_2} \mathrm{B} \xrightarrow{g} \mathrm{C} \longrightarrow 0.$$

Pour le type II : La suite exacte

$$\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{C} \tag{II}$$

est, comme on le vérifie trivialement, *équivalente* à la suite exacte ordinaire

$$0 \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \xrightarrow{g_1 - g_2} \mathrm{C}. \tag{II'}$$

Revenons à la suite de type I précédente ou, ce qui revient au même, à la suite (I'). Si R est un autre module, on en déduit la suite exacte

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{R} \xrightarrow{u \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}}} (\mathrm{B} \times \mathrm{B}) \otimes \mathrm{R} \xrightarrow{v \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}}} \mathrm{C} \otimes \mathrm{R} \longrightarrow 0,$$

avec

$$(u \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}})(x \otimes r) = (f_1(x), f_2(x)) \otimes r$$

et

$$(v \otimes \varepsilon_{\mathrm{R}})((x, y) \otimes r) = g(x - y) \otimes r.$$

En identifiant de manière classique les deux modules $(\mathrm{B} \times \mathrm{B}) \otimes \mathrm{R}$ et $(\mathrm{B} \otimes \mathrm{R}) \times (\mathrm{B} \otimes \mathrm{R})$, on en déduit la suite exacte

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{R} \xrightarrow{u'} (\mathrm{B} \otimes \mathrm{R}) \times (\mathrm{B} \otimes \mathrm{R}) \xrightarrow{v'} \mathrm{C} \otimes \mathrm{R} \longrightarrow 0,$$

où les applications u' et v' sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} u'(x \otimes r) &= (f_1(x) \otimes r,\ f_2(x) \otimes r) \\ &= ((f_1 \otimes \varepsilon_R)(x \otimes r),\ (f_2 \otimes \varepsilon_R)(x \otimes r)) \end{aligned}$$

et, si z et $z' \in B \otimes R$, avec

$$z = \sum_i y_i \otimes r_i \qquad \text{et} \qquad z' = \sum_j y'_j \otimes r'_j,$$

$$\begin{aligned} v'(z, z') &= (v \otimes \varepsilon_R)\left(\sum_i (y_i, 0) \otimes r_i + \sum_j (0, y'_j) \otimes r'_j)\right) \\ &= \sum_i g(y_i) \otimes r_i - \sum_j g(y'_j) \otimes r'_j = (g \otimes \varepsilon_R)(z - z'). \end{aligned}$$

Autrement dit, d'après ce qui précède, de la suite exacte (I) on déduit la *suite exacte*

$$\text{(I}''\text{)} \qquad A \otimes R \underset{f_2 \otimes \varepsilon_R}{\overset{f_1 \otimes \varepsilon_R}{\rightrightarrows}} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes \varepsilon_R} C \otimes R.$$

Nous indiquons enfin une autre propriété liée à la suite (I). Soit un module D et soit h une *application* de B dans D telle que $h \circ f_1 = h \circ f_2$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[dl, dotted, "h'"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Soient y_1 et y_2 deux éléments de B tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Il existe donc $x \in A$ tel que

$$y_1 = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad y_2 = f_2(x)\,;$$

d'où

$$h(y_1) = h \circ f_1(x) = h \circ f_2(x) = h(y_2).$$

Il en résulte qu'il existe une application unique

$$h' : \quad C \to D \qquad \text{telle que} \quad h = h' \circ g.$$

9. Lois polynomes et suites exactes. — On considère trois A-modules M, M', N et un homomorphisme $\alpha : M \to M'$. A toute loi polynome $f' \in \mathcal{P}(M', N)$, on peut associer la loi polynome

$$f = f' \circ \alpha \in \mathcal{P}(M, N).$$

Nous poserons, dans ce paragraphe : $f = \tilde{\alpha}(f')$, ce qui définit une application linéaire

$$\tilde{\alpha} : \quad \mathcal{P}(M', N) \to \mathcal{P}(M, N)\,;$$

$\tilde{\alpha}$ est l'application canoniquement déduite de α, déjà considérée dans la proposition IV.3. Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME IV.4. — *Soient* M, M′, M″ *et* N *quatre* A-*modules. Soient* α_1 *et* α_2 *des homomorphismes de* M *dans* M′ *et* β *un homomorphisme de* M′ *dans* M″. *Alors, si la suite*

$$M \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M' \xrightarrow{\beta} M''$$

est exacte, la suite

$$\mathfrak{L}(M'', N) \xrightarrow{\tilde\beta} \mathfrak{L}(M', N) \underset{\tilde\alpha_2}{\overset{\tilde\alpha_1}{\rightrightarrows}} \mathfrak{L}(M, N)$$

est aussi exacte.

1° $\tilde\beta$ est injectif : Soit

$$f'' \in \mathfrak{L}(M'', N) \qquad \text{tel que} \quad \tilde\beta f'' = 0.$$

Pour toute algèbre R, on a donc

$$(\tilde\beta f'')_R = 0, \qquad \text{soit} \quad f''_R \circ (\beta \otimes \varepsilon_R) = 0.$$

Mais comme $\beta \otimes \varepsilon_R$ est une surjection de $M' \otimes R$ sur $M'' \otimes R$, c'est que $f''_R = 0$, d'où $f'' = 0$.

2° Exactitude en $\mathfrak{L}(M', N)$: Soit

$$f' \in \mathfrak{L}(M', N) \qquad \text{tel que} \quad \tilde\alpha_1 f' = \tilde\alpha_2 f';$$

Il faut montrer que f' est dans l'image de $\tilde\beta$. Pour tout $z \in M \otimes R$, on a

$$(\tilde\alpha_1 f')_R(z) = (\tilde\alpha_2 f')_R(z),$$

c'est-à-dire

$$f'_R \circ (\alpha_1 \otimes \varepsilon_R) = f'_R \circ (\alpha_2 \otimes \varepsilon_R).$$

Or, d'après le paragraphe précédent, la suite

$$M \otimes R \underset{\alpha_2 \otimes \varepsilon_R}{\overset{\alpha_1 \otimes \varepsilon_R}{\rightrightarrows}} M' \otimes R \xrightarrow{\beta \otimes \varepsilon_R} M'' \otimes R$$

est exacte; donc, d'après le dernier résultat de ce paragraphe, il existe une application f''_R et une seule de $M'' \otimes R$ dans $N \otimes R$ telle que $f'_R = f''_R \circ (\beta \otimes \varepsilon_R)$. Montrons que les f''_R déterminent une loi polynome sur le couple (M″, N).

Soit $u : R \to R'$ un homomorphisme d'algèbres. Soit z'' un élément de $M'' \otimes R$, nécessairement de la forme $(\beta \otimes \varepsilon_R)(z')$ avec $z' \in M' \otimes R$. On a

$$\begin{aligned} f''_{R'} \circ (\varepsilon_{M''} \otimes u)(z'') &= f''_{R'} \circ (\varepsilon_{M''} \otimes u) \circ (\beta \otimes \varepsilon_R)(z') = f''_{R'} \circ (\beta \otimes \varepsilon_{R'}) \circ (\varepsilon_{M'} \otimes u)(z') \\ &= f'_{R'} \circ (\varepsilon_{M'} \otimes u)(z') = (\varepsilon_N \otimes u) \circ f'_R(z') = (\varepsilon_N \otimes u) \circ f''_R(z''). \end{aligned}$$

La famille des applications f''_R définit donc bien une loi polynome $f'' \in \mathfrak{L}(M'', N)$, et l'on a

$$f' = f'' \circ \beta = \tilde\beta(f''),$$

C. Q. F. D.

Il reste à prouver, enfin, que $\tilde{\alpha}_1 \circ \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}_2 \circ \tilde{\beta}$. Or, il est clair que

$$\tilde{\alpha}_1 \circ \tilde{\beta} = \widetilde{\beta\alpha_1} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\alpha}_2 \circ \tilde{\beta} = \widetilde{\beta\alpha_2};$$

comme $\beta\alpha_1 = \beta\alpha_2$, le théorème est démontré.

10. Suites exactes et algèbres de puissances divisées. — Nous utiliserons le théorème précédent pour démontrer le

Théorème IV.5. — *Soient* M, M′, M″ *trois* A-*modules. Soient* α_1 *et* α_2 *des homomorphismes de* M *dans* M′ *et* β *un homomorphisme de* M′ *dans* M″. *Alors, si la suite*

$$M \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M' \xrightarrow{\beta} M''$$

est exacte, elle se prolonge aux algèbres de puissances divisées en suite exacte

$$\Gamma(M) \underset{\Gamma(\alpha_2)}{\overset{\Gamma(\alpha_1)}{\rightrightarrows}} \Gamma(M') \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(M'').$$

Pour prouver ce théorème, il suffit de démontrer, pour tout entier $n > 0$, l'exactitude de la suite

$$\Gamma_n(M) \underset{\Gamma(\alpha_2)}{\overset{\Gamma(\alpha_1)}{\rightrightarrows}} \Gamma_n(M') \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma_n(M'').$$

Or :

1° on voit trivialement que $\Gamma(\beta)$ est surjectif puisque β l'est;

2° il est évident que

$$\Gamma(\beta) \circ \Gamma(\alpha_1) = \Gamma(\beta) \circ \Gamma(\alpha_2),$$

autrement dit

$$\Gamma(\beta\alpha_1) = \Gamma(\beta\alpha_2),$$

car on sait que $\beta\alpha_1 = \beta\alpha_2$;

3° Il reste à établir que, si γ'_1 et $\gamma'_2 \in \Gamma_n(M')$ ont même image par $\Gamma(\beta)$, ils sont les images par $\Gamma(\alpha_1)$ et $\Gamma(\alpha_2)$ respectivement d'un même élément de $\Gamma_n(M)$. Pour cela, nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *La suite*

$$\Gamma_n(M) \xrightarrow{\Gamma(\alpha_1) - \Gamma(\alpha_2)} \Gamma_n(M') \xrightarrow{\quad \Gamma(\beta) \quad} \Gamma_n(M'') \xrightarrow{\qquad} 0$$

est exacte.

Le seul point non trivial à établir est que le noyau de $\Gamma(\beta)$ est inclus dans l'image de $\Gamma(\alpha_1) - \Gamma(\alpha_2)$. Or, pour tout module N, le théorème IV.4 nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L}_n(M'', N) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathfrak{L}_n(M', N) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2} \mathfrak{L}_n(M, N).$$

D'après la proposition IV.3 cette suite exacte se traduit, par isomorphisme, en suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}(\Gamma_n(M''), N) \xrightarrow{\circ\Gamma(\beta)} \mathcal{L}(\Gamma_n(M'), N) \xrightarrow{\circ[\Gamma(\alpha_1)-\Gamma(\alpha_2)]} \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N).$$

Appliquons ceci à la situation suivante. Soit G l'image de $\Gamma_n(M)$ dans $\Gamma_n(M')$ par l'application $\Gamma(\alpha_1) - \Gamma(\alpha_2)$, et prenons pour N le module $\Gamma_n(M')/G$. Soit $\varphi' \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M'), N)$ l'application-quotient canonique. Il est clair que l'image de φ' dans $\mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ par le diagramme précédent est nulle. Il existe donc

$$\varphi'' \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M''), N) \qquad \text{tel que} \quad \varphi' = \varphi'' \circ \Gamma(\beta).$$

Dès lors, le noyau de $\Gamma(\beta)$ est évidemment inclus dans le noyau de φ', c'est-à-dire dans l'image de $\Gamma(\alpha_1) - \Gamma(\alpha_2)$. Le lemme est démontré.

Soient alors γ'_1 et $\gamma'_2 \in \Gamma_n(M)$, ayant même image par $\Gamma(\beta)$:

$$\Gamma(\beta)(\gamma'_1 - \gamma'_2) = 0.$$

D'après le lemme, il existe $\gamma \in \Gamma_n(M)$ tel que

$$\gamma'_1 - \gamma'_2 = (\Gamma(\alpha_1) - \Gamma(\alpha_2))(\gamma).$$

Il existe alors un $\gamma' \in \Gamma_n(M')$ tel que

$$\gamma'_1 = \Gamma(\alpha_1)\gamma + \gamma' \qquad \text{et} \qquad \gamma'_2 = \Gamma(\alpha_2)\gamma + \gamma'.$$

Mais γ' s'exprime par une combinaison des puissances divisées d'un certain nombre d'éléments de M', soient $x'_1, \ldots, x'_p$. La relation triviale $\beta(x'_i) = \beta(x'_i)$ montre qu'à chaque x'_i on peut associer un $x_i \in M$ tel que

$$x'_i = \alpha_1(x_i) = \alpha_2(x_i).$$

Soit γ_1 l'élément de $\Gamma_n(M)$ obtenu en remplaçant, formellement, chaque x'_i par x_i dans l'expression de γ'. Alors, on a

$$\gamma' = \Gamma(\alpha_1)\gamma_1 = \Gamma(\alpha_2)\gamma_1$$

et donc aussi

$$\gamma'_1 = \Gamma(\alpha_1)(\gamma + \gamma_1) \qquad \text{et} \qquad \gamma'_2 = \Gamma(\alpha_2)(\gamma + \gamma_1).$$

Le théorème est démontré.

Nous donnerons de ce théorème l'application suivante. Soit la suite exacte (ordinaire)

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0.$$

On identifie N à un sous-module de M. Considérons les deux applications linéaires de $N \times M$ dans M définies respectivement par

$$\alpha_1(x, y) = y \qquad \text{et} \qquad \alpha_2(x, y) = x + y.$$

Alors, la suite

$$N \times M \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{q} P$$

est exacte. En effet, q est bien surjectif; si y et $y' \in M$ sont tels que $q(y) = q(y')$, il existe $x \in N$ tel que $y' - y = x$, de sorte que

$$y = \alpha_1(x, y) \qquad \text{et} \qquad y' = \alpha_2(x, y);$$

enfin, quel que soit $(x, y) \in N \times M$, on a

$$q\alpha_1(x, y) = q\alpha_2(x, y) \qquad (= q(y)).$$

Le théorème IV.5 nous permet donc d'écrire la suite exacte

$$\Gamma(N \times M) \underset{\Gamma(\alpha_2)}{\overset{\Gamma(\alpha_1)}{\rightrightarrows}} \Gamma(M) \xrightarrow{\Gamma(q)} \Gamma(P),$$

d'où l'on déduit la suivante :

$$\Gamma(N \times M) \xrightarrow{\Gamma(\alpha_2) - \Gamma(\alpha_1)} \Gamma(M) \xrightarrow{\Gamma(q)} \Gamma(P) \longrightarrow 0.$$

Le noyau de $\Gamma(q)$ est donc l'image de $\Gamma(N \times M)$ par l'application $\Gamma(\alpha_2) - \Gamma(\alpha_1)$. Un système de générateurs de ce noyau (en tant que module) est donc l'ensemble des éléments du type

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha_2)&((x_1, y_1)^{[k_1]} \ldots (x_p, y_p)^{[k_p]}) - \Gamma(\alpha_1)((x_1, y_1)^{[k_1]} \ldots (x_p, y_p)^{[k_p]}) \\ &= (x_1 + y_1)^{[k_1]} \ldots (x_p + y_p)^{[k_p]} - y_1^{[k_1]} \ldots y_p^{[k_p]} \qquad (x_i \in N,\ y_i \in M,\ k_i \geqq 0).\end{aligned}$$

Les termes en $y_1^{[k_1]} \ldots y_p^{[k_p]}$ s'éliminant, on reconnaît que tous ces éléments appartiennent à l'idéal I de $\Gamma(M)$ engendré par les éléments de type $x^{[n]}$ ($x \in N$, $n \geqq 1$). Mais il est clair que, réciproquement, I est inclus dans le noyau de $\Gamma(q)$. Donc :

Proposition IV.8. — *De toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0$$

on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Gamma(M) \xrightarrow{\Gamma(q)} \Gamma(P) \longrightarrow 0,$$

où I *est l'idéal de* $\Gamma(M)$ *engendré par les éléments de type* $x^{[n]}$, *avec* $x \in N$ *et* $n \geqq 1$.

11. Étude de $\mathfrak{P}(M, N)$ dans le cas ou M est un module-produit. — Nous nous proposons maintenant d'étudier les conséquences du théorème IV.1 pour les lois polynomes sur un couple (M, N), dans le cas où M est un module-produit : $M = M_1 \times M_2$.

Il existe une succession d'isomorphismes canoniques que nous écrivons ci-dessous et que nous expliquerons à leur suite :

α. $\mathcal{P}_n(M_1 \times M_2, N) \to \mathcal{L}(\Gamma_n(M_1 \times M_2), N)$;

β. $\mathcal{L}(\Gamma_n(M_1 \times M_2), N) \to \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{L}(\Gamma_k(M_1) \otimes \Gamma_{n-k}(M_2), N)$;

γ. $\mathcal{L}(\Gamma_r(M_1) \otimes \Gamma_s(M_2), N) \to \mathcal{L}(\Gamma_r(M_1), \mathcal{L}(\Gamma_s(M_2), N))$;

δ. $\mathcal{L}(\Gamma_r(M_1), \mathcal{L}(\Gamma_s(M_2), N)) \to \mathcal{L}(\Gamma_r(M_1), \mathcal{P}_s(M_2, N))$;

ε. $\mathcal{L}(\Gamma_r(M_1), \mathcal{P}_s(M_2, N)) \to \mathcal{P}_r(M_1, \mathcal{P}_s(M_2, N))$.

L'isomorphisme α résulte du théorème IV.1; β provient du théorème III.4 (chap. III, § 9), de la remarque *a* qui suit la démonstration de ce théorème, et de l'isomorphisme canonique entre les modules

$$\mathcal{L}\left(\bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma_k(M_1) \otimes \Gamma_{n-k}(M_2), N\right) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{L}(\Gamma_k(M_1) \otimes \Gamma_{n-k}(M_2), N);$$

γ est un isomorphisme classique; δ et ε résultent également du théorème IV.1.

On sait que

$$\mathcal{P}_n(M_1 \times M_2, N) = \bigoplus_{r+s=n} \mathcal{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N).$$

Nous allons démontrer la

Proposition IV.9. — *Si $r + s = n$, l'homomorphisme, $\beta \circ \alpha$ défini par le tableau précédent applique*

$$\mathcal{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N) \qquad \textit{sur} \quad \mathcal{L}(\Gamma_r(M_1) \otimes \Gamma_s(M_2), N).$$

Il revient au même de montrer que, par l'isomorphisme réciproque, un élément φ de $\mathcal{L}(\Gamma_r(M_1) \otimes \Gamma_s(M_2), N)$ correspond à une loi polynome f de bidegré (r, s).

Soit donc R une algèbre et un élément $z \in (M_1 \times M_2) \otimes R$, s'écrivant

$$z = (x_1, y_1) \otimes r_1 + \ldots + (x_p, y_p) \otimes r_p.$$

Nous allons, à l'aide de φ, calculer $f_R(z)$. On calcule d'abord $\omega_R(z^{[n]}) \in \Gamma_n(M_1 \times M_2, N) \otimes R$:

$$\omega_R(z^{[n]}) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} (x_1, y_1)^{[k_1]} \ldots (x_p, y_p)^{[k_p]} \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Puis, on transforme par isomorphisme les éléments de $\Gamma_n(M_1 \times M_2)$ en éléments de $\Gamma(M_1) \otimes \Gamma(M_2)$. On obtient

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \sum_{i_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{i_p=0}^{k_p} (x_1^{[i_1]} \ldots x_p^{[i_p]} \otimes y_1^{[k_1-i_1]} \ldots y_p^{[k_p-i_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

On a alors

$$f_R(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \sum_{i_1+\ldots+i_p=r} \varphi(x_1^{[i_1]}\ldots x_p^{[i_p]} \otimes y_1^{[k_1-i_1]}\ldots y_p^{[k_p-i_p]}) \otimes r_1^{k_1}\ldots r_p^{k_p}.$$

On reconnaît immédiatement que

$$f \in \mathfrak{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N).$$

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant expliciter l'isomorphisme

$$\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha : \quad \mathfrak{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N) \to \mathfrak{P}_r(M_1, \mathfrak{P}_s(M_2, N)).$$

Mais, pour ce faire, nous procéderons indirectement.

Soit une algèbre R. Pour tout $z_2 \in M_2 \otimes R$, on définit une application R-linéaire $\hat{z}_2$ de $\mathfrak{P}_s(M_2, N) \otimes R$ dans $N \otimes R$ en posant, pour $g \in \mathfrak{P}_s(M_2, N)$ et $r \in R$,

$$\hat{z}_2(g \otimes r) = g_R(z_2)\, r$$

(cette multiplication par r étant la multiplication scalaire dans le R-module $N \otimes R$). Pour un élément Z fixe de $\mathfrak{P}_s(M_2, N) \otimes R$, l'application $z_2 \to \hat{z}_2(Z)$ de $M_2 \otimes R$ dans $N \otimes R$ sera dénotée Z_R, de sorte que

$$\hat{z}_2(Z) = Z_R(z_2).$$

Si $Z = g_1 \otimes r_1 + \ldots + g_p \otimes r_p$, cela revient à poser

$$(g_1 \otimes r_1 + \ldots + g_p \otimes r_p)_R(z_2) = (g_1)_R(z_2)\, r_1 + \ldots + (g_p)_R(z_2)\, r_p.$$

On voit immédiatement que, si $r \in R$, on a

$$Z_R(z_2 r) = Z_R(z_2)\, r^s.$$

D'autre part, soit $u : R \to R'$ un homomorphisme d'algèbres. Alors

$$(\varepsilon_N \otimes u)(Z_R(z_2)) = \sum_{i=1}^{p} (\varepsilon_N \otimes u)\, g_i(z_2)\, ur_i = \sum_{i=1}^{p} g_i((\varepsilon_{M_2} \otimes u)\, z_2)\, ur_i$$
$$= ((\varepsilon_{\mathfrak{P}_s(M_2,N)} \otimes u)\, Z)_{R'}((\varepsilon_{M_2} \otimes u)\, z_2).$$

Nous considérons maintenant un élément

$$f \in \mathfrak{P}_r(M_1, \mathfrak{P}_s(M_2, N)).$$

Pour $z_1 \in M_1 \otimes R$ et $z_2 \in M_2 \otimes R$ posons

$$\tilde{f}_R(z_1, z_2) = (f_R(z_1))_R(z_2).$$

On définit ainsi une application $\tilde{f}_R$, qui applique le module

$$(M_1 \otimes R) \times (M_2 \otimes R) = (M_1 \times M_2) \otimes R \quad \text{dans} \quad N \otimes R.$$

Nous allons voir que la donnée des $\tilde{f}_R$ constitue une loi polynome

$$\tilde{f} \in \mathcal{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N).$$

Pour ce qui est des degrés, aucune difficulté; on a, en effet,

$$\tilde{f}_R(z_1\lambda, z_2\mu) = \tilde{f}_R(z_1, z_2)\lambda^r\mu^s \qquad (\lambda, \mu \in R).$$

Maintenant, soit $u : R \to R'$ un homomorphisme d'algèbres. On a

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{R'}((\varepsilon_{M_1} \otimes u)z_1, (\varepsilon_{M_2} \otimes u)z_2) &= (f_{R'}((\varepsilon_{M_1} \otimes u)z_1))_{R'}((\varepsilon_{M_2} \otimes u)z_2)\\ &= ((\varepsilon_{\mathcal{P}_s(M_2, N)} \otimes u) \circ f_R(z_1))_{R'}((\varepsilon_{M_2} \otimes u)z_2)\\ &= (\varepsilon_N \otimes u)((f_R(z_1))_R(z_2)) = (\varepsilon_N \otimes u)\tilde{f}_R(z_1, z_2).\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

L'application de $\mathcal{P}_r(M_1, \mathcal{P}_s(M_2, N)$ dans $\mathcal{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N)$ définie par $f \to \tilde{f}$ est visiblement A-linéaire. Nous montrerons maintenant que cette application est l'inverse de l'isomorphisme $\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ déjà rencontré plus haut. Autrement dit :

Proposition IV.10. — *Pour tout couple d'entiers r et $s \geqq 0$, il existe un isomorphisme canonique entre les deux modules* $\mathcal{P}_{r,s}(M_1 \times M_2, N)$ *et* $\mathcal{P}_r(M_1, \mathcal{P}_s(M_2, N))$, *de telle sorte que si $\tilde{f}$ est un élément du premier et si f est son associé dans le second, pour $z_1 \in M_1 \otimes R$ et $z_2 \in M_2 \otimes R$, on a*

$$\tilde{f}_R(z_1, z_2) = (f_R(z_1))_R(z_2).$$

L'isomorphisme $\tilde{f} \to f$ n'est autre que l'application $\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$, où α, β, γ, δ, ε sont les isomorphismes définis au début de ce paragraphe.

Pour démontrer cette proposition il suffit, en conservant les mêmes notations que précédemment, de montrer qu'on a

$$f = \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha\tilde{f}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_r(M_1), \mathcal{P}_s(M_2, N))$ l'application linéaire associée à f; on a donc $f = \varepsilon\varphi$. De même, soit

$$\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(\Gamma_r(M_1) \otimes \Gamma_s(M_2), N)$$

l'application linéaire associée à $\tilde{f}$; d'après la proposition IV.9, on a $\tilde{\varphi} = \beta\alpha\tilde{f}$. Il reste à montrer que $\varphi = \delta\gamma\tilde{\varphi}$.

Soient

$$z_1 = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p \in M_1 \otimes R$$

et

$$z_2 = y_1 \otimes s_1 + \ldots + y_q \otimes s_q \in M_2 \otimes R.$$

Nous allons calculer $\tilde{f}_R(z_1, z_2)$ à l'aide de $\tilde{\varphi}$. Tout d'abord, le couple (z_1, z_2) est identifié à l'élément suivant de $(M_1 \times M_2) \otimes R$:

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i, 0) \otimes r_i + \sum_{j=1}^{q} (0, y_j) \otimes s_j;$$

en utilisant la formule qui a servi pour la démonstration de la proposition IV.9, on trouve aisément, après avoir éliminé les termes trivialement nuls,

$$\tilde{f}_R(z_1, z_2) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_p=r \\ h_1+\ldots+h_q=s}} \tilde{\varphi}(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]} \otimes y_1^{[h_1]}\ldots y_q^{[h_q]}) \otimes r_1^{k_1}\ldots r_p^{k_p} s_1^{h_1}\ldots s_q^{h_q}.$$

Par ailleurs, on a

$$f_R(z_1) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=r} \varphi(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1}\ldots r_p^{k_p}.$$

Donc

$$\tilde{f}_R(z_1, z_2) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=r} (\varphi(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]}))(z_2)\, r_1^{k_1}\ldots r_p^{k_p}.$$

Supposons que $R = E(A)$ et que les r_i et les s_j sont des indéterminées toutes distinctes; il vient de là

$$(\varphi(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]}))(z_2) = \sum_{h_1+\ldots+h_q=s} \tilde{\varphi}(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]} \otimes y_1^{[h_1]}\ldots y_q^{[h_q]}) \otimes s_1^{h_1}\ldots s_q^{h_q}.$$

Il en résulte par linéarité que, pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_r(M_1)$, on a

$$(\varphi(\gamma_1))(z_2) = \sum_{h_1+\ldots+h_q=s} \tilde{\varphi}(\gamma_1 \otimes y_1^{[h_1]}\ldots y_q^{[h_q]}) \otimes s_1^{h_1}\ldots s^{h_q}.$$

L'application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(\Gamma_s(M_2), N)$ associée à $\varphi(\gamma_1) \in \mathcal{P}_s(M_2, N)$ vérifie donc

$$\psi(y_1^{[h_1]}\ldots y_q^{[h_q]}) = \tilde{\varphi}(\gamma_1 \otimes y_1^{[h_1]}\ldots y_q^{[h_q]}).$$

On en déduit par linéarité que, pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_s(M_2)$, on a

$$\psi(\gamma_2) = \tilde{\varphi}(\gamma_1 \otimes \gamma_2).$$

On reconnaît ainsi que $\gamma(\tilde{\varphi})$ n'est autre que l'application linéaire $\gamma_1 \to \psi$. Mais comme ψ est associée à $\varphi(\gamma_1)$, $\delta\gamma(\tilde{\varphi})$ n'est autre que l'application $\gamma_1 \to \varphi(\gamma_1)$. Donc

$$\delta\gamma(\tilde{\varphi}) = \varphi.$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE V.

L'application diagonale. L'algèbre des formes polynomes.

1. L'application triviale : $\overset{p}{\otimes}\Gamma(M) \to \Gamma(M)$. — Soit M un A-module. Pour tout entier $p \geq 1$ la loi multiplicative de $\Gamma(M)$ définit une application linéaire

$$\mu_p : \quad \overset{p}{\otimes}\Gamma(M) \to \Gamma(M),$$

vérifiant

$$\mu_p(\gamma_1 \otimes \ldots \otimes \gamma_p) = \gamma_1 \ldots \gamma_p \qquad (\gamma_i \in \Gamma(M)).$$

μ_p est un homomorphisme d'algèbres.

D'autre part, considérons l'application linéaire $\pi_p : M^p \to M$ définie par

$$\pi_p(x_1, \ldots, x_p) = x_1 + \ldots + x_p.$$

On en déduit un homomorphisme d'algèbres

$$\Gamma(\pi_p) : \quad \Gamma(M^p) \to \Gamma(M).$$

Mais du théorème III.4 on déduit un isomorphisme θ_p entre les algèbres $\Gamma(M^p)$ et $\overset{p}{\otimes}\Gamma(M)$, tel que

$$\theta_p((x_1, \ldots, x_p)^{[n]}) = \sum_{n_1+\ldots+n_p=n} x_1^{[n_1]} \otimes \ldots \otimes x_p^{[n_p]}.$$

Proposition V.1. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Gamma(M^p) \arrow[rr, "\theta_p"] \arrow[dr, "\Gamma(\pi_p)"'] & & \overset{p}{\otimes}\Gamma(M) \arrow[dl, "\mu_p"] \\ & \Gamma(M) & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Pour un générateur $(x_1, \ldots, x_p)^{[n]}$ de $\Gamma(M^p)$ on a, en effet,

$$\Gamma(\pi_p)((x_1, \ldots, x_p)^{[n]}) = (x_1 + \ldots + x_p)^{[n]} = \sum_{n_1+\ldots+n_p=n} x_1^{[n_1]} \ldots x_p^{[n_p]}$$
$$= (\mu_p \circ \theta_p)((x_1, \ldots, x_p)^{[n]}).$$

C. Q. F. D.

Notons que, pour tout module N, l'application

$$\Gamma(\pi_p) : \quad \Gamma(M^p) \to \Gamma(M)$$

détermine une application linéaire de $\mathcal{L}(\Gamma(M), N)$ dans $\mathcal{L}(\Gamma(M^p), N)$, donc une application linéaire Π_p de $\mathfrak{P}(M, N)$ dans $\mathfrak{P}(M^p, N)$. D'après la proposition IV.3, on a $\Pi_p f = f \circ \pi_p$. Autrement dit, Π_p est l'*opérateur de polarisation* déjà défini au chapitre II.

2. L'APPLICATION DIAGONALE $\Gamma(M) \to \overset{p}{\bigotimes} \Gamma(M)$. — Considérons maintenant l'application $\delta_p : M \to M^p$ définie par $x \to (x, \ldots, x)$. On en déduit un homomorphisme d'algèbres

$$\Gamma(\delta_p) : \quad \Gamma(M) \to \Gamma(M^p).$$

Comme ci-dessus, on déduit de $\Gamma(\delta_p)$ une application linéaire

$$\chi_p : \quad \mathfrak{L}(M^p, N) \to \mathfrak{L}(M, N),$$

qui n'est autre que l'opérateur de *contraction* déjà défini au chapitre II.

Considérons l'homomorphisme d'algèbres $\Delta_p = \theta_p \circ \Gamma(\delta_p)$ de $\Gamma(M)$ dans $\overset{p}{\bigotimes} \Gamma(M)$. On a

$$\Delta_p(x^{[n]}) = \sum_{n_1 + \ldots + n_p = n} x^{[n_1]} \otimes \ldots \otimes x^{[n_p]}.$$

On posera $\Delta_2 = \Delta$. L'homomorphisme d'algèbres

$$\Delta : \quad \Gamma(M) \to \Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$$

s'appellera l'*application diagonale* de $\Gamma(M)$ dans $\Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$. La connaissance de Δ suffit à déterminer Δ_p pour $p \geq 2$; cette détermination se fait par récurrence comme suit. Supposons qu'on ait déterminé Δ_p. En écrivant (indifféremment)

$$\overset{p}{\bigotimes} \Gamma(M) = \left(\overset{p-1}{\bigotimes} \Gamma(M)\right) \otimes \Gamma(M) \qquad \text{ou} \qquad \overset{p}{\bigotimes} \Gamma(M) = \Gamma(M) \otimes \left(\overset{p-1}{\bigotimes} \Gamma(M)\right)$$

on a

PROPOSITION V.2 :

$$\Delta_{p+1} = \left(\varepsilon_{\overset{p-1}{\otimes} \Gamma(M)} \otimes \Delta\right) \circ \Delta_p = \left(\Delta \otimes \varepsilon_{\overset{p-1}{\otimes} \Gamma(M)}\right) \circ \Delta_p.$$

Partons, en effet, d'un générateur $x^{[n]}$ de $\Gamma(M)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\left(\varepsilon_{\overset{p-1}{\otimes} \Gamma(M)} \otimes \Delta\right) \circ \Delta_p\right)(x^{[n]}) &= \left(\varepsilon_{\overset{p-1}{\otimes} \Gamma(M)} \otimes \Delta\right)\left(\sum_{n_1 + \ldots + n_p = n} x^{[n_1]} \otimes \ldots \otimes x^{[n_p]}\right) \\
&= \sum_{n_1 + \ldots + n_p = n} x^{[n_1]} \otimes \ldots \otimes x^{[n_{p-1}]} \otimes \left(\sum_{n'_p + n''_p = n_p} x^{[n'_p]} \otimes x^{[n''_p]}\right) \\
&= \sum_{n_1 + \ldots + n_{p+1} = n} x^{[n_1]} \otimes \ldots \otimes x^{[n_{p+1}]} = \Delta_{p+1}(x^{[n]}).
\end{aligned}$$

Démonstration semblable pour l'autre expression de Δ_{p+1} que donne la proposition V.2. C. Q. F. D.

En particulier,

$$(\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \varepsilon_{\Gamma(M)}) \circ \Delta \qquad (= \Delta_3).$$

3. L'ALGÈBRE $\Gamma^\star(M)$. — Nous désignons par $\Gamma^\star(M)$ le dual du module $\Gamma(M)$. Ce module est isomorphe au produit direct des modules $\Gamma^\star_n(M)$, ce qui permet d'y introduire une notion de degré et d'homogénéité : un élément de $\Gamma^\star(M)$ sera dit homogène de degré n si sa restriction à $\Gamma_p(M)$ est nulle pour $p \neq n$.

Nous munirons $\Gamma^\star(M)$ d'une structure d'algèbre de la manière suivante : pour deux éléments φ et ψ de $\Gamma^\star(M)$, nous posons

$$\varphi\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta;$$

cette application $\varphi\psi$ est une application linéaire de $\Gamma(M)$ dans $A \otimes A = A$, c'est donc un autre élément de $\Gamma^\star(M)$. L'application $(\varphi, \psi) \to \varphi\psi$ est, visiblement, bilinéaire. Elle est aussi symétrique. En effet, soit σ l'application de $\Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$ dans lui-même définie par

$$\sigma(\gamma \otimes \gamma') = \gamma' \otimes \gamma;$$

Il est clair que σ, donc aussi $\sigma \circ \Delta$, sont des homomorphismes d'algèbres. Or, de toute évidence,

$$\sigma \circ \Delta x^{[n]} = \Delta x^{[n]}; \qquad \text{donc} \quad \sigma \circ \Delta = \Delta.$$

D'autre part, il est clair que

$$(\psi \otimes \varphi) \circ \Delta = (\varphi \otimes \psi) \circ \sigma \circ \Delta.$$

Il en résulte bien que $\varphi\psi = \psi\varphi$. Si $1^\star$ désigne la forme linéaire sur $\Gamma(M)$ qui, à tout élément de $\Gamma(M)$, associe sa composante homogène de degré 0, on vérifie trivialement que $\varphi 1^\star = \varphi$. Nous aurons donc montré que, muni de la multiplication $(\varphi, \psi) \to \varphi\psi$, le module $\Gamma^\star(M)$ est devenu une *algèbre commutative unitaire* si nous prouvons enfin que, pour $\varphi, \psi, \theta \in \Gamma^\star(M)$, nous avons

$$(\varphi\psi)\,\theta = \varphi(\psi\theta).$$

Or

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)\,\theta &= (\varphi\psi \otimes \theta) \circ \Delta = (((\varphi \otimes \psi) \circ \Delta) \otimes \theta) \circ \Delta = (\varphi \otimes \psi \otimes \theta) \circ (\Delta \otimes \varepsilon_{\Gamma(M)}) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \psi \otimes \theta) \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\varphi \otimes ((\psi \otimes \theta) \circ \Delta)) \circ \Delta = (\varphi \otimes \psi\theta) \circ \Delta = \varphi(\psi\theta).\end{aligned}$$

On peut vérifier (et nous en verrons une autre raison tout à l'heure) que, si φ et ψ sont homogènes de degrés respectifs r et s, alors $\varphi\psi$ est homogène de degré $r + s$. On peut donc dire que $\Gamma^\star(M)$ est une *algèbre graduée* (bien que, à proprement parler, le module $\Gamma^\star(M)$ ne soit pas exactement un module gradué : ce n'est pas une somme directe...).

Remarque. — Cette construction d'une structure d'algèbre sur $\Gamma^\star(M)$ à partir de l'application diagonale (ou *coproduit*) Δ résulte d'un principe général applicable à toutes les *coalgèbres* (par exemple, *cf.* Cartier, *Séminaire Sophus Lie*, Paris, 1955-1956).

4. L'algèbre des formes polynomes sur un module.

Définition. — On appelle *forme polynome sur un module* M une loi polynome sur le couple (M, A), où A est considéré comme module sur lui-même. Le module des formes polynomes sur un module M se notera $\mathfrak{P}(M)$ au lieu de $\mathfrak{P}(M, A)$. Pour toute $f \in \mathfrak{P}(M)$ et pour toute algèbre R, f_R est donc une application de $M \otimes R$ dans R.

D'après le chapitre précédent, il existe un isomorphisme canonique entre le module $\mathfrak{P}_n(M)$ des formes polynomes homogènes de degré n et le module $\Gamma_n^\star(M)$, dual du module $\Gamma_n(M)$.

Soient deux formes polynomes f et $g \in \mathfrak{P}(M)$. Soit β la loi polynome sur le couple $(A \times A, A)$ qui prolonge l'application bilinéaire $A \times A \to A$ définie par la multiplication dans A. On définit alors un autre élément fg de $\mathfrak{P}(M)$ en posant $fg = \beta(f, g)$. De façon plus explicite, pour toute algèbre R, l'application $(fg)_R$ de $M \otimes R$ dans R est le *produit* des applications f_R et g_R au sens de la multiplication des applications d'un ensemble dans une algèbre

$$(fg)_R(z) = f_R(z)\, g_R(z).$$

La forme polynome fg s'appelle le *produit* des formes polynomes f et g. A l'aide de la formule

$$(fg)_R = f_R g_R,$$

il est trivial de vérifier que, muni de cette loi multiplicative, $\mathfrak{P}(M)$ est devenu une *algèbre commutative*. Cette algèbre est *unitaire*, l'unité étant la forme polynome constante définie par l'élément unité de A. Si f et g sont homogènes, de degrés respectifs r et s, alors fg est homogène de degrés $r + s$. On peut donc dire que $\mathfrak{P}(M)$ est une algèbre graduée, avec la même restriction toutefois que plus haut concernant l'algèbre $\Gamma^\star(M)$.

Théorème V.1. — *L'injection canonique de* $\mathfrak{P}(M)$ *dans* $\Gamma^\star(M)$ (*résultant du théorème* IV.1 *et de la proposition* IV.2) *est un homomorphisme d'algèbres.*

On vérifie immédiatement que 1 et $1^\star$ se correspondent; reste à montrer que l'isomorphisme canonique conserve la multiplication. Soient f et $g \in \mathfrak{P}(M)$, correspondant à φ et $\psi \in \Gamma^\star(M)$. Si R est une algèbre et si $z \in M \otimes R$, avec $z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p$, on a

$$f_R(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_p} \varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]})\, r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p},$$

$$g_R(z) = \sum_{h_1, \ldots, h_p} \psi(x_1^{[h_1]} \ldots x_p^{[h_p]})\, r_1^{h_1} \ldots r_p^{h_p}.$$

D'où

$$(fg)_R(z) = \sum_{n_1, \ldots, n_p} A_{n_1, \ldots n_p} r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p},$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{n_1,\ldots,n_p} &= \sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_p=0}^{n_p} \varphi(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]})\,\psi(x_1^{[n_1-k_1]}\ldots x_p^{[n_p-k_p]})\\
&= (\varphi\otimes\psi)\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_p=0}^{n_p} x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]}\otimes x_1^{[n_1-k_1]}\ldots x_p^{[n_p-k_p]}\\
&= (\varphi\otimes\psi)\circ\Delta(x_1^{[n_1]}\ldots x_p^{[n_p]}) = (\varphi\psi)(x_1^{[n_1]}\ldots x_p^{[n_p]}).
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

5. Quelques propriétés de la multiplication dans $\mathfrak{T}(M)$. — Si f et g sont deux formes polynomes sur M, la polarisée d'ordre p de leur produit est égale au produit de leurs polarisées d'ordre p

$$\Pi_p(fg) = \Pi_p(f)\,\Pi_p(g).$$

Car si $z_1, \ldots, z_p \in M \otimes R$, R étant une algèbre, on a

$$(fg)_R(z_1+\ldots+z_p) = f_R(z_1+\ldots+z_p)\,g_R(z_1+\ldots+z_p).$$

Tout aussi trivialement, on démontre que, si f et g appartiennent à $\mathfrak{T}(M^p)$, la contraction de leur produit est égale au produit de leurs contractions.

Différentielle d'un produit. — Dans la relation

$$\Pi_2(fg) = \Pi_2 f\,\Pi_2 g,$$

prenons de chaque membre la partie linéaire par rapport au second argument; on obtient

$$(D(fg))\,(m, m') = f(m)\,Dg(m, m') + g(m)\,Df(m, m').$$

En particulier, en composant m' avec l'application constante x ($x\in M$), on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x},$$

ce qui montre que *les dérivations partielles* $\frac{\partial}{\partial x}$ *sont des dérivations d'algèbre.*

D'une manière générale, on peut calculer la différentielle d'ordre n d'un produit. On obtient

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} D^k f . D^{n-k} g$$

et, en composant m' avec l'application constante x, on a

$$\frac{\partial^{[n]}}{\partial x^{[n]}}(fg) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^{[k]}}{\partial x^{[k]}} f\,\frac{\partial^{[n-k]}}{\partial x^{[n-k]}} g.$$

Cette formule est plus précise que la formule de Leibnitz, qu'on en déduit en multipliant les deux membres par n !

Intégrité de $\mathfrak{P}$ (M) :

PROPOSITION V.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau* $\mathfrak{P}$ (M) *soit intègre est que l'anneau* A *le soit.*

La condition est nécessaire, car A est un sous-anneau de $\mathfrak{P}$ (M) (sous-anneau des formes polynomes constantes). Montrons qu'elle est suffisante. Soient f et $g \in \mathfrak{P}(M)$, telles que $fg = 0$. Supposons $f \neq 0$; alors, $f_{E(A)} \neq 0$, et il existe donc $Z_0 \in E(A)$ tel que

$$f_{E(A)}(Z_0) \neq 0.$$

Soit Z un élément quelconque de E (A). Soit T une indéterminée qui ne figure ni dans Z ni dans Z_0. On a

$$f_{E(A)}((Z - Z_0)\,T + Z_0)\, g_{E(A)}((Z - Z_0)\,T + Z_0) = 0.$$

Comme $f_{E(A)}((Z - Z_0)\,T + Z_0)$ et $g_{E(A)}((Z - Z_0)\,T + Z_0)$ sont des polynomes à coefficients dans l'anneau A intègre, l'un au moins d'entre eux est nul; or, le premier n'est pas nul, car par la spécialisation $T \to 0$, ce polynome devient $f_{A(E)}(Z_0) \neq 0$; donc

$$g_{E(A)}((Z - Z_0)\,T + Z_0) = 0.$$

Par la spécialisation $T \to 1$, on a alors

$$g_{E(A)}(Z) = 0, \qquad \text{donc} \quad g_{E(A)} = 0 \qquad \text{et} \quad g = 0.$$

C. Q. F. D.

6. LE FONCTEUR $\mathfrak{P}$. — Soit $\alpha : M \to M'$ un homorphisme de A-modules. On en déduit une application $\mathfrak{P}(\alpha) : \mathfrak{P}(M') \to \mathfrak{P}(M)$, définie par

$$\mathfrak{P}(\alpha)(f') = f' \circ \alpha.$$

Il est trivial de vérifier que $\mathfrak{P}(\alpha)$ est un homomorphisme d'algèbres. Si $\beta : M' \to M''$ est un autre homomorphisme de modules, on a

$$\mathfrak{P}(\beta \circ \alpha) = \mathfrak{P}(\alpha) \circ \mathfrak{P}(\beta).$$

Enfin, $\mathfrak{P}(\varepsilon_M) = \varepsilon_{\mathfrak{P}(M)}$. Par conséquent :

La correspondance $M \to \mathfrak{P}(M)$ *définit un foncteur contravariant qui fait passer de la catégorie des* A*-modules dans celle des algèbres sur* A.

DEUXIÈME PARTIE.

LOIS FORMELLES.

CHAPITRE VI.

Théorie générale des lois formelles.

Nous donnerons dans ce chapitre au mot *algèbre* un sens plus étendu que dans les précédents chapitres. Désormais, nous entendons par « algèbre » (si aucune autre précision n'est donnée) une algèbre commutative et associative définie sur l'anneau A, mais non nécessairement pourvue d'un élément unité. Si R et R′ sont deux algèbres, un *homomorphisme d'algèbres* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ sera simplement un homomorphisme de A-modules qui respecte la loi multiplicative, sans aucune considération, et pour cause, d'unitarité.

Nous ferons aussi un usage systématique des notations suivantes : Soit M un module gradué

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{M}_n.$$

Nous désignerons par π_n la projection canonique de M sur M_n et par π^n la projection canonique de M sur $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{M}_k$. Les mêmes notations serviront aussi, avec la même définition, dans le cas d'un module produit

$$\mathrm{M} = \prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{M}_n.$$

Dans l'un et l'autre cas, si $x \in \mathrm{M}$ avec $x \neq 0$, nous désignerons par $\omega(x)$ et appellerons l'*ordre de* x le plus petit entier n tel que $\pi_n(x) \neq 0$. Nous posons $\omega(0) = +\infty$. Le module des éléments de M d'ordre $\geq n$ se notera $\mathcal{O}^n\mathrm{M}$. Le module $\mathcal{O}^1\mathrm{M}$ se notera le plus souvent M_+.

1. Lois formelles sur un couple (M, N). Définition. — Pour toute algèbre R, soit I (R) l'ensemble des éléments nilpotents de R; I (R) est un sous-module (et même un idéal) de R. Pour tout module M, on désignera par M (R) l'image de l'application canonique $\mathrm{M} \otimes \mathrm{I}(\mathrm{R}) \to \mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ déduite des injections canoniques $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ et $\mathrm{I}(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$. Autrement dit, un élément z de M (R) est un élément de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}$ qu'on peut écrire sous la forme

$$z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p,$$

avec $x_i \in \mathrm{M}$, $r_i \in \mathrm{R}$ et r_i *nilpotent* ($i = 1, \ldots, p$). Chaque fois qu'on écrira un élément de M (R) sous la forme

$$x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p$$

on supposera toujours, sans le répéter, que les r_i sont nilpotents.

Si l'on a un homomorphisme d'algèbres $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$, il est clair que la restriction à M (R) de l'application $\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u$ a son image dans M (R'); l'application de M (R) dans M (R') qui en résulte se notera encore $\varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u$.

Définition. — Soient M et N deux A-modules. On appelle « *loi formelle f sur le couple* (M, N) » la donnée, pour toute algèbre R, d'une application f_{R} de l'ensemble M (R) dans l'ensemble N (R) de telle sorte que, quelles que soient les algèbres R et R', et pour tout homomorphisme d'algèbres $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(\mathrm{R}) & \xrightarrow{f_{\mathrm{R}}} & \mathrm{N}(\mathrm{R}) \\ {\scriptstyle \varepsilon_{\mathrm{M}} \otimes u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\mathrm{N}} \otimes u} \\ \mathrm{M}(\mathrm{R}') & \xrightarrow{f_{\mathrm{R}'}} & \mathrm{N}(\mathrm{R}') \end{array}$$

2. Le module $\mathcal{F}$ (M, N). — Nous verrons bientôt que les lois formelles sur un couple (M, N) forment un *ensemble*, que nous noterons $\mathcal{F}$ (M, N). Il est clair que cet ensemble sera muni d'une *structure de* A-*module* si l'on définit, pour f et $g \in \mathcal{F}$ (M, N), leur somme $f + g$ par la donnée des applications $(f + g)_{\mathrm{R}} = f_{\mathrm{R}} + g_{\mathrm{R}}$, et le produit de f et de $\lambda \in \mathrm{A}$ par la donnée des applications $(\lambda f)_{\mathrm{R}} = \lambda f_{\mathrm{R}}$.

Plus généralement, soit $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de lois formelles sur un couple (M, N). On dit que la famille est *sommable* si, pour toute algèbre R et pour tout $z \in \mathrm{M}(\mathrm{R})$, la famille des éléments $(f_i)_{\mathrm{R}}(z)$ ($i \in \mathrm{I}$) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Lorsqu'il en est ainsi, on peut définir pour toute algèbre R une application f_{R} de M (R) dans N (R) en posant, pour tout $z \in \mathrm{M}(\mathrm{R})$,

$$f_{\mathrm{R}}(z) = \sum_{i \in \mathrm{I}} (f_i)_{\mathrm{R}}(z).$$

On vérifie trivialement que la donnée des f_{R} est une loi formelle f sur le couple (M, N) et l'on écrit

$$f = \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i.$$

On dit que f est la somme de la famille $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

3. L'application canonique $\rho : \mathcal{P}_+ (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathcal{F} (\mathrm{M}, \mathrm{N})$. — Conformément aux notations annoncées, nous notons $\mathcal{P}_+$ (M, N) le module des

lois polynomes sur le couple (M, N) *sans terme constant* (c'est-à-dire dont la composante homogène de degré o est nulle). Nous allons montrer l'existence d'une application ρ qui, à tout $g \in \mathcal{P}_+(M, N)$, associe une loi formelle sur le couple (M, N).

Nous aurons besoin du résultat suivant concernant les lois polynomes.

Proposition VI.1. — *Soit* $f \in \mathcal{P}_+(M, N)$ *une loi polynome sans terme constant. Soit* $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_+(M), N)$ *l'application linéaire associée à f. Soit* R *une algèbre (au sens général défini plus haut). Il existe alors une application* $f_R : M \otimes R \to N \otimes R$ *telle que, si*

$$z \in M \otimes R \qquad \text{avec} \quad z = \sum_{i=1}^{p} x_i \otimes r_i,$$

on ait

$$f_R(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p>0} \varphi(x_1^{[k_1]}\ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1}\ldots r_p^{k_p}. \tag{1}$$

Pour tout homomorphisme d'algèbres $u : R \to R'$, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes R & \xrightarrow{f_R} & N \otimes R \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_M \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_N \otimes u} \\ M \otimes R' & \xrightarrow{f_{R'}} & N \otimes R' \end{array}$$

[Dans l'écriture de la formule (1), nous faisons la convention qu'un facteur du type r^0 ($r \in R$) *ne doit pas être écrit;* l'absence éventuelle d'un élément unité de R empêche, en effet, de le prendre égal à 1... La condition $k_1 + \ldots + k_p \neq 0$ est donc essentielle.] La proposition étend les propriétés fondamentales des lois polynomes au cas d'algèbres R et d'homomorphismes u non nécessairement unitaires; mais on doit se restreindre aux lois polynomes sans terme constant.

Notons déjà que si l'existence de f_R, vérifiant la formule (1), est assurée pour toute R, alors le diagramme considéré sera visiblement commutatif. Pour prouver l'existence de f_R, nous ferons la construction suivante. A toute algèbre R, associons le module $\overline{R} = A \times R$. On définit dans $\overline{R}$ une multiplication en posant, pour a, $b \in A$ et r, $s \in R$

$$(a, r)(b, s) = (ab, rs + as + br).$$

On vérifie que $\overline{R}$ devient ainsi une algèbre associative, commutative et *unitaire* sur A, l'unité étant l'élément (1, 0). L'injection canonique de R dans $\overline{R}$ définie par $r \to (0, r)$ fait de R une sous-algèbre de $\overline{R}$. Comme le module R est alors facteur direct du module $\overline{R}$, on peut, pour tout module M, identifier le module $M \otimes R$ à un sous-module de $M \otimes \overline{R}$. La restriction f_R de $f_{\overline{R}}$ à $M \otimes R$ vérifie

$$(2) \qquad f_R(x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p) = \sum_{k_1+\ldots+k_p>0} \varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p};$$

comme $k_1 + \ldots + k_p > 0$, on voit que tous les termes du second membre appartiennent à $N \otimes R$. L'existence de $f_R : M \otimes R \to N \otimes R$ est donc prouvée.

Nous observons que, si $r_1, \ldots, r_p$ sont nilpotents, il en est de même de $r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}$ pour $k_1 + \ldots + k_p > 0$; donc, f_R applique M (R) dans N (R). La commutativité du diagramme de la proposition VI.1 montre que la donnée des applications f_R [restreintes à M (R)] est une loi formelle $\hat{f}$ sur le couple (M, N). Nous notons ρ la correspondance $f \to \hat{f}$ ainsi définie. Quand il sera établi que $\mathcal{F}$ (M, N) est un ensemble, on pourra dire que ρ est un homomorphisme du module $\mathcal{L}_+$ (M, N) dans le module $\mathcal{F}$ (M, N). On peut même montrer facilement que si $f \in \mathcal{L}_+$ (M, N) est la somme localement finie (*cf.* chap. I, § 5) d'une suite f_n de lois polynomes sans terme constant, alors la suite (ρf_n) est sommable dans $\mathcal{F}$ (M, N) et l'on a

$$\rho\Big(\sum_n f_n\Big) = \sum_n \rho f_n.$$

4. Lois formelles homogènes.

Définition. — Soit n un entier ≥ 1. On dit qu'une loi formelle f sur le couple (M, N) est *homogène de degré n* si, pour toute algèbre R, pour tout $z \in$ M (R) et tout $r \in$ R on a

$$f_R(zr) = f_R(r)\, r^n.$$

Les lois formelles homogènes de degré n forment un module $\mathcal{F}_n$(M, N).

Exemple. — La formule (1) du paragraphe précédent montre clairement que

$$\text{si} \quad f \in \mathcal{L}_n(M, N), \qquad \text{alors} \quad \rho f \in \mathcal{F}_n(M, N).$$

Nous noterons ρ_n la restriction de ρ à $\mathcal{L}_n$ (M, N). Nous montrerons que ρ_n est un isomorphisme de modules.

Si M est un module produit, on définirait de même les lois formelles *multihomogènes* (*cf.* chap. I, § 8). Il est trivial de vérifier que, si $f \in \mathcal{L}_+$(M, N) est multihomogène, alors $\rho f \in \mathcal{F}$ (M, N) est multihomogène de même multidegré.

5. Décomposition d'une loi formelle en lois formelles homogènes.

Théorème VI.1. — *Pour toute loi formelle f sur le couple* (M, N) *il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de lois formelles sur le même couple, et une seule, telle que :*

a. pour tout $n \geq 1$, f_n est homogène de degré n;

b. la suite est sommable et a pour somme f.

Réciproquement, toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de lois formelles telles que f_n soit homogène de degré n est sommable.

Nous commençons par démontrer la partie directe. Pour toute algèbre R et tout entier $n \geq 1$, nous désignons par R_n l'algèbre quotient de l'algèbre de polynomes R (T) par l'idéal engendré par T^{n+1}. On identifie R_n à une algèbre de « polynomes tronqués au degré n »; tout élément de R_n s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$r_0 + r_1 T + \ldots + r_n T^n \qquad (r_i \in R).$$

Il est clair que R_n s'identifie aussi à l'algèbre $R \otimes A_n$.

Il existe un homomorphisme canonique θ_n de R_{n+1} sur R_n, défini par l'annulation des termes de degré $(n+1)$ en T.

Soit alors une foi formelle f sur le couple (M, N). Pour toute algèbre R et tout $z \in M \otimes R$, on peut considérer l'élément zT de $M \otimes R_n$; en fait, on a $zT \in M(R_n)$. On peut donc aussi considérer l'élément $f_{R_n}(zT) \in N(R_n)$. Comme

$$N(R_n) \subset N \otimes R_n = N \otimes R \otimes A_n$$

on peut écrire, d'une manière unique,

$$f_{R_n}(zT) = y_0 + y_1 T + \ldots + y_n T^n, \qquad \text{avec} \quad y_i \in N \otimes R.$$

Lemme 1. — *Pour tout entier $i \geq 0$, y_i ne dépend pas de n dès que $n \geq i$.*

Il suffit de montrer que, si

$$f_{R_{n+1}}(zT) = y'_0 + \ldots + y'_n T^n + y'_{n+1} T^{n+1},$$

on a $y_i = y'_i$ pour $i \leq n$. Or

$$y'_0 + \ldots + y'_n T^n = (\varepsilon_N \otimes \theta_n) f_{R_{n+1}}(zT) = f_{R_n}(\varepsilon_M \otimes \theta_n)(zT) = f_{R_n}(zT) = y_0 + \ldots + y_n T^n.$$

C. Q. F. D.

Il résulte du lemme 1 que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une application $(f_n)_R$ de $M \otimes R$ dans $N \otimes R$ telle que

$$f_{R_n}(zT) = \sum_{i=0}^{n} (f_i)_R(z) T^i.$$

LEMME 2. — *Pour tout entier $n \geqq 0$ et pour tout homomorphisme $u : R \to R'$ d'algèbres, on a*

$$(f_n)_{R'} \circ (\varepsilon_M \otimes u) = (\varepsilon_N \otimes u) \circ (f_n)_R.$$

Soit, en effet, $u'_n : R_n \to R'_n$ l'homomorphisme d'algèbres défini par

$$u'_n = u \otimes \varepsilon_{A_n}.$$

On a

$$(\varepsilon_M \otimes u'_n)\,(z T) = [(\varepsilon_M \otimes u)\,z]\,T,$$

de sorte que

$$\sum_{i=0}^{n} (f_i)_{R'}[(\varepsilon_M \otimes u)\,z]\,T^i = f_{R'_n}([(\varepsilon_M \otimes u)\,z]\,T) = f_{R'_n}(\varepsilon_M \otimes u'_n)\,(z T)$$
$$= (\varepsilon_N \otimes u'_n)\,f_{R_n}(z T) = \sum_{i=0}^{n} (\varepsilon_N \otimes u'_n)\,[(f_i)_R(z)\,T^i] = \sum_{i=0}^{n} [(\varepsilon_N \otimes u)\,(f_i)_R(z)]\,T^i,$$

d'où le lemme en comparant les coefficients de T^n dans les membres extrêmes.

LEMME 3. — *Pour tout entier $n \geqq 1$ et pour tout $r \in R$, on a*

$$(f_n)_R(z r) = (f_n)_R(z)\,r^n.$$

Considérons l'endomorphisme de l'algèbre $R(T)$ défini par la spécialisation $T \to rT$. Par cet endomorphisme l'idéal (T^{n+1}) est appliqué dans lui-même; d'où, par passage aux quotients, un endomorphisme v de l'algèbre R_n, tel que $v(T) = rT$. Alors

$$\sum_{i=0}^{n} (f_i)_R(z r)\,T^i = f_{R_n}(z r T) = f_{R_n}(\varepsilon_M \otimes v)\,(z T) = (\varepsilon_N \otimes v)\,f_{R_n}(z T)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (\varepsilon_N \otimes v)\,[(f_i)_R(z)\,T^i] = (f_0)_R(z) + \sum_{i=1}^{n} (f_i)_R(z)\,r^i\,T^i.$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. — *On a $(f_0)_R = 0$. Pour $n \geqq 1$, $(f_n)_R$ applique $M(R)$ dans $N(R)$.*

Soit, en effet, $z \in M(R)$, avec

$$z = x_1 \otimes r_1 = \ldots + x_p \otimes r_p.$$

Soit d un entier tel que $r_i^d = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. Soit $R_+(T_1, \ldots, T_p)$ l'algèbre des polynomes sans terme constant à p indéterminées, à coefficients dans R. Soit R'_d l'algèbre quotient de la précédente par l'idéal engendré par $(T_1^d, \ldots, T_p^d)$. Il existe un homomorphisme d'algèbres et un seul $u : R'_d \to R$ tel que

$$u(T_i) = r_i \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

de sorte que

$$z = (\varepsilon_M \otimes u) Z, \qquad \text{avec} \quad Z = x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_p \otimes T_p \in M(R'_d).$$

On a, d'après le lemme 2,

$$(f_i)_R(z) = (f_i)_R(\varepsilon_M \otimes u) Z = (\varepsilon_N \otimes u)(f_i)_{R'_d}(Z).$$

Mais comme $(f_i)_{R'_d}(Z) \in N \otimes R'_d$, il s'écrit sous la forme

$$\sum_k y_k \otimes P_k(T_1, \ldots, T_p), \qquad \text{avec} \quad y_k \in N \quad \text{et} \quad P_k(T_1, \ldots, T_p) \in R'_d,$$

polynome tronqué *sans terme constant.*

Comme il est clair que chaque $P_k(r_1, \ldots, r_p)$ est nilpotent, et comme

$$(f_i)_R(z) = \sum_k y_k \otimes P_k(r_1, \ldots, r_p),$$

on voit que $(f_i)_R(z) \in N(R)$. En outre, en prenant les r_i égaux à o, on a

$$(f_i)_R(0) = 0.$$

Tout cela est valable pour $i \geqq 0$. Reprenons maintenant la formule

$$f_{R_n}(zT) = \sum_{i=0}^{n} (f_i)_R(z) T^i.$$

En transformant les deux membres par la spécialisation de R_n dans R définie par $T \to 0$, on obtient

$$f_R(0) = (f_0)_R(z).$$

Donc

$$(f_0)_R(z) = (f_0)_R(0) = 0.$$

Le lemme est démontré.

Une première conclusion à tous ces lemmes est que, pour tout entier $n \geqq 1$, la donnée pour toute algèbre R des applications $(f_n)_R$ [ou plutôt de leurs restrictions aux modules M (R)] définit une loi formelle sur le couple (M, N), homogène de degré n, que nous noterons f_n. Nous allons montrer que f est la somme des f_n.

Considérons un élément

$$z \in M(R) \subset M \otimes R.$$

Nous introduisons l'élément $zT \in M \otimes R(T)$; en fait, nous avons $zT \in M(R(T))$ et nous pouvons considérer l'élément $f_{R(T)}(zT)$, qui s'écrit

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i T^i \quad \text{(sommation finie)}, \qquad \text{avec} \quad y_i \in N \otimes R.$$

Soit σ_n l'homomorphisme canonique de R (T) sur R_n modulo (T^{n+1}). On a

$$\sum_{i=0}^{n} y_i T^i = (\varepsilon_N \otimes \sigma_n) f_{R(T)}(z T) = f_{R_n}(\varepsilon_M \otimes \sigma_n)(z T) = f_{R_n}(z T) = \sum_{i=0}^{n} (f_i)_R(z) T^i.$$

D'où

$$y_i = (f_i)_R(z) \quad \text{pour tout } i,$$

et l'on a

$$f_{R(T)}(z T) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i)_R(z) T^i \quad \text{(sommation finie)}.$$

Maintenant, transformons les deux membres de cette égalité par $(\varepsilon_N \otimes \tau)$, où τ est l'homomorphisme de R (T) dans R qui consiste (au moins formellement) à remplacer T par 1. Il vient

$$f_R(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i)_R(z) \quad \text{(sommation finie)}.$$

C. Q. F. D.

Il reste à montrer que la décomposition de f en composantes homogènes est unique. Or, si $f = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ en est une autre on aura, dans les mêmes conditions que ci-dessus,

$$f_{R(T)}(z T) = \sum_{n=1}^{\infty} (f'_n)_{R(T)}(z T) = \sum_{n=1}^{\infty} (f'_n)_{R(T)}(z) T^n.$$

Mais, par la spécialisation $T \to 0$, on voit que

$$(f'_n)_{R(T)}(z) = (f'_n)_R(z).$$

Donc

$$(f'_n)_R(z) = (f_n)_R(z) \qquad \text{et} \qquad f'_n = f_n.$$

C. Q. F. D.

Pour la partie réciproque du théorème VI.1, soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de lois formelles, f_n étant homogène de degré n. Soit

$$z \in M(R), \qquad \text{avec} \quad z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p.$$

Par le raisonnement utilisé pour le lemme 4, on a

$$(f_n)_R(z) = \sum_k y_k \otimes P_k(r_1, \ldots, r_p),$$

où cette fois $P_k(T_1, \ldots, T_p)$ est un polynome homogène de degré n. Or, il est clair que tout élément du type $r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}$, avec $k_1 + \ldots + k_p = n$ est nul dès que n est assez grand. Donc, $(f_n)_R(z)$ est nul pour n assez grand.

C. Q. F. D.

Le théorème est démontré.

Il en résulte que, si l'on montre que $\mathcal{F}_n(M, N)$ est un ensemble pour tout $n \geqq 1$, alors $\mathcal{F}(M, N)$ est un ensemble qui s'identifie à l'ensemble produit des $\mathcal{F}_n(M, N)$. De même, le module $\mathcal{F}(M, N)$ sera le module produit des modules $\mathcal{F}_n(M, N)$.

6. Relations entre lois polynomes et lois formelles. Formule de Taylor.

Théorème VI.2. — *a. L'application* ρ *définie au paragraphe* 3 *permet d'identifier* $\mathcal{P}_+(M, N)$ *à un sous-module de* $\mathcal{F}(M, N)$.

b. La restriction ρ_n *de* ρ *à* $\mathcal{P}_n(M, N)$ $(n \geqq 1)$ *est un isomorphisme du module* $\mathcal{P}_n(M, N)$ *sur le module* $\mathcal{F}_n(M, N)$.

c. Le module $\mathcal{F}(M, N)$ *est isomorphe : d'une part, au module produit* $\prod_{n \geqq 1} \mathcal{F}_n(M, N)$; *d'autre part, au module* $\mathcal{L}(\Gamma_+(M), N)$. *Le second isomorphisme s'explicite de la manière suivante : si* $f \in \mathcal{F}(M, N)$ *correspond à* $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_+(M), N)$, *alors pour toute algèbre* R *et pour tout*

$$z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p \in M(R),$$

on a

$$f_R(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p > 0} \varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p} \ldots \quad (\textit{sommation finie}).$$

Cette formule s'appellera « formule de Taylor » pour les lois formelles.

Comme il est clair que b entraîne a, commençons par lui. Soit f une loi formelle sur le couple (M, N), homogène de degré $n \geqq 1$. Le lemme 1 du paragraphe précédent montre l'existence, pour toute algèbre R, d'une application $(f_n)_R : M \otimes R \to N \otimes R$, telle que $(f_n)_R(z)$ soit le coefficient de T^n dans $f_{R_n}(zT)$. Comme f est homogène de degré n, la restriction de $(f_n)_R$ à M (R) est égale à f_R. En se limitant à des algèbres R, R' et à des homomorphismes u tous unitaires, les lemmes 2 et 3 montrent que la donnée des $(f_n)_R$ est une loi polynome, homogène de degré n, sur le couple (M, N). Nous désignons cette loi polynome par g et nous posons $g = \sigma_n f$. La correspondance $\sigma_n : f \to g$ est une « application » linéaire de $\mathcal{F}_n(M, N)$ dans $\mathcal{P}_n(M, N)$. Nous allons montrer que σ_n et l'application ρ_n définie au paragraphe 4 sont inverses l'une de l'autre.

1° *On montre que* $\rho_n \sigma_n f = f$, c'est-à-dire $\rho_n g = f$. On sait que, pour toute algèbre R, $(\rho_n g)_R$ est la restriction à M (R) de l'application $g_R : M \otimes R \to N \otimes R$ définie par la proposition VI.1. Il suffit donc de montrer que $g_R = (f_n)_R$. Par définition de g, cette relation est déjà vérifiée quand R est unitaire. Si R n'est pas unitaire, soit $\overline{R}$ l'algèbre unitaire associée, introduite au paragraphe 3. On sait que g_R est la restriction à $M \otimes R$ de $g_{\bar{R}}$. Comme $g_{\bar{R}} = (f_n)_{\bar{R}}$, il suffit de montrer que $(f_n)_R$ est la restriction à $(M \otimes R)$ de $(f_n)_{\bar{R}}$. Or, soit j l'injection canonique de R dans $\bar{R}$. Pour $z \in M \otimes R$, on a

$$(f_n)_{\bar{R}}(z) = (f_n)_{\bar{R}}(\varepsilon_M \otimes j)(z) = (\text{lemme } 2)\ (\varepsilon_N \otimes j)(f_n)_R(z) = (f_n)_R(z).$$

C. Q. F. D.

2° *Pour* $g \in \mathcal{T}_n(M, N)$, *on montre que* $\sigma_n \rho_n g = g$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ l'application linéaire canoniquement associée à g. Soit

$$z \in M \otimes R, \qquad z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p.$$

On a

$$(\rho_n g)_{R_n}(zT) = \sum_{k_1 + \ldots + k_p = n} \varphi(x_1^{[k_1[} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes (r_1 T)^{k_1} (r_p T)^{k_p}.$$

Comme $(\sigma_n \rho_n g)_R(z)$ est le coefficient de T^n dans cette expression, égal à $g_R(z)$, on a $(\sigma_n \rho_n g)_R = g_R$ pour toute algèbre et, en particulier, pour les algèbres unitaires. D'où $\sigma_n \rho_n g = g$. C. Q. F. D.

Il en résulte que ρ_n réalise une bijection de $\mathcal{T}_n(M, N)$ sur $\mathcal{F}_n(M, N)$, *lequel est donc bien un ensemble*. En outre, ρ_n est un isomorphisme de modules.

La première partie de *c* résulte du théorème VI.1. Quant à la seconde partie, elle découle immédiatement des deux observations suivantes : d'une part, $\mathcal{F}_n(M, N)$ est (compte tenu de *b*) isomorphe à $\mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$; d'autre part, le module $\prod_{n \geq 1} \mathcal{L}(\Gamma_n(M), N)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(\Gamma_+(M), N)$.

La formule de Taylor résulte immédiatement de la forme sous laquelle ρ_n a été explicité. Le théorème est démontré.

Dans toute la suite, on identifiera toujours une loi polynome sans terme constant à une loi formelle.

7. La topologie formelle sur $\mathcal{F}(M, N)$.

Définition. — Munissons chaque module $\mathcal{T}_n(M, N)$ de la topologie discrète. La topologie produit qui en résulte sur l'espace produit

$$\prod_{n \geq 1} \mathcal{T}_n(M, N) = \mathcal{F}(M, N)$$

s'appelle la *topologie formelle* sur $\mathcal{F}(M, N)$.

La topologie formelle est compatible avec la structure de module si l'on munit A de la topologie discrète. Un système fondamental de voisinages de o est fourni par les modules $\mathcal{O}^n\mathcal{F}(M, N)$ (pour les notations introduites, *cf.* l'introduction à ce chapitre).

Proposition VI.2. — *Pour une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de lois formelles, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *est convergente;*

b. $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$;

c. $\omega(f_n) \to +\infty$.

Elles entraînent la propriété :

d. La famille $(f_n)_{n\geq 1}$ *est sommable et a pour somme la somme de la série.*

Il est trivial que $(a) \Rightarrow (b)$. Si (b) est réalisée, soit p un entier > 0. Pour n suffisamment grand, on a $f_n \in \mathcal{O}^p\mathcal{F}(M, N)$, c'est-à-dire $\omega(f_n) \geq p$. Donc (c) est vérifiée. Enfin, supposons (c) vérifiée. Pour tout entier $k \geq 1$, $\pi_k f_n$ est nul pour n assez grand. Autrement dit, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_k f_n$ est convergente dans $\mathcal{P}_k(M, N)$; d'après la définition d'une topologie produit, c'est dire que la condition (a) est réalisée.

Montrons enfin que $(c) \Rightarrow (d)$. Soit $\varphi_n \in \mathcal{L}(\Gamma_+(M, N))$ l'application linéaire attachée à f_n On a $\omega(f_n) = \omega(\varphi_n)$. Soit R une algèbre, et

$$z \in M(R), \qquad \text{avec} \quad z = x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p$$

On a

$$(f_n)_R(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p \geq \omega(\varphi_n)} \varphi_n(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Si $\omega(\varphi_n)$ est suffisamment grand (ce qui a lieu pour n suffisamment grand), tous les $r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}$ sont nuls. Donc $(f_n)_R(z)$ est nul pour n assez grand; c'est dire que la famille (f_n) est sommable. L'assertion relative à la somme est évidente.

Proposition VI.3. — *Le module* $\mathcal{P}_+(M, N)$ *est dense dans* $\mathcal{F}(M, N)$.

En effet, toute loi formelle $f \in \mathcal{F}(M, N)$ est la limite, quand $n \to +\infty$, de la suite constituée par les lois polynomes $\pi^n f$.

Nous terminons ce paragraphe par diverses caractérisations de l'ordre d'une loi formelle.

Proposition VI.4. — *Pour une loi formelle* $f \in \mathcal{F}(M, N)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. $\omega(f) \geq n$;

b. $\pi_k f = 0$ *pour* $k < n$;

c. $\pi^k f = 0$ *pour* $k < n$;

d. pour toute algèbre R, *on a* $(f_R)(z) = 0$ *si* $z \in M(R)$ *peut s'écrire*

$$x_1 \otimes r_1 + \ldots + x_p \otimes r_p,$$

les r_i *étant tels que, pour tout système* $(k_1, \ldots, k_p)$ *d'entiers* ≥ 0 *vérifiant* $k_1 + \ldots + k_p = n$, *on ait*

$$r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p} = 0;$$

e. pour toute algèbre R, *pour tout* $z \in M(R)$ *et pour tout* $r \in R$, *il existe un élément* $a \in N \otimes R$, *avec* $f_R(zr) = ar^n$.

Il est évident que $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$.

$(a) \Rightarrow (d)$: Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_+(M), N)$ l'application linéaire associée à f. Comme $\omega(f) = \omega(\varphi)$, on a

$$f_R(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_p \geq n} \varphi(x_1^{[k_1]} \ldots x_p^{[k_p]}) \otimes r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}.$$

Mais comme $k_1 + \ldots + k_p \geq n$, tous les $r_1^{k_1} \ldots r_p^{k_p}$ sont nuls et donc

$$f_R(z) = 0.$$

$(d) \Rightarrow (b)$: Soit $z \in M(R)$. Reportons-nous aux considérations qui suivent le lemme 1 (§ 5). On a $f_{R_{n-1}}(zT) = 0$, car zT vérifie la condition énoncée dans (d). Donc

$$(\pi_k f)_R(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \pi_k f = 0 \qquad \text{pour} \quad k \leq n-1.$$

$(a) \Rightarrow (e)$: Cela résulte immédiatement de formule de Taylor.

$(e) \Rightarrow (b)$: Pour $z \in M(R)$, on a $f_{R_n}(zT) = aT^n$, avec $a \in N \otimes R_n$. Donc

$$(\pi_k f)_R(z) = 0 \qquad \text{pour} \quad k \leq n-1.$$

C. Q. F. D.

8. La composition des lois formelles. — Soient M, N, P trois A-modules, et soient $f \in \mathcal{F}(M, N)$ et $g \in \mathcal{F}(N, P)$ deux lois formelles. La commutativité, pour tout homomorphisme $u : R \to R'$ d'algèbres, du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
M(R) & \xrightarrow{f_R} & N(R) & \xrightarrow{g_R} & P(R) \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_M \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_N \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_P \otimes u} \\
M(R') & \xrightarrow{f_{R'}} & N(R') & \xrightarrow{g_{R'}} & P(R')
\end{array}$$

montre qu'il existe une loi formelle (et une seule)

$$h \in \mathcal{F}(M, P) \qquad \text{telle que} \quad h_R = g_R \circ f_R.$$

Nous posons $h = g \circ f$ ou $h = g(f)$ et nous disons que *h est la loi formelle composée des lois formelles g et f.*

Supposons plus spécialement que $f \in \mathcal{P}_+(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ et que $g \in \mathcal{P}_+(\mathrm{N}, \mathrm{P})$. Soit ρ l'injection canonique des lois polynomes dans les lois formelles. Vérifions que

$$\rho(g \circ f) = \rho(g) \circ \rho(f).$$

Pour une algèbre R, on sait que $[\rho(g \circ f)]_{\mathrm{R}}$ est la restriction à $\mathrm{M}(\mathrm{R})$ de l'application

$$(g \circ f)_{\overline{\mathrm{R}}} = g_{\overline{\mathrm{R}}} \circ f_{\overline{\mathrm{R}}};$$

c'est donc aussi le produit de la restriction de $f_{\overline{\mathrm{R}}}$ à $\mathrm{M}(\mathrm{R})$, soit $(\rho f)_{\mathrm{R}}$, et de la restriction de $g_{\overline{\mathrm{R}}}$ à $\mathrm{N}(\mathrm{R})$, soit $(\rho g)_{\mathrm{R}}$. Ainsi

$$[\rho(g \circ f)]_{\mathrm{R}} = (\rho g)_{\mathrm{R}} \circ (\rho f)_{\mathrm{R}} = [(\rho g) \circ (\rho f)]_{\mathrm{R}}.$$

C. Q. F. D.

Pour la composition, il n'y a donc aucun risque à identifier une loi polynome à une loi formelle.

Proposition VI.5. — *Quelles que soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{P})$, on a*

$$\omega(g \circ f) \geqq \omega(g)\, \omega(f).$$

Cela résulte immédiatement de la proposition VI.4, en appliquant la propriété (*e*).

Il sera utile de savoir que les premières composantes homogènes de $g \circ f$ ne dépendent que des premières composantes homogènes de f et de g. De façon précise :

Proposition VI.6. — *Soient deux lois formelles :*

$$f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \quad \textit{et} \quad g \in \mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{P}).$$

Posons $\omega(f) = d$ et $\omega(g) = d'$. Soient p et q des entiers $\geqq 1$. Alors, pour tout entier n vérifiant

$$1 \leqq n \leqq \inf[q + dd' - d,\ d(p+1) - 1],$$

on a

$$(a) \qquad \pi^n(g \circ f) = \pi^n(\pi^p g \circ \pi^q f).$$

On vérifie d'abord la proposition si $q < d - 1$. Dans ce cas, en effet, $\pi^q f = 0$ et le second membre de (*a*) est nul. Le premier membre est nul aussi, car

$$n \leqq q + dd' - d < d - 1 + dd' - d = dd' - 1 < dd' \leqq \omega(g \circ f).$$

Supposons donc maintenant $q \geqq d - 1$.

Posons

$$g - \pi^p g = g' \quad \text{et} \quad f - \pi^q f = f';$$

alors

$$\omega(g') \geqq p + 1 \quad \text{et} \quad \omega(f') \geqq q + 1.$$

Pour une algèbre R, pour $r \in \mathrm{R}$ et pour $z \in \mathrm{M}(\mathrm{R})$, on a

$$(\pi^p g \circ \pi^q f)_{\mathrm{R}}(zr) = g_{\mathrm{R}}(f_{\mathrm{R}}(zr) - f'_{\mathrm{R}}(zr)) - g'_{\mathrm{R}}(f_{\mathrm{R}}(zr) - f'_{\mathrm{R}}(zr)).$$

Mais $f_{\mathrm{R}}(zr)$ [resp. $f'_{\mathrm{R}}(zr)$] est de la forme ar^d (resp. br^{q+1}) et l'on a

$$(\pi^p g \circ \pi^q f)(zr) = g_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}) - g'_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}).$$

Écrivons

$$g_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}) = \sum_{k \geqq d'} (\pi_k g)_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}).$$

En notant ν et ν' les lois polynomes identiques sur N et sur un autre exemplaire N′ de N, on sait que la loi polynome $(\pi_k g)(\nu + \nu')$ est égale à une somme $\sum_{h=0}^{k} \mathrm{G}_{k-h,h}(\nu, \nu')$, où $\mathrm{G}_{k-h,h}$ est bihomogène, de bidegré $(k-h, h)$.

Cette décomposition entraîne une décomposition analogue pour $\pi_k g$ considérée comme loi formelle. D'autre part,

$$\mathrm{G}_{k,0}(\nu, \nu') = (\pi_k g)(\nu).$$

On a donc

$$g_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}) = \sum_{k \geqq d'} (\pi_k g)_{\mathrm{R}}(ar^d) + \sum_{k \geqq d'} \sum_{h=1}^{k} (G_{k-h,h})_{\mathrm{R}}(a, -b)\, r^{(k-h)d + h(q+1)}.$$

La première sommation est égale à

$$g_{\mathrm{R}}(ar^d) = (g \circ f)_{\mathrm{R}}(zr).$$

Dans la double sommation, on a

$$(k-h)d + h(q+1) = kd + h(q+1-d) \geqq d'd + q + 1 - d.$$

On peut donc y mettre $r^{dd'+q+1-d}$ en facteur, d'où une relation de la forme

$$g_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}) = (g \circ f)(zr) + cr^{dd'+q+1-d}.$$

D'autre part, on a

$$g'_{\mathrm{R}}(ar^d - br^{q+1}) = g'_{\mathrm{R}}[(a - br^{q+1-d})\, r^d],$$

ce qui est de la forme $c'r^{d(p+1)}$.

Posons

$$m = \inf[q + dd' - d,\ d(p+1) - 1].$$

On a donc une relation de la forme

$$(\pi^p g \circ \pi^q f_{\mathrm{R}}(zr) = (g \circ f)_{\mathrm{R}}(zr) + c'' r^{m+1}.$$

Cette relation prouve que

$$\omega(\pi^p g \circ \pi^q f - g \circ f) \geqq m + 1,$$

c'est-à-dire que

$$\pi^n(g\circ f)=\pi^n(\pi^p g\circ \pi^q f) \qquad \text{pour} \quad n \leqq m,$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Pour* $n \geqq 1$, *on a*

$$\pi^n(g\circ f)=\pi^n(\pi^n g\circ \pi^n f).$$

Il suffit d'appliquer la proposition VI.6 avec $n=p=q$.

Il résulte ceci de ce corollaire : Soient

$$f_0 \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \qquad \text{et} \qquad g_0 \in \mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{P})$$

deux lois formelles. Quand f parcourt le voisinage $f_0+\mathcal{O}^{n+1}\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ de f_0 et quand g parcourt le voisinage $g_0+\mathcal{O}^{n+1}\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ de g_0, alors $g\circ f$ reste dans le voisinage $g_0\circ f_0+\mathcal{O}^{n+1}\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ de $g_0\circ f_0$. Par conséquent :

PROPOSITION VI.7. — *L'application de* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})\times\mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{P})$ *dans* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ *définie par* $(f, g)\to g\circ f$ *est continue* (*et même uniformément continue*) *pour les topologies formelles.*

9. INTERPRÉTATION DES LOIS FORMELLES SUR UN COUPLE (M, N) QUAND M EST UN MODULE LIBRE DE DIMENSION FINIE. — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M. On sait que $\mathcal{P}_k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est alors isomorphe au produit tensoriel de N par le module des polynomes homogènes de degré k en les indéterminées $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n$. A la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de M correspond donc *un isomorphisme des modules* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *et* $\mathrm{N}\otimes \mathrm{A}_+((\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n))$, où $\mathrm{A}_+((\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n))$ désigne le module des *séries formelles sans terme constant* à coefficients dans A, en les indéterminées $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n$. Nous dirons qu'un élément de $\mathrm{N}\otimes \mathrm{A}_+((\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n))$ est une série formelle à coefficients dans N.

Soit une loi formelle $f\in\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ correspondant, pour la base $(e_1, \ldots, e_n)$, à la série formelle (à coefficients dans N)

$$\mathrm{S}=\sum_{k_1+\ldots+k_n>0} a_{k_1,\ldots,k_n}\otimes \mathrm{T}_1^{k_1}\ldots\mathrm{T}_n^{k_n}.$$

Si R est une algèbre, et si $z\in\mathrm{M}(\mathrm{R})$ s'écrit (de manière unique)

$$z=e_1\otimes r_1+\ldots+e_n\otimes r_n,$$

on aura

$$f_{\mathrm{R}}(z)=\sum_{k_1+\ldots+k_n>0} a_{k_1,\ldots,k_n}\otimes r_1^{k_n}\ldots r_n^{k_n} \quad \text{(sommation finie)}.$$

Si le module N est, lui aussi, libre et de dimension finie, de base $(e'_1, \ldots, e'_m)$, écrivons plutôt

$$\mathrm{S}=\sum_{k=1}^{m} e'_k\otimes \mathrm{S}_k(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{S}_k\in \mathrm{A}_+((\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n)).$$

Soit $g \in \mathcal{F}$ (N, P) une autre loi formelle, correspondant (relativement à la base des e'_k) à la série formelle (à coefficients dans P)

$$S' = \sum_{h_1 + \ldots + h_m > 0} b_{h_1, \ldots, h_m} \otimes T_1^{h_1} \ldots T_m^{h_m}.$$

Il est clair que la loi formelle $g \circ f$ sur le couple (M, P) est définie, relativement à la base des e_i, par la série formelle

$$S'' = \sum_{h_1 + \ldots + h_m > 0} b_{h_1, \ldots h_m} \otimes S_1^{h_1} \ldots S_m^{h_m}.$$

On voit ainsi que, dans le cas considéré, *la notion de composition pour les lois formelles se ramène à la notion de substitution de séries formelles aux indéterminées d'une série formelle* (*cf.* Bourbaki, *Algèbre*, chap. IV, § 5).

10. Lois formelles définies de manière implicite. — Soient trois A-modules M, N, P et une loi formelle $f \in \mathcal{F}$ (M$\times$N, P). Pour tout couple d'entiers r et s vérifiant $r \geqq 0$, $s \geqq 0$, $r + s \geqq 1$, on désignera par $\pi_{r,s} f$ la composante bihomogène de bidegré (r, s) de la loi polynome $\pi_{r+s} f$. En particulier, $\pi_{0,1} f$ est un élément de $\mathcal{P}_{0,1}$ (M$\times$N, P).

Dans tout ce paragraphe, nous désignerons respectivement par m et n les lois polynomes identiques sur les modules M et N. Alors, si

$$g \in \mathcal{P}_{0,1} \mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}),$$

on aura

$$g(m, n) = g(0, n) = \alpha(n), \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathcal{L}(\mathrm{N}, \mathrm{P}).$$

Réciproquement, si l'on part d'un $\alpha \in \mathcal{L}$ (N, P), la relation $g(m, n) = \alpha(n)$ définit un élément g de $\mathcal{P}_{0,1}$ (M$\times$N, P). *On identifiera donc les deux modules* $\mathcal{P}_{0,1}$ (M$\times$N, P) *et* $\mathcal{L}$ (N, P).

Théorème VI.3 (théorème des fonctions implicites). — *Soient trois* A-*modules* M, N, P *et une loi formelle* $f \in \mathcal{F}$ (M$\times$N, P). *Si l'application linéaire* $\pi_{0,1} f$ *de* N *dans* P *est bijective, il existe une loi formelle* $g \in \mathcal{F}$ (M, N) *et une seule telle qu'on ait* $f(m, g(m)) = 0$. [*On dit alors que* g *est la loi formelle définie implicitement par la relation* $f(m, g) = 0$.]

Posons $\pi_{0,1} f = \alpha \in \mathcal{L}$ (N, P), et soit $\alpha^{-1} = \beta \in \mathcal{L}$ (P, N).

Considérons la loi formelle $f' = \beta \circ f \in \mathcal{F}$ (M$\times$N, N). On a $f = \alpha \circ f'$, de sorte que les relations $f(m, g) = 0$ et $f'(m, g) = 0$ sont équivalentes. Comme on a, visiblement,

$$\pi_{0,1} f' = \beta \circ \pi_{0,1} f = \beta \circ \alpha = n,$$

on voit qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier où l'on a $\mathrm{P} = \mathrm{N}$ et $\pi_{0,1} f = n$. Nous nous placerons en conséquence dans cette hypothèse.

La relation $f(m, g) = 0$ est équivalente à l'ensemble des équations R_k

$$\pi^k[f(m, g)] = 0 \qquad (k \geqq 1).$$

Nous poserons, pour la loi formelle inconnue g, $\pi_k g = g_k$. Nous posons aussi

$$f(m, n) = h_1(m) + n + h(m, n), \qquad \text{avec} \quad \omega(h) \geqq 2.$$

Quelle que soit g, on a donc

$$f(m, g) = h_1(m) + g + h(m, g).$$

L'équation R_1 s'écrit $h_1(m) + g_1 = 0$. Elle détermine donc g_1 de manière unique : $g_1 = -h_1(m)$.

Supposons que, pour $k \geqq 2$, les $(k-1)$ premières équations n'aient porté que sur $g_1, \ldots, g_{k-1}$, et qu'elles en aient permis le calcul de manière unique. Nous allons montrer que l'équation R_k n'introduit, comme inconnue nouvelle, que g_k et qu'elle en détermine le calcul de manière unique. Il est alors clair que le théorème sera démontré. Or, on a

$$\pi^k[f(m, g)] = h_1(m) + \pi^k g + \pi^k[h(m, g)].$$

D'autre part, $h(m, g) = h(m \oplus g(m))$. Appliquons la proposition VI.6 avec les données suivantes : $n = k$, $p = k$, $q = k - 1$ ($d = 1$, $d' \geqq 2$) qui, on le vérifie, sont satisfaisantes. On obtient

$$\pi^k[h(m, g)] = \pi^k[(\pi^k h)(m, \pi^{k-1}g)].$$

L'équation R_k donne alors

$$g_k = -h_1(m) - (g_1 + \ldots + g_{k-1}) - \pi^k[(\pi^k h)(m, g_1 + \ldots + g_{k-1})].$$

C. Q. F. D.

Nous illustrerons ce théorème par une situation qui n'est plus générale qu'en apparence. Soient p et q des entiers $\geqq 1$. Considérons q lois formelles $f_1, \ldots, f_q$ sur le couple $(M^p \times N^q, P)$. Cette donnée équivaut à celle de la loi formelle $f = f_1 \oplus \ldots \oplus f_q$ sur le couple $(M^p \times N^q, P^q)$. Posons

$$\pi_{0,1} f_i = \alpha_i \, (\in \mathcal{L}(N^q, P)), \qquad \text{alors} \quad \pi_{0,1} f = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_q.$$

Dire que $\pi_{0,1} f : N^q \to P^q$ est bijective revient donc à dire que l'application $\alpha : N^q \to P^q$ définie par

$$(y_1, \ldots, y_q) \to (\alpha_1(y_1, \ldots, y_q), \ldots, \alpha_q(y_1, \ldots, y_q)) \qquad (y_i \in N)$$

est bijective. Supposons qu'il en soit ainsi. D'après le théorème VI.3, il existe alors une loi formelle unique $g \in \mathcal{F}(M^p, N^q)$, c'est-à-dire un système unique de lois formelles $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{F}(M^p, N)$ telles que

$$f(m_1, \ldots, m_p; g_1(m_1, \ldots, m_p), \ldots, g_q(m_1, \ldots, m_p)) = 0.$$

Soient maintenant Q un autre module et p lois formelles

$$h_1, \ldots, h_p \in \mathcal{F}(\mathrm{Q}, \mathrm{M}).$$

On aura aussi

$$f(h_1, \ldots, h_p; g_1(h_1, \ldots, h_p), \ldots, g_q(h_1, \ldots, h_p)) = 0,$$

avec

$$g_i(h_1, \ldots, h_p) = \mathrm{G}_i \in \mathcal{F}(\mathrm{Q}, \mathrm{N}).$$

Résumons :

Corollaire au théorème VI.3. — *Soient* M, N, P, Q *quatre* A-*modules, p et q des entiers* ≥ 1. *Soient, pour $i = 1, \ldots, q$, q lois formelles*

$$f_i = f_i(m_1, \ldots, m_p; n_1, \ldots, n_q) \in \mathcal{F}(\mathrm{M}^p \times \mathrm{N}^q, \mathrm{P}).$$

Posons $\pi_{0,1} f_i = \alpha_i$ ($\in \mathcal{L}(\mathrm{N}^q, \mathrm{P})$). *Supposons que l'application linéaire* α *de* N^q *dans* P^q *définie par*

$$\alpha(y_1, \ldots, y_q) = (\alpha_1(y_1, \ldots, y_q), \ldots, \alpha_q(y_1, \ldots, y_q)) \qquad (y_i \in \mathrm{N})$$

soit bijective. Alors, quelles que soient les lois formelles

$$h_1, \ldots, h_p \in \mathcal{F}(\mathrm{Q}, \mathrm{M}),$$

il existe un système unique de lois formelles

$$\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_q \in \mathcal{F}(\mathrm{Q}, \mathrm{N})$$

telles que

$$\begin{gathered} f_1(h_1, \ldots, h_p; \mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q(h_1, \ldots, h_p; \mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_q) = 0. \end{gathered}$$

Nous donnerons encore une autre application du théorème VI.3. Soit une loi formelle $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. *Nous disons que* « f est bijective » *s'il existe une loi formelle (nécessairement unique)* $g \in \mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ *telle que* $g \circ f = m$ et $f \circ g = n$.

Proposition VI.8 (théorème du jacobien). — *Pour une loi formelle* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. L'application linéaire $\pi_1 f$ *de* M *dans* N *est bijective;*

b. f *est bijective;*

c. Pour toute algèbre R, *l'application* $f_{\mathrm{R}} : \mathrm{M}(\mathrm{R}) \to \mathrm{N}(\mathrm{R})$ *est bijective.*

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit F la loi formelle sur le couple $(\mathrm{N} \times \mathrm{M}, \mathrm{N})$ définie par

$$\mathrm{F}(n, m) = n - f(m).$$

Alors, $\pi_{0,1} \mathrm{F} = -\pi_1 f$ est une application linéaire bijective de M dans N. Il existe donc une loi formelle et une seule

$$g \in \mathcal{F}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) \qquad \text{telle que} \quad \mathrm{F}(n, g(n)) = n - f(g(n)) = 0.$$

Autrement dit, $f \circ g = n$. En particulier,

$$\pi_1 (f \circ g) = \pi_1 f \circ \pi_1 g = n.$$

Par conséquent, $\pi_1 g$ est l'application linéaire inverse de $\pi_1 f$; elle aussi est bijective. Il existe donc une loi formelle $f' \in \mathcal{F}$ (M, N) telle que $g \circ f' = m$. Mais alors

$$f' = n \circ f' = f \circ g \circ f' = f \circ m = f,$$

de sorte qu'aussi $g \circ f = m$.

C. Q. F. D.

$(b) \Rightarrow (c)$: Si $f \circ g = n$ et $g \circ f = m$, alors

$$f_{\mathrm{R}} \circ g_{\mathrm{R}} = \varepsilon_{\mathrm{N} \otimes \mathrm{R}} \quad \text{et} \quad g_{\mathrm{R}} \circ f_{\mathrm{R}} = \varepsilon_{\mathrm{M} \otimes \mathrm{R}}.$$

L'application f_{R} est donc bijective; son inverse est g_{R}.

$(c) \Rightarrow (a)$: Prenons pour R l'algèbre des polynomes tronqués, sans termes constants, à une indéterminée T vérifiant $\mathrm{T}^2 = 0$. Tout élément de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{R} = \mathrm{M}(\mathrm{R})$ se met de manière unique sous la forme $x \otimes \mathrm{T}$ $(x \in \mathrm{M})$ et l'on a

$$f_{\mathrm{R}} (x \otimes \mathrm{T}) = \sum_{k \geq 1} (\pi_k f)_{\mathrm{R}} (x \otimes \mathrm{T}) = (\pi_1 f)_{\mathrm{R}} (x \otimes \mathrm{T}) = (\pi_1 f)(x) \otimes \mathrm{T}.$$

Si f_{R} est bijective, il est clair que $\pi_1 f$ l'est aussi.

C. Q. F. D.

11. Polarisation. Contraction. Différentielles des lois formelles. — Nous prions le lecteur de bien vouloir se reporter un instant au chapitre II et de relire brièvement les paragraphes 1, 2 et 4. Les définitions données s'appliquent, telles quelles, aux lois formelles; seulement, dans la définition de la différentielle, à savoir

$$\mathrm{D} f = \sum_{p=0}^{\infty} \Pi^{p,1} f,$$

la sommation est à considérer comme une sommation topologique (on a en effet, $\omega(\Pi^{p,1} f) = p + 1$, de sorte que la série est bien convergente).

Pour la loi formelle $\Pi_2 f = f \circ (m + m')$, il est clair que

$$\omega(\Pi_2 f) \geq \omega(f).$$

Or, $\mathrm{D}f$ est constituée de certaines composantes bihomogènes de $\Pi_2 f$. On a donc aussi $\omega(\mathrm{D}f) \geq \omega(f)$. Par conséquent :

Proposition VI.9. — *L'application $f \to \mathrm{D}f$ est continue pour les topologies formelles.*

CHAPITRE VII.

Formes et transformations formelles.

1. L'algèbre des formes formelles sur un module. — Pour tout A-module M, nous notons $\mathfrak{F}$ (M) le module $\mathfrak{F}$ (M, A) des lois formelles sur le couple (M, A). Un élément de $\mathfrak{F}$ (M) s'appellera une *forme formelle* sur le module M.

Comme dans le cas du module $\mathfrak{L}$ (M) des formes polynomes, on munit $\mathfrak{F}$ (M) d'une structure d'*algèbre* commutative et associative sur A (*cf.* chap. V). Pour f et $g \in \mathfrak{F}$ (M), leur produit fg vérifie, pour toute algèbre R, la relation

$$(fg)_{\mathrm{R}} = f_{\mathrm{R}} \cdot g_{\mathrm{R}}$$

L'algèbre $\mathfrak{L}_+$(M) des formes polynomes sans termes constants est une sous-algèbre de $\mathfrak{F}$ (M).

En se reportant au chapitre V, la démonstration du théorème V.1 se transpose à vue, et l'on a :

Théorème VII.1. — *L'isomorphisme canonique entre les modules $\mathfrak{F}$ (M) et $\Gamma_+^\star$ (M) est aussi un isomorphisme d'algèbres.*

Proposition VII.1. — *Pour deux formes formelles f et $g \in \mathfrak{F}$ (M) on a les propriétés suivantes :*

a. Pour tout entier $n \geqq 1$,

$$\pi_n(fg) = \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k f . \pi_{n-k} g;$$

b. $\omega(fg) \geqq \omega(f) + \omega(g)$;

c. $\pi^n(fg) = \pi^n(\pi^{n-1} f . \pi^{n-1} g)$.

La propriété *a* est triviale. Elle entraîne visiblement *b* et *c*.

De *c* découle aussi (comme au chapitre VI pour $f \circ g$) la

Proposition VII.2. — *L'application de $\mathfrak{F}$ (M) $\times$ $\mathfrak{F}$ (M) dans $\mathfrak{F}$ (M) définie par $(f, g) \to fg$ est continue (et même uniformément continue) pour la topologie formelle.*

Relativement à la différentielle d'un produit, on a la relation

$$\mathrm{D}(fg)(m, m') = f(m)\,\mathrm{D}g(m, m') + g(m)\,\mathrm{D}f(m, m').$$

En effet, cette relation a déjà été établie pour les formes polynomes. Comme $\mathfrak{L}_+$(M) est dense dans $\mathfrak{F}$ (M), et en vertu des propositions VI.9 et VII.2, elle se prolonge par continuité à $\mathfrak{F}$ (M) tout entier.

2. Transformations formelles ou champs formels. — Nous désignons par $\mathfrak{C}$ (M) le module $\mathfrak{F}$ (M, M) des lois formelles sur le couple (M, M).

Un élément de $\mathfrak{T}(M)$ s'appellera une *transformation formelle* sur le module M, ou encore un *champ formel* sur le module M.

[Cette double dénomination est justifiée par le fait que, dans le cas d'un espace vectoriel ou complexe de dimension finie, $\mathfrak{T}(M)$ s'apparente tantôt à l'espace des applications analytiques de M dans M, tantôt à l'espace des champs de vecteurs analytiques sur l'espace M.]

Outre la structure de A-module, il existe sur $\mathfrak{T}(M)$ une structure multiplicative définie par l'opération : $(f, g) \to f \circ g$. Cette multiplication est *associative* et *linéaire par rapport au premier facteur*. La loi identique m est un élément neutre pour cette multiplication.

Le sous-ensemble de $\mathfrak{T}(M)$ formé des transformations formelles *bijectives* est un groupe, noté $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$ et appelé le *groupe formel du module* M. Le groupe $\mathrm{Gl}(M)$ des automorphismes du module M est un sous-groupe du groupe $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$. D'après le théorème du jacobien (chap. VI), un élément de $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$ est la somme d'un élément quelconque de $\mathrm{Gl}(M)$ et d'un élément quelconque de $\mathcal{O}^2\mathfrak{T}(M)$.

3. Dérivation par rapport a un champ formel. — Soient deux A-modules M et N et un champ formel $\alpha \in \mathfrak{T}(M)$. Pour une loi formelle $f \in \mathcal{F}(M, N)$, considérons la loi formelle $g \in \mathcal{F}(M, N)$ définie par

$$g(m) = (\mathrm{D}f)(m, \alpha(m)).$$

On dit que *g est la dérivée de f par rapport au champ formel α*, et l'on écrit : $g = \mathcal{L}_\alpha f$.

L'application $\mathcal{L}_\alpha : f \to \mathcal{L}_\alpha f$ est un endomorphisme du module $\mathcal{F}(M, N)$ que nous appelons la *dérivation par rapport au champ α*.

Proposition VII.3. — *L'application de $\mathfrak{T}(M)$ dans* $\mathrm{End}\,\mathcal{F}(M, N)$ *définie par $\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$ est linéaire.*

En effet, en vertu de la linéarité de la différentielle par rapport au second argument, on voit que $(\mathrm{D}f)(m, \alpha)$ dépend linéairement de α.

Proposition VII.4. — *L'application bilinéaire*

$$\mathfrak{T}(M) \times \mathcal{F}(M, N) \to \mathcal{F}(M, N)$$

définie par $(\alpha, f) \to \mathcal{L}_\alpha f$ est continue pour les topologies formelles.

En effet, $\mathcal{L}_\alpha f = (\mathrm{D}f)(m, \alpha)$ dépend continûment du couple $(\mathrm{D}f, \alpha)$, donc aussi, d'après la continuité de D, du couple (f, α).

Proposition VII.5. — *Pour toute application linéaire*

$$f \in \mathcal{L}(M, N) = \mathfrak{L}_1(M, N)$$

on a

$$\mathcal{L}_\alpha f = f \circ \alpha.$$

En effet, on sait que dans ce cas

$$(\mathrm{D}f)\,(m,\ m') = f(m').$$

4. L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS FORMELS. — Appliquons les notions précédentes au cas où $N = M$. Alors, à tout champ formel $\alpha \in \mathfrak{T}(M)$ correspond un endomorphisme $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathfrak{T}(M)$.

DÉFINITION. — Soient deux champs formels α et $\beta \in \mathfrak{T}(M)$. Nous appelons *crochet* de α et de β, et nous notons $[\alpha,\ \beta]$, le champ formel sur M défini par

$$[\alpha,\ \beta] = \mathcal{L}_\alpha \beta - \mathcal{L}_\beta \alpha.$$

Remarque. — Pour tout module M, on sait qu'on définit sur End M une structure d'algèbre de Lie en posant, pour deux endomorphismes u et v de M,

$$[u,\ v] = u \circ v - v \circ u.$$

Par la suite, nous ferons d'ailleurs un usage systématique de cette notation. Or, considérons le cas où, dans la définition précédente, α et β sont, plus précisément, des endomorphismes de M. Compte tenu de la proposition VII.5, la définition donne

$$[\alpha,\ \beta] = \beta \circ \alpha - \alpha \circ \beta.$$

Ainsi, le *crochet de α et de β, considérés comme lois formelles, est opposé au crochet de α et de β, considérés comme endomorphismes.* Dans toute la suite, chaque fois qu'un crochet $[\alpha,\ \beta]$ se présentera, avec α et $\beta \in \mathfrak{T}_1(M)$, c'est toujours du crochet en tant que lois formelles qu'il s'agira.

Nous reconnaissons que cette situation est fâcheuse, mais nous n'y pouvons rien. En principe, on pourrait sauver cette situation en prenant, pour définir le crochet de deux champs, la valeur opposée à celle que nous donnons. Mais alors, c'est le théorème suivant qui se trouverait modifié, et ce serait plus fâcheux encore.

THÉORÈME VII.2. — *Soient* M *et* N *deux* A-*modules. Soient* α *et* $\beta \in \mathfrak{T}(M)$ *deux champs formels sur* M. *Alors, dans le module des endomorphismes de* $\mathfrak{F}(M,\ N)$ *on a*

$$[\mathcal{L}_\alpha,\ \mathcal{L}_\beta] = \mathcal{L}_{[\alpha,\ \beta]}.$$

Soit R une algèbre. Posons $R' = R[T]/(T^2)$; tout élément de R' s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $r + sT$ $(r,\ s \in R)$ et R est une sous-algèbre de R'. De même, $M(R)$ est un sous-module de $M(R')$. Soient $f \in \mathfrak{F}(M,\ N)$, z et $z' \in M(R)$. On a, d'après la définition d'une différentielle,

$$f_{R[T]}(z + z'T) = f_R(z) + (\mathrm{D}f)_R(z,\ z')\,T + \ldots.$$

En transformant les deux membres par $(\varepsilon_N \otimes q)$, où q est l'application canonique quotient de R (T) sur R', on a

$$f_{R'}(z+z'T) = f_R(z) + (Df)_R(z, z')T.$$

Prenons $z' = \alpha_R(z)$. Il vient

$$(1)\qquad f_{R'}(z+\alpha_R(z)T) = f_R(z) + (\mathcal{L}_\alpha f)_R(z)T.$$

Maintenant, soit S une autre indéterminée et posons

$$R'' = R'[S]/(S^2) \qquad (= R[S, T]/(T^2), (S^2)).$$

Pour $Z \in M(R')$ on a, de même,

$$(2)\qquad f_{R''}(Z+\alpha_{R'}(Z)S) = f_{R'}(Z) + (\mathcal{L}_\alpha f)_{R'}(Z)S.$$

Prenons

$$Z = z + \beta_R(z)T, \qquad \text{avec} \quad z \in M(R).$$

Alors, d'après (1), le second membre de (2) est égal à

$$(3)\qquad f_R(z) + (\mathcal{L}_\beta f)_R(z)T + (\mathcal{L}_\alpha f)_R(z)S + (\mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha f)_R(z)ST.$$

Comme, d'après (1),

$$\alpha_{R'}(Z) = \alpha_R(z) + (\mathcal{L}_\beta \alpha)_R(z)T,$$

le premier membre de (2) est égal à

$$(4)\qquad f_{R''}[z + \beta_R(z)T + \alpha_R(z)S + (\mathcal{L}_\beta \alpha)_R(z)ST].$$

Mais dans R'' on a $(ST)^2 = 0$; le même raisonnement que celui qui nous a conduit à (1) permet d'écrire

$$(4)\quad f_{R''}[z+\beta_R(z)T+\alpha_R(z)S] + (Df)_{R''}[z+\beta_R(z)T+\alpha_R(z)S, (\mathcal{L}_\beta\alpha)_R(z)]ST.$$

Mais comme $S^2 = T^2 = 0$, seule importe, dans le coefficient de ST, la partie indépendante de S et de T; par la spécialisation $S \to 0$, $T \to 0$, on voit donc que le second terme de (4) est égal à

$$(Df)_R[z, (\mathcal{L}_\beta\alpha)_R(z)]ST = (\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\beta\alpha} f)_R(z)ST.$$

En égalant les coefficients de ST dans (3) et dans (4), il vient

$$(\mathcal{L}_\beta\mathcal{L}_\alpha f)_R(z) = (\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\beta\alpha} f)_R(z) + \text{coefficient de ST dans } f_{R''}(z+\beta_R(z)T+\alpha_R(z)S).$$

Maintenant, récrivons la même égalité en échangeant les rôles de α et β d'une part, de S et T d'autre part; nous obtenons

$$(\mathcal{L}_\alpha\mathcal{L}_\beta f)_R(z) = (\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\alpha\beta} f)_R(z) + \text{coefficient de ST dans } f_{R''}(z+\beta_R(z)T+\alpha_R(z)S).$$

Par soustraction, il vient

$$[(\mathcal{L}_\alpha\mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta\mathcal{L}_\alpha)f]_R(z) = [(\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\alpha\beta} - \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\beta\alpha})f]_R(z).$$

D'où

$$\mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{[\alpha, \beta]}.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME VII.3. — *a. Muni de la loi interne* $(\alpha, \beta) \to [\alpha, \beta]$, $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *est une algèbre de Lie.*

b. L'application $\mathcal{L} : \mathcal{C}(\mathrm{M}) \to \mathrm{End}\,\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *définie par* $\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$ *est un monomorphisme d'algèbres de Lie.*

c. L'injection canonique de End M *dans* $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *est un monomorphisme de l'algèbre de Lie* End M *dans l'algèbre de Lie opposée à* $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

Nous savons (prop. VII.3) que $\mathcal{L}$ est linéaire. En outre, $\mathcal{L}$ est injective, car si $\mathcal{L}_\alpha = 0$ on a, d'après la proposition VII.5, $\alpha = \mathcal{L}_\alpha m = 0$. Si donc, par $\mathcal{L}$, on identifie $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ à un sous-module de End $\mathcal{C}(\mathrm{M})$, le théorème VII.2 montre que le crochet défini dans $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ n'est autre que le crochet induit par celui de End $\mathcal{C}(\mathrm{M})$. Cela prouve *a* et *b*. Quant à *c*, il résulte d'une remarque faite au début de ce paragraphe.

5. L'OPÉRATEUR $\eta(\alpha)$. — Soient deux A-modules M et N, et un champ formel $\alpha \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$. Nous désignons par $\eta(\alpha)$ l'application de $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ dans lui-même définie par

$$\eta(\alpha) f = f \circ \alpha.$$

PROPOSITION VII.6. — *Pour tout* $\alpha \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, $\eta(\alpha)$ *est un endomorphisme du module* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. *L'application* $\eta : \alpha \to \eta(\alpha)$ *de* $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *dans* End $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *vérifie*

$$\eta(\alpha \circ \beta) = \eta(\beta) \circ \eta(\alpha);$$

elle induit un homomorphisme du groupe $\mathcal{G}\,\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *dans le groupe opposé du groupe des automorphismes de* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

Toutes ces propriétés sont évidentes.

6. LES $\mathcal{L}$-DÉRIVATIONS ET LES η-ENDOMORPHISMES DE L'ALGÈBRE $\mathcal{F}(\mathrm{M})$. — Nous revenons à l'algèbre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ des formes formelles sur le module M.

PROPOSITION VII.7. — *Pour tout champ formel* $\alpha \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, *l'endomorphisme* $\mathcal{L}_\alpha$ *de* $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ *est une dérivation d'algèbre. L'application* $\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$ *est un homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ *dans l'algèbre de Lie des dérivations de* $\mathcal{F}(\mathrm{M})$.

Pour f et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, on sait que

$$\mathrm{D}(fg)(m, m') = f(m)\,\mathrm{D}g(m, m') + g(m)\,\mathrm{D}f(m, m').$$

En substituant $\alpha(m)$ à m', on démontre la première assertion. La seconde résulte de la proposition VII.3 et du théorème VII.2.

Définition. — Toute dérivation de l'algèbre $\mathcal{F}$ (M) qui est de la forme $\mathcal{L}_\alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{C}$ (M) s'appellera une *$\mathcal{L}$-dérivation de* $\mathcal{F}$ (M).

Proposition VII.8. — *Pour tout* $\alpha \in \mathcal{C}$ (M), *l'endomorphisme* $\eta(\alpha)$ *de* $\mathcal{F}$ (M) *est un endomorphisme d'algèbre.*

Il suffit de vérifier, et c'est immédiat, que pour f et $g \in \mathcal{F}$ (M) on a

$$(fg) \circ \alpha = (f \circ \alpha)(g \circ \alpha).$$

Définition. — Tout endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{F}$ (M) qui est de la forme $\eta(\alpha)$, avec $\alpha \in \mathcal{C}$ (M) s'appellera un *η-endomorphisme* de $\mathcal{F}$ (M).

Proposition VII.9. — *Si* M *est un module libre de dimension finie, alors :*

1° *Toute dérivation de l'algèbre* $\mathcal{F}$ (M) *est une $\mathcal{L}$-dérivation. L'application de* $\mathcal{C}$ (M) *dans l'ensemble des dérivations de* $\mathcal{F}$ (M) *définie par* $\alpha \rightarrow \mathcal{L}_\alpha$ *est bijective.*

2° *Tout endomorphisme de l'algèbre* $\mathcal{F}$ (M) *est un η-endomorphisme. L'application* η *de* $\mathcal{C}$ (M) *dans l'ensemble des endomorphismes de l'algèbre* $\mathcal{F}$ (M) *est bijective; elle induit une bijection du groupe* $\mathcal{G}\mathcal{C}$ (M) *sur le groupe des automorphismes de l'algèbre* $\mathcal{F}$ (M).

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M. D'après ce qui a été vu au chapitre VI (§ 9), on peut identifier le module $\mathcal{F}$ (M) au module $A_+((T_1, \ldots T_n))$. Si $f \in \mathcal{F}$ (M), et si $\varphi \in \Gamma_+^*$ (M) est la forme linéaire associée à f, f se trouve identifiée à la série formelle

$$F = \sum_{k_1, \ldots, k_n} \varphi(e_1^{[k_1]} \ldots e_n^{[k_n]}) T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}.$$

Lemme. — *L'identification considérée est compatible avec les structures d'algèbres.*

En effet, d'une part, elle est compatible avec les topologies formelles; d'autre part, on sait déjà que, restreinte aux formes polynomes, elle est compatible avec les structures d'algèbres.

Cela étant :

1° Soit d une dérivation de $\mathcal{F}$ (M). Par isomorphisme, elle correspond à une dérivation Δ de $A_+((T_1, \ldots, T_n))$. Celle-ci est de la forme

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial T_i}, \qquad A_i \in A_+((T_1, \ldots T_n)).$$

Pour la série formelle F, on peut donc écrire

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial F}{\partial T_i} = (DF)(T_1, \ldots, T_n; A_1, \ldots, A_n).$$

Or, soit α la transformation formelle sur M qui est identifiée à la série formelle $e_1 \otimes A_1 + \ldots + e_n \otimes A_n$. Il est clair que $(Df)(m, \alpha)$ est identifié à ΔF. Donc,

$$df = \mathcal{L}_\alpha f \quad \text{et} \quad d = \mathcal{L}_\alpha.$$

Toute dérivation de $\mathcal{F}(M)$ est donc une $\mathcal{L}$-dérivation. En outre, le système des A_i étant unique, α est unique et le 1° est démontré.

2° Soit u un endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$. Il correspond à u un endomorphisme U de l'algèbre $A_+((T_1, \ldots, T_n))$. Posons $U(T_i) = A_i$. Alors

$$(UF)(T_1, \ldots, T_n) = F(A_1, \ldots, A_n).$$

Il en résulte que $uf = f \circ \alpha$, où α est la transformation formelle qui s'identifie à la série formelle $e_1 \otimes A_1 + \ldots + e_n \otimes A_n$ (*cf.* chap. VI, § 9). Tout endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ est donc un η-endomorphisme. Et comme le système des A_i est déterminé par U, α est déterminé par u : η est bijectif.

On sait déjà que, si $\alpha \in \mathcal{G}\mathcal{T}(M)$, alors $\eta(\alpha)$ est un automorphisme. Mais la réciproque est immédiate : on raisonne sur η^{-1} comme on l'a fait sur η. La proposition est donc démontrée.

CHAPITRE VIII.

L'exponentielle des dérivations et des champs.

Dans tout ce chapitre, l'anneau A sera soit le corps des *nombres réels*, soit le corps des *nombres complexes*. Nous entendons par « espace vectoriel » un espace vectoriel sur A.

1. Rappels. — Sur tout espace vectoriel V de dimension finie existe une topologie naturelle définie comme suit : après le choix d'une base dans V, la topologie de V est la topologie induite par l'isomorphisme $V \simeq A^n$ défini par la base, A^n étant lui-même muni de sa topologie d'espace produit. On peut définir cette topologie par une norme, par exemple euclidienne ou hermitienne, notée $\| \;\|$. Alors V est un espace de Banach. Sur l'espace de dimension finie End V, la topologie naturelle peut être définie par la norme

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|.$$

On en déduit

$$\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|,$$

d'où résulte la convergence, dans End V, de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^n}{n!}$. La somme de cette série est un automorphisme qu'on note e^f ou $\exp f$. Si f et $g \in \operatorname{End} V$ commutent, on sait que $\exp(f+g) = \exp f . \exp g$, formule obtenue en utilisant la formule du binome et la convergence absolue des séries qui interviennent. Nous démontrons le lemme suivant, lui aussi bien connu :

LEMME. — *Si* V *est une algèbre de dimension finie* (*non nécessairement commutative ou associative*), *si* $D \in \operatorname{End} V$ *est une dérivation de* V, *alors* $\exp D$ *est un automorphisme d'algèbre.*

Pour v et $w \in V$, on a, en effet,

$$
\begin{aligned}
(\exp D)(vw) &= \sum_{n \geq 0} \frac{D^n}{n!}(vw) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!}(D^k v)(D^{n-k} w) \quad \text{(formule de Leibnitz)} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!}(D^n v).(D^m w) \quad \text{(d'après l'absolue convergence)} \\
&= (\exp D)\, v . (\exp D)\, w.
\end{aligned}
$$

2. LES TOPOLOGIES SIMPLES. — Soient M et N deux espaces vectoriels de dimensions finies. Pour tout entier n, on munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n(M, N)$ (qui est de dimension finie) de sa topologie naturelle. On munit ensuite l'espace vectoriel

$$\mathcal{F}(M, N) = \prod_{n \geq 1} \mathcal{L}_n(M, N)$$

de sa topologie d'espace produit. Cette topologie sur $\mathcal{F}(M, N)$ s'appellera la *topologie simple*. Elle est compatible avec la structure d'espace vectoriel et, si $N = A$, elle est compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{F}(M)$.

Dire qu'une suite f_n converge vers f dans $\mathcal{F}(M, N)$ signifie que, pour tout entier $k \geq 1$, la suite $\pi^k f_n$ tend vers $\pi^k f$ dans l'espace de dimension finie des lois polynomes de degré $\leq k$.

Enfin nous munirons l'espace $\operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$ de la topologie de la convergence simple, que nous appellerons plus brièvemnet la topologie simple de $\operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$.

PROPOSITION VIII.1. — *Pour qu'une suite* u_n *soit convergente dans* $\operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$ *il faut et il suffit que, pour tout* $k \geq 1$ *et pour toute* $f \in \mathcal{F}(M, N)$, *la suite* $\pi^k u_n f$ *soit convergente dans l'espace des lois polynomes de degré* $\leq k$.

La condition est, naturellement, nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit g_k la limite de $\pi^k u_n f$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\pi^k \pi^{k+1} u_n f = \pi^k u_n f;$$

en passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient $\pi^k g_{k+1} = g_k$. Il existe donc

$$g \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N}), \qquad \text{avec} \quad g_k = \pi^k g.$$

La relation $\pi^k u_n f \to \pi^k g$ montre alors que $u_n f \to g$. Il est trivial de voir que g dépend linéairement de f : $g = uf$, avec $u \in \operatorname{End} \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Alors, dans $\operatorname{End} \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, la suite u_n tend vers u.

3. L'exponentielle de la dérivation par rapport a un champ formel.

Proposition VIII.2. — *Soient* M *et* N *deux espaces vectoriels de dimension finie et soit* $\alpha \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$ *un champ formel sur* M. *Soit* $\partial = \mathcal{L}_\alpha$ *la dérivation par rapport au champ* α *dans* $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. *Alors, dans l'espace* $\operatorname{End} \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ *muni de la topologie simple, la série* $\sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n}{n!}$ *est convergente.*

Pour tout entier $k \geq 1$, désignons par $\mathcal{F}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ l'espace des lois polynomes de degré $\leq k$. On peut, de manière naturelle, identifier $\mathcal{F}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ à l'espace quotient $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})/\mathcal{O}^{k+1}\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Or, l'espace $\mathcal{O}^{k+1}\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est stable par ∂ ; en effet, la relation $\partial f = \mathrm{D}f(m, \alpha)$ montre que

$$\omega(\partial f) \geq \omega(f).$$

Il en résulte, par passage aux quotients, un endomorphisme ∂_k de $\mathcal{F}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, on ait

$$\pi^k \partial f = \partial_k \pi^k f.$$

On en déduit, par récurrence sur n : $\pi^k \partial^n f = \partial_k^n \pi^k f$ et, pour tout entier $p \geq 1$, on a donc

$$\pi^k \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\partial^n}{n!} \right) f = \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\partial_k^n}{n!} \right) \pi^k f.$$

Donc

$$\lim_{p \to \infty} \pi^k \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\partial^n}{n!} \right) f = (\exp \partial_k)\, \pi^k f.$$

D'après la proposition VIII.1, la proposition VIII.2 est démontrée.

Définition. — Si $\partial = \mathcal{L}_\alpha$ est la dérivation de $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ par rapport au champ α, l'endomorphisme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{n!}$ de $\mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ s'appellera l'« exponentielle » de $\mathcal{L}_\alpha$ et il se notera $\exp \mathcal{L}_\alpha$.

PROPOSITION VIII.3. — *Pour tout* $\alpha \in \mathfrak{T}(M)$, $\exp \mathcal{L}_\alpha$ *est un automorphisme de l'espace vectoriel* $\mathcal{F}(M, N)$. *Si* $\alpha, \beta \in \mathfrak{T}(M)$ *vérifient* $[\alpha, \beta] = 0$, *alors*

$$\exp(\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}_\beta) = (\exp \mathcal{L}_\alpha)(\exp \mathcal{L}_\beta).$$

D'après le théorème VII.2, la relation $[\alpha, \beta] = 0$ entraîne que $\mathcal{L}_\alpha$ et $\mathcal{L}_\beta$ commutent. Posons $\partial = \mathcal{L}_\alpha$, $\partial' = \mathcal{L}_\beta$; il est bien clair que ∂_k et ∂'_k commutent aussi. Or, $\exp \partial$ est caractérisé par la relation

$$\text{pour tout } k \geq 1, \qquad \pi^k \circ \exp \partial = (\exp \partial_k) \circ \pi^k.$$

Donc

$$\pi^k \circ \exp(\partial + \partial') = \exp(\partial_k + \partial'_k) \circ \pi^k = \exp \partial_k \circ \exp \partial'_k \circ \pi^k = \pi^k \circ \exp \partial \circ \exp \partial'.$$

La seconde partie de la proposition en résulte; la première partie découle alors de ce que $\exp \mathcal{L}_{-\alpha}$ $(= \exp - \mathcal{L}_\alpha)$ est l'inverse de $\exp \mathcal{L}_\alpha$.

Remarque. — On démontrerait d'une manière toute semblable que, si $[\alpha, \beta] = 0$, alors $\mathcal{L}_\beta$ commute avec $\exp \mathcal{L}_\alpha$.

4. CAS DE L'ALGÈBRE $\mathcal{F}(M)$. — Les résultats du paragraphe 3 s'appliquent en particulier, lorsque M est de dimension finie, au cas de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$.

THÉORÈME VIII.1. — *Soit* M *un espace vectoriel de dimension finie et soit* $\mathcal{L}_\alpha$ *une dérivation de l'algèbre* $\mathcal{F}(M)$. *Alors, l'automorphisme* $\exp \mathcal{L}_\alpha$ *de l'espace vectoriel* $\mathcal{F}(M)$ *est aussi un automorphisme d'algèbre.*

Nous utilisons les notations du paragraphe 3. Notons que $\mathcal{O}^{k+1}\mathcal{F}(M)$ est un idéal de $\mathcal{F}(M)$ (*cf.* chap. VII, prop. 1, *b*). Par passage au quotient il en résulte une structure d'algèbre sur $\mathcal{F}^k(M)$; on peut dire que c'est l'algèbre des formes polynomes tronquées au degré *n*. Nous posons $\mathcal{L}_\alpha = \partial$.

LEMME. — *Pour tout entier* $k \geq 1$, ∂_k *est une dérivation de* $\mathcal{F}^k(M)$.

Désignons par $\star$ le signe la multiplication dans $\mathcal{F}^k(M)$. Pour f et g dans $\mathcal{F}^k(M)$ on a $f \star g = \pi^k(fg)$ et

$$\partial_k(f \star g) = \partial_k \pi^k(fg) = \pi^k \partial(fg) = \pi^k[f.\partial g + g.\partial f].$$

D'après la proposition VII.1, ce dernier terme est aussi égal à

$$\pi^k(f.\pi^k \partial g + g.\pi^k \partial f) = f \star \pi^k \partial g + g \star \pi^k \partial f = f \star \partial_k g + g \star \partial_k f.$$

C. Q. F. D.

Le lemme du paragraphe 1 montre alors que $\exp \partial_k$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{F}^k(M)$. Pour f et $g \in \mathcal{F}(M, N)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\pi^k \circ \exp \partial(fg) &= (\exp \partial_k)\,\pi^k(fg) \\
&= (\exp \partial_k)[(\pi^k f) \star (\pi^k g)] = [(\exp \partial_k)\,\pi^k f] \star [(\exp \partial_k)\,\pi^k g] \\
&= (\pi^k \circ \exp \partial.f) \star (\pi^k \circ \exp \partial.g) = \pi^k[(\exp \partial.f)(\exp \partial.g)].
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp \partial (fg) = (\exp \partial) f . (\exp \partial) g.$$

C. Q. F. D.

5. L'exponentielle d'un champ formel. — Soit $\alpha \in \mathcal{C}(M)$ un champ formel sur l'espace vectoriel M de dimension finie. Il lui correspond une dérivation $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{F}(M)$. Celle-ci détermine un automorphisme $\exp \mathcal{L}_\alpha$ de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$. La proposition VII.9 indique alors que $\exp \mathcal{L}_\alpha$ est l'image, par l'application η définie au chapitre VII (§ 5), d'un élément unique de $\mathcal{G}\mathcal{C}(M)$.

Définition. — Pour tout champ formel $\alpha \in \mathcal{C}(M)$, nous appelons *exponentielle* de α et désignons par $\exp \alpha$ l'unique élément de $\mathcal{G}\mathcal{C}(M)$ défini par

$$\exp \alpha = \eta^{-1} (\exp \mathcal{L}_\alpha).$$

Pour toute $f \in \mathcal{F}(M)$, on peut donc écrire

$$(\exp \mathcal{L}_\alpha) f = f \circ \exp \alpha.$$

Proposition VIII.4. — *Soient* M *et* N *deux espaces vectoriels de dimension finie et soit* α *un champ formel sur* M. *Dans l'espace* End $\mathcal{F}(M, N)$ *on a la relation*

$$\exp \mathcal{L}_\alpha = \eta (\exp \alpha).$$

Autrement dit, pour toute $f \in \mathcal{F}(M, N)$, *on a*

$$(\exp \mathcal{L}_\alpha) f = f \circ \exp \alpha.$$

Soit, en effet, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de N. Il existe un isomorphisme évident entre les espaces $\mathcal{F}(M, N)$ et $N \otimes \mathcal{F}(M)$, de telle sorte qu'un élément f de $\mathcal{F}(M, N)$ s'écrit (et d'une seule manière) sous la forme

$$f = e_1 \otimes f_1 + \ldots + e_n \otimes f_n, \qquad f_i \in \mathcal{F}(M).$$

Il est clair que

$$D f (m, m') = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes D f_i (m, m'),$$

donc

$$\mathcal{L}_\alpha f = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \mathcal{L}_\alpha f_i.$$

Il en résulte que

$$(\exp \mathcal{L}_\alpha) f = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (\exp \mathcal{L}_\alpha) f_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f_i \circ \exp \alpha) = f \circ \exp \alpha.$$

Proposition VIII.5. — *Soit* $\alpha \in \mathfrak{T}(\mathrm{M})$. *En désignant par* m *la loi identique de* M *on a*

$$\exp \alpha = (\exp \mathcal{L}_\alpha)\, m.$$

Dans l'espace $\mathfrak{T}(\mathrm{M})$, *la relation* $[\alpha, \beta] = 0$ *entraîne*

$$\mathcal{L}_\beta \exp \alpha = \beta \circ \exp \alpha.$$

La première assertion résulte de la proposition VIII.4 où l'on prend $f = m$. Cette formule s'écrit aussi

$$\exp \alpha = m + \sum_{k \geq 1} \frac{(\mathcal{L}_\alpha)^{k-1}}{k!} \alpha \qquad (\text{car } \mathcal{L}_\alpha m = \alpha).$$

On obtient ainsi un procédé de construction directe pour $\exp \alpha$.
Pour la seconde relation, on peut écrire

$$\beta \circ \exp \alpha = (\exp \mathcal{L}_\alpha)\, \beta = (\exp \mathcal{L}_\alpha)\, \mathcal{L}_\beta m = \mathcal{L}_\beta (\exp \mathcal{L}_\alpha)\, m = \mathcal{L}_\beta (\exp \alpha)$$

(on a utilisé le fait que $\mathcal{L}_\alpha$ et $\mathcal{L}_\beta$ commutent et la remarque à la fin du paragraphe 3).

Remarque. — Supposons, plus spécialement, que $\alpha \in \mathfrak{T}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{End}\, \mathrm{M}$. On a (*cf.* prop. VII.5)

$$\mathcal{L}_\alpha m = \alpha; \qquad \ldots; \qquad (\mathcal{L}_\alpha)^k m = \alpha^k.$$

Il est alors clair que $(\exp \mathcal{L}_\alpha)\, m = \exp \alpha$ (au sens de l'exponentielle d'un endomorphisme). Autrement dit, dans le cas considéré, la notation $\exp \alpha$ (sans précision supplémentaire) est cohérente : l'application exponentielle de $\mathfrak{T}(\mathrm{M})$ dans $\mathcal{G}\,\mathfrak{T}(\mathrm{M})$ est un *prolongement de* l'application exponentielle de End M dans Gl (M).

Proposition VIII.6. — *Pour deux champs formels* α *et* β *dans* $\mathfrak{T}(\mathrm{M})$, *la relation* $[\alpha, \beta] = 0$ *entraîne*

$$\exp(\alpha + \beta) = \exp \alpha \circ \exp \beta.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \exp(\alpha + \beta) &= \exp(\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}_\beta)\, m = (\exp \mathcal{L}_\beta)(\exp \mathcal{L}_\alpha)\, m \quad (\text{prop. VIII.3}) \\ &= (\exp \mathcal{L}_\beta) \exp \alpha = \exp \alpha \circ \exp \beta. \end{aligned}$$

6. L'adjointe d'un champ formel et son exponentielle. — Soit un champ formel $\alpha \in \mathfrak{T}(\mathrm{M})$. Conformément à une définition valable dans toute algèbre de Lie, nous désignons par $\mathrm{ad}\, \alpha$ et nous appellerons « application linéaire adjointe » de α (ou *adjointe* de α) l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{T}(\mathrm{M})$ défini par

$$(\mathrm{ad}\, \alpha)\, \beta = [\alpha, \beta].$$

On sait que l'application $\alpha \to \operatorname{ad} \alpha$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{C}(M)$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathcal{C}(M)$.

PROPOSITION VIII.7. — *Soit α un champ formel sur l'espace vectoriel* M *de dimension finie. Dans l'espace* $\operatorname{End} \mathcal{C}(M)$ *muni de la topologie simple, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} \alpha)^n}{n!}$ *est convergente.*

On démontre cette proposition exactement comme il a été fait pour la proposition VIII.2; il suffit auparavant, et c'est immédiat, de vérifier que les sous-espaces $\mathcal{O}^{k+1} \mathcal{C}(M)$ sont stables par $\operatorname{ad} \alpha$.

DÉFINITION. — La somme de la série considérée dans la proposition VIII.7 s'appelle l'*exponentielle* de $\operatorname{ad} \alpha$ et se note $\exp \operatorname{ad} \alpha$.

THÉORÈME VIII.2. — *Soient* M *et* N *deux espaces vectoriels de dimension finie. Quels que soient les champs formels α et $\beta \in \mathcal{C}(M)$, on a la relation suivante entre éléments de* $\operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$:

$$\mathcal{L}_{(\exp \operatorname{ad} \alpha)\beta} = \eta(\exp \alpha) \circ \mathcal{L}_\beta \circ \eta(\exp - \alpha).$$

LEMME 1. — *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel* V *de dimension finie. Soit* $\operatorname{ad} u$ *l'endomorphisme de* End V *défini par*

$$(\operatorname{ad} u)\, v = [u, v].$$

Considérons l'élément $\exp \operatorname{ad} u \in \operatorname{End} \operatorname{End} V$. *Alors, pour tout* $v \in \operatorname{End} V$, *on a*

$$(\exp \operatorname{ad} u)\, v = \exp u \circ v \circ \exp - u.$$

Soient, en effet, λ_u et μ_u les endomorphismes de End V définis par

$$\lambda_u v = uv \qquad \text{et} \qquad \mu_u v = vu.$$

On vérifie que λ_u et μ_u commutent. Or,

$$\operatorname{ad} u = \lambda_u - \mu_u, \qquad \text{donc} \quad \exp \operatorname{ad} u = \exp \lambda_u \circ \exp - \mu_u.$$

Mais on voit trivialement que

$$(\exp \lambda_u)\, v = (\exp u) \circ v \qquad \text{et que} \qquad (\exp - \mu_u)\, v = v \circ \exp - u,$$

d'où le lemme.

LEMME 2. — *Pour tout* $u \in \operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$, *posons*

$$\rho_\alpha u = \mathcal{L}_\alpha u - u \mathcal{L}_\alpha.$$

Alors, dans $\operatorname{End} \mathcal{F}(M, N)$, *la série* $\sum_{n \geq 0} \frac{\rho_\alpha^n}{n!} \mathcal{L}_\beta$ *est convergente vers un élément v. On a*

$$v = \eta(\exp \alpha) \circ \mathcal{L}_\beta \circ (\exp - \alpha).$$

Soit $f \in \mathcal{F}(M, N)$. Posons

$$\mathcal{L}_\alpha = \partial, \qquad \mathcal{L}_\beta = \partial'.$$

On utilise les notations du paragraphe 3. On a

$$\pi^k(\rho_\alpha \partial') f = \pi^k(\partial\partial' - \partial'\partial) f = (\partial_k \partial'_k - \partial'_k \partial_k)\pi^k f = [(\mathrm{ad}\,\partial_k)\partial'_k]\pi^k f.$$

Par récurrence sur n, on obtient

$$\pi^k(\rho_\alpha^n \partial') f = [(\mathrm{ad}\,\partial_k)^n \partial'_k]\pi^k f$$

et

$$\pi^k\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\rho_\alpha^n}{n!}\partial'\right) f = \left[\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{(\mathrm{ad}\,\partial_k)^n}{n!}\right)\partial'_k\right]\pi^k f.$$

Quand $p \to +\infty$, le second membre converge vers

$$\begin{aligned}[(\exp \mathrm{ad}\,\partial_k)\partial'_k]\pi^k f &= (\exp \partial_k \circ \partial'_k \circ \exp - \partial_k)\pi^k f \quad \text{(lemme 1)}\\ &= \pi^k(\exp \partial \circ \partial' \circ \exp - \partial) f.\end{aligned}$$

D'après la proposition VIII.1, on peut donc affirmer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_\alpha^n}{n!}\partial'$ est convergente, dans $\mathrm{End}\,\mathcal{F}(M, N)$, vers un élément v; v est tel que, pour tout $k \geqq 1$,

$$\pi^k \circ v = \pi^k \circ \exp \partial \circ \partial' \circ \exp - \partial,$$

d'où

$$v = \exp \partial \circ \partial' \circ \exp - \partial = \exp \mathcal{L}_\alpha \circ \mathcal{L}_\beta \circ \exp - \mathcal{L}_\alpha.$$

C. Q. F. D.

Lemme 3. — *Si, dans* $\mathcal{C}(M)$, *une suite* γ_n *tend vers* γ, *alors, dans* $\mathrm{End}\,\mathcal{F}(M, N)$, *la suite* $\mathcal{L}_{\gamma_n}$ *tend vers* $\mathcal{L}_\gamma$.

Posons $\mathcal{L}_{\gamma_n} = \hat{\partial}_n$, $\mathcal{L}_\gamma = \hat{\partial}$. Pour $f \in \mathcal{F}(M, N)$, on a

$$\pi^k \hat{\partial}_n f = \pi^k D f(m, \gamma_n) = \pi^k[(\pi^k D f)(m, \pi^k \gamma_n)]$$

(*cf.* corollaire à la proposition VI.6).

Or, l'application de $\mathcal{C}^k(M)$ dans $\mathcal{F}^k(M, N)$ définie par

$$g \to \pi^k[(\pi^k D f)(m, g)]$$

est linéaire; elle est donc continue pour les topologies naturelles. Quand $n \to +\infty$, $\pi^k \gamma_n \to \pi^k \gamma$; donc

$$\pi^k \hat{\partial}_n f \to \pi^k[(\pi^k D f)(m, \pi^k \gamma) = \pi^k \hat{\partial} f.$$

Il résulte bien que $\hat{\partial}_n \to \hat{\partial}$.

On peut, maintenant, démontrer le théorème VIII.2. Avec la notation du lemme 2, le théorème VII.2 s'énonce

$$\rho_\alpha \mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{(\mathrm{ad}\,\alpha)\beta}.$$

Par récurrence sur n, on en déduit

$$\rho_\alpha^n \mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{(\mathrm{ad}\,\alpha)^n \beta}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{\rho_\alpha^n}{n!} \mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\sum_{n=0}^{p} \frac{(\mathrm{ad}\,\alpha)^n}{n!} \beta}.$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$ on a, d'après le lemme 2, la proposition VIII.7 et le lemme 3

$$\eta(\exp \alpha) \circ \mathcal{L}_\beta \circ \eta(\exp - \alpha) = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad}\,\alpha)\beta}.$$

Corollaire 1. — *Pour* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, α *et* $\beta \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, *on a*

$$\mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad}\,\alpha)\beta} f = [\mathcal{L}_\beta (f \circ \exp - \alpha)] \circ \exp \alpha.$$

Corollaire 2. — *Pour* α *et* $\beta \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, *on a*

$$(\exp \mathrm{ad}\,\alpha)\,\beta = [\mathcal{L}_\beta \exp - \alpha] \circ \exp \alpha.$$

C'est un cas particulier du corollaire 1 : on prend $\mathrm{N} = \mathrm{M}$ et $f = m$.

Corollaire 3. — *Si* $\alpha \in \mathcal{F}_1(\mathrm{M}, \mathrm{M})$, *on a*

$$(\exp \mathrm{ad}\,\alpha)\,\beta = \exp - \alpha \circ \beta \circ \exp \alpha.$$

On applique le corollaire 2 et la proposition VII.5.

Remarque. — Le crochet dans End M étant opposé au crochet dans $\mathcal{F}_1(\mathrm{M}, \mathrm{M})$, on remarque la différence qui en résulte entre la formule précédente et celle du lemme 1 ci-dessus.

Corollaire 4. — *Pour un système fini de champs formels* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, γ *dans* $\mathcal{C}(\mathrm{M})$, *la relation* $\prod_{i=1}^{n} \exp \alpha_i = \exp \gamma$ *entraîne*

$$\prod_{i=n}^{1} \exp \mathrm{ad}\,\alpha_i = \exp \mathrm{ad}\,\gamma.$$

En effet, pour tout $\beta \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, on a, dans End $\mathcal{C}(\mathrm{M})$, la relation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad}\,\alpha_n)\ldots(\exp \mathrm{ad}\,\alpha_1)\beta} &= \eta(\exp \alpha_n)\ldots\eta(\exp \alpha_1)\,\mathcal{L}_\beta\,\eta(\exp - \alpha_1)\ldots\eta(\exp - \alpha_n) \\
&= \eta(\exp \alpha_1 \circ \ldots \circ \exp \alpha_n)\,\mathcal{L}_\beta\,\eta(\exp - \alpha_n \circ \ldots \circ \exp - \alpha_1) \quad \text{(prop. VII.6)} \\
&= \eta(\exp \gamma)\,\mathcal{L}_\beta\,(\exp - \gamma) = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad}\,\gamma)\beta}.
\end{aligned}$$

Comme l'application $\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$ est injective (théorème VII.3, *b*), le corollaire 4 est démontré.

Corollaire 5. — *Pour deux champs formels* α *et* $\beta \in \mathcal{C}(M)$, *la relation* $[\alpha, \beta] = 0$ *entraîne*

$$(\exp \operatorname{ad} \alpha)(\exp \operatorname{ad} \beta) = \exp \operatorname{ad}(\alpha + \beta).$$

On applique le corollaire 4 avec $n = 2$,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \beta, \qquad \gamma = \alpha + \beta,$$

en tenant compte de la proposition VIII.6.

Corollaire 6. — *L'endomorphisme* $\exp \operatorname{ad} \alpha$ *de* $\mathcal{C}(M)$ *est aussi un automorphisme d'algèbre de Lie.*

Le corollaire 5 montre que $\exp \operatorname{ad} \alpha$ est un automorphisme dont l'inverse est $\exp \operatorname{ad} - \alpha$. Vérifions encore qu'il respecte le crochet. On a, pour β et $\gamma \in \mathcal{C}(M)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\exp \operatorname{ad} \alpha)[\beta, \gamma]} &= \eta(\exp \alpha)\, \mathcal{L}_{[\beta, \gamma]}\, \eta(\exp - \alpha)\\ &= \eta(\exp \alpha)\, \mathcal{L}_\beta\, \eta(\exp - \alpha) . \eta(\exp \alpha)\, \mathcal{L}_\gamma(\exp - \alpha)\\ &\quad - (\text{l'analogue obtenu en permutant } \beta \text{ et } \gamma).\\ &= [\mathcal{L}_{(\exp \operatorname{ad} \alpha)\beta}, \mathcal{L}_{(\exp \operatorname{ad} \alpha)\gamma}] = \mathcal{L}_{[(\exp \operatorname{ad} \alpha)\beta, (\exp \operatorname{ad} \alpha)\gamma]}.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

7. Les valeurs propres de l'adjointe d'un endomorphisme de M. — Dans ce paragraphe, nous supposons que le corps de base est le corps des nombres complexes.

Soit α un endomorphisme de M, considéré comme élément de $\mathcal{F}_1(M, M)$. Pour toute transformation formelle homogène $f \in \mathcal{T}_p(M, M)$, on a aussi

$$(\operatorname{ad} \alpha) f \in \mathcal{T}_p(M, M).$$

En effet, on voit immédiatement que les deux lois formelles

$$\mathcal{L}_f \alpha = \alpha \circ f \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_\alpha f = Df(m, \alpha)$$

sont homogènes de degré p.

Donc, pour tout entier $p \geqq 1$, $\operatorname{ad} \alpha$ induit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_p(M, M)$ qui est de dimension finie. En vue du problème particulier que nous avons l'intention de traiter plus loin, il nous sera utile de connaître les valeurs propres de cet endomorphisme.

Nous dirons d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de M qu'elle « triangule » l'endomorphisme α si la matrice de α dans B est une matrice triangulaire; de manière précise, s'il existe des scalaires a_{ij} $(j \leqq i)$ tels que

$$\alpha(e_j) = \sum_{i=j}^{n} a_{ij} e_i.$$

On sait qu'on peut toujours trouver une telle base B. Les valeurs propres de α sont alors les scalaires $\lambda_i = a_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Pour $i = 1, \ldots, n$ et pour tout système $h_1, \ldots, h_n$ d'entiers $\geqq 0$ vérifiant $h_1 + \ldots + h_n = p$ $(p \geqq 1)$, nous désignons par $f^i_{h_1, \ldots, h_n}$ l'élément de $\mathfrak{T}_p(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ défini par la relation

$$f^i_{h_1, \ldots, h_n}(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n) = e_i \otimes \mathrm{T}_1^{h_1} \ldots \mathrm{T}_n^{h_n}.$$

Il est clair que l'ensemble F de ces lois polynomes $f^i_{h_1, \ldots, h_n}$ est une base de $\mathfrak{T}_p(\mathrm{M}, \mathrm{M})$. Nous ordonnerons l'ensemble F par la relation d'ordre lexicographique relative à la suite $(i, h_1, \ldots, h_n)$, c'est-à-dire qu'on pose

$$f^i_{h_1, \ldots, h_n} \prec f^j_{k_1, \ldots, k_n}$$

si : ou bien $i < j$;

ou bien $i = j$ et $h_1 < k_1, \ldots$;

ou bien $i = j$ et $h_1 = k_1$ et $\ldots$ et $h_{n-1} = k_{n-1}$ et $h_n < k_n$.

Nous allons montrer que la base F ainsi ordonnée triangule l'endomorphisme $\operatorname{ad} \alpha$ et même, plus précisément, qu'elle triangule simultanément les endomorphismes

$$f \to \mathcal{L}_f \alpha \qquad \text{et} \qquad f \to \mathcal{L}_\alpha f.$$

1° Pour l'endomorphisme $f \to \mathcal{L}_f \alpha$:

Comme α est linéaire, on a $\mathcal{L}_f \alpha = \alpha \circ f$. Or

$$\begin{aligned}(\alpha \circ f^i_{h_1, \ldots, h_n})(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n) &= \alpha(e_i) \otimes \mathrm{T}_1^{h_1} \ldots \mathrm{T}_n^{h_n} \\ &= \sum_{j=i}^{n} a_{ji}\, e_j \otimes \mathrm{T}_1^{h_1} \ldots {}_n^{h_n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha \circ f^i_{h_1, \ldots, h_n} = \sum_{j=i}^{n} a_{ji} f^j_{h_1, \ldots, h_n}.$$

Il est ainsi prouvé que $\alpha \circ f^i_{h_1, \ldots, h_n}$ est une combinaison linéaire de $f^i_{h_1, \ldots, h_n}$ et des vecteurs de base qui le suivent; sa composante diagonale sur $f^i_{h_1, \ldots, h_n}$ est $a_{ii} = \lambda_i$.

2° Pour l'endomorphisme $f \to \mathcal{L}_\alpha f$:

On voit trivialement que

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D} f^i_{h_1, \ldots, h_n})(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n,\ e_1 \otimes \mathrm{T}'_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}'_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_k\, e_i \otimes \mathrm{T}_1^{h_1} \ldots \mathrm{T}_k^{h_k - 1} \ldots \mathrm{T}_n^{h_n} \mathrm{T}'_k.\end{aligned}$$

Pour obtenir

$$(\mathrm{D} f^i_{h_1, \ldots, h_n})(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n,\ \alpha(e_1 \otimes \mathrm{T}_1 + \ldots + e_n \otimes \mathrm{T}_n)),$$

il faut spécialiser $e_1 \otimes T'_1 + \ldots + e_n \otimes T'_n$ en

$$\alpha(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(e_j) \otimes T_j = \sum_{=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, e_k \otimes T_j,$$

c'est-à-dire spécialiser T'_k en $\sum_{j=1}^{k} a_{kj} T_j$. On obtient finalement

$$(\mathcal{L}_\alpha f^i_{h_1,\ldots,h_n})(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_n \otimes T_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} h_k\, e_i \otimes a_{kj}\, T_j\, T_1^{h_1} \ldots T_k^{h_k-1} \ldots T_n^{h_n},$$

d'où, en séparant les deux cas $j < k$ et $j = k$,

$$\mathcal{L}_\alpha f^i_{h_1,\ldots,h_n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} h_k\, a_{kj}\, f^i_{h_1,\ldots,h_j+1,\ldots,h_k-1,\ldots,h_n} + \left(\sum_{k=1}^{n} h_k\, a_{kk} \right) f^i_{h_1,\ldots,h_n}.$$

La première sommation est une combinaison de vecteurs de base venant *après* $f^i_{h_1,\ldots,h_n}$, et le terme restant est proportionnel à ce vecteur de base. L'assertion relative à la triangulation est donc démontrée. En outre, la composante diagonale de $\mathcal{L}_\alpha f^i_{h_1,\ldots,h_n}$ est représentée par le scalaire $\sum_{k=1}^{n} h_k \lambda_k$.

On voit ainsi que les valeurs propres de la restriction de ad α à $\mathfrak{T}_p(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ (qui sont données par les termes diagonaux, calculés plus haut) sont tous les nombres de la forme

$$\left(\sum_{k=1}^{n} h_k \lambda_k \right) - \lambda_i,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de α et où les systèmes d'entiers $(h_1, \ldots, h_n)$ sont les systèmes d'entiers tous $\geqq 0$ et vérifiant $h_1 + \ldots + h_n = p$. Sous cette forme, la même valeur propre est trouvée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Si l'on ne s'intéresse pas à l'ordre de multiplicité des valeurs propres, et ce sera notre cas, on peut dire :

PROPOSITION VIII.8. — *L'ensemble des valeurs propres de l'opérateur* ad α [*restreint à* $\mathfrak{T}_p(\mathrm{M}, \mathrm{M})$] *est l'ensemble des nombres de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \lambda_k,$$

où les λ_k sont les valeurs propres de α et où les systèmes d'entiers $(h_1, \ldots, h_n)$ considérés sont les systèmes d'entiers vérifiant

$$h_1 + \ldots + h_n = p - 1,$$

et qui sont tous $\geqq 0$ sauf au plus l'un d'eux qui peut être égal à -1.

8. Les groupes à un paramètre de transformations formelles. — Nous désignons par K un corps. Si $A = \mathbf{R}$, on prend $K = \mathbf{R}$; si $A = \mathbf{C}$, on prend $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$. Dans tous les cas, $K \subset A$.

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(M, N)$ étant muni de la topologie simple, nous pouvons parler d'applications continues ou dérivables de K dans $\mathcal{F}(M, N)$. Si $t \to \alpha(t)$ est une application dérivable de K dans $\mathcal{F}(M, N)$, $\frac{d\alpha}{dt}$ désignera l'application dérivée.

Pour qu'une application $t \to \alpha(t)$ de K dans $\mathcal{F}(M, N)$ soit dérivable, il faut et il suffit que, pour tout entier $p \geqq 1$, l'application $t \to \pi_p \alpha(t)$ de K dans $\mathcal{P}_p(M, N)$ soit dérivable [en un sens trivial, $\mathcal{P}_p(M, N)$ étant de dimension finie]; et l'on a alors

$$\pi_p \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \pi_p \alpha.$$

Si α est un champ formel sur M, l'application de K dans $\mathcal{G}\mathcal{T}(M)$ définie par $t \to \exp t\alpha$ est un homomorphisme de groupes. L'image de cette application, c'est-à-dire l'ensemble des applications formelles $\exp t\alpha$ $(t \in K)$ est donc un groupe abélien pour la loi de composition $\circ$.

Proposition VIII.9. — *Soient* M *et* N *deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\alpha \in \mathcal{T}(M)$ et $f \in \mathcal{F}(M, N)$ deux lois formelles. L'application de* K *dans* $\mathcal{F}(M, N)$ *définie par $t \to (\exp t\mathcal{L}_\alpha) f$ est dérivable et l'on a*

$$\frac{d}{dt}(\exp t\mathcal{L}_\alpha) f = \mathcal{L}_\alpha (\exp t\mathcal{L}_\alpha) f = (\exp t\mathcal{L}_\alpha) \mathcal{L}_\alpha f.$$

On pose $\mathcal{L}_\alpha = \partial$ et l'on définit ∂_k comme au paragraphe 3. Pour tout entier $k \geqq 1$, l'application $t \to \pi^k(\exp t\,\mathcal{L}_\alpha) f$ est dérivable, donc $t \to (\exp t\,\mathcal{L}_\alpha) f$ l'est aussi. En outre,

$$\begin{aligned}\pi^k \frac{d}{dt}(\exp t\,\mathcal{L}_\alpha) f &= \frac{d}{dt}(\exp t\,\partial_k)\,\pi^k f \\ &= \partial_k (\exp t\,\partial_k)\,\pi^k f \quad \text{(résultat classique)} = \pi^k(\partial \exp t\,\partial) f.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}(\exp t\mathcal{L}_\alpha) f = \mathcal{L}_\alpha (\exp t\mathcal{L}_\alpha) f;$$

de même pour l'autre égalité.

COROLLAIRE. — *Pour tout champ formel $\alpha \in \mathcal{T}(\mathrm{M})$, l'application de* K *dans $\mathcal{G}\,\mathcal{T}(\mathrm{M})$ définie par $t \to \exp t\alpha$ est dérivable et l'on a*

$$\frac{d}{dt}\exp t\alpha = \mathcal{L}_\alpha \exp t\alpha = \alpha \circ \exp t\alpha.$$

On voit cela en prenant, dans la proposition VIII.9, N = M et $f = m$ (loi identique), en tenant compte de la proposition VIII.5.

THÉORÈME VIII.3. — *Soient* M *un espace vectoriel de dimension finie et α un champ formel sur* M. *L'application de* K *dans $\mathcal{T}(\mathrm{M})$ définie par*

$$t \to \beta(t) = \exp t\alpha$$

est la seule solution de chacune des deux équations différentielles suivantes avec condition initiale :

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{L}_\alpha \beta(t) \qquad [\beta(0) = m] \quad (\textit{loi identique});$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{d}{dt}\beta(t) = \alpha \circ \beta(t) \qquad [\beta(0) = m].$$

Pour l'équation (I) : Cette équation équivaut à l'ensemble des équations

$$(\mathrm{I}_n) \qquad \pi^n \frac{d}{dt}\beta(t) = \pi^n \mathcal{L}_\alpha \beta(t); \qquad \pi^n \beta(0) = m \qquad (n \geqq 1).$$

Or il est clair que (I_n) s'écrit aussi

$$\frac{d}{dt}(\pi^n\beta) = \pi^n \mathcal{L}_\alpha(\pi^n\beta); \qquad \pi^n\beta(0) = m.$$

C'est là une équation différentielle linéaire en $\pi^n\beta$, avec condition initiale, posée dans l'espace de dimension finie $\mathfrak{T}^n(\mathrm{M}, \mathrm{M})$. On sait de manière classique que la solution est unique. La solution de (I) est donc unique aussi; or on en connaît une, à savoir $\beta(t) = \exp t\alpha$.

C. Q. F. D.

Pour l'équation (II) : On ne peut plus raisonner aussi simplement, car l'équation n'est plus linéaire.

LEMME. — *Soient $t \to \Phi(t)$* et *$t \to \Psi(t)$ deux applications dérivables de* K *dans $\mathcal{T}(\mathrm{M})$, de dérivées respectives $\Phi'(t)$ et $\Psi'(t)$. On suppose que pour tout t la transformation formelle $\Psi(t)$ est inversible. Alors l'application $t \to \Phi(t) \circ \Psi(t)$ dérivable et l'on a*

$$\frac{d}{dt}(\Phi \circ \Psi) = (\mathcal{L}_{\Psi' \circ \Psi^{-1}} \Phi + \Phi') \circ \Psi.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M et posons (formellement)

$$\begin{aligned}
\Phi(t)\,(e_1\otimes T_1+\ldots+e_n\otimes T_n) &= \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes S_i(T_1, \ldots, T_n;\, t) \\
\Psi(t)\,(e_1\otimes T_1+\ldots+e_n\otimes T_n) &= \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes R_i(T_1, \ldots, T_n;\, t)
\end{aligned} \qquad (S_i,\, R_i\in A_+((T_1, \ldots, T_n)))$$

Alors

$$(\Phi\circ\Psi)\,(e_1\otimes T_1+\ldots+e_n\otimes T_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes S_i(R_1, \ldots, R_n;\, t) \quad (\textit{cf.}\ \text{chap. VI, § 9}).$$

La dérivabilité de $\Phi\circ\Psi$ est évidente et l'on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\Phi\circ\Psi)\,(e_1\otimes T_1+\ldots+e_n\otimes T_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j}\right)(R_1, \ldots, R_n;\, t)\,\frac{\partial R_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes\left(\frac{\partial S_i}{\partial t}\right)(R_1, \ldots, R_n;\, t).
\end{aligned}$$

Cette relation montre que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\Phi\circ\Psi) &= (D\Phi)\left(\Psi, \frac{d\Psi}{dt}\right) + \frac{d\Phi}{dt}\circ\Psi = (D\Phi)\,(\Psi, \Psi'\circ\Psi^{-1}\circ\Psi) + \Phi'\circ\Psi \\
&= (\mathcal{L}_{\Psi'\circ\Psi^{-1}}\Phi)\circ\Psi + \Phi'\circ\Psi.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Revenons à l'équation (II). En prenant la partie homogène de degré 1 de chaque membre, il vient

$$\frac{d}{dt}\pi_1\beta(t) = (\pi_1\alpha)\circ(\pi_1\beta(t)), \qquad \text{avec} \quad \pi_1\beta(0) = m.$$

Nous avons, ici encore, une équation différentielle linéaire en $\pi_1\beta$ avec condition initiale. La solution, unique, est donc

$$\pi_1\beta = \exp t\pi_1\alpha.$$

Il en résulte que $\pi_1\beta$ est inversible et, d'après le théorème du jacobien, que β l'est aussi. Il est donc possible d'appliquer le lemme, en prenant $\Phi = \beta^{-1}$ et $\Psi = \beta$. Il vient ainsi

$$0 = \frac{d}{dt}(\beta^{-1}\circ\beta) = \left(\mathcal{L}_{\frac{d\beta}{dt}\circ\beta^{-1}}\beta^{-1} + \frac{d\beta^{-1}}{dt}\right)\circ\beta^{-1}.$$

Composons à droite avec β et tenons compte de l'équation (II); nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\beta^{-1} = -\mathcal{L}_\alpha\beta^{-1}, \qquad \text{avec} \quad \beta^{-1}(0) = m.$$

D'après les résultats obtenus concernant l'équation (I), nous avons donc

$$\beta^{-1}(t) = \exp - t\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \beta(t) = \exp t\alpha.$$

C. Q. F. D.

Théorème VIII.4. — *Tout homomorphisme du groupe* K *dans le groupe* $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$ *qui est dérivable à l'origine est de la forme* $t \to \exp t\alpha$, *où* $\alpha \in \mathfrak{T}(M)$ *est unique.*

L'unicité est immédiate, car

$$\frac{d}{dt}\exp t\alpha = \alpha \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

Soit $t \to \beta(t)$ un homomorphisme de K dans $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$. On a, pour t et $h \in K$,

$$\frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h} = \frac{\beta(h) - m}{h} \circ \beta(t).$$

Posons $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)(0) = \alpha$. Il est alors clair que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h} = \alpha \circ \beta(t),$$

ce qui prouve que $\frac{d\beta}{dt}$ existe et qu'on a

$$\frac{d\beta}{dt} = \alpha \circ \beta(t), \qquad \text{avec} \quad \beta(0) = m.$$

Le théorème VIII.3 montre alors que $\beta(t) = \exp t\alpha$.

C. Q. F. D.

9. Le problème de l'itération continue des transformations formelles. — Soit $f \in \mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$ une transformation formelle inversible sur l'espace vectoriel M de dimension finie. Pour tout entier n, posons $\beta(n) = f^{\circ n}$. Les transformations formelles $\beta(n)$ constituent la famille des *itérées* de f, d'ordre entier positif, négatif ou nul [on pose $\beta(0) = m$] L'application $n \to \beta(n)$ est un homomorphisme du groupe additif des entiers dans le groupe $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$. Peut-on prolonger cet homomorphisme en un homomorphisme du groupe K dans $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$? La question se ramène à celle-ci : trouver un homomorphisme $t \to \beta(t)$ de K dans $\mathcal{G}\mathfrak{T}(M)$ tel qu'on ait $f = \beta(1)$. Il est naturel d'imposer à $\beta(t)$ des conditions de régularité supplémentaires. Nous demanderons, en outre, à $\beta(t)$ d'être dérivable à l'origine. Alors, le théorème VIII.4 nous montre que le problème posé se ramène finalement au suivant : trouver un élément α de $\mathfrak{T}(M)$ tel qu'on ait $f = \exp \alpha$.

L'étude de cette question constitue l'objet du paragraphe suivant.

10. Étude de l'équation : $\exp \alpha = \beta$. — Nous étudierons ce problème dans le cas où le corps de base est celui des nombres complexes.

Nous supposons donnée une transformation formelle β sur l'espace vectoriel M de dimension finie. Nous posons, pour tout entier $n \geqq 1$, $\pi_n \beta = \beta_n$. Par hypothèse, β appartient à $\mathcal{G}\mathcal{T}(M)$, c'est-à-dire que β_1 est un automorphisme de l'espace vectoriel M.

Nous recherchons les champs formels $\alpha \in \mathcal{T}(M)$ tels que $\beta = \exp \alpha$. Pour le champ formel inconnu α, nous poserons $\pi_n \alpha = \alpha_n$.

Le principe de la méthode utilisée est le suivant : dans une première étape, nous résolvons l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \mathcal{L}_\alpha \varphi; \qquad \varphi(0) = m,$$

où $t \to \varphi(t)$ est une application de la droite réelle dans $\mathcal{T}(M)$; nous laissons, provisoirement, α indéterminé. Nous savons, d'après ce qui précède, que la solution unique est $\varphi(t) = \exp t\alpha$. Dans une seconde étape, nous déterminons α de telle sorte que la solution $\varphi(t)$ trouvée vérifie, en outre, la condition $\varphi(1) = \beta$.

Du point de vue théorique, il semble que cette méthode soit vaine puisqu'en dernier ressort le problème qui se pose se traduit par la relation « $\beta = \exp \alpha$ »; il ne semble pas que nous ayons modifié le problème de quelque façon.

En fait, les deux étapes seront menées de front, et c'est par ce biais que nous obtiendrons des informations supplémentaires sur la résolution du problème. Il se trouve, en effet, que l'équation (E) est équivalente à une succession d'équations $(E_1), \ldots, (E_n), \ldots$. On pose $\pi_n \varphi = \varphi_n$. L'équation (E_1) ne fait intervenir, de φ et de α, que les composantes φ_1 et α_1. A ce stade, on commence donc par résoudre l'équation différentielle (E_1) en laissant α_1 indéterminé (1re étape); puis, on passe tout de suite à la seconde étape en déterminant α_1 de telle sorte que $\varphi_1(1) = \beta_1$. L'équation (E_2) ne porte que sur φ_2 et α_2 (encore inconnus) et sur φ_1 et α_1 (désormais connus). On résout l'équation pour obtenir φ_2 en laissant provisoirement α_2 indéterminé; puis on détermine α_2 par la relation $\varphi_2(1) = \beta_2$. Et le procédé se poursuit ainsi, assurant à chaque étape (si c'est possible), la connaissance d'une composante supplémentaire de φ (ce qui est sans grand intérêt final) et d'une composante supplémentaire de α (ce qui construit de proche en proche la solution α cherchée).

Ce principe exposé, passons à l'application. Nous commençons par transformer l'équation (E) en posant

$$\varphi(t) = (\exp t\mathcal{L}_{\alpha_1})\psi(t) = \psi(t) \circ \exp t\alpha_1.$$

On a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathcal{L}_{\alpha_1}(\exp t\mathcal{L}_{\alpha_1})\psi(t) + (\exp t\mathcal{L}_{\alpha_1})\frac{d\psi}{dt},$$

ainsi qu'on s'en convainc en appliquant l'opérateur π^k aux deux membres, soit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathcal{L}_{\alpha_1}\varphi + \frac{d\psi}{dt}\circ \exp t\alpha_1.$$

Posons $\alpha' = \alpha - \alpha_1$. L'équation (E) est alors équivalente à l'équation

$$\frac{d\psi}{dt}\circ \exp t\alpha_1 = \mathcal{L}_{\alpha'}\varphi; \qquad \psi(0) = m,$$

ou encore

$$\frac{d\psi}{dt} = [\mathcal{L}_{\alpha'}(\psi(t)\circ \exp t\alpha_1)]\circ \exp - t\alpha_1 = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha'}\psi(t)$$

(corollaire 1 au théorème VIII.2).

Le problème est donc ramené au suivant :

Première étape : Résoudre l'équation

$$\text{(E')} \qquad \frac{d\psi}{dt} = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha'}\psi; \qquad \psi(0) = m.$$

Deuxième étape : Déterminer α de telle sorte que

$$\psi(1) = \beta\circ \exp - \alpha_1.$$

Nous désignons par (E_n) l'équation obtenue en ne prenant, dans (E'), que la composante homogène de degré n des deux membres. L'équation (E') est alors équivalente à la suite des équations suivantes (on pose $\pi_n\psi = \psi_n$)

$$(E_1) \qquad \frac{d}{dt}\psi_1 = 0; \qquad \psi_1(0) = m;$$

$$(E_2) \qquad \frac{d}{dt}\psi_2 = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha_2}\psi_1; \qquad \psi_2(0) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots;$$

$$(E_n) \qquad \frac{d}{dt}\psi_n = \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha_2}\psi_{n-1} + \ldots + \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha_{n-1}}\psi_2 + \mathcal{L}_{(\exp \mathrm{ad} - t\alpha_1)\alpha_n}\psi_1; \qquad \psi_n(0) = 0;$$

1° Équation (E_1) : La solution unique est $\psi_1(t) = m$. Écrivons la condition supplémentaire

$$\psi_1(1) = \beta_1\circ \exp - \alpha_1.$$

Alors, α_1 doit satisfaire à la relation

$$\exp \alpha_1 = \beta_1.$$

Ainsi, il faut que α_1 soit un endomorphisme de M dont l'exponentielle est β_1. Comme β_1 est supposé inversible, le problème est toujours possible et admet une infinité de solutions (nous donnons, en appendice, une méthode qui permet de déterminer tous les « logarithmes » d'un automorphisme donné de M).

Le problème qui nous préoccupe est donc indéterminé dès le départ. A toutes fins utiles, nous faisons choix d'un quelconque endomorphisme α_1 de M dont l'exponentielle soit β_1 et nous poursuivons la résolution du problème.

2° Équation (E_n) $(n \geqq 2)$: Supposons que nous ayons résolu les équations $E_1, \ldots, E_{n-1}$ et que les conditions aux limites pour $t = 1$ aient permis de déterminer des lois polynomes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ convenables. Qu'arrivera-t-il au rang n ?

Posons

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \mathcal{L}_{(\exp \operatorname{ad} - t\alpha_1)} \alpha_2 \psi_{n-1} + \ldots + \mathcal{L}_{(\exp \operatorname{ad} - t\alpha_1)} \alpha_{n-1} \psi_2 \qquad && \text{si} \quad n > 2; \\ &= 0 && \text{si} \quad n = 2. \end{aligned}$$

La loi polynome $u_n(t)$, homogène de degré n, est connue par hypothèse. Compte tenu de (E_1), l'équation (E_n) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\psi_n = u_n(t) + (\exp \operatorname{ad} - t\alpha_1)\,\alpha_n; \qquad \psi_n(0) = 0.$$

Son intégration est immédiate et la condition supplémentaire

$$\psi_n(1) = \beta_n \circ \exp - \alpha_1$$

conduit à la relation

$$\left[\int_0^1 (\exp \operatorname{ad} - t\alpha_1)\, dt\right] \alpha_n = \beta_n \circ \exp - \alpha_1 - \int_0^1 u_n(t)\, dt.$$

Dès lors, deux cas sont possibles :

— ou bien l'endomorphisme $\gamma_n = \int_0^1 (\exp \operatorname{ad} - t\,\alpha_1)\, dt$ de $\mathcal{T}_n(M, M)$ est bijectif; alors, α_n se trouve déterminé, et d'une manière unique; on peut continuer le procédé et passer à l'équation suivante;

— ou bien l'endomorphisme γ_n n'est pas bijectif : nous disons dans ce cas qu'il y a *obstruction* au rang n.

De deux choses l'une :

a. Si $\beta_n \circ \exp - \alpha_1 - \int_0^1 u_n(t)\, dt$ n'appartient pas à l'image de γ_n le calcul de α_n sera impossible. Si des choix sont intervenus dans la détermination de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, il y aura lieu d'en changer et d'examiner si la situation peut devenir meilleure; sinon, il sera impossible de donner une solution à notre problème qui commence par le terme α_1 choisi initialement.

b. Si $\beta_n \circ \exp - \alpha_1$ appartient à l'image de γ_n, la détermination de α_n sera possible d'une infinité de manières. La question se pose de savoir si le choix qui en résulte aura une importance sur le comportement du problème au cours des obstructions suivantes s'il y en a. Nous n'entrerons pas dans cette étude, qui semble très complexe tout au moins par la manière dont nous l'abordons. Retenons simplement que, l'application de $\mathcal{T}_n(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ dans lui-même définie par

$$\beta_n \to \beta_n \circ \exp - \alpha_1 - \int_0^1 u_n(t)\, dt$$

étant bijective, la condition d'appartenance précédente *ne saurait, en aucun cas, être vérifiée quel que soit* β_n. Cette condition est donc une condition effective, qui relie $\beta_1, \ldots, \beta_n$ et α_1 (si, du moins, aucun choix intermédiaire n'est venu encore rendre la question plus complexe).

Nous nous contenterons de caractériser les problèmes pour lesquels il ne se présente aucune obstruction quel que soit $n \geqq 2$. Dans ce cas, le α_1 initial étant choisi, la résolution de l'équation (E′) sera possible d'une manière et d'une seule.

Lemme. — *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. La condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme $\int_0^1 \exp tu\, dt$ soit inversible est que u ne possède aucune valeur propre de la forme $2k\pi i$, où k est un entier $\neq 0$.*

En effet, si $\lambda, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u, les valeurs propres de $\int_0^1 \exp tu\, dt$ sont les nombres

$$\int_0^1 \exp t\lambda_i\, dt = 1 \quad \text{si } \lambda_i = 0, \qquad \lambda_i^{-1}(e^{\lambda_i} - 1) \quad \text{si } \lambda_i \neq 0.$$

On voit cela en triangulant u.

Grâce à la proposition VIII.8, on peut donc énoncer le

Théorème VIII.5. — *Soit β une transformation formelle inversible sur un espace vectoriel* M *de dimension finie. Soit α_1 un endomorphisme de* M *tel que* $\exp \alpha_1 = \pi_1 \beta$. *Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ l'ensemble complet de toutes les valeurs propres de α_1. Supposons qu'il n'existe aucune relation de la forme*

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \lambda_j = 2k\pi i,$$

où k est un entier $\neq 0$, et où $h_1, \ldots, h_n$ sont des entiers de somme $\geqq 1$, tous $\geqq 0$ sauf au plus l'un d'eux qui peut être égal à -1.

Alors, il existe un champ formel $\alpha \in \mathfrak{T}(M)$ *et un seul, tel que* $\pi_1 \alpha = \alpha_1$ *et* $\exp \alpha = \beta$.

Si, au contraire, il existe une relation de la forme indiquée, il ne peut exister de tels champs formels α *que si* β *vérifie certaines conditions supplémentaires.*

Remarques. — 1° La discussion précédente repose sur une condition relative à α_1. On peut trouver une condition suffisante, ne portant que sur β, afin que, quel que soit le choix fait pour α_1, on soit dans les conditions d'application du théorème précédent. Soient $r_1, \ldots, r_n$ toutes les valeurs propres de $\pi_1\beta$. Alors :

S'il n'existe aucune relation de la forme : $r_1^{h_1} \ldots r_n^{h_n} = 1$, où $h_1, \ldots, h_n$ sont des entiers de somme $\geqq 1$, tous $\geqq 0$ sauf au plus l'un d'eux qui peut être égal à -1, les hypothèses faites au théorème VIII.5 sont vérifiées quel que soit α_1 tel que $\exp \alpha_1 = \pi_1 \beta$.

2° La forme du résultat obtenu rend très probable l'existence d'une relation entre ces résultats et ceux de J. Dixmier (*L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France*, t. 85, 1957).

11. Cas de la dimension 1. — Nous sommes en mesure de donner une solution complète au problème précédent si $M = \mathbf{C}$. Dans ce cas, on identifie $\mathfrak{T}(M)$ à $\mathbf{C}((T))$; la composition dans $\mathfrak{T}(M)$ devient la composition des séries formelles.

Soit une série formelle

$$\alpha = a_1 T + \ldots + a_n T^n + \ldots.$$

On sait que la série formelle $\Phi(t) = \exp t\alpha$ vérifie l'équation

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{L}_\alpha \Phi = (a_1 T \ldots + a_n T^n + \ldots) \frac{d\Phi}{dT}.$$

En posant $\Phi(t) = \sum\limits_{n \geqq 1} A_n(t) T^n$ on a donc

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dA_1}{dt} = a_1 A_1; & A_1(0) = 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; \\ \dfrac{dA_n}{dt} = n a_1 A_n + (n-1) a_2 A_{n-1} + \ldots + a_n A_1; & A_n(0) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

Ce système (Σ) équivaut à l'équation (E) du paragraphe précédent. On trouve ces équations dans l'article de J. Hadamard (*Two works on iteration and related questions, Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, n° 3, 1944, p. 70).

La première équation donne $A_1(t)=e^{a_1 t}$. Si $a_1\neq 0$, on vérifie aisément que $A_n(t)$ s'exprime par un polynome en $e^{a_1 t}$. Donc $\Phi(t)$, considérée comme fonction de t, est *périodique* de période $\frac{2\pi i}{a_1}$. Par exemple, si $a_1=2k\pi i$ (k entier $\neq 0$), $\Phi(t)$ a la période $\frac{1}{k}$, donc aussi la période 1, de sorte que

$$\Phi(t)=\Phi(0), \qquad \exp\alpha=T \quad (=m).$$

Soit maintenant donnée une série formelle inversible

$$\beta=b_1T+\ldots, \qquad \text{avec} \quad b_1\neq 0.$$

Résoudre l'équation $\beta=\exp\alpha$, c'est déterminer la suite de a_n de telle sorte que $A_n(1)=b_n$. Nous ne ferons pas l'étude complète (facile) qui est l'équivalent de l'étude faite au paragraphe précédent. Nous nous contenterons d'examiner les cas où se présente une obstruction.

Il y aura une obstruction s'il existe un entier $h\geqq 1$ et un entier $k\neq 0$, avec

$$ha_1=2k\pi i, \qquad \text{soit} \quad a_1=\frac{2k\pi i}{h}.$$

Supposons la fraction $\frac{k}{h}$ irréductible.

Premier cas $h=1$. — Comme $b_1=e^{a_1}$, cela suppose $b_1=1$. Remarquons qu'il n'y aurait pas eu d'obstruction si nous avions pris $a_1=0$, de sorte que l'équation $\beta=\exp\alpha$ a au moins une solution. Par contre, si l'on prend $a_1=2k\pi i\neq 0$, alors une remarque faite ci-dessus montre que :

— si $\beta\neq T$, l'équation $\beta=\exp\alpha$ n'a aucune solution α telle que a_1 ait la valeur voulue;

— si $\beta=T$, il existe une infinité de solutions de l'équation $\beta=\exp\alpha$ telles que $a_1=2k\pi i\neq 0$; elles sont données par

$$\alpha=a_1T+C_2T^2+\ldots+C_nT^n+\ldots,$$

où les C_i sont les constantes arbitraires.

Deuxième cas : $h\geqq 2$. — Comme $b_1=e^{a_1}$, on voit que nécessairement b_1 est une racine $h^{\text{ième}}$ primitive de 1. Réciproquement, s'il en est ainsi, il y aura une obstruction quel que soit le logarithme choisi a_1 de b_1.

Supposons qu'il existe une solution

$$\alpha=\frac{2k\pi i}{h}T+\ldots.$$

Alors $\Phi(t)=\exp t\alpha$ a la période $\frac{h}{k}$, donc aussi la période h, de sorte que

$$\Phi(0)=\Phi(h).$$

Autrement dit,

$$\beta^{\circ h} = T$$

Quel que soit le logarithme a_1 de b_1, une condition nécessaire pour que les obstructions puissent être franchies est donc $\beta^{\circ h} = T$. Nous allons montrer que cette condition est suffisante; pour cela nous serons amené à considérer l'équation de Schröder.

Soit $\alpha = a_1 T + \ldots$ une série formelle avec $a_1 \neq 0$. On montre aisément l'existence d'une série formelle et d'une seule

$$\gamma = T + \ldots + \gamma_n T^n + \ldots$$

telle que $\mathcal{L}_\alpha \gamma = a_1 \gamma$; la détermination de γ se fait par le calcul de proche en proche des γ_n, il ne s'y présente aucune difficulté.

On déduit de là

$$(\exp t \mathcal{L}_\alpha)\, \gamma = e^{a_1 t} \gamma, \qquad \text{d'où} \qquad \exp t\alpha = \gamma^{-1} \circ e^{a_1 t} \gamma.$$

Si $\beta = \exp \alpha$, on a en particulier

$$\beta = \gamma^{-1} \circ b_1 \gamma.$$

Réciproquement, soit β une série formelle avec $b_1 \neq 0$ et $\neq 1$. Supposons qu'on puisse trouver $\gamma = T + \ldots$, telle que $\beta = \gamma^{-1} \circ b_1 \gamma$. Soit a_1 tel que $b_1 = e^{a_1}$. On vérifie sans peine qu'il existe un α et un seul tel que

$$\alpha = a_1 T + \ldots \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_\alpha \gamma = a_1 \gamma.$$

Alors, d'après ce qui précède, on a $\beta = \exp \alpha$. Ainsi :

Si $b_1 = e^{a_1}$, il existe une correspondance bijective entre

— d'une part, les solutions α de l'équation $\beta = \exp \alpha$ telles que $\alpha = a_1 T + \ldots$;

— d'autre part, les solutions γ de l'*équation de Schröder*

$$\beta = \gamma^{-1} \circ b_1 \gamma, \qquad \gamma = T + \ldots.$$

Plaçons-nous donc dans le cas resté en suspens : $\beta = b_1 T + \ldots$, où b_1 est une racine primitive $h^{\text{ième}}$ de 1, $h \geq 2$. On suppose que $\beta^{\circ h} = T$. Dans ce cas, Pastidès a démontré (*Annales Sc. Éc. Norm. Sup.*, 1948) que l'équation de Schröder considérée a des solutions, et il donne un procédé pour les construire. Si γ_0 est une de ces solutions, toutes les les autres sont données par la formule

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_0^{nh+1},$$

où les C_n sont des constantes arbitraires. Ainsi :

THÉORÈME VIII.6. — *Soit une série formelle* $\beta = b_1 T + \ldots$, $b_1 \neq 0$. *Soit* a_1 *un nombre complexe tel que* $e^{a_1} = b_1$. *Considérons l'équation*

$$\text{(E)} \qquad \beta = \exp \alpha, \qquad \text{avec} \quad \alpha = a_1 T + \ldots.$$

1° *Si* b_1 *n'est pas une racine de l'unité, l'équation* (E) *a une solution unique.*

2° *Si* $b_1 = 1$, *et si* $a_1 = 0$, *l'équation* (E) *a une solution unique. Si* $b_1 = 1$ *et* $a_1 \neq 0$, *l'équation* (E) *n'a pas de solution si* $\beta \neq T$; *elle en a une infinité si* $\beta = T$.

3° *Si* b_1 *est une racine primitive* $h^{\text{ième}}$ *de* 1, $h \geqq 2$, *l'équation* (E) *n'a pas de solution si* $\beta^{\circ h} \neq T$. *Elle en a une infinité si* $\beta^{\circ h} = T$.

En outre, l'étude précédente permet la détermination effective de toutes les solutions.

APPENDICE I.

LES ALGÈBRES DE PUISSANCES DIVISÉES ET LA FORMULE DE TAYLOR EN CARACTÉRISTIQUE $p \neq 0$.

Dans cet appendice, nous supposons que l'anneau A est un corps de caractéristique $p \neq 0$.

PROPOSITION 1. — *Soit* M *un espace vectoriel sur le corps* A. *Soient* x *un élément de* M *et* α *un entier s'écrivant*

$$\alpha = \sum_{h=0}^{k} \alpha_h p^h \qquad (0 \leqq \alpha_h < p).$$

Alors, dans l'algèbre $\Gamma(\mathrm{M})$, *on a*

$$x^{[\alpha]} = \prod_{n=0}^{k} \frac{(x^{[p^h]})^{\alpha_h}}{\alpha_h!}.$$

LEMME. — *Quels que soient les entiers* $\beta \geqq 0$ *et* $h \geqq 0$, *le nombre* $\dfrac{(\beta p^h)!}{\beta!\,(p^h!)^\beta}$ *est un entier congru à* 1 (mod p).

Démonstration par récurrence sur β. — Le lemme est vrai quand $\beta = 0$. Pour $\beta \geqq 1$, supposons le lemme vérifié jusqu'au rang $\beta - 1$. On a alors

$$\frac{(\beta p^h)!}{\beta!\,(p^h!)^\beta} = \frac{[(\beta-1)p^h]!}{(\beta-1)!\,(p^h!)^{\beta-1}} \, \frac{(\beta p^h - 1)!}{[(\beta-1)p^h]!\,(p^h-1)!}.$$

Au second membre, le premier facteur est entier par hypothèse et congru à 1 (mod p). Le second facteur est égal à $(((\beta - 1)\, p^h, p^h - 1))$; c'est un entier égal au coefficient de x^{p^h-1} dans

$$(1+x)^{\beta p^h - 1} = (1+x)^{(\beta-1)p^h}(1+x)^{p^h-1} \qquad (\text{mod. } p),$$

ce dernier polynome est égal à $(1+x^{p^h})^{\beta-1}(1+x)^{p^h-1}$, dans lequel le coefficient de x^{p^h-1} est visiblement 1. Cela démontre le lemme.

On peut donc écrire

$$\frac{(x^{[p^h]})^{\alpha_h}}{\alpha_h!}=\frac{(\alpha_h p^h)!}{\alpha_h!\,(p^h!)^{\alpha_h}}x^{[\alpha_h p^h]}=x^{[\alpha_h p^h]}.$$

Comme, d'autre part,

$$\prod_{h=0}^{k} x^{[\alpha_h p^h]}=((\alpha_0,\ldots,\alpha_h p^h,\ldots,\alpha_k p^k))\,x^{[\alpha]},$$

la proposition 1 sera démontrée si l'on montre que

$$((\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_k p^k))\equiv 1 \pmod{p}.$$

Or, le coefficient multinominal considéré est le coefficient de $x_0^{\alpha_0}\ldots x_k^{\alpha_k p^k}$ dans le polynome $(x_0+\ldots+x_k)^\alpha$, congru module p au polynome

$$(x_0+\ldots+x_k)^{\alpha_0}\ldots(x_0^{p^h}+\ldots+x_k^{p^h})^{\alpha_h}\ldots(x_0^{p^k}+\ldots+x_k^{p^k})^{\alpha_k},$$

dans lequel le coefficient de $x_0^{\alpha_0}\ldots x_k^{\alpha_k p^k}$ est visiblement égal à 1.

C. Q. F. D.

Proposition 2. — *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une base de* M. *Alors,* $\Gamma(M)$ *est engendrée par les éléments du type,* $e_i^{[p^h]}$ $(i\in I,\ h\geq 0)$. *L'idéal des relations algébriques entre ces générateurs est engendré par les relations* $(e_i^{[p^h]})^p=0$.

Supposons la base totalement ordonnée.

On sait déjà (théorème IV.2) que $\Gamma(M)$ admet pour base l'ensemble des éléments du type

$$e_{i_1}^{[k_1]}\ldots e_{i_p}^{[k_p]},\ i_1<\ldots<i_p\ (k_j\geq 0).$$

D'après la proposition 1, chaque $e_i^{[k]}$ est le produit d'une constante et d'éléments du type $e_i^{[p^h]}$.

D'où la première partie de la proposition. En outre,

$$(e_i^{[p^h]})^p=\frac{(pp^h)!}{(p^h!)^p}e_i^{[p^{h+1}]}=p!\,\frac{(pp^h)!}{p!\,(p^h!)^p}e_i^{[p^{h+1}]}=0$$

(d'après le lemme).

Soit maintenant une relation algébrique entre les $e_i^{[p^h]}$. Modulo la relation précédente, on peut supposer que tous les exposants qui interviennent sont $<p$. Montrons que tous les coefficients de cette relation algébrique réduite sont nuls. En effet, d'après la proposition 1, cette relation algébrique équivaut à une relation linéaire entre des éléments de base de $\Gamma(M)$, dont les coefficients sont ceux de la relation algébrique multipliés par des constantes non nulles. Donc tous ces coefficients sont nuls, et la proposition est démontrée.

La proposition 2 détermine entièrement la structure de $\Gamma(M)$ dans le cas où A est un corps de caractéristique $p \neq 0$.

Formule de Taylor en caractéristique $p \neq 0$. — La proposition 1 ci-dessus (dont nous gardons les notations) et la proposition IV.5 montrent qu'on a

$$\frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}} = \frac{1}{\alpha_0!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_0} \frac{1}{\alpha_1!}\left(\frac{\partial^{[p]}}{\partial x^{[p]}}\right)^{\alpha_1} \cdots \frac{1}{\alpha_k!}\left(\frac{\partial^{[p^k]}}{\partial x^{[p^k]}}\right)^{\alpha_k}.$$

Cette formule permet de préciser la formule de Taylor en caractéristique p. Posons

$$\Delta_{k,x} = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{[p^k]}}{\partial x^{[p^k]}}\right)^{\alpha}.$$

Alors, si $f \in \mathfrak{P}(M, N)$ est de degré borné (en particulier si f est homogène), on aura

$$f(m+x) = \left(\prod_{k=0}^{\infty} \Delta_{k,x}\right) f.$$

Le produit infini s'interprète en remarquant que $\Delta_{k,x} f = f$, sauf au plus pour un nombre fini d'entiers k. [*Cf.* J. Dieudonné, *Semi-dérivations et formule de Taylor en caractéristique p* (*Archiv der Mathematik*, 1949-1950, p. 364-366)].

APPENDICE II.

Les logarithmes d'un automorphisme de l'espace $\mathbf{C}^n$.

Soit α un automorphisme d'un espace vectoriel complexe E, de dimension finie n. Nous appelons *logarithme de* α tout endomorphisme β de E tel que $\alpha = e^{\beta}$. Nous désignons par $Log\,\alpha$ l'ensemble des logarithmes de α. Nous nous proposons, connaissant α, de déterminer $Log\,\alpha$.

Naturellement, le même problème peut se poser en termes de matrices.

1. Décomposition de l'espace en sous-espaces propres. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres *distinctes* de α. A chaque λ_i correspond un sous-espace E_i de E, ensemble des $x \in E$ tels que

$$(\alpha - \lambda_i \varepsilon)^n x = 0$$

(ε désignant l'automorphisme identique de E). On sait que E est la somme directe des espaces E_i et que chaque espace E_i est stable par α. Soit α_i la restriction de α à E_i : c'est donc un automorphisme de E_i. Il est clair que si β_i $(i = 1, \ldots, p)$ est un logarithme de α_i, l'endomorphisme β de E défini par ces β_i est un logarithme de α. Nous montrons que, réciproquement, tout logarithme de α peut être obtenu de cette façon. Soit donc $\beta \in Log\,\alpha$. Il suffit de montrer que chaque espace E_i est stable par β; car alors, β_i désignant la restriction de β à E_i, il est clair que β_i sera un logarithme de α_i.

Or, soit $x \in E_i$. On a

$$(\alpha - \lambda_i \varepsilon)^n \beta x = \beta (\alpha - \lambda_i \varepsilon)^n x = 0$$

(car $\alpha = e^\beta$ et β commutent); donc

$$\beta x \in E_i.$$

C. Q. F. D.

Le problème posé est donc ramené à la recherche des logarithmes des restrictions de α aux sous-espaces propres E_i.

La forme que prend le problème est alors la suivante : déterminer $Log\,\alpha$, où α est un automorphisme *dont toutes les valeurs propres sont égales.*

Nous procédons par ordre de difficulté croissante :

2. Logarithmes de l'application identique ε. — On sait (par exemple par le théorème de Jordan) que tout endomorphisme de E est la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commute avec lui; d'autre part, une telle décomposition est unique. Soit $\beta \in Log\,\varepsilon$, décomposé sous la forme $\beta = \delta + \nu$ (δ diagonisable, ν nilpotent, $\delta\nu = \nu\delta$). On a donc

$$\varepsilon = e^\delta e^\nu = e^\delta + e^\delta (e^\nu - \varepsilon).$$

Mais e^δ est diagonalisable, alors que $e^\delta (e^\nu - \varepsilon)$ est nilpotent (en effet, e^δ commute avec $e^\nu - \varepsilon$, et $e^\nu - \varepsilon$ est nilpotent, car c'est un polynome en ν dans lequel « ν est en facteur »). D'après l'unicité d'une telle décomposition, on a donc

$$e^\delta = \varepsilon \qquad \text{et} \qquad e^\delta (e^\nu - \varepsilon) = 0, \qquad \text{soit} \quad e^\nu = \varepsilon;$$

si $\nu \neq 0$, il existe un $x \in E$ tel que $\nu x \neq 0$ et $\nu^2 x = 0$ (on peut voir cela en « triangulant » ν). Alors $e^\nu x = x + \nu x$, ce qui doit être égal à x, d'où $\nu x = 0$: c'est absurde. Donc $\nu = 0$. Ainsi β doit être diagonalisable. Les valeurs propres de β sont nécessairement des logarithmes de 1. Mais réciproquement il est clair que tout endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont de la forme $2k\pi i$ est un logarithme de ε. Donc :

$Log\,\varepsilon$ est l'ensemble des endomorphismes diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont des multiples entiers de $2\pi i$.

3. Logarithmes d'un automorphisme $\alpha = \varepsilon + \mu$ (μ nilpotent). — Nous désignons par $\mathrm{Lop}\,\alpha$ l'endomorphisme de E défini par la formule

$$\mathrm{Lop}\,\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \mu^k.$$

Cette sommation, en fait, est finie, puisque μ est nilpotent. Il est clair que $\mathrm{Lop}\,\alpha \in Log\,\alpha$. A vrai dire, la vérification directe n'est pas aisée; mais elle revient à montrer que les développements en séries entières des deux fonctions de la variable complexe z suivantes :

$$1 + z \quad \text{et} \quad e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k} \qquad (|z| < 1)$$

sont égaux, ce qui est évident puisque la série représente la fonction $\mathrm{Log}\,(1 + z)$ au voisinage de l'origine. Nous disons que $\mathrm{Lop}\,\alpha$ est le *logarithme principal de* α. C'est un endomorphisme nilpotent, puisque « μ y est en facteur ». Réciproquement, $\mathrm{Lop}\,\alpha$ est le seul logarithme nilpotent de α. Pour voir cela, il suffit de vérifier que, pour tout endomorphisme nilpotent ν on a $\mathrm{Lop}\,e^\nu = \nu$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (e^\nu - \varepsilon)^k = \nu;$$

or, cela résulte de la relation suivante entre séries entières :

$$\mathrm{Log}(1 + (e^z - 1)) = z,$$

qui est évidente.

Soit maintenant un logarithme quelconque $\beta \in Log\,\alpha$. Écrivons encore $\beta = \delta + \nu$ (δ diagonalisable, ν nilpotent, $\delta\nu = \nu\delta$). Alors

$$e^\beta = \varepsilon + \mu = e^\delta e^\nu, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon + \mu = e^\delta + e^\delta (e^\nu - \varepsilon).$$

Comme précédemment, e^δ est diagonalisable et $e^\delta (e^\nu - \varepsilon)$ est nilpotent. Il en résulte que

$$\varepsilon = e^\delta \qquad \text{et} \qquad \mu = e^\nu - \varepsilon.$$

Ainsi, $\delta \in Log\,\varepsilon$ tandis que les relations : ν nilpotent et $e^\nu = \varepsilon + \mu$ entraînent $\nu = \mathrm{Lop}\,\alpha$.

Réciproquement, soit $\delta \in Log\,\varepsilon$, commutant à $\mathrm{Lop}\,\alpha$. Alors

$$e^{\delta + \mathrm{Lop}\,\alpha} = e^\delta e^{\mathrm{Lop}\,\alpha} = \alpha.$$

Donc :

Si $\alpha = \varepsilon + \mu$ (μ nilpotent), *$Log\,\alpha$ est l'ensemble des endomorphismes de la forme* $\mathrm{Lop}\,\alpha + \delta$, *où δ est un logarithme quelconque de ε qui commute avec* μ.

(« Commuter avec μ » est synonyme de « commuter avec α » et de « commuter avec Lop α ».)

Il nous reste maintenant à déterminer *Log* α dans le cas où α a toutes ses valeurs propres égales. Soit λ la valeur commune de ces valeurs propres ($\lambda \neq 0$). On peut écrire $\alpha = \lambda(\varepsilon + \mu)$ où μ est nilpotent.

4. Logarithmes d'un automorphisme $\alpha = \lambda(\varepsilon + \mu)$ ($\lambda \neq 0$, μ nilpotent). — Soit Log λ un logarithme du nombre λ. Montrons que

$$\mathit{Log}\,\alpha = \mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon + \mathit{Log}(\varepsilon + \mu).$$

Il est évident que

$$\mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon + \mathit{Log}(\varepsilon + \mu) \subset \mathit{Log}\,\alpha.$$

Réciproquement, soit $\beta \in \mathit{Log}\,\alpha$. Alors

$$e^{\beta - \mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon} = \frac{1}{\lambda} e^{\beta} = \varepsilon + \mu.$$

Donc

$$\beta - \mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon \in \mathit{Log}(\varepsilon + \mu) \qquad \text{et} \qquad \beta \in \mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon + \mathit{Log}(\varepsilon + \mu).$$

Pour tout endomorphisme u, désignons par $\mathcal{K}(u)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u. En utilisant les résultats du paragraphe 3, on peut énoncer le

Théorème. — *Si* $\lambda \neq 0$, *si* Log λ *est un logarithme de* λ, *si* μ *est nilpotent, on a*

$$\mathit{Log}(\lambda(\varepsilon + \mu)) = \mathrm{Log}\,\lambda.\varepsilon + \mathrm{Lop}(\varepsilon + \mu) + \mathit{Log}\,\varepsilon \cap \mathcal{K}(\mu).$$

L'ensemble Log ε *est l'ensemble des endomorphismes diagonalisables dont les valeurs propres sont des multiples entiers de* $2\pi i$.