Annales scientifiques de l'É.N.S.

Vazgain Avanissian

Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 2 (1961), p. 101-161
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_2_101_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 101 à 161.

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES
ET
FONCTIONS DOUBLEMENT SOUSHARMONIQUES (1)

PAR M. VAZGAIN AVANISSIAN.

INTRODUCTION.

Deux Mémoires de P. Lelong, l'un sur les fonctions plurisousharmoniques (*cf.* [15]), l'autre concernant les propriétés métriques des ensembles analytiques définis par une équation (*cf.* [17]), nous ont ouvert une voie de recherche, et inspiré dans ce présent travail : en suivant les méthodes de ces deux Mémoires, nous analysons ici certaines propriétés des fonctions analytiques de $p \geqq 2$ variables complexes en vue de leur extension aux fonctions plurisousharmiques ou doublement sousharmoniques. C'est cette voie qui nous a amené également à faire l'étude du prolongement de mesures dépendant harmoniquement d'un groupe de paramètres.

Ce travail comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous sommes conduit à faire une étude locale d'une fonction plurisousharmonique $V(z_1, \ldots, z_p)$ au voisinage d'un point P, où l'on a $V(P) = -\infty$.

Soit V une fonction plurisousharmonique dans un domaine D de C^p, $M_P(r)$, le maximum de V dans la boule $B(P, r) \subset D$, de centre P et de rayon r; $\lambda(V, P, r)$ la moyenne de V sur la frontière de $B(P, r)$. En utilisant les propriétés de convexité de $M_P(r)$ et $\lambda(V, P, r)$, nous avons établi qu'en tout point $P \in D$, la fonction $\frac{M_P(r)}{\log r}$, a une limite $\chi(P) \geqq 0$ (quand r décroît vers

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

zéro), égale à celle de $\frac{\lambda(V, P, r)}{\log r}$. Nous montrons de plus qu'en tout point $P \in E[V = -\infty] \cap D$ (même si $\chi(P) = 0$) on a :

$$\lim_{r \to 0} \frac{M_P(r)}{\lambda(V, P, r)} = 1.$$

En formant un exemple, nous avons montré que cette dernière propriété est en défaut pour une fonction sousharmonique quelconque dans R^p si l'on a $p \geq 4$. Cette étude est complétée assez naturellement par l'étude des quantités $\lambda(V, P_n, R_n)$, $A(V, P_n, R_n)$ [moyenne spatiale de V sur $B(P_n, R_n)$] relatives à certaines suites de boules $B(P_n, R_n)$ et leurs comparaisons avec $M_{P_n}(R_n)$. Comme application de cette étude, signalons l'extension du lemme classique de Schwarz (dans la théorie d'une variable complexe) aux fonctions plurisousharmoniques.

Dans le chapitre (II), nous étudions une classe de fonctions entières $f(z_1, \ldots, z_p)$ en faisant une hypothèse sur la masse (dans la décomposition de Riesz) relative à la fonction plurisousharmonique $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$ et une autre sur la moyenne $\lambda(V^+, O, r)$, où $V^+ = \sup(V, O)$. Une représentation potentielle des fonctions plurisousharmoniques due à P. Lelong [19] (dont nous donnons une démonstration directe dans ce cas particulier, nous a permis d'étendre à la classe considérée une propriété des polynomes de plusieurs variables complexes établie dans [17]. Cette classe ne contient que des fonctions entières d'ordre $0 \leq \alpha < 1$. Grâce aux résultats obtenus, on étend ensuite à p variables un théorème de Jentzsch, Lindwart [24] relatif aux fonctions entières d'une variable, limite d'une suite de polynomes. Nous terminons ce chapitre par l'introduction et l'étude des ensembles que nous avons appelés P-négligeables. Un ensemble e de points de C^p, est dit P-négligeable, si pour toute partie compacte K de e on peut trouver au moins une suite de polynomes $P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$, de degré $q_n < q_{n+1} < \ldots$ bornée en module sur K par une constante, et telle que

$$\limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log|P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)|$$

est égale dans $C^p - K$ à $+\infty$ presque partout ; K est nécessairement de capacité nulle dans R^{2p}, toutefois un ouvert de R^p plongé dans $C^p (p \geq 2)$ donne l'exemple d'un ensemble de capacité nulle dans R^{2p}, qui n'est pas P-négligeable.

Le chapitre III étudie les fonctions $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ dépendant de deux groupes de variables $x \in R^p$, $y \in R^q$, définies dans un domaine $D \subset R^{p+q}$, bornées supérieurement sur tout compact de D, et sousharmoniques, par rapport à chaque groupe de variables séparément. Ces fonctions forment une classe (appelée ici classe $S_{x,y}(D)$) qui est plus large que celle des fonctions plurisousharmoniques (qu'on peut considérer de différentes manières comme des fonctions de la classe $S_{x,y}(D)$. Une étude s'imposait pour savoir si certaines propriétés des fonctions plurisousharmoniques pouvaient être étendues à la classe $S_{x,y}(D)$.

En reprenant une méthode utilisée dans [15], nous avons démontré la semi-continuité des fonctions de la classe $S_{x,y}(D)$, ainsi que leur sousharmonicité par rapport à l'ensemble des variables (x, y).

Le résultat s'obtient sans faire aucune hypothèse sur la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de ces fonctions dans R^{p+q}. L'étude que nous faisons de cette classe de fonction montre que la décomposition de Riesz relative à une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$ (tout comme une fonction plurisousharmonique) ne peut faire intervenir de masse isolée; plus précisément nous montrons que le support des masses relatives à une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$, n'est pas contenu dans un compact.

Les fonctions $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ telles que $V \in S_{x,y}(D)$, $-V \in S_{x,y}(D)$, forment la classe $H_{x,y}(D)$. Une fonction de cette classe est harmonique par rapport à chaque groupe de variables séparément, et est harmonique de l'ensemble des variables (x, y).

Soient $D = D_x \times D_y$ le produit topologique de deux domaines $D_x \subset R^p$, $D_y \subset R^q$, et W la variété $(y_1 = 0 \ldots, y_q = 0) \times D_x$. Une fonction de la classe $H_{x,y}(D\text{-}W)$, se développe dans D-W selon une série :

$$V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = c(x) + \frac{\alpha(x)}{|y|^{q-2}} + \sum_{s=1}^{+\infty} A_s(x, \varphi)\,|y|^s + \sum_{s=1}^{+\infty} B_s(x, \varphi)\,|y|^{-(q-2+s)} \qquad (q \geqq 3)$$

[où $\varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi_{q-1})$ désigne un vecteur unitaire porté par Oy]. On constate que les coefficients $A_s(x, \varphi)$, $B_s(x, \varphi)$ demeurent harmoniques en x (pour φ fixé). En utilisant cette propriété à l'aide des résultats de M. Brelot sur le comportement des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier, nous avons établi que si $V \in H_{x,y}(D\text{-}W)$ est bornée au voisinage d'un point de W, alors V est bornée au voisinage de tout compact de W sur D-W, et se prolonge en une fonction de la classe $H_{x,y}(D)$. On établit aussi l'existence d'une famille d'ensembles fermés pour la classe $H_{x,y}$, analogue aux ensembles singulièrs impropres que P. Lelong a étudiés dans le cas des fonctions plurisousharmoniques [23]. Signalons que les énoncés obtenus à la fin du chapitre III, sont à rapprocher de résultats de S. Bochner [5], [6].

Dans la dernière partie de notre thèse, nous avons défini et étudié des formes linéaires dépendant harmoniquement d'un groupes de paramètres. Si l'on considère une fonction $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ bornée en module sur tout compact de $D = D_x \times D_y$, harmonique en $y \in D_y$, pour x fixé, sousharmonique en $x \in D_x$ pour y fixé, la mesure de Radon positive μ_y associée à V en tant que fonction sousharmonique en x, possède la propriété suivante : pour toute fonction f continue à support compact $k(f)$ dans $D'_x \subset D_x$, la fonction de y, $\mu_y(f)$ est harmonique en $y \in D_y$. C'est ainsi que nous sommes conduit à définir les formes (ou mesures) dépendant harmoniquement d'un groupe de paramètres. Un théorème obtenu est le suivant : si μ_y est une forme linéaire (dépendant harmoniquement de $y \in D_y$); définie sur un sous-espace vectoriel fermé F_1 de F_E (espace vectoriel des fonctions continues dans un espace compact E) et uniformément bornée par un nombre $M(D_1) > 0$ lorsque y demeure dans un sous-domaine $D_1 \subset \subset D_y$, alors il existe une mesure de Radon $\tilde{\mu}_y$ définie sur F_E et qui possède les propriétés suivantes :

a. $$\tilde{\mu}_y(f) = \mu_y(f), \qquad \text{si} \quad f \in F_1,$$

b. $$\sup_{y \in D_1}(\| \tilde{\mu}_y \|_{F_E}) = \sup_{y \in D_1}(\| \mu_y \|_{F_1});$$

c. Pour tout g appartenant à F_E, $\tilde{\mu}_y(g)$ est harmonique en $y \in D_1$. Le théorème fait intervenir un domaine $D_1 \subset D_y$, si l'on considère $D_2 \subset D_1$; $\tilde{\mu}_y$ ne satisfait pas en général la condition (*b*). Le théorème de Hahn-Banach permettait évidemment de prolonger μ_y pour y fixé, mais il s'agissait d'obtenir un tel prolongement $\tilde{\mu}_y$ dépendant encore harmoniquement de y.

Certains résultats exposés ici ont fait l'objet de Notes à l'Académie des Sciences [1] [2].

Je remercie vivement M. Lelong dont les travaux ont inspiré mes recherches, de m'avoir fait bénéficier de ses encouragements et de ses conseils au cours de la préparation de ce travail.

Qu'il veuille bien accepter ici l'expression de ma reconnaissance et de ma profonde gratitude.

J'exprime mes remerciements à MM. Salem et Deny qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie également M. Montel qui a bien voulu accueillir ce travail dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

CHAPITRE I.

Étude d'une fonction plurisousharmonique V au voisinage d'un point P où l'on a $V(P) = -\infty$.

I. Préliminaires.

1. — Rappel de notions sur les fonctions plurisousharmoniques. — Soit C^p l'espace de p variables complexes :

$$z_j = x_j + iy_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

$(\bar{z}_j = x_j - iy_j)$ du support euclidien $R^{2p}(x_j, y_j)$.

DÉFINITION A. — *Une fonction* $V(Z) = V(z_1, \ldots, z_p)$ *à valeurs réelles sera dite plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^p *si :*

a. En tout point $M \in D$, *on a* $-\infty \leqq V(M) < +\infty$, *et* $V > -\infty$, *en un point au moins ;*

b. V *est bornée supérieurement sur tout compact* K *contenu dans* D *;*

c. Si Π^1 *est un plan analytique défini par les équations :*

$$z_j = z_j^0 + a_j u, \qquad \sum_j a_j \bar{a}_j = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction $\varphi(u) = V(z_j^0 + a_j u)$, *est sousharmonique* [*ou éventuellement la constante* $-\infty$] *sur les composantes connexes de* $D \cap \Pi^1$.

La condition (a) montre que la constante $-\infty$, n'est pas plurisousharmonique. Une fonction plurisousharmonique est une fonction sousharmonique particulière; on a en effet :

DÉFINITION B (P. Lelong *cf.* [23]). — *Pour qu'une fonction* V(M), $-\infty \leqq V(M) < +\infty$, *soit plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^p, *il faut et il suffit que :*

a'. V *soit sommable sur tout compact* $K \subset D$*;*

b'. que la distribution (au sens de Schwartz) :

$$T(\vec{A}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j$$

soit positive [*c'est-à-dire soit une mesure positive sur les fonctions f indéfiniment dérivables à support* $K(f)$ *compact dans* D], *quel que soit le vecteur* $\vec{A}(a_j)$,

c'. qu'en tout point $P \in D$, on ait $V(P) = V_m(P)$ où $V_m(P)$ est le maximum en mesure de V au point P (¹).

Les fonctions plurisousharmoniques ont été définies et étudiées pour la première fois par P. Lelong (*cf.* [15]). Nous nous bornerons à rappeler certaines propriétés de ces fonctions.

Désignons par Z le point de coordonnées $z_1, \ldots, z_p$ et par

$$|Z - Z'| = \left[\sum_i (z_i - z_i') (\bar{z}_i - \bar{z}_i') \right]^{\frac{1}{2}}$$

la distance euclidienne des deux points Z et Z'. La boule de centre Z et de rayon R sera notée B(Z, R). La moyenne $\lambda(V, Z, R)$ sur la frontière des boules

(¹) C'est-à-dire $V_m(P)$ est la borne inférieure des ξ tels qu'il existe un ensemble ouvert ω avec $P \in \omega$, pour lequel l'intersection de ω et de l'ensemble des points de D où $V > \xi$, est de mesure nulle.

concentriques $B(Z, R) \subset\subset D$, est une fonction convexe, croissante de $\log R$. On notera :

$$\nu(Z, R) = \frac{\partial \lambda(V, Z, R)}{\partial \log R}$$

(en précisant si cela est nécessaire, s'il s'agit d'une dérivée à gauche ou à droite). $\nu(Z, R)$ est positive croissante de $\log R$. On sait que si une suite de fonctions $f_n(z_1, \ldots, z_p)$ holomorphe converge uniformément vers une fonction $f_n(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$ (nécessairement holomorphe) dans un domaine D, les $\nu_n(Z, R)$ [où $B(Z, R)$ appartient à D] correspondant à $V = \log|f_n(z_1, \ldots, z_p)|$, convergent vers la valeur $\nu(Z, R)$ relative à $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$; la convergence est uniforme en Z et en R pour $R \geqq \delta > 0$, et $B(Z, R)$ portée par un compact contenu dans D(*cf.* [17]). Dans le cas des fonctions plurisousharmoniques de la forme $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$ (f holomorphe). $\nu(O) = \lim_{R \to 0} \nu(O, R)$, est rappelons-le, égale au degré du premier polynome obtenu en développant $f(z_1, \ldots, z_p)$ au voisinage de O en une série de polynomes homogènes de degré croissant (la multiplicité de O sur l'ensemble analytique $f(z_1 \ldots, z_p) = 0$). Enfin pour $p \geqq 2$, et V de la forme $\log|f(z_1, \ldots, z_p)|$, la courbe convexe $\lambda(\log|f|, Z, R)$, ne peut avoir les sommets [16], [17].

2. Mesure de Radon associée. — C'est la mesure de Radon positive $d\mu$ associée à V en tant que fonction sousharmonique dans R^{2p}. Cette mesure s'obtient grâce à la décomposition de Riesz de V (faite dans un domaine D) sous la forme :

$$V(Z) = H(Z) - \int_D d\mu(a) \, |a - Z|^{2-2p} \qquad (p \geqq 2).$$

L'intégrale $\int_E d\mu$, sera appelée la masse de V portée par l'ensemble $E \subset\subset D$. La masse $\mu(Z, R)$ portée par une boule $B(Z, R)$, s'exprime à partir de $\nu(Z, R)$ par la formule :

$$\mu(Z, R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \nu(Z, R) \qquad \text{si} \quad p \geqq 2,$$
$$\mu(Z, R) = \nu(Z, R) \qquad \text{si} \quad p = 1$$

[il est sous entendu qu'on prendra ci-dessus la dérivée à droite s'il s'agit d'une boule compacte, et la dérivée à gauche pour une boule ouverte].

Le rapport $\frac{\mu(Z, R)}{R^{2p-2}}$, est borné quand R décroît vers zéro, ce qui montre contrairement au cas où $p = 1$, qu'une fonction plurisousharmonique n'a pas de masse isolée pour $p \geqq 2$.

Rappelons aussi que dans le cas $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$, la masse $\mu(Z, R)$ de V lorsque Z est un zéro de f satisfait [16] :

$$\mu(Z, R) \geqq (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \qquad (p \geqq 2). \tag{1.1}$$

En effet, $\nu(Z, R)$ est une fonction croissante de R, et si Z appartient à l'ensemble analytique $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$, $\lim\limits_{R \to 0} \nu(Z, R) = \nu(Z, 0)$ est au moins égale à 1, car $\nu(Z, 0)$ est la multiplicité de Z sur $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$. Donc

$$\mu(Z, R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \nu(Z, R) \geqq (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \nu(Z, 0) \geqq (2p-2)^{-1} R^{2p-2}.$$

3. Famille de fonctions plurisousharmoniques. — Le caractère plurisousharmonique est maintenu par les opérations conservant les fonctions sousharmoniques à condition que ces opérations respectent la structure de l'espace C^p. Cela résulte de l'énoncé suivant : Pour que V soit plurisousharmonique il faut et il suffit que V soit sousharmonique et le demeure pour toutes les transformations linéaires non dégénérées [15],

Ainsi, la limite d'une suite non croissante de fonctions plurisousharmoniques $U_n (n \to +\infty)$, est de la même nature ou est la constante $-\infty$. L'enveloppe supérieure d'une famille de telles fonctions (si cette enveloppe est semi-continue supérieurement) est encore plurisousharmonique.

La fonction :

$$M_P(r) = \operatorname{Sup} V(z_1, \ldots, z_p),$$

$|Z - P| \leqq r$, $B(P, r) \subset\subset D$; est une fonction convexe croissante de $\log r$, cela résulte de la définition (A) et du fait que seules les fonctions convexes de $\log r$ sont sousharmoniques sur les plans Π^1 issus de O.

4. Nous nous plaçons d'une façon générale dans C^p, $p \geqq 2$; ou bien dans R^p, $p \geqq 3$. On notera $D^\star$ la frontière d'un domaine D, et par $\vec{a}$ un vecteur unitaire de R^p ou de $C^p = R^p \times R^p$, suivant l'espace envisagé. O et o désigneront les notations de Landau. Le volume de la boule $B(O, R) \subset R^p$, sera noté $\tau_p(R)$ et la mesure de sa frontière par $\sigma_{p-1}(R)$; $|x|$ désignera la distance à l'origine du point $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

$$\tau_p(1) = \frac{\Pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}, \qquad \sigma_{p-1}(1) = \frac{2\Pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

$d\sigma_{p-1}(\vec{a})$ notera l'élément d'aire de la frontière de $B(O, 1) \subset R^p$. Le noyau de la théorie du potentiel dans R^p sera $h_p(\xi, \eta) = |\xi - \eta|^{2-p}$. La fonction de Green de la boule $B(O, R) \subset R^p$ est alors :

$$G_R(p, \xi, \eta) = h_p(\xi, \eta) - R^{2-p}(1 - 2v\cos\theta + v^2)^{1-\frac{p}{2}}$$

avec $v = \frac{|\xi|.|\eta|}{R^2}$, $\theta = \xi \hat{O} \eta$. La dérivée de $G_R(p, \xi, \eta)$ au point $\xi \in B^\star(O, R)$ selon la normale intérieure est :

$$\frac{\partial G_R(p, \xi, \eta)}{\partial \eta_i} = (p-2) R^{1-p}(1-u^2)(1 - 2u\cos\theta + u^2)^{-\frac{p}{2}} \qquad \text{avec} \quad u = \frac{|\eta|}{R}, \quad |\xi| = R.$$

Remarquons qu'on a $(1-2t\cos\theta+t^2)=(t-e^{i\theta})(t-e^{-i\theta})$, et que

$$y=(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{p}{2}}, \qquad \text{pour} \quad 0\leqq t<1,$$

est majorée par

$$(1-t)^{-p}=1+\sum_{s=1}^{+\infty}\mathrm{P}_s^{(p)}(1)\,t^s, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{P}_s^{(p)}(1)=\frac{(p+s-1)!}{(p-1)!\,s!}.$$

De sorte que si $y=1+\sum_{s=1}^{+\infty}\mathrm{P}_s^{(p)}(\cos\theta)t^s$, on a $|\mathrm{P}_s^{(p)}(\cos\theta)|\leqq \mathrm{P}_s^{(p)}(1)$, quel que soit θ; et pour $0\leqq t\leqq k<1$;

$$(1.2) \qquad \left|(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{p}{2}}-1\right|\leqq t\sum_{s=1}^{+\infty}\mathrm{P}_s^{(p)}(1)\,t^{s-1}$$
$$\leqq \frac{t}{k}\sum_{s=1}^{+\infty}\mathrm{P}_s^{(p)}(1)\,k^s=k^{-1}[(1-k)^{-p}-1]\,t.$$

Posons $c(p,k)=k^{-1}[(1-k)^{-p}-1]$, et notons que $\lim\limits_{k\to 0} c(p,k)=p$:

Lemme 1. — Pour $\frac{|\eta|}{\mathrm{R}}\leqq k$, $0\leqq k<1$, on a:

1° $|\mathrm{G_R}(p,\xi,\eta)-\mathrm{G_R}(p,\xi,\mathrm{O})-h_p(\xi,\eta)+h_p(\xi,\mathrm{O})|\leqq c(p-2,k)\frac{|\eta|}{\mathrm{R}^{p-1}}, \qquad |\xi|\leqq \mathrm{R}$,

2° $\left|\frac{\partial\mathrm{G_R}(p,\xi,\eta)}{\partial\eta_i}-\frac{\partial\mathrm{G_R}(p,\xi,\mathrm{O})}{\partial\eta_i}\right|\leqq c_1(p,k)\frac{|\eta|}{\mathrm{R}^p}, \qquad |\xi|=\mathrm{R}$.

avec $c^1(p,k)=(p-2)[c(p,k)+(1-k)^{-p}]$.

3° Pour $\frac{|\eta|}{|\xi|}\leqq k<1$, on a

$$|h_p(\xi,\eta)-h_p(\xi,\mathrm{O})|\leqq c(p-2,k)\frac{|\eta|}{|\xi|^{p-1}}.$$

En effet, le premier membre du 1° est égal à:

$$\mathrm{R}^{2-p}\left|(1-2v\cos\theta+v^2)^{-\frac{p-2}{2}}-1\right|,$$

où l'on a posé $v=\frac{|\xi|.|\eta|}{\mathrm{R}^2}$. Cette quantité qui d'après (1.2) est majorée pour $\frac{|\eta|}{\mathrm{R}}\leqq k$, et $|\xi|\leqq\mathrm{R}$, par $c(p-2,k)\frac{|\eta|}{\mathrm{R}^{p-1}}$. De même, si $u=\frac{|\eta|}{\mathrm{R}}\leqq k<1$, le premier membre du 2° est majoré par

$$(p-2)\,\mathrm{R}^{1-p}[c(p,k)\,u+u^2(1-u)^{-p}]\leqq(p-2)[c(p,k)+(1-k)^{-p}]\frac{|\eta|}{\mathrm{R}^p}.$$

Enfin, on a pour $\frac{|\eta|}{|\xi|}\leqq k<1$:

$$|h_p(\xi,\eta)-h_p(\xi,\mathrm{O})|\leqq|\xi|^{2-p}c(p-2,k)\frac{|\eta|}{|\xi|}=c(p-2,k)\frac{|\eta|}{|\xi|^{p-1}}.$$

II. Comparaison de $M_P(r)$ et $\lambda(V, P, r)$, au voisinage d'un point P de l'ensemble des infinis (négatifs) de la fonctfon plurisousharmonique $V(z_1, \ldots, z_p)$.

5. Nous désignerons par $E[\ldots]$ un ensmble de points d'un domaine $D \subset C^p (p \leqq 2)$, défini par la condition entre crochets. En particulier $E[V = -\infty]$, est l'ensemble des infinis (négatifs) de V; c'est un ensemble C^p-polaire ([2]) dans D (il est donc de mesure R^{2p} dimensionnelle nulle). Soit $P \in D$. La fonction $\lambda(V, P, r)$ est convexe croissante de $\log r$ (pour P fixé). La courbe représentative de $\lambda(V, P, r) = F(\log r)$, a donc une direction asymptotique pour $r \to 0$. Sa pente s'obtient comme limite de la pente d'une tangente, ou comme la limite de la pente de la sécante joignant l'origine à un point Q de la courbe quand l'abscisse de Q tend vers $-\infty$.

Nous désignons :

$$\chi(P) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(V, P, r)}{\log r} = \lim_{r \to 0} \nu(P, r).$$

$\chi(P)$ est nulle en tout point de D qui n'appartient pas à $E[V = -\infty]$, c'est-à-dire presque partout, Mais l'ensemble $E[V = -\infty]$ peut contenir des points P où l'on a $\chi(P) = 0$, comme nous montre l'exemple :

$$V(z_1, \ldots, z_p) = -\sqrt{-\log r}, \qquad r = |Z| \leqq 1.$$

V est en effet plurisousharmonique, car la fonction $-\sqrt{-x}(x < 0)$, est convexe croissante de x, et V s'obtient en remplaçant x par la fonction plurisousharmonique $\log r = \frac{1}{2} \log \sum_i z_i \bar{z}_i$.

Dans le cas où $V = \log |f(z_1, \ldots, z_p)|$ (f holomorphe), $\chi(P) = \nu(P) = \lim_{r \to 0} \nu(P, r)$, est pour $P \in E[f = 0]$, la multiplicité de P sur $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$, donc un nombre entier et au moins égal à 1.

LEMME 2. — *La moyenne spatiale* $A(V, P, r)$ *de* V *relative à la boule* $B(P, r) \subset\subset D$, *est une fonction convexe de* $\log r$ *et l'on a aussi :*

$$\chi(P) = \lim_{r \to 0} \frac{A(V, P, r)}{\log r}.$$

En effet on a

$$A(V, P, r) = \frac{2p}{r^{2p}} \int_0^r \lambda(V, P, t)\, t^{2p-1}\, dt = 2p \int_0^1 \lambda(V, P, ru)\, u^{2p-1}\, du.$$

([2]) Une partie e d'un domaine $D \subset C^p$ est dite C^p-polaire dans D, si tout point $a \in e$ appartient à un domaine $\omega_a \subset D$, tel qu'on ait $(e \cap \omega_a) \in E[V = -\infty]$, V étant plurisousharmonique dans ω (*Voir cf.* [23]).

La convexité de $A(V, P, r)$ résulte alors du fait que l'intégrale par rapport à un paramètre de fonctions convexes est une fonction convexe. D'autre part pour P fixé;

$$[\chi(P) - \varepsilon] \log r \leqq \lambda(V, P, r) \leqq [\chi(P) + \varepsilon] \log r \qquad [r < r_0(\varepsilon, P)].$$

Donc, $A(V, P, r)$ qui est une moyenne de λ satisfait pour $r < r_0(\varepsilon, P)$, aux inégalités ci-dessus. D'où le lemme.

Proposition 1. — *L'ensemble* $E[\chi(P) \geqq \alpha > 0]$ *est un ensemble fermé pour tout* $\alpha > 0$.

En effet, il suffit de montrer qu'en tout point de D, $\chi(P)$ est semi-continue supérieurement. Soit $\omega_p \subset\subset D$, un voisinage de $P \in D$. On peut sans restreindre la généralité supposer $V < 0$, dans $B(P, \delta) \subset \omega_P$. La moyenne spaciale $A(V, P, \delta)$ sera alors négative. Posons $x = \log r$, et $y_P = A(V, P, r) = F(x)$. La courbe convexe $y_P = F(x)$, coupe la droite $x = \log\delta$ au-dessous de l'axe des x; soient O′ le point de l'axe des x d'abscisse $\log\delta$, et Q un point de la courbe représentative $y_P = F(x)$ d'abscisse $x = \log r (r < \delta)$. La fonction $\chi(P)$ est encore la limite de la pente de la droite O′Q quand $r \to 0$.

$$\chi(P) = \lim_{r \to 0} \frac{A(V, P, r)}{\log r - \log\delta}. \tag{1.3}$$

Or la pente de O′Q (positive) va en diminuant quand $r < \delta$, décroit vers zéro. Il en résulte [puisque $A(V, P, r)$ est continue par rapport à P] que $\chi(P)$ est semi continue supérieurement au point P, comme étant d'après (1.3), la limite d'une suite non croissante (quand r décroit vers zéro) de fonctions continues. $\chi(P)$ étant ainsi semi-continue supérieurement en tout point de D, l'ensemble $E[\chi(P) \geqq \alpha > 0] \subset E[V = -\infty]$ sera fermé.

6. On a vu dans les préliminaires que la fonction

$$M_P(r) = \lim_{|Z-P| \leqq r} V(z, \ldots, z_p), \qquad M_0(r) = M(r),$$

est une fonction convexe croissante de $\log r$ [pour P fixé, et $B(P, r) \subset\subset D$]. Lorsque P appartient à l'ensemble $E[V = -\infty] \cap D$, quel est le résultat de la comparaison de $\chi(P)$ avec $\lim_{r \to 0} \frac{M_P(r)}{\log r}$? La réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soient* $V(z_1, \ldots, z_p)$ *une fonction plurisousharmonique dans* D, *et* P *un point de* D. *On a :*

1°
$$\chi(P) = \lim_{r \to 0} \frac{M_P(r)}{\log r}$$

2° *Si* $V(P) \neq 0$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{M_P(r)}{\lambda(V, P, r)} = 1.$$

La première partie du théorème est évidente si $V(P) \neq -\infty$, car $M_P(r) \to V(P)$; donc $\chi(P) = 0$. La seconde partie est aussi évidente si $V(P) \neq -\infty$, $V(P) \neq 0$, Remarquons que cette partie du théorème sera généralement en défaut si $V(P) = 0$, comme nous montre dans C^1 la fonction harmonique $V(z) = |z| \cos\theta = x$, où l'on a $M(r) = r$, $\lambda(V, O, r) = 0$.

Supposons donc $V(P) = -\infty$. Sans restreindre la généralité on supposera $V < 0$, dans D. Soit $B(P, r) \subset B(P, R) \subset\subset D$. En écrivant que les valeurs prises par V sur la frontière de la boule $B(P, r)$, sont au plus égales à celles prises par la fonction harmonique qui coïncide avec V sur $B^*(P, R)$, on obtient dans $B(P, r)$ grâce à l'intégrale de Poisson :

$$(1.4) \quad \begin{cases} V(z_1, \ldots, z_p) \leq M_P(r) \leq \dfrac{1}{\sigma_{2p-1}(1)} \displaystyle\int V(Q) \frac{R^2 - r^2}{|Z - Q|^{2p}} R^{2p-2} \, d\sigma_{2p-1}(\vec{a}), \\ \qquad Q = P + R\vec{a}, \qquad Z \in B^*(P, r). \end{cases}$$

On a, en posant $k = \dfrac{r}{R} < 1$:

$$\frac{R^2 - r^2}{|Z - Q|^{2p}} \geq \frac{R - r}{(R + r)^{2p-1}} = \frac{1 - k}{(1 + k)^{2p-1}} R^{-(2p-2)} = [1 + \varepsilon(k)] R^{-(2p-2)},$$

où $\varepsilon(k) \to 0$, si $k \to 0$.

Donc, d'après (1.4) :

$$(1.5) \qquad \lambda(V, P, r) \leq M_P(r) \leq [1 + \varepsilon(k)] \lambda(V, P, k^{-1} r).$$

choisissons pour chaque k suffisamment petit $R(r) = r \log \frac{1}{r}$. On a alors si $r \to 0$:

$$(1.6) \qquad k(r)\,(< 1) \to 0, \qquad k^{-1}(r)\, r \to 0, \qquad \frac{\log k(r)}{\log r} \to 0, \qquad \frac{\log k(r)}{\log R(r)} \to 0.$$

On établit l'énoncé en divisant les trois membres de (1.5) (considéré pour $k(r)$) par $\log r$ et en passant à la limite quand $r \to 0$.

Étudions maintenant l'existence de $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{M_P(r)}{\lambda(V, P, r)}$. Si $\chi(P) \neq 0$, $M_P(r)$ et $\lambda(V, P, r)$ sont d'après la première partie du théorème équivalentes à $\chi(P) \log r$. D'où le théorème dans ce cas. Supposons $\chi(P) = 0$, $V(P) = -\infty$. (1.5) donne (en remarquant qu'on a $\lambda < 0$) :

$$(1.7) \qquad 1 \geq \frac{M_P(r)}{\lambda(V, P, r)} \geq [1 + \varepsilon(k)] \frac{\lambda(V, P, k^{-1} r)}{\lambda(V, P, r)}.$$

Le théorème sera établi si l'on montre qu'on peut choisir $k = k(r)$ de manière que le dernier membre de (1.7), tende vers 1 quand $r \to 0$. Démontrons donc :

Lemme 3. — *Si* $k = k(r)$ *vérifie* (1.6), *et si l'on a* $V(P) = -\infty$, *et* $\chi(P) = 0$, *en posant* $R(r) = k^{-1}(r) r$, *on aura :*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(V, P, r)}{\lambda[V, P, R(r)]} = 1.$$

En effet, puisque $R(r) > r$, on a :

$$|\lambda[V, P, R(r)] - \lambda(V, P, r)| = \int_r^{R(r)} \nu(P, t)\, d\log t \leq \nu[P, R(r)]\,|\log k(r)|$$

$\left(\right.$Rappelons qu'on a $\nu(P, r) = \dfrac{\partial\lambda(V, P, r)}{\partial \log r}$, et qu'on prend la dérivée à droite si la dérivée proprement dite n'existe pas$\left.\right)$. Donc

$$\left|1 - \frac{\lambda(V, P, r)}{\lambda[V, P, R(r)]}\right| \leq \frac{|\nu[P, R(r)]\log R(r)|}{|\lambda[V, P, R(r)]|}\left|\frac{\log k(r)}{\log R(r)}\right|. \tag{1.8}$$

Dans le cas $V(P) = -\infty$, $\chi(P) = 0$, la courbe convexe représentative de $y = \lambda(V, P, r) = F(\log r)$, a au voisinage de $r = 0$, une branche parabolique. Comme l'ordonnée à l'origine de la tangente (ou celle des demi-tangentes) au point d'abscisse $\log r$ décroît avec r, on en déduit qu'elle tend vers $-\infty$, avec $\log r$ (Sinon il y aura une asymptote). Or $R(r)$ tend vers zéro avec r, il en résulte que pour $r = r_0$ assez petit, l'ordonnée à l'origine de la tangente (ou celles des demi-tangentes) au point d'abscisse $\log R(r_0)$ sera négative, donc la droite représentative de $y = \nu[P, R(r_0)]\log r$, sera au-dessus de cette tangente, autrement dit pour r assez petit on aura :

$$\frac{|\nu[P, R(r)]\log R(r)|}{|\lambda[V, P, R(r)]|} < 1, \qquad R(r) < R(r_0).$$

Le premier facteur figurant dans le second membre de (1.8), étant borné, le second facteur tend vers zéro avec r, grâce à (1.6). D'ou le lemme.

Remarque. — L'exemple ci-dessous montre que pour une fonction sous-harmonique quelconque dans $R^p (p \geq 4)$, on peut avoir $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{M_P(r)}{\lambda(V, P, r)} \neq 1$ $(V(P) = -\infty)$. Considérons dans $R^p (p \geq 4)$ une répartition des masses sur l'axe des x_1, telle que la densité linéaire qui en résulte soit en chaque point égale à -1. Le potentiel dû à ces masses en un point $A(x_1, \ldots, x_p)$ est de la forme :

$$V(x_1, \ldots, x_p) = \frac{-K}{\left(\sum\limits_{j=2}^{p} x_j^2\right)^{\frac{p-3}{2}}}$$

(K une constante positive).

On a évidemment en tout point de l'axe des x_1, $V = -\infty$. D'autre part,

$$M(R) = -\frac{K}{R^{p-3}}$$

$$\lambda(V, O, R) = -\frac{K}{\sigma_{p-1}(1)R^{p-1}}\int \frac{d\sigma_{p-1}(R\vec{a})}{\left(\sum\limits_{2}^{p} x_j^2\right)^{\frac{p-3}{2}}}.$$

Posons $\rho^2 = \sum_2^p x_j^2$, et remarquons que l'élément d'aire de $B^*(O, R)$ est égal à $\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}} dx_2 \ldots dx_p$, donc,

$$\begin{aligned}\lambda(V, O, R) &= -\frac{2K}{\sigma_{p-1}(1) R^{p-2}} \int_{\rho \leq R} \frac{d\tau_{p-1}}{\rho^{p-3}\sqrt{R^2-\rho^2}} \\ &= -\frac{2K}{\sigma_{p-1}(1) R^{p-2}} \int_0^R \frac{\sigma_{p-2}(1)\rho^{p-2}\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho^{p-3}} \\ &= -\frac{2K\sigma_{p-2}(1)}{\sigma_{p-1}(1) R^{p-2}} \left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Big|_0^R\right) = -\frac{2K\sigma_{p-2}(1)}{\sigma_{p-1}(1)} \frac{1}{R^{p-3}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{R\to 0} \frac{M(R)}{\lambda(V, O, R)} = \frac{\sigma_{p-1}(1)}{2\sigma_{p-2}(1)} \neq 1 \qquad (p \geqq 4) \quad (^3).$$

Proposition 2. — *Soit* $V(z_1, \ldots, z_p)$ *une fonction plurisousharmonique dans la boule* $B(O, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $V(0, \ldots, 0) = -\infty$, *si*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(V, O, r)}{\log r} = \omega > 0,$$

on aura

1° (1.9) $$M(r) \leqq M(1) + \omega \log r \qquad (r \leqq 1)$$

et de plus $\lambda(V, O, r) - \omega \log r$ *a une limite* β *finie ou* $-\infty$, *pour* $r \to 0$.

2° *Si* β *est finie, on a*

$$\beta + \omega \log r \leqq M(r) \leqq M(1) + \omega \log r \qquad (r \leqq 1). \tag{1.10}$$

En effet, d'après le théorème 1, on a aussi

$$\lim_{r\to 0} \frac{M(r)}{\log r} = \omega.$$

L'inégalité (1.9), résulte du fait que la courbe convexe représentative de $M(r) = F(\log r)$ est pour $r \leqq 1$, au-dessous de la corde passant par le point $[\log r = 0,\ M(1)]$, et de pente ω. D'autre part $\lambda(V, O, r) - \omega \log r$, n'est autre que l'ordonnée à l'origine d'une droite passant par le point $[\lambda(V, O, r),\ \log r]$ et de pente ω. Puisque $M(r)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$, l'expression $\lambda(V, O, r) - \omega \log r$, est une fonction non croissante quand r décroît vers zéro, d'où l'existence d'une limite β finie ou $-\infty$, pour $r \to 0$ (l'ordonnée à l'origine de l'asymptote). Si β est finie (1.10), exprime alors que la courbe convexe $M(r) = F(\log r)$ est au-dessus de son asymptote.

---

(3) Par exemple pour $p = 4$, $\sigma_3(1) = 2\Pi^2$, $\sigma_2(1) = 4\Pi$, $\frac{\sigma_3(1)}{2\sigma_2(1)} = \frac{\Pi}{4}$.

Remarque. — Dans le cas où V est de la forme $\log|f(z_1, \ldots, z_p)|$, f holomorphe dans la boule compacte $B(O, 1)$, et $f(0, \ldots, 0) = 0$, ω est la multiplicité de O sur l'ensemble analytique $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$. D'après (1.9), on a :

$$|f(z_1, \ldots, z_p)| \leqq \Big(\sup_{|Z|=1} |f|\Big) |Z|^{\omega},$$

avec ω entier $\geqq 1$, $|Z| \leqq 1$.

Cette inégalité (dans le cas $\omega = 1$) est connue sous le nom du lemme de Schwarz (*voir* S. Bochner et Martin [3]). La proposition 2 généralise ce lemme aux fonctions plurisousharmoniques, et montre en même temps que dans le lemme de Schwarz on peut prendre $\omega > 1$, si la multiplicité de O sur $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$, est une entière $\omega > 1$.

THÉORÈME 2. — *Soient* $V(z_1, \ldots, z_p)$ *une fonction plurisousharmonique dans un domaine* $D \subset C^p$, $B(P_n, \rho_n)$ *une suite de boules portées par un compact* K *de* D, *et* P *un point de* $E[V = -\infty] \cap K$. *On suppose que*

$$r_n = |P - P_n| \to 0, \quad \rho_n \to 0, \qquad k_n = \frac{r_n}{\rho_n} \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{1.11}$$

on a alors :

$$\chi(P) = \lim_{n \to +\infty} \frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{M_{P_n}(\rho_n)}{\log \rho_n}.$$

En effet, supposons $V < 0$ dans D. Posons $R_n = \rho_n + r_n = (1 + k_n)\rho_n$, et l'on prendra n assez grand pour que $B(P, R_n) \subset\subset D$. On a (puisque $V < 0$) :

$$R_n^{2p} A(V, P, R_n) \leqq \rho_n^{2p} A(V, P_n, \rho_n).$$

Donc, pour $R_n < 1$,

$$\frac{A(V, P, R_n)}{\log R_n} \geqq \left(\frac{\rho_n}{R_n}\right)^{2p} \frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \, \frac{\log \rho_n}{\log R_n}. \tag{1.12}$$

De même, $A(V, P_n, \rho_n) \leqq M_P(R_n)$, par conséquent pour $\rho_n < 1$, on aura :

$$\frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \frac{M_P(R_n)}{\log R_n} \cdot \frac{\log R_n}{\log \rho_n}; \tag{1.13}$$

Or d'après (1.11) $k_n \to 0$, donc pour $n \to +\infty$:

$$\frac{\rho_n}{R_n} = \frac{1}{1 + k_n} \to 1$$

et

$$\frac{\log \rho_n}{\log R_n} = \frac{\log \rho_n}{\log \rho_n + (1 + k_n)} \to 1.$$

L'existence de la première limite résulte de (1.12), (1.13), du lemme 2, et du théorème 1. Car par un passage à la limite dans (1.12) et (1.13), on obtient, grâce au lemme 2 et au théorème 1 :

$$\chi(P) \geqq \limsup_{n \to +\infty} \frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n},$$
$$\chi(P) \leqq \liminf_{n \to +\infty} \frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n}.$$

d'ou la conclusion.

Pour montrer l'existence de la deuxième limite, remarquons que la moyenne spatiale d'une fonction sousharmonique est inférieure ou égale à sa moyenne périphérique. Donc

$$A(V, P_n, \rho_n) \leqq \lambda(V, P_n, \rho_n) \leqq M_P(R_n),$$

et pour $\rho_n < 1$:

$$\frac{A(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \frac{\lambda(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \frac{M_P(R_n)}{\log R_n} \frac{\log R_n}{\log \rho_n}. \tag{1.14}$$

La première et la dernière fonction figurant dans (1.14), convergent vers $\chi(P)$ si n tend vers l'infini, et ceci d'après le théorème 1 et la première partie du théorème 2. D'où l'énoncé.

Reste à étudier la dernière limite. Soit $\rho'_n > \rho_n$, $B(P_n, \rho'_n) \subset K$. Ecrivons comme dans la démonstration du théorème 1, que les valeurs prises par V sur la frontière de $B(P_n, \rho_n)$, sont au plus égales à celles prises sur la frontière de $B(P_n, \rho_n)$ par la fonction harmonique qui coïncide avec V sur la frontière de $B(P_n, \rho'_n)$, on obtient des inégalités analogues à (1.5), qui nous donnent après les avoir divisées par $\log \rho_n (\rho_n < 1)$:

$$\frac{\lambda(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \frac{M_{P_n}(\rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \frac{1 - k'_n}{(1 + k'_n)^{2p-1}} \frac{\log \rho'_n}{\log \rho_n} \frac{\lambda(V, P_n, \rho'_n)}{\log \rho'_n}, \qquad k'_n = \frac{\rho_n}{\rho'_n} \tag{1.15}$$

Pour chaque ρ_n, on peut choisir $\rho'_n > \rho_n$ de manière que :

$$\frac{\rho_n}{\rho'_n} = k'_n \to 0, \qquad \frac{\log \rho'_n}{\log \rho_n} \to 1, \quad \rho'_n \to 0, \quad n \to +\infty.$$

$\left(\text{il suffit par exemple de prendre } k'_n = \left(\log \frac{1}{\rho_n}\right)^{-1}, \ \rho_n < e^{-1}, \ B(P_n, \rho'_n) \subset K\right)$. Avec ce choix on passera à la limite dans (1.15). Comme $\frac{r_n}{\rho'_n} < \frac{r_n}{\rho_n}$ tend vers zéro, on aura :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda(V, P_n, \rho'_n)}{\log \rho'_n} = \chi(P) \qquad \text{(première partie du théorème)}$$

et

$$\chi(P) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda(V, P_n, \rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \lim_{n \to +\infty} \frac{M_{P_n}(\rho_n)}{\log \rho_n} \geqq \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda(V, P_n, \rho'_n)}{\log \rho'_n} = \chi(P).$$

D'où le théorème.

PROPOSITION 3. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 2, on a, si $d\mu$ est la mesure positive de Radon associée à* V :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log\rho_n}\int_{|\xi-P_n|>\rho_n} d\mu(\xi)\, h_{2p}(\xi, P_n) = \chi(P),$$

$\xi\in D'\subset\subset D$, $B(P_n, \rho_n)\subset K\subset D'$. K étant un compact.

En effet, la décomposition de Riesz de V faite dans le domaine D′ s'écrit :

$$V(Z) = H(Z) - \int_{D'} d\mu(\xi)\, h_{2p}(\xi, Z) \qquad (Z\in D').$$

Donc

$$\lambda(V, P_n, \rho_n) = H(P_n) - \int_{D'} d\mu(\xi)\,\lambda[h_{2p}(\xi, Z), P_n, \rho_n], \tag{1.16}$$

et comme l'on a

$$\lambda[h_{2p}(\xi, Z), P_n, \rho_n] = \inf[|\xi - P_n|^{2-2p}, \rho_n^{2-2p}],$$

(1.16) donne :

$$\lambda(V, P_n, \rho_n) = H(P_n) - \frac{1}{2p-2}\nu(P_n, \rho_n) - \int_{|\xi-P_n|>\rho_n} d\mu(\xi)\, h_{2p}(\xi, P_n) \qquad (\xi\in D'). \tag{1.17}$$

$|H(P_n)|$ étant bornée dans K, on aura $|H(P_n)| = o(\log\rho_n)$, $n\to+\infty$. De même, $\nu(P_n, \rho_n)$ est bornée par un nombre qui ne dépend que de K, pour $B(P_n, \rho_n)\subset K$, (car $\nu(Z, \rho)$ est croissante de ρ pour Z fixé). La proposition découle alors de (1.17).

PROPOSITION 4. — *Soient* V *une fonction plurisousharmonique dans* D, $D'\subset\subset D$ *un sous-domaine de* D, P *un point de* $E[V=-\infty]\cap D'\neq\emptyset$, $P_n\in D'$ *une suite de points de* D′ *qui converge vers* P*;* $\omega_n\subset D'$ *un voisinage de* P_n *tel que, son diamètre tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, $\delta(\omega_n)$ *et* $\delta'(\omega_n)$, *les distances minimum et maximum de* P_n *à* $\omega_n^\star$, *soit enfin* $M(\omega_n) = \sup_{Z\in\omega_n} V$. *Si on a*

$$\log|P-P_n| \sim \log\delta(\omega_n) \sim \log\delta'(\omega_n) \qquad (n\to+\infty),$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|P-P_n|}{\delta(\omega_n)} = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M(\omega_n)}{\log|P-P_n|} = \chi(P).$$

En effet, pour n assez grand, $B[P_n, \delta(\omega_n)]\subset\omega_n\subset B[P_n, \delta'(\omega_n)]\subset D'$, $(\log\delta(\omega_n) < 0)$. Donc :

$$\frac{M_{P_n}[\delta(\omega_n)]}{\log\delta(\omega_n)} \geqq \frac{M(\omega_n)}{\log|P-P_n|}\,\frac{\log|P-P_n|}{\log\delta(\omega_n)} \geqq \frac{M_P[\delta'(\omega_n)]}{\log\delta'(\omega_n)}\,\frac{\log\delta'(\omega_n)}{\log\delta(\omega_n)}. \tag{1.18}$$

Utilisant le théorème 2, et les conditions imposées dans l'énoncé 4, on établit la conclusion, en passant à la limite dans (1.18),

7. THÉORÈME 3. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique dans* C^p, *telle que*

$$\lambda(V^+, O, r) = O(\log r), \qquad r \to +\infty, \qquad V^+ = \sup(V, 0);$$

on a, quel que soit le point $P \in C^p$:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_P(r)}{\log r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda(V^+, P, r)}{\log r} = \omega_P = \omega, \qquad \textit{avec} \quad \omega = \lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda(V^+, O, r)}{\log r} < +\infty.$$

Remarquons que la dernière limite figurant dans le théorème 3 existe, car V^+ étant plurisousharmonique $\lambda(V^+, O, r)$ est convexe croissante de $\log r$. La condition imposée au début du théorème entraîne l'existence d'une direction asymptotique oblique pour la courbe convexe croissante représentative de $\lambda(V^+, O, r) = F(\log r)$. D'où l'existence de ω. La démonstration du théorème 3 est alors analogue à celle du théorème 1. Supposons d'abord P à l'origine. Soit $B(O, r) \subset B(O, R)$, et $k = \frac{r}{R}$. On obtient de la même façon que dans le théorème 1 :

$$(1.19) \qquad \lambda(V^+, O, r) \leqq M(r) \leqq \frac{1}{\sigma_{2p-1}(1)} \int V(Q) \frac{R^2 - r^2}{|Z - Q|^{2p}} R^{2p-2}\, d\sigma_{2p-1}(\vec{a})$$
$$\leqq \frac{1+k}{(1-k)^{2p-1}} \lambda(V^+, O, R), \qquad Q = R\vec{a}, \qquad Z \in B^*(O, r).$$

Considérons (1.19), pour $R = R(r) = r \log r\,(r > 1)$; comme

$$k(r) \to 0, \quad \frac{\log r}{\log R} \to 1 \qquad (\text{quand } r \to +\infty),$$

il suffit alors de diviser ses trois membres par $\log r$, et passer à la limite pour conclure. Supposons maintenant P différent de O à distance finie. Posons $|OP| = \rho$, on a

$$M_P(r) \leqq M(r+\rho) \qquad \text{et} \qquad \log(r+\rho) \sim \log r \qquad (r \to +\infty).$$

Donc, si $r > 1$:

$$(1.20) \qquad \omega_P = \lim_{r\to+\infty} \frac{M_P(r)}{\log r} \leqq \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r+\rho)}{\log(r+\rho)} \frac{\log(r+\rho)}{\log r} = \omega.$$

De même,

$$M(r) \leqq M_P(r+\rho),$$

Donc, si $r > 1$,

$$(1.21) \qquad \omega = \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{\log r} \leqq \lim_{r\to+\infty} \frac{M_P(r+\rho)}{\log(r+\rho)} \frac{\log(r+\rho)}{\log r} = \omega_P.$$

On conclut, en comparant (1.20) à (1.21).

Proposition 5. — *Soient* $P_1, P_2, \ldots$ *une suite de points qui tend vers l'infini;* $\rho_1, \rho_2, \ldots$ *une suite de nombres positifs,* $\rho_n \to +\infty$. *Si* $\dfrac{\lambda(V^+, P_n, \rho_n)}{\log\rho_n}$ *tend vers une limite (quand* $n \to +\infty$*), on aura*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{P_n}(\rho_n)}{\log\rho_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda(V^+, P_n, \rho_n)}{\log\rho_n}.$$

En effet, à chaque ρ_n faisons correspondre un nombre $R_n > \rho_n$, et écrivons les inégalités (1.19), pour P_n, ρ_n, R_n. Soit $k_n = \frac{\rho_n}{R_n}$, on aura, si $\rho_n > 1$,

$$(1.22) \qquad \frac{\lambda(V^+, P_n, \rho_n)}{\log\rho_n} \leq \frac{M_{P_n}(\rho_n)}{\log\rho_n} \leq \frac{1+k_n}{(1-k_n)^{2p-1}} \frac{\lambda(V^+, P_n, R_n)}{\log R_n} \frac{\log R_n}{\log\rho_n}.$$

Il suffit pour conclure de prendre $R_n = \rho_n \log\rho_n$ dans (1.22), et passer à la limite $\left(\text{car } k_n = \frac{\rho_n}{R_n} = \frac{1}{\log\rho_n} \to 0,\ \frac{\log R_n}{\log\rho_n} \to 1\right)$.

CHAPITRE II.

III. — Étude d'une classe de fonctions entières d'ordre $0 \leq \alpha < 1$.

1. La représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel et ses applications aux fonctions entières d'ordre fini, a été étudiée par P. Lelong dans une série de Notes aux *Comptes rendus* ([19], [20], [21], *voir* aussi [22]). Signalons un des résultats.

Si la fonction entière $f(z_1, \ldots, z_p)$, vérifie les conditions suivantes :

$$f(O) \neq 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda[\log^+|f|, O, t]}{t^{q+1}} = 0, \qquad \int \frac{d\nu(t)}{t^{q+1}} < +\infty$$

pour l'entier $q \geq 0$, on a uniformément sur tout compact de C^p,

$$V(Z) = \log|f(Z)| = \mathcal{R}[S_q(Z)] + \sigma_{2p-3} \int d\mu(a)\, e_p(a, Z, q).$$

Rappelons que $d\mu = k_p^{-1}\, d\sigma$ $\left(\text{où } d\sigma \text{ désigne l'élément d'aire de l'ensemble analytique } f(z_1, \ldots, z_p) = 0,\ k_p = \frac{2\pi^{p-1}}{(p-2)!}\right)$, est la mesure de Radon positive associée à la fonction plurisousharmonique $V = \log|f|$; $\mu(t)$ est la masse portée par la boule $B(O, t)$, $\nu(t) = (2p-2)\, t^{2-2p}\mu(t)$, si $p > 1$, $\nu(t) = \mu(t)$ si $p = 1$. $\mathcal{R}$ désigne une partie réelle, et

$$S_q(Z) = V(O) + 2\sum_i z_i \frac{\partial V(O)}{\partial z_i} + \ldots + \frac{2}{q!}\left[\sum_i z_i \frac{\partial V(O)}{\partial z_i}\right]^{(q)},$$

$$e_p(a, Z, q) = -|a - Z|^{2-2p} + \sum_{n=0}^{n=q} P_n(z_i, \bar{z}_j, a), \qquad |a| \neq 0, \qquad Z \neq a$$

est la fonction obtenue par suppression dans le développement du noyau $-|a-Z|^{2-2p}$ en série de polynomes homogènes des z_i, $\bar{z}_j$, des termes de degré inférieur ou égal à q.

Nous considérons ici particulièrement le cas où $q=0$, ce qui entraîne que $\mathcal{R}[S_q(Z)]$, se réduise à une constante $V(O)=\log|f(O)|$. Nous démontrons d'abord directement l'énoncé correspondant à ce cas sous la forme suivante :

Théorème (P. Lelong). — *Si* $V(Z)$ *est une fonction plurisousharmonique dans tout* C^p, *satisfaisant aux conditions* :

a. $\lambda(V^+, O, R)=o(R), \qquad R\to+\infty, \qquad V^+=\sup(V, 0)$;

b. $$\int_1^{+\infty}\frac{d\nu(t)}{t}<+\infty,$$

on a, en supposant $V(O)>-\infty$, *la représentation*

$$V(Z)=V(O)-\int_{C^p}d\mu(\xi)\,[h_{2p}(\xi, Z)-h_{2p}(\xi, O)]. \tag{2.1}$$

Pour établir cet énoncé, établissons d'abord :

Lemme 4. — *Si* V *satisfait à* (*a*) *et* (*b*), *alors*

1° (*a*) *entraîne* $\lambda(|V|, O, R)=o(R)$, $\nu(R)=o(R)$. $R\to+\infty$.

2° (*a*) *et* (*b*) *entraînent la convergence des intégrales*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^2}\,dt, \qquad \int_{|\xi|\geq 1}\frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{2p-1}}.$$

En effet, de $|V|=2V^+-V$, résulte immédiatement la première partie de 1° ; car (*a*) entraîne $\lambda(V, O, R)=o(R)\,(R\to+\infty)$. D'autre part $\lambda(V, O, R)$ est convexe croissante de $\log R$, donc

$$\nu(R)\leqq\frac{\lambda(V, O, eR)-\lambda(V, O, R)}{\log eR-\log R}\leqq\lambda(V^+, O, eR)-V(O)=o(R) \qquad (R\to+\infty).$$

D'où la première partie du lemme. Pour établir la deuxième partie, écrivons

$$\int_1^{+\infty}\frac{d\nu(t)}{t}=\left[\frac{\nu(t)}{t}\Big|_1^{+\infty}\right]+\int_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^2}\,dt ;$$

les deux premiers termes ayant un sens, il en sera de même du troisième. De même, en posant $|\xi|=t$, on a formellement :

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1}\frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{2p-1}}&=\left[\frac{\mu(t)}{t^{2p-1}}\Big|_1^{+\infty}\right]+(2p-1)\int_1^{+\infty}\frac{\mu(t)}{t^{2p}}\,dt\\&=\frac{1}{2p-2}\left[\frac{\nu(t)}{t}\Big|_1^{+\infty}\right]+\frac{2p-1}{2p-2}\int_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Chaque terme de cette dernière expression a un sens comme on vient de voir ; il en sera de même pour l'intégrale considérée. D'où le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème. La décomposition de Riesz de V à partir du noyau de Green, faite dans la boule $B(O, R) \subset C^p$, s'écrit :

$$V(Z) = \frac{R^{2p-1}}{(2p-2)\,\sigma_{2p-1}(1)} \int \frac{\partial G_R(2p, R\vec{a}, Z)}{\partial n_i} V(R\vec{a})\, d\sigma_{2p-1}(\vec{a}) - \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\, G_R(2p, \xi, Z),$$

et puisque $V(O) > -\infty$, on a pour $\frac{|Z|}{R} \leqq k < 1$:

$$(2.2)\quad V(Z) - V(O) = \frac{R^{2p-1}}{(2p-2)\,\sigma_{2p-1}(1)} \int \left[\frac{\partial G_R(2p, R\vec{a}, Z)}{\partial n_i} - \frac{\partial G_R(2p, R\vec{a}, O)}{\partial n_i}\right] V(R\vec{a})\, d\sigma_{2p-1}(\vec{a}) - \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\,[G_R(2p, \xi, Z) - G_R(2p, \xi, O)].$$

La première expression figurant au second membre de (2.2), tend vers zéro, pour $R \to +\infty$, et $Z \in K$, où K est un compact quelconque de C^p. En effet, si $\frac{|Z|}{R} \leqq k < 1$, elle est majorée en module d'après le lemme 1, appliqué dans C^p, par

$$R^{2p-1} c_1(2p, k) \frac{|Z|}{R^{2p}} \lambda(|V|, O, R) = c_1(2p, k)\,|Z|\,\frac{\lambda(|V|, O, R)}{R} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

(lemme 4). On a donc

$$V(Z) - V(O) = \lim_{R \to +\infty} \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\,[G_R(2p, \xi, Z) - G_R(2p, \xi, O)] \qquad (Z \in K)$$

cette dernière limite est égale à son tour à

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\,[h_{2p}(\xi, Z) - h_{2p}(\xi, O)].$$

En effet, la différence

$$\int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\,[G_R(2p, \xi, Z) - G_R(2p, \xi, O) - h_{2p}(\xi, Z) + h_{2p}(\xi, O)]$$

est majorée en module d'après le lemme 1, par

$$c(2p-2, k)\frac{|Z|}{R^{2p-1}} \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi) = \frac{c(2p-2, k)}{2p-2}\,|Z|\,\frac{\nu(R)}{R} \to 0 \qquad (R \to +\infty).$$

(lemme 4), $Z \in K$, $\frac{|Z|}{R} \leqq k < 1$.

Donc, sur tout compact $K \subset C^p$:

$$V(Z) - V(O) = \lim_{R \to +\infty} \int_{\xi \in B(O,R)} d\mu(\xi)\,[h_{2p}(\xi, Z) - h_{2p}(\xi, O)].$$

La limite du deuxième membre existe donc si $V(O) > -\infty$. On vérifie d'ailleurs que l'intégrale

$$\int_{|\xi|>\rho} d\mu(\xi)\,[h_{2p}(\xi, Z) - h_{2p}(\xi, O)]$$

converge absolument uniformément pour $Z \in B(O, k\rho)\,(k < 1)$, quel que soit ρ. En effet, l'intégrale

$$\int_{|\xi|>\rho} d\mu(\xi)\,|\,h_{2p}(\xi, Z) - h_{2p}(\xi, O)\,|$$

est majorée d'après le lemme 1, par $c(2p-2, k)\,k\rho \int_{|\xi|>\rho} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{2p-1}} < +\infty$ et ceci quel que soit $Z \in B(O, k\rho)$.

Remarque. — $V(O) \neq -\infty$, implique $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu(t)}{t^{2p-2}} = 0$, et la convergence simple de

$$\int_{|\xi|<1} d\mu(\xi)\,h_{2p}(\xi, O) = \int_{|\xi|<1} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{2p-2}}.$$

IV — Classe F_α de fonctions entières.

2. Définition 1. — *Une fonction entière $f(z_1, \ldots, z_p)$, sera dite de la classe F_α, $0 \leq \alpha < 1$, si elle vérifie :*

a. $\lambda(\log^+|f|, O, t,) = o(t)$, $t \to +\infty$.

b. Il existe un nombre $c(f) \geq 0$, tel que

$$\nu(t) = \frac{d\lambda(\log|f|, O, t)}{d\log t} \leq c(f)\,t^\alpha \qquad (t \geq 0).$$

Nous allons maintenant donner des propriétés des moyennes $\lambda(\log|f|, Z, R)$ généralisant aux fonctions F_α des résultats obtenus pour les polynomes par P. Lelong ([17], [18]). Nous appliquons les résultats obtenus à l'étude des familles de fonctions F_α.

Écartons les fonctions f de la famille F_α pour lesquelles les nombres $c(f)$ correspondants sont nuls; ces fonctions ne sont que des constantes ([4]). Écartons également le cas $\alpha = 0$, la famille F_0 n'est d'autre que la famille des polynomes ([5]).

([4]) En effet, $c(f) = 0$, entraîne $\nu(t) = 0$, quel que soit t. Par conséquent $\log|f|$ est sans masse. Elle est donc pluriharmonique dans tout C^p; elle est constante sur tous les plans Π^1 issus de O; car (a) entraîne que $M(t) = o(t)$, $t \to +\infty$; elle est donc constante.

([5]) D'après une proposition due à Stoll [26] : si une fonction vérifie (a) et la condition $\nu(t) \leq \nu_0$, ν_0 une constante positive, alors f est un polynome de degré égal à la partie entière de ν_0.

Proposition 6. — *Si $f(z_1\ldots, z_p)$, est de la classe F_α, $0<\alpha<1$, il n'y aura aucun zéro de f, dans la boule de centre O et de rayon δ :*

$$\delta = \left(1+\frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-\frac{2p-2}{\alpha}}[c(f)]^{-\frac{1}{\alpha}}\left[1-\left(1+\frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-1}\right] \qquad (p\geqq 2).$$

En effet, soient P un zéro de $f(z_1, \ldots, z_p)$, $r_0 = |\mathrm{OP}|$, et $r > r_0$. En écrivant que la masse de $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$, contenue dans $B(O, r)$ est au moins égale à celle contenue dans $B(P, r-r_0)$, et en utilisant l'inégalité (1.1), figurant dans les préliminaires, on obtient

$$\mu(t) \geqq \mu(P, r-r_0) \geqq \frac{1}{2p-2}(r-r_0)^{2p-2}.$$

Donc

$$\nu(t) \geqq \frac{(r-r_0)^{2p-2}}{r^{2p-2}} = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{2p-2},$$

D'après la condition (b) de la définition 1, on aura pour tout $r > r_0$,

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{2p-2} \leqq \nu(r) \leqq c(f)\, r^\alpha$$

et

$$r - r_0 \leqq [c(f)]^{\frac{1}{2p-2}} r^{\frac{\alpha}{2p-2}+1} = g(r). \tag{2.3}$$

Menons à la courbe $y = g(r)$ la tangente (elle existe et est unique) de pente égale à 1. Elle coupe l'axe $y = 0$, en un point d'abscisse $\delta > 0$. On a

$$\delta = \left(1+\frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-\frac{2p-2}{\alpha}}[c(f)]^{-\frac{1}{\alpha}}\left[1-\left(1+\frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-1}\right].$$

Alors on n'aura (2.3), quel que soit $r > r_0$, que si la droite $y = r - r_0$ est au-dessous de la tangente précédente, c'est-à-dire si $r_0 \geqq \delta$. Donc, le zéro le plus proche de l'origine de $f(z_1, \ldots, z_p) \in F_\alpha$, est à la distance δ au moins, δ dépendant de α et de $c(f)$. D'où la proposition.

Théorème 4. — *Soient $f(z_1, \ldots, z_p)$ une fonction entière non constante, de la classe F_α, $0 \leqq \alpha < 1$, et R_0 un nombre positif arbitraire. La moyenne*

$$U_\rho(Z) = \lambda(\log|f|, Z, \rho),$$

vérifie pour $|Z| \leqq R_0$, $|Z'| \leqq R_0$, $\rho \geqq 0$, $\rho' \geqq 0$, et $\rho_1 = \max(\rho, \rho')$:

$$\frac{1}{c(f)}|U_\rho(Z) - U_{\rho'}(Z')| \leqq (\rho_1 + R_0)^\alpha |\log\rho - \log\rho'| + \frac{2p-1}{1-\alpha}\left(1+\frac{R_0}{\rho_1}\right)^\alpha \frac{1}{\rho_1^{1-\alpha}}|Z - Z'|. \tag{2.4}$$

Elle est donc également continue de l'ensemble des variables $(Z, \log\rho)$.

Pour $\alpha = 0$, (2.4) est un résultat de P. Lelong concernant les polynomes de plusieurs variables complexes, avec $c(f)$ égal au degré du polynome f([17], [18]). Nous supposons donc $\alpha \neq 0, p \geqq 2$. Soit comme d'habitude $\nu(Z, R) = \frac{\partial \lambda(\log|f|, Z, R)}{\partial \log R}$. On a si $|Z| \leqq R_0$,

$$\nu(t, Z) \leqq \nu(t + |Z|) \leqq c(f)(t + R_0)^\alpha,$$

donc

$$(2.5) \quad |U_\rho(Z) - U_{\rho'}(Z)| \leqq \left| \int_\rho^{\rho'} \nu(t, Z)\, d\log t \right| \leqq c(f) \int_\rho^{\rho'} (t + R_0)^\alpha \frac{dt}{t}$$
$$\leqq c(f)(\rho_1 + R_0)^\alpha |\log \rho - \log \rho'|, \qquad \rho_1 = \max(\rho, \rho').$$

Une fonction f de la classe F_α, vérifie les conditions de la représentation (2.1). En effet, on a vu (proposition 6) que $f(0, \ldots, 0) \neq 0$, et d'autre part l'intégrale

$$(2.6) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{t} = \left[\frac{\nu(t)}{t} \Big|_1^{+\infty} \right] + \int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}\, dt$$

a un sens. Car les deux dernières expressions de (2.6), ont chacune un sens, grâce à l'hypothèse (b) de la définition 1. On a donc

$$\log|f(z_1, \ldots, z_p)| = \log|f(O)| - \int_{C^p} d\mu(\xi)[h_{2p}(\xi, Z) - h_{2p}(\xi, O)].$$

Par conséquent,

$$(2.7) \qquad U_\rho(Z) - U_\rho(Z') = -\int_{C^p} d\mu(\xi)[h_\rho(2p, \xi, Z) - h_\rho(2p, \xi, Z')],$$

où $h_\rho(2p, \xi, Z)$ est la moyenne de $h_{2p}(\xi, Z)$ sur la frontière de la boule $B(Z, \rho)$, égale à $\inf(|\xi - Z|^{2-2p}, \rho^{2-2p})$. $h_\rho(2p, \xi, Z)$ est continue et bornée supérieurement par ρ^{2-2p}. D'autre part si $|\xi - Z| = t$, on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_j} |\xi - Z|^{2-2p} \right| \leqq \frac{\partial}{\partial t} t^{2-2p} \leqq \frac{2p-2}{t^{2p-1}}, \qquad \xi \neq Z \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_j} h_\rho(2p, \xi, Z) \right| \leqq M(\xi, Z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

avec

$$M(\xi, Z) = \begin{cases} \dfrac{2p-2}{|\xi - Z|^{2p-1}} & \text{si } |\xi - Z| \geqq \rho, \\ 0 & \text{si } |\xi - Z| < \rho. \end{cases}$$

Ceci étant, rappelons que si $f(P)$ est une fonction réelle définie et finie dans un domaine borné et fermé D, et si tous les nombres dérivés sont bornés dans D par une constante M, alors $f(P)$ vérifie dans D, à la condition de Lipschitz :

$$|f(P) - f(P')| \geqq M|P - P'|.$$

Appliquons ce résultat à la fonction $h_\rho(2p, \xi, Z)$, pour ξ fixé. Supposons que le point Z varie dans la boule fermée $B(O, R_0)$, on a

$$M(\xi, Z) \leqq \begin{cases} \dfrac{2p-2}{(|\xi| - R_0)^{2p-1}} & \text{si } |\xi| \geqq R_0 + \rho, \\ \dfrac{2p-2}{\rho^{2p-1}} & \text{si } |\xi| < R_0 + \rho. \end{cases}$$

Par conséquent, pour $|Z| \leqq R_0$, $|Z'| \leqq R_0$:

$$|h_\rho(2p, \xi, Z) - h_\rho(2p, \xi, Z')| \leqq \begin{cases} \dfrac{2p-2}{(|\xi| - R_0)^{2p-1}} |Z - Z'| & \text{si } |\xi| \geqq R_0 + \rho, \\ \dfrac{2p-2}{\rho^{2p-1}} \qquad |Z - Z'| & \text{si } |\xi| < R_0 + \rho. \end{cases}$$

Donc, d'après (2.7), on aura pour $|Z| \leqq R_0$, $|Z'| \leqq R_0$, et sous réserve de la convergence de l'intégrale

$$(2.8) \quad U_\rho(Z) - U_\rho(Z')| \leqq \left[(2p-2) \int_{|\xi| \geqq R_0 + \rho} \frac{d\mu(\xi)}{(|\xi| - R_0)^{2p-1}} + \frac{2p-2}{\rho^{2p-1}} \mu(R_0 + \rho) \right] |Z - Z'|.$$

Montrons que le second membre de (2.8), a un sens pour $\rho > 0$.

Lemme 5. — *Le crochet figurant au second membre de* (2.8) *est majoré par*

$$\frac{2p-1}{2p-2} \frac{c(f)}{1-\alpha} \left(1 + \frac{R_0}{\rho}\right)^\alpha \frac{1}{\rho^{1+\alpha}}.$$

En effet, posant $|\xi| - R_0 = t$, on a formellement :

$$(2.9) \quad \int_{|\xi| \geqq R_0 + \rho} \frac{d\mu(\xi)}{(|\xi| - R_0)^{2p-1}} = \left[\frac{\mu(R_0 + t)}{t^{2p-1}} \Big|_\rho^{+\infty} \right] + (2p-1) \int_\rho^{+\infty} \frac{\mu(R_0 + t)}{t^{2p}} dt.$$

Or, d'après la définition 1, $\nu(t) \leqq c(f)\, t^\alpha$, $\alpha < 1$, donc

$$\mu(R_0 + t) \leqq \frac{1}{2p-2} (R_0 + t)^{2p-2} c(f)\, (R_0 + t)^\alpha$$

et

$$\mu(R_0 + t) = o(t^{2p-1}) \qquad (t \to +\infty).$$

Le premier terme du second membre de (2.9), se réduit à $-\dfrac{\mu(R_0 + \rho)}{\rho^{2p-1}}$; le second terme est majoré par

$$\frac{2p-1}{2p-2} c(f) \int_\rho^{+\infty} \frac{(R_0 + t)^\alpha}{t^2} dt \leqq \frac{2p-1}{2p-2} c(f) \int_\rho^{+\infty} \left(1 + \frac{R_0}{\rho}\right)^\alpha \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$$
$$= \frac{2p-1}{2p-2} \frac{c(f)}{1-\alpha} \left(1 + \frac{R_0}{\rho}\right)^\alpha \frac{1}{\rho^{1-\alpha}}.$$

D'où le lemme. Le théorème 4 résulte alors de (2.5), (2.8), du lemme 5 et de

$$|U_\rho(Z) - U_{\rho'}(Z')| \leqq |U_\rho(Z) - U_{\rho'}(Z)| + |U_{\rho'}(Z) - U_{\rho'}(Z')|,$$

THÉORÈME 5. — *Une fonction entière $f(z_1, \ldots, z_p)$ vérifiant les conditions*

$$\lambda(\log^+|f|, \mathrm{O}, t) = o(t) \qquad (t \to +\infty),$$
$$\nu(t) \leq c(f)\, t^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1,\ t \geq 0),$$

est d'ordre α au plus. Plus précisément, il existe un nombre $m(\alpha) > 0$, dépendant de α et de p, mais non de f, ni de Z, tel que

$$\log|f(z_1, \ldots, z_p)| \leq \lambda[\log|f|, \mathrm{O}, 1] + m(\alpha)\, c(f)\, |\mathrm{Z}|^\alpha \qquad (\mathrm{Z} \in \mathrm{C}^p).$$

Ce théorème peut être établi directement à partir de la représentation potentielle associée de P. Lelong [21], mais nous allons donner une démonstration à partir du théorème 4. $f(z_1, \ldots, z_p)$ étant de la classe F_α, le théorème 4 donne pour $|\mathrm{Z}| \leq \mathrm{R}_0$, $|\mathrm{Z}'| \leq \mathrm{R}_0$, $\rho \geq 0$, $\rho' \geq 0$, $\rho_1 = \max(\rho, \rho')$

$$(2.10) \quad |\mathrm{U}_\rho(\mathrm{Z}) - \mathrm{U}_{\rho'}(\mathrm{Z}')| \leq c(f)\left[(\rho_1 + \mathrm{R}_0)^\alpha |\log\rho - \log\rho'| + \frac{2p-1}{1-\alpha}\left(1 + \frac{\mathrm{R}_0}{\rho_1}\right)^\alpha \frac{|\mathrm{Z} - \mathrm{Z}'|}{\rho_1^{1-\alpha}}\right].$$

(2.10) étant valable pour $|\mathrm{Z}| = \mathrm{R}_0$, et $\mathrm{Z}' = 0$, on a, pour $\rho' = \rho + |\mathrm{Z}|$, $\rho_1 = \rho'$, $\rho > 0$:

$$\mathrm{U}_\rho(\mathrm{Z}) \leq \mathrm{U}_{\rho+|\mathrm{Z}|}(\mathrm{O}) + c(f)\left[(\rho + 2|\mathrm{Z}|)^\alpha \log\frac{\rho + |\mathrm{Z}|}{\rho} + \frac{2p-1}{1-\alpha}\left(1 + \frac{|\mathrm{Z}|}{\rho + |\mathrm{Z}|}\right)^\alpha \frac{|\mathrm{Z}|}{(\rho + |\mathrm{Z}|)^{1-\alpha}}\right].$$

Si l'on pose pour $\mathrm{Z} \neq 0$, $\rho = k|\mathrm{Z}|$; l'inégalité ci-dessus s'écrit :

$$(2.11) \quad \mathrm{U}_\rho(\mathrm{Z}) \leq \mathrm{U}_{\rho+|\mathrm{Z}|}(\mathrm{O}) + c(f)\,|\mathrm{Z}|^\alpha\left[(2+k)^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{2p-1}{1-\alpha}\left(1 + \frac{1}{1+k}\right)^\alpha \frac{1}{(1+k)^{1-\alpha}}\right];$$

k peut varier de 0 à $+\infty$. Or, en supposant $\rho + |\mathrm{Z}| \geq 1$, on aura

$$|\mathrm{U}_{\rho+|\mathrm{Z}|}(\mathrm{O}) - \mathrm{U}_1(\mathrm{O})| \leq \left|\int_1^{\rho+|\mathrm{Z}|} \nu(t)\, d\log t\right| \leq \frac{c(f)}{\alpha}|(\rho + |\mathrm{Z}|)^\alpha - 1|,$$

$$(2.12) \quad \mathrm{U}_{\rho+|\mathrm{Z}|}(\mathrm{O}) \leq \mathrm{U}_1(\mathrm{O}) + \frac{c(f)}{\alpha}(\rho + |\mathrm{Z}|)^\alpha = \mathrm{U}_1(\mathrm{O}) + \frac{c(f)}{\alpha}(1+k)\,|\mathrm{Z}|^\alpha.$$

Si $\rho + |\mathrm{Z}| \leq 1$, on a aussi $\mathrm{U}_{\rho+|\mathrm{Z}|}(\mathrm{O}) \leq \mathrm{U}_1(\mathrm{O})$. Dans tous les cas, (2.12) est vérifiée. D'après (2.11), on obtient alors

$$(2.13) \quad \log|f(z_1, \ldots, z_p)| \leq \mathrm{U}_\rho(\mathrm{Z}) \leq \mathrm{U}_1(\mathrm{O}) + c(f)\,|\mathrm{Z}|^\alpha\left[\frac{1}{\alpha}(1+k)^\alpha + (2+k)^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{2p-1}{1-\alpha}\,\frac{(2+k)^\alpha}{1+k}\right],$$

car pour tout $\rho \geq 0$, $\log|f(\mathrm{Z})| \leq \mathrm{U}_\rho(\mathrm{Z})$.

Le crochet figurant dans (2.13), est manifestement supérieur à 1. Si l'on prend $m(\alpha)$ égal à la borne inférieure de cette expression pour k variant de 0 à $+\infty$, (2.13) donnera

$$\log|f(z_1, \ldots, z_p)| \leq \mathrm{U}_1(\mathrm{O}) + m(\alpha)\, c(f)\, |\mathrm{Z}|^\alpha \qquad (\mathrm{Z} \in \mathrm{C}^p).$$

D'où le théorème.

3. Fonction entière limite des polynomes.

Théorème 6. — *Soit*

$$P_q(z_1, \ldots, z_p), \quad P_q(O) \neq 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p \geqq 2)$$

une suite de polynomes uniformément convergente dans la boule fermée B(O, 1) *vers une fonction non identiquement nulle. Si la mesure de Radon positive* $d\mu_q$ *associée à* $\log |P_q|$, *vérifie pour tout* q :

$$(2.14) \qquad \int_{C^p} \frac{d\mu_q(\xi)}{|\xi|^{2p-2+\alpha}} \leqq M \qquad (0 < \alpha < 1),$$

où M *est une constante indépendante de* q, *alors la suite* P_q *converge uniformément localement dans tout* C^p *vers une fonction entière* $f(z_1, \ldots, z_p)$ *d'ordre* α *au plus, et dont ses zéros vérifient encore* (2.14).

Démontrons tout d'abord :

Lemme 6. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème* 6, *on a, quel que soit* q *et* $t \geqq 0$:

$$\nu_q(t) \leqq \alpha M t^\alpha.$$

En effet, comme $P_q(O) \neq 0$, O n'appartient pas à l'ensemble analytique $P_q(z_1, \ldots, z_p) = 0$, donc $\nu_q(O) = 0$. (2.14) donne

$$\int_{C^p} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{2p-2+\alpha}} = \frac{1}{2p-2}\left[\frac{\nu_q(t)}{t^\alpha}\Big|_0^{+\infty}\right] + \frac{2p-2+\alpha}{2p-2}\int_0^{+\infty}\frac{\nu_q(t)}{t^{1+\alpha}} \leqq M.$$

Le premier terme figurant au second membre étant nul [on a $\nu(t) < n$, pour un polynome de degré n], on obtient en particulier :

$$\frac{2p-2+\alpha}{2p-2}\nu_q(t)\int_t^{+\infty}\frac{du}{t^{1+\alpha}} \leqq M,$$

ou encore

$$(2.15) \qquad \nu_q(t) \leqq M \frac{2p-2}{2p-2+\alpha}\alpha t^\alpha \leqq \alpha M t^\alpha,$$

quel que soit q. D'où le lemme.

Ainsi quel que soit q [les polynomes vérifient la condition (a) de la définition 1] $P_q(Z) \in F_\alpha$, avec $c(P_q) = \alpha M$. D'après le théorème 5, on aura alors (avec les mêmes notations) :

$$(2.16) \qquad \log |P_q(z_1, \ldots, z_p)| \leqq \lambda[\log |P_q|, O, 1] + \alpha M m(\alpha) |Z|^\alpha \qquad (Z \in C^p).$$

Rappelons que $m(\alpha)$ ne dépend que de α et du nombre des dimensions de l'espace. Par hypothèse, les P_q convergent uniformément dans la boule fermée B(O, 1) vers une fonction non identiquement nulle, donc

$$\sup_q \lambda[\log |P_q|, O, 1] = \omega_0 < +\infty.$$

D'où, d'après (2.16) :

$$(2.17) \qquad \log|P_q(z_1, \ldots, z_p)| \leqq \omega_0 + \alpha M m(\alpha) |Z|^\alpha \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

La suite $|P_q|$ est ainsi bornée uniformément sur tout compact de C^p. Elle forme une famille normale, et puisque, il y a convergence uniforme dans $B(O, 1)$, on en déduit la convergence uniforme sur tout compact de C^p. La limite sera une fonction entière $f(z_1, \ldots, z_p)$ non identiquement nulle vérifiant (2.17). Donc entière d'ordre α au plus.

La dernière partie du théorème se démontre comme suit. Puisque les polynomes $P_q(z_1, \ldots, z_p)$ appartiennent à la classe F_α, avec $c(P_q) = \alpha M$, il n'y aura, d'après la proposition 6, aucun zéro de $P_q(z_1, \ldots, z_p)$ dans la boule de centre O et de rayon

$$\delta = \left(1 + \frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-\frac{2p-2}{\alpha}} [\alpha M]^{-\frac{1}{\alpha}} \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha}{2p-2}\right)^{-1}\right] \qquad (p \geqq 2).$$

Soit $R > 0$ un nombre donné arbitrairement grand. La convergence uniforme de $P_q(z_1, \ldots, z_p)$ vers $f(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$, dans la boule fermée $B(O, R)$, entraine la convergence de $\nu_q(t)$ vers $\nu(t) = \dfrac{d\lambda[\log|f|, O, t]}{d\log t}$, et l'on sait que cette convergence sera uniforme pour $0 < t_0 < t < R_0 < R$ ([17], théorème 6). Ceci dit, la fonction $f(z_1, \ldots, z_p)$ qui est d'ordre α et dont le $\nu(t)$ vérifie (2.15), sera de la classe F_α, avec $c(f) = \alpha M$. Donc $f(z_1, \ldots, z_p)$ n'a pas de zéro dans $B(O, \delta)$. La convergence uniforme de $\nu_q(t)$ vers $\nu(t)$ dans $\delta \leqq t < R_0$, entraîne que

$$\int_\delta^{R_0} \frac{\nu_q(t)}{t^{1+\alpha}} dt \to \int_\delta^{R_0} \frac{\nu(t)}{t^{1+\alpha}} dt \qquad (q \to +\infty),$$

et comme l'on a

$$\frac{2p-2+\alpha}{2p-2} \int_\delta^{R_0} \frac{\nu(t)}{t^{1+\alpha}} dt \leqq \int_{C^p} \frac{d\mu_q(t)}{t^{2p-2+\alpha}} \leqq M,$$

on obtient

$$\frac{2p-2+\alpha}{2p-2} \int_\delta^{R_0} \frac{\nu(t)}{t^{1+\alpha}} dt \leqq M.$$

M étant une constante, R et R_0 quelconques, on aura

$$\int_{C^p} \frac{d\mu(t)}{t^{2p-2+\alpha}} = \frac{2p-2+\alpha}{2p-2} \int_\delta^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{1+\alpha}} \leqq M.$$

D'où le théorème.

Un théorème de Jenzsch-Lindwart [24] énonce que dans le plan C^1, si une suite de polynomes $P_n(z)[P_n(O) = 1]$ converge uniformément dans le cercle unité, et si les zéros $a_{n,p}$ de $P_n(z)$ satisfont $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{|a_{n,p}|^\alpha} \leqq M$, où α et M sont deux nombres positifs fixes, alors $P_q(z)$ converge uniformément localement dans tout le plan vers une fonction entière de genre inférieur ou égal à la partie entière de α. Le théorème 6 étend ainsi à $p \geqq 2$ variables complexes ce théorème dans le cas $\alpha < 1$.

4. Introduisons la notion suivante :

Définition 2. — *Un ensemble* E *de points de* C^p *sera dit négligeable par rapport aux suites de polynomes ou* P-*négligeable, si pour toute partie compacte* K *de* E, *on peut trouver au moins une suite de polynomes* $P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$ *de degré* $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots$, $q_n \to +\infty$, *telle que :*

a. $$|P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| \leqq M, \qquad Z \in K \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où M *est une constante indépendante de* q_n *et de* Z.

b. $$\limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| = +\infty \qquad (Z \in C^p - K), \text{ presque partout.}$$

La définition est indépendante de M, elle entraîne que tout ensemble contenu dans un ensemble P-négligeable est P-négligeable.

Toute transformation linéaire quelconque, de déterminant non nul :

$$z_j = z_j^0 + \sum_i t_j^i \zeta_j \qquad (1 \leqq i \leqq p, \ 1 \leqq j \leqq p) \tag{2.18}$$

transforme un ensemble P-négligeable en un ensemble P-négligeable. En particulier tout ensemble obtenu par déplacement ou homothétie d'un ensemble P-négligeable est P-négligeable.

En effet, si K est une partie compacte d'un ensemble P-négligeable et $P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$, une suite de polynomes vérifiant les conditions (a) et (b) de la définition 2 par rapport à K, les polynomes $P_{q_n}\left[z_j^0 + \sum_i t_j^i \zeta_j\right]$, vérifierons sur la transformée K^* de K par (2.18), la condition (a), et comme un ensemble de mesure nulle est transformé par (2.18), en un ensemble de mesure nulle, on aura presque partout hors de K^* :

$$\limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log \left| P_{q_n}\left[z_j^0 + \sum_i t_j^i \zeta_j\right] \right| = +\infty,$$

Exemple. — Dans C^p, si $\Psi_s(z_1, \ldots, z_p)$ est un polynome de degré s, l'ensemble $\Psi_s(z_1, \ldots, z_p) = 0$, est P-négligeable. Car les polynomes $[n\Psi_s(Z) + 1]^n$, $n = 1, 2, \ldots$ sont de degré $q_n = ns$, bornés par 1 sur toutes parties compactes de $\Psi_s(Z) = 0$, et l'on a hors de l'ensemble $\Psi_s(Z) = 0$,

$$\limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log |n\Psi_s(Z) + 1|^n = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{s} \log |n\Psi_s(Z) + 1| = +\infty.$$

En particulier, l'ensemble $z_j = 0$, est P-négligeable.

THÉORÈME 7. — *Toute partie compacte d'un ensemble* P-*négligeable est de capacité nulle dans* R^{2p}.

Pour l'établir, rappelons tout d'abord que si $V_n(Z)$ est une suite de fonctions plurisousharmoniques (resp. sousharmoniques) bornée supérieurement uniformément sur tout compact d'un domaine D, et si $V(Z) = \limsup_{n \to +\infty} V_n(Z)$, la régularisée supérieure $V^*(Z)$ de $V(Z)$, égale en chaque point au maximum de Baire ([6]) de $V(Z)$ est plurisousharmonique (resp. sousharmonique) [15] et l'on a :

a_1. $$V^*(Z) = \lim_{\rho \to 0} \left[\limsup_{n \to +\infty} \lambda(V_n, Z, \rho) \right];$$

b_1. $$V(Z) \leqq V^*(Z) \text{ partout} \quad \text{et} \quad V^*(Z) = V(Z),$$

sauf sur ensemble de capacité nulle, ([11] [14]).

Ceci étant rappelé, soit K un compact P-négligeable. $P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$ une suite de polynomes vérifiant les conditions (a) et (b) de la définition 2, par rapport à K. Posons

$$U(Z) = U(z_1, \ldots, z_p) = \limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)|.$$

Par hypothèse, hors de $C^p - K$, $U(Z) = +\infty$, presque partout. Supposons qu'on ait $U(O) = +\infty$, comme on a

$$\frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}(O)| \leqq \lambda \left[\frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}(Z)|, O, 1 \right] = \omega_q,$$

on aura

$$\limsup_{q_n \to +\infty} \omega_{q_n} = +\infty. \tag{2.19}$$

Utilisons l'inégalité (2.4) du théorème 4. Comme on a remarqué, (2.4) est valable pour les polynomes avec $\alpha = 0$, et $c(f)$ égal au degré du polynome f :

$$\text{(2.20)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \lambda \left[\frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}|, Z, \rho \right] - \omega_{q_n} \right| \leqq |\log \rho| + \frac{2p-1}{\rho_1} |Z| \qquad (Z \in C^p), \\ &\rho_1 = \max(\rho, 1). \end{aligned} \right.$$

Pour tout $\rho > 0$, on a, d'après (2.19) et (2.20),

$$\text{(2.21)} \quad \left\{ \begin{aligned} &V_\rho(Z) = \limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{\omega_{q_n}} \lambda \left[\frac{1}{q_n} \log |P_{q_n}|, Z, \rho \right] \equiv 1, \\ &\lim_{\rho \to 0} V_\rho(Z) \equiv 1. \end{aligned} \right.$$

([6]) Le maximum de Baire d'une fonction f au point M s'obtient comme suit : On considère une suite $\omega_{n+1} \subset \omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, de voisinage de M qui tend vers M, quand $n \to +\infty$. Le maximum de Baire de f au point M est égal à $\inf_n \left[\sup_{x \in \omega_n} f(x) \right]$.

D'autre part, (2.20) et l'inégalité

$$\frac{1}{q_n}\log|P_{q_n}(Z)| \leqq \lambda\left[\frac{1}{q_n}\log|P_{q_n}|, Z, 1\right],$$

montrent que les fonctions

$$V_{q_n}(Z) = \frac{1}{q_n\omega_{q_n}}\log|P_{q_n}(Z)|,$$

sont bornées supérieurement uniformément sur tout compact de C^p à partir de q_{n_0} assez grand pour que $\omega_{q_n} > 1$, $q_n > q_{n_0}$. D'après (a_1) et (2.21), on a alors

$$V^*(Z) = \text{rég sup}\left[\limsup_{q_n\to+\infty} V_{q_n}(Z)\right] = \lim_{\rho\to 0} V_\rho(Z) \equiv 1 \qquad (Z \in C^p).$$

D'après (b_1), on aura seulement sur un ensemble de capacité nulle dans R^{2p},

$$\limsup_{q_n\to+\infty} V_{q_n}(Z) < 1.$$

Comme cette inégalité est vérifiée sur K, il en résulte que K est de capacité nulle.

Remarque. — Le théorème 7 montre alors qu'on peut exiger que (b) soit vérifié presque partout dans C^p.

Remarque. — Un ensemble de capacité nulle dans $R^{2p}(p > 1)$ n'est pas nécessairement P-négligeable dans C^p, comme nous montre l'énoncé suivant :

PROPOSITION 7. — *Un ouvert* ω *de* R^p *plongé dans* C^p *n'est jamais* P-*négligeable* (7).

Supposons que ω contient le cube $|x_j| \leqq h$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Si $P_q(z_1, \ldots, z_p)$ est un polynome de degré q par rapport à l'ensemble des variables, de degré q_j par rapport au polynome distingué en z_j, et borné en module par M dans le cube $|x_j| \leqq h (j = 1, 2, \ldots, p)$, on aura, d'après un théorème de S. Bernstein (8),

$$|P_q(z_1, \zeta)| \leqq M h^{-q_1}\left|z_1 + \sqrt{z_1^2 - h^2}\right|^{q_1}$$

$z_1 \in C^1$, $\zeta = (z_2, \ldots, z_p)$ fixé, $z_k = x_k$, $|x_k| \leqq h$, $k = 2, 3, \ldots, p$. Donc, en répétant p fois l'application de ce théorème, on trouvera la majoration

$$\frac{1}{q}\log|P_q(Z)| \leqq \frac{\log M}{q} - \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_p}{q}\log h + \sum_{j=1}^{p}\frac{q_j}{q}\log\left|z_j + \sqrt{z_j^2 - h^2}\right|$$

(7) Cet énoncé est à rapprocher d'un énoncé [23] de P. Lelong : Un ouvert de R^p plongé dans C^p, n'est C^p-effilé en aucun de ses points. Un ensemble E de points de C^p est dit C^p-effilé en O s'il existe une fonction V(M) plurisousharmonique dans un domaine D, avec $O \in D$, $V(O) \neq -\infty$ et $V(M) < V(O) - \alpha (\alpha > 0)$, pour $M \neq 0$, $M \in E \cap D$.

(8) Si un polynome $P_n(z)$, $\partial^0 P_n \leqq n$, satisfait sur le segment $(-h, +h)$ de l'axe réel à $|P_n(x)| \leqq M$, on a, quel que soit $z \in C^1$, $|P_n(z)| \leqq M h^{-n}(a+b)^n$, où a et b sont demi-axes de l'ellipse passant par z et dont les foyers se trouvent aux points de l'axe réel d'abscisses h et $-h$. On a, en fonction de z, $a + b = \left|z + \sqrt{z^2 - h^2}\right|$.

quel que soit $z_1, \ldots, z_p$. Ou encore pour tout $Z \in C^p$:

$$\frac{1}{q}\log|P_q(Z)| \leqq \frac{\log M}{q} + p|\log h| + \sum_{j=1}^{p} \log^+ \left| z_j + \sqrt{z_j^2 - h^2} \right|.$$

La condition (b) sera alors en défaut pour toute suite de polynomes bornés en modules par M sur ω.

THÉORÈME 8. — *Soit* $F(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$ *une fonction entière dans* C^p. *L'ensemble analytique* $F(z_1, \ldots, z_p) = 0$, *est* P-*négligeable*.

Démontrons tout d'abord :

LEMME 7. — *Soit* $F(z_1, \ldots, z_p)$ *une fonction entière dans* C^p. *Le reste*

$$R_N(Z) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\sum_{|s|=n} A_{(s)} z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p} \right) \qquad [|s| = s_1 + \ldots + s_p,\ (s) = s_1, \ldots, s_p],$$

relatif au développement de F *en une série de Taylor, satisfait sur tout compact* K *de* C^p *à*

$$\limsup_{N \to +\infty} \left(\sup_{Z \in K} |R_N(Z)| \right)^{\frac{1}{N}} = 0.$$

En effet, si $F = \sum_{(s)} A_{(s)} z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p}$, on a $\limsup_{|s| \to +\infty} |A_{(s)}|^{\frac{1}{|s|}} = 0$.

Le nombre des monomes dans le $\sum_{|s|=n}$ figurant dans l'expression de $R_N(Z)$, est au plus égal à $(n+1)^p$ (nombre de permutations avec répétitions de $n+1$ lettres p à p). Donc, si $|z_j| \leqq \rho$, et N_0 assez grand pour qu'on ait (si $|s| > N_0$) :

$$|A_{(s)}|^{\frac{1}{|s|}} < \varepsilon, \qquad (|s|+1)^p < p^{|s|}, \qquad \varepsilon\rho p < 1,$$

on obtient, si $N + 1 > N_0$:

$$\begin{aligned}
\sup_{|z_j| \leqq \rho} |R_N(Z)| &= \sup_{|z_j| \leqq \rho} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\sum_{|s|=n} A_{(s)} z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p} \right) \right| \\
&\leqq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon^n \rho^n p^n = (\varepsilon\rho p)^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (\varepsilon\rho p)^n \\
&= (\varepsilon\rho p)^{N+1}(1 - \varepsilon\rho p)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\sup_{|z_j| \leqq \rho} |R_N(Z)| \right)^{\frac{1}{N}} \leqq \varepsilon\rho p (\varepsilon\rho p)^{\frac{1}{N}} (1 - \varepsilon\rho p)^{-\frac{1}{N}}$$

et

$$\limsup_{N \to +\infty} \left(\sup_{Z \in K} |R_N(Z)| \right)^{\frac{1}{N}} < \varepsilon\rho p,$$

pour p, ρ donnés, ε aussi petit qu'on veut. D'où le lemme.

LEMME 8. — *Soit* $F(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$, *une fonction entière dans* C^p. *Quel que soit le compact* K *pris sur l'ensemble analytique* $F = 0$, *il existe une suite de polynomes* $S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$, *de degré* $q_n \to +\infty$, *vérifiant* $|S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| \leq 1$, *sur* K, *et*

$$\limsup_{q_n \to +\infty} \frac{1}{q_n} \log |S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| = \infty \qquad (Z \in C^p - K), \text{ presque partout.}$$

Supposons l'ensemble des zéros de F non vide (sinon le lemme est évident), et écrivons F sous la forme

$$F(z_1, \ldots, z_p) = P_N(z_1, \ldots, z_p) + R_N(z_1, \ldots, z_p),$$

où R_N a la même signification que dans le lemme 7. Soit K un compact pris sur l'ensemble analytique $F = 0$. On a sur K :

$$\sup_{Z \in K} |P_N(z_1, \ldots, z_p)| = \sup_{Z \in K} |R_N(z_1, \ldots, z_p)|.$$

D'après le lemme 7 :

$$\lim_{N \to +\infty} \left[\sup_{Z \in K} |P_N(z_1, \ldots, z_p)|\right]^{\frac{1}{N}} = 0. \tag{2.22}$$

Considérons alors la suite de polynomes de degré n :

$$Q_n(z_1, \ldots, z_p) = (z_1 + \ldots + z_p + n)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si $\delta = \sup_{Z \in K}(|z_1| + \ldots + |z_p|)$, on aura

$$\sup_{Z \in K} |Q_n(z_1, \ldots, z_p)| \leq (\delta + n)^n.$$

D'après (2.22), il est possible de choisir $N = N_n$ en fonction de n, de manière qu'on ait

$$\left(\sup_{Z \in K} |P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)|\right)^{\frac{1}{N_n}} \leq \frac{1}{\delta + n} \leq \frac{1}{\left(\sup_{Z \in K} |Q_n(z_1, \ldots, z_p)|\right)^{\frac{1}{n}}}. \tag{2.23}$$

A partir des polynomes P_{N_n}, Q_n, construisons les polynomes de degré $q_n = 2nN_n$:

$$S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p) = [P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)]^n [Q_n(z_1, \ldots, z_p)]^{N_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a, d'après (2.23),

$$\begin{aligned}\sup_{Z \in K} |S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| &\leq \left[\sup_{Z \in K} |P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)|\right]^n \left[\sup_{Z \in K} |Q_n(z_1, \ldots, z_p)|\right]^{N_n} \\ &\leq \frac{1}{\left[\sup_{Z \in K} |Q_n(z_1, \ldots, z_p)|\right]^{N_n}} \left[\sup_{Z \in K} |Q_n(z_1, \ldots, z_p)|\right]^{N_n} = 1.\end{aligned}$$

La suite $S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)$ vérifie donc sur K :

$$|S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| \leq 1. \tag{2.24}$$

Or

$$(2.25)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{q_n}\log|S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)|\\ &\quad = \frac{1}{2nN_n}[n\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)| + N_n\log|Q_n(z_1, \ldots, z_p)|]\\ &\quad = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N_n}\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)| + \frac{1}{n}\log|Q_n(z_1, \ldots, z_p)|\right],\end{aligned}$$

et d'après le choix des polynomes $Q_n(z_1, \ldots, z_p)$, on a, sur tout compact de C^p :

$$(2.26)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|Q_n(z_1, \ldots, z_p)| = +\infty.$$

Démontrons qu'on a

$$\limsup_{N_n\to+\infty}\frac{1}{N_n}\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)| = 0, \quad \text{presque partout dans } C^p.$$

En effet, $P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)$ converge uniformément sur tout compact vers $F(z_1, \ldots, z_p)$, la borne supérieure de l'ensemble des quantités $|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)|$, lorsque N_n prend toutes les valeurs entières possibles et que $Z = (z_1, \ldots, z_p)$ varie dans un compact est bornée. Les fonctions $\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)|$, sont donc bornées supérieurement uniformément sur tout compact, on a

$$\begin{aligned}V^*(Z) &= \text{rég}\sup\left[\limsup_{N_n\to+\infty}\frac{1}{N_n}\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)|\right]\\ &= \lim_{\rho\to 0}\left[\limsup_{N_n\to+\infty}\frac{1}{N_n}\lambda(\log|P_{N_n}|, Z, \rho)\right].\end{aligned}$$

Les fonctions continues $\lambda(\log|P_{N_n}|, Z, \rho)$ pour Z appartenant à un compact K_1, et $0 < a \leq \rho \leq b$, sont également continues de $Z \in K_1$, et $0 < a \leq \rho \leq b$, la convergence uniforme (sur tout compact) de $P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)$ vers $F(z_1, \ldots, z_p)$ entraîne la convergence uniforme de $\lambda(\log|P_{N_n}|, Z, \rho)$ vers $\lambda(\log|F|, Z, \rho)$, pour $Z \in K_1$, $0 < a \leq \rho \leq b$. Donc

$$\limsup_{N_n\to+\infty}\frac{1}{N_n}\lambda(\log|P_{N_n}|, Z, \rho) = 0 \qquad (Z \in K_1,\ 0 < a \leq \rho \leq b).$$

K_1 et h étant quelconques, on aura

$$V^*(Z) = 0 \qquad (Z \in C^p).$$

D'après (b_1), l'ensemble de points de C^p vérifiant

$$\limsup_{N_n\to+\infty}\frac{1}{N_n}\log|P_{N_n}(z_1, \ldots, z_p)| < 0$$

sera de capacité nulle dans R^{2p}. Donc, d'après (2.25) et (2.26) :

$$(2.27)\qquad \limsup_{q_n\to+\infty}\frac{1}{q_n}\log|S_{q_n}(z_1, \ldots, z_p)| = +\infty \quad \text{presque partout dans } C^p.$$

D'où le lemme, d'après (2.24) et (2.27).

Le théorème 8 résulte du lemme 8, puisque K est quelconque sur $F = 0$.

COROLLAIRE 1. — *Si deux fonctions entières* F_1 *et* F_2, *prennent les mêmes valeurs sur un compact non* P-*négligeable, elles coïncideront partout.*

En effet, dans le cas contraire, l'ensemble analytique $F_1 - F_2$, contiendra un ensemble compact non P-négligeable, ce qui est impossible (sauf si $F_1 \equiv 0$, $F_2 \equiv 0$) d'après le théorème 8.

CHAPITRE III.

CLASSE DE FONCTIONS DÉPENDANT HARMONIQUEMENT OU SOUSHARMONIQUEMENT DE DEUX GROUPES DE VARIABLES.

V. = **Fonctions doublement sousharmoniques.**

1. On se place dans l'espace R^{p+q}, $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, de $p+q$ variables $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_q)$. On désigne par D un domaine de R^{p+q}, Dans ce chapitre, nous allons étendre certaines propriétés des fonctions plurisousharmoniques à une classe plus générale de fonctions définies dans $D \subset R^{p+q}$. Introduisons tout d'abord ces fonctions.

DÉFINITION 3. — *Une fonction* $V(x, y) = V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$, $-\infty \leqq V < +\infty$, $V \not\equiv -\infty$, *sera dite de la classe* $S_{x,y}(D)$, *où* D *est un domaine de* R^{p+q}, *si :*

a. V *est bornée supérieurement sur tout compact* $K \subset D$.

b. Pour $x = x_0$ *fixé,* $D \cap E[x = x_0]$ *comporte en général plusieurs composantes connexes, sur chacune d'elles la restriction* $V(x_0, y)$ *de* V *est soit sousharmonique de* y, *soit la constante* $-\infty$.

De même, pour $y = y_0$ *fixé, la restriction* $V(x, y_0)$ *de* V *est sur chaque composante connexe de* $D \cap E[y = y_0]$, *soit sousharmonique de* x, *soit la constante* $-\infty$.

Remarquons que dans le cas où p et q sont pairs, les fonctions plurisousharmoniques peuvent être considérées comme de la classe $S_{x,y}(D)$ de plusieurs manières.

Nous nous proposons tout d'abord d'établir qu'une fonction V de la classe $S_{x,y}(D)$, et semi-continue supérieurement de l'ensemble des $p+q$ variables $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$. Il en résultera la mesurabilité de V par rapport à (x, y) c'est-à-dire dans R^{p+q}, sa sommabilité, et finalement sa sousharmonicité en (x, y). La démonstration de cette propriété, que nous allons donner, suit de près celle donnée par P. Lelong dans le cas des fonctions plurisousharmoniques [15]. Elle sera faite en plusieurs étapes.

PROPOSITION 8. — *Si* V *est de la classe* $S_{x,y}(D)$, *l'ensemble* $E[V = -\infty]$ *ne contient aucun ouvert.*

Démontrons d'abord :

LEMME 9. — *Si* V *est de la classe* $S_{x,y}$ *dans une boule* $B \subset R^{p+q}$, *l'ensemble* $E[V = -\infty]$, *ne peut contenir une boule* $B_1 \subset B$.

En effet, on sait que l'ensemble des infinis d'une fonction sousharmonique dans un domaine D de R^p est de mesure nulle dans R^p. Soit $M(x', y')$ un point de B_1. Pour $x = x'$ fixé, la fonction sousharmonique [ou $-\infty$]$V(x', y)$ dans $B \cap E[x = x']$, vaut $-\infty$, sur l'ouvert $B_1 \cap E[x = x']$. Donc elle vaut $-\infty$, sur toute la composante $B \cap E[x = x']$. Lorsque le point $M(x', y')$ varie dans B_1, les composantes $B \cap E[x = x']$, balayent un domaine $\Delta \subset B$. On a en tout point de Δ, $V = -\infty$. Soit O le centre de la boule B, on peut trouver un nombre $a > 0$, tel que pour tout y', $|y'| < a$, la composante $B \cap E[y = y']$, coupe Δ suivant un ouvert non vide. L'ensemble des points $M(x, y)$ de B qui vérifient $|y| < a$, sera désigné par Δ'. On a en tout point de Δ', $V = -\infty$, car pour $y = y_0$ fixé, $|y_0| < a$, la fonction sousharmonique [ou $-\infty$]$V(x, y_0)$ dans $B \cap E[y = y_0]$, vaut $-\infty$, sur l'ouvert $\Delta \cap E[y = y_0] \neq \emptyset$. Si maintenant $P(\xi, \eta)$ est un point quelconque de B, la composante $B \cap E[x = \xi]$ coupe nécessairement Δ' suivant un ouvert non vide et l'on aura $V(\xi, y) \equiv -\infty$, sur $B \cap E[x = \xi]$. On aurait alors $V(\xi, \eta) = -\infty$, en tout point de B contrairement à la définition 3, ce qui établit le lemme.

Considérons un domaine quelconque D et supposons que l'ensemble $E[V = -\infty]$, $V \in S_{x,y}(D)$, puisse contenir une boule ouverte $B_1 \subset D$. Il contiendra alors toute boule ouverte $B_2 \subset D$, qui intersecte B_1. Car B_2 contient une boule $B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$, dans laquelle V vaut $-\infty$. Finalement l'ensemble $E[V = -\infty]$ contiendrait tous les points de D, car deux points quelconques de D appartiennent à la réunion d'une suite finie de boules portées par D et deux à deux sécantes.

Ainsi, si l'ensemble des infinis de $V \in S_{x,y}(D)$, pouvait contenir un ouvert $\omega \subset D$, V serait identique à $-\infty$ dans D, contrairement à la définition 3.

Dans la suite $B(x, R)$ désigne la boule de centre $x_j (j = 1, \ldots, p)$ et de rayon R portée par R^p, et $B(y, R)$ celle de centre $y_i (i = 1, \ldots, q)$, et de rayon R portée par R^q. $B(x, y, R)$ désignera la boule de centre (x, y), et de rayon R portée par R^{p+q}.

PROPOSITION 9. — *Soit* V *de la classe* $S_{x,y}(D)$. *Si* $B(x_0, R) \times B(y_0, R') \subset\subset D$, *alors :*

a. Pour $x \in B(x_0, R)$ *fixé, la moyenne*

$$\Psi_{R'}(x, y_0) = \frac{1}{\sigma_{q-1}(R')} \int_{B^*(y_0, R')} V(x, y) \, d\sigma_{q-1}(y),$$

est identique à $-\infty$, *ou bien une fonction de x sommable dans* $B(x_0, R)$.

b. L'intégrale itérée

$$L(x_0, y_0, R, R') = \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^\star(x_0, R)} \Psi_{R'}(x, y_0)\, d\sigma_{p-1}(x)$$

est finie et tend (quand $R \to 0$, $R' \to 0$) *vers une limite* $V^\star(x_0, y_0)$ *qui est semi-continue supérieurement de l'ensemble des variables* $(x_0, y_0) \in D$, *et est la plus petite majorante semi-continue supérieurement (régularisée supérieure de* V).

Nous dirons qu'une fonction f définie dans un domaine D est sommable si elle est mesurable, et si l'intégrale de Lebesgue de f sur tout compact de D a une valeur finie; il en est alors ainsi de $|f|$; f sera dite encore sommable au sens large si elle est mesurable, bornée supérieurement, mais avec une intégrale pouvant avoir la valeur $-\infty$.

Ceci dit, rappelons qu'une fonction u est dite quasi-sousharmonique, si elle est égale à une fonction sousharmonique $u^\star$, sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle ([9]) où l'on a $u < u^\star$ [11]. La partie (a) résulte d'une propriété des familles de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement quand ces fonctions dépendent d'un paramètre réel dont elles sont des fonctions semi-continues supérieurement (le paramètre est ici y) [15]. D'après cette propriété, $\Psi_{R'}(x, y_0)$ est une fonction quasi-sousharmonique de $x \in B(x_0, R)$, donc sommable, ou identique à $-\infty$. En tout cas $\Psi_{R'}(x, y_0)$ est sommable au sens large et l'on peut considérer l'intégrale itérée $L(x_0, y_0, R, R')$. Il est à remarquer que la fonction $V(x, y)$ n'étant pas supposée mesurable dans R^{p+q}, on n'affirme pas pour le moment l'existence de l'intégrale double correspondante.

La partie (b) se démontre grâce au lemme suivant :

Lemme 10. — *Si* $V < 0$, *est de la classe* $S_{x,y}(D)$, *et si* D *contient le produit* $B(x_0, R) \times B(y_0, R')$, *alors on aura pour* $x \in B(x_0, kR)$, $y \in B(y_0, kR')$ $(k < 1)$:

$$V(x, y) \leq \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{p+q-2}} L(x_0, y_0, R, R') \qquad (R > 0,\ R' > 0). \tag{3.1}$$

Supposons $y = y_0$ fixé, comme $V(x, y_0)$ est sousharmonique de x [ou $-\infty$] dans $B(x_0, R)$, l'intégrale de Poisson donne

$$V(x, y) \leq \frac{1-k}{(1+k)^{p-1}\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^\star(x_0, R)} N(\xi, y)\, d\sigma_{p-1}(\xi) \qquad [x \in B(x_0, kR), y \in B(y_0, kR')].$$

Majorons sous le signe de l'intégrale, la fonction $V(x, y)$ pour $x = \xi \in B^\star(x_0, R)$ fixé, et en la considérant comme une fonction sousharmonique [ou $-\infty$] de y. En opérant de la même façon, on obtient

$$V(x, y) \leq \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{p+q-2}\sigma_{p-1}(R)\sigma_{q-1}(R')} \int_{B^\star(x_0, R)} d\sigma_{p-1}(\xi) \int_{B^\star(y_0, R')} V(\xi, \eta)\, d\sigma_{q-1}(\eta)$$
$$= \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{p+q-2}} L(x_0, y_0, R, R') \qquad [x \in B(x_0, kR), y \in B(y_0, kR')].$$

([9]) Un ensemble E est dit de capacité extérieure nulle, s'il existe un ouvert de capacité arbitrairement petit contenant E.

Ce lemme étant établi, revenons à la partie (b) de la proposition 9. Comme V est bornée supérieurement sur tout compact de D, on peut supposer qu'elle est négative. Le lemme 10 montre que si $L(x_0, y_0, R, R') = -\infty$, on aura $V(x, y) \equiv -\infty$, dans $B(x_0, kR) \times B(y_0, kR')$. L'ensemble des infinis de V contiendra un ouvert contrairement à la proposition 8. Donc, $L(x_0, y_0, R, R')$ est finie pour $R > 0$, $R' > 0$.

Supposons toujours $V < 0$, et démontrons que la limite de $L(x_0, y_0, R, R')$ existe quand $R \to 0$, $R' \to 0$, et que cette limite est une fonction semi-continue supérieurement de (x_0, y_0). Soit $V^\star(x_0, y_0)$ la régularisée supérieure de V, c'est-à-dire la fonction qui en chaque point $(x, y) \in D$, est égale au maximum de Baire [6] de V au point (x, y). $V^\star(x, y)$ est semi-continue supérieurement. Montrons qu'en chaque point (x_0, y_0), on a

$$\lim_{R\to 0,\ R'\to 0} L(x_0, y_0, R, R') = V^\star(x_0, y_0).$$

En effet, à chaque $\varepsilon > 0$, quelconque correspond un voisinage ω de (x_0, y_0) tel que

$$V(x, y) \leq V^\star(x_0, y_0) + \varepsilon \qquad [(x, y) \in \omega \subset D].$$

Si $B(x_0, \rho) \times B(y_0, \rho) \subset\subset \omega$, on aura

$$L(x_0, y_0, \rho, \rho') \leq V^\star(x_0, y_0) + \varepsilon.$$

Donc

$$\limsup_{\rho\to 0,\ \rho'\to 0} L(x_0, y_0, \rho, \rho') \leq V^\star(x_0, y_0) \tag{3.2}$$

puisque $\varepsilon > 0$, est arbitraire.

D'après (3.1), on a

$$V(x, y) \leq \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{p+q-2}} L(x_0, y_0, \rho, \rho') \qquad [x \in B(x_0, k\rho),\ y \in B(y_0, k\rho')].$$

Donc

$$V^\star(x_0, y_0) \leq \frac{(1-k)^2}{(1+k)^{p+q-2}} L(x_0, y_0, \rho, \rho').$$

Faisons tendre k, ρ, ρ' vers zéro, on obtient :

$$V^\star(x_0, y_0) \leq \liminf_{\rho\to 0,\ \rho'\to 0} L(x_0, y_0, \rho, \rho'). \tag{3.3}$$

En comparant (3.2) à (3.3), on a la conclusion voulue

$$V^\star(x_0, y_0) = \lim_{\rho\to 0,\ \rho'\to 0} L(x_0, y_0, \rho, \rho'),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 9.

Proposition 10. — *Une fonction* V *de la classe* $S_{x,y}(D)$, *est semi-continue supérieurement de l'ensemble des* $p+q$ *variables* $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$.

D'après la proposition 9, il suffit de montrer qu'on a en tout point $(x_0, y_0) \in D$:

$$\lim_{R \to 0,\ R' \to 0} L(x_0, y_0, R, R') = V(x_0, y_0),$$

cette propriété résultera d'un théorème classique de Lebesgue : si une fonction $f_t(x)$ dépendant d'un paramètre t, $0 < t \leq t_0$, est sommable dans un domaine borné et fermé D de R^p, quel que soit t, et si $f_t(x)$ tend en décroissant ([10]) vers une fonction $f(x)$, quand t décroît vers zéro, alors on a

$$\lim_{t \to 0} \int_D f_t(x)\, dx = \begin{cases} \displaystyle\int_D f(x)\, dx & \text{si } f(x) \text{ est sommable,} \\ -\infty & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Pour la démonstration de la proposition 10, choisissons R_0 assez petit pour que D contienne $\Delta = B(x_0, R_0) \times B(y_0, R_0)$, et supposons encore $V < 0$, au voisinage de Δ, quitte à retrancher une constante à V.

L'intégrale itérée

$$(3.4) \qquad L(x_0, y_0, R, R') = \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^*(x_0, R)} \frac{d\sigma_{p-1}(x)}{\sigma_{q-1}(R')} \int_{B^*(y_0, R')} V(x, y)\, d\sigma_{q-1}(y),$$

a une valeur finie pour $0 < R \leq R_0$, $0 < R' \leq R_0$ (proposition 9).

Supposons tout d'abord $V(x, y_0)$ non identiquement $-\infty$, au voisinage de $x = x_0$; $V(x, y_0)$ est alors une fonction sousharmonique de $x \in B(x_0, R_0)$, et la fonction

$$\tilde{\theta}_{R'}(x) = \frac{1}{\sigma_{q-1}(R')} \int_{B^*(y_0, R')} V(x, y)\, d\sigma_{q-1}(y) - V(x, y_0) \qquad (0 < R' \leq R_0),$$

sera définie dans $B(x_0, R_0)$, sauf pour les points x appartenant à l'ensemble de capacité nulle (dans R^p) :

$$e = E[V(x, y_0) = -\infty] \cap B(x_0, R_0).$$

Hors de e, $\tilde{\theta}_{R'}(x)$ est positive et tend en décroissant vers zéro quand $R' < R_0$, décroît vers zéro. Par conséquent d'après le théorème de Lebesgue, l'intégrale

$$(3.5) \qquad \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^*(x_0, R)} \tilde{\theta}_{R'}(x)\, d\sigma_{p-1}(x) = L(x_0, y_0, R, R') - \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^*(x_0, R)} V(x, y_0)\, d\sigma_{p-1}(x)$$

(qui a un sens dans le cas considéré), tend vers zéro avec R', et ceci quel que soit $0 < R < R_0$. Distinguons alors deux cas possibles :

1° $V(x_0, y_0) > -\infty$, on a

$$(3.6) \qquad L(x_0, y_0, R, R') - V(x_0, y_0) = \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^*(x_0, R)} \tilde{\theta}_{R'}(x)\, d\sigma_{p-1}(x) + \frac{1}{\sigma_{p-1}(R)} \int_{B^*(x_0, R)} V(x, y_0)\, d\sigma_{p-1}(x) - V(x_0, y_0).$$

([10]) La décroissance sera prise au sens large (constance incluse).

Soit $\varepsilon > 0$, un nombre donné arbitrairement petit. On peut choisir pour R une valeur ρ, telle que

$$\frac{1}{\sigma_{p-1}(\rho)} \int_{B^*(x_0,\,\rho)} V(x, y_0)\, d\sigma_{p-1}(x) - V(x_0, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(car cette différence tend vers zéro avec ρ). Puis choisissons pour R' une valeur ρ', telle que

$$\frac{1}{\sigma_{p-1}(\rho)} \int_{B^*(x_0,\,\rho)} \tilde{\theta}_{\rho'}(x)\, d\sigma_{p-1}(x) < \frac{\varepsilon}{2};$$

on aura alors d'après (3.6), et du fait que $L(x_0, y_0, R, R')$ est croissante de R et R' :

$$0 < L(x_0, y_0, R, R') - V(x_0, y_0) < \varepsilon;$$

pour $R < \rho$, $R' < \rho'$. D'où la proposition dans ce cas.

2° Si $V(x_0, y_0) = -\infty$. L'intégrale figurant dans le premier membre de (3.5), tend toujours vers zéro avec R' quel que soit $0 < R < R_0$. L'intégrale figurant au second membre de (3.5), tend vers $-\infty$ (pour $R \to 0$), et l'on peut choisir pour R une valeur ρ de manière que cette dernière intégrale soit inférieure à $-N$, où N est un nombre positif arbitraire. Puis choisissons $R' = \rho'$ tel que, le premier membre de (3.5), soit inférieur à 1. On aura donc

$$L(x_0, y_0, R, R') < -N + 1,$$

pour $R < \rho$, $R' < \rho'$. D'où la proposition dans le cas étudié.

3° Supposons maintenant que $V(x, y_0)$ soit identique à $-\infty$, pour $x \in B(x_0, R_0)$, on aura encore $V(x_0, y_0) = -\infty$. La fonction

$$\Psi_{R'}(x) = \frac{1}{\sigma_{q-1}(R')} \int_{B^*(y_0,\,R')} V(x, y)\, d\sigma_{q-1}(y) \qquad (0 < R' < R_0),$$

n'est pas identique à $-\infty$, dans $B(x_0, R_0)$ [sinon on aura $L(x_0, y_0, R, R') = -\infty$, $R > 0$, $R' > 0$] elle est non décroissante, lorsque R' croît vers zéro, et l'on a

$$\lim_{R' \to 0} \Psi_{R'}(x) = -\infty, \qquad x \in B(x_0, R_0).$$

Choisissons pour R une valeur fixe $\rho < R_0$, et considérons la moyenne

$$L(x_0, y_0, \rho, R') = \frac{1}{\sigma_{p-1}(\rho)} \int_{B^*(x_0,\,\rho)} \Psi_{R'}(x)\, d\sigma_{p-1}(x).$$

Comme on vient de le remarquer, $\Psi_{R'}(x)$ tend en décroissant vers $-\infty$, en tout point de $B(x_0, R_0)$ (quand R' décroît vers zéro). Le théorème de Lebesgue rappelé plus haut s'applique et donne

$$\lim_{R' \to 0} L(x_0, y_0, \rho, R') = -\infty,$$

on peut donc choisir $R' = \rho'$, tel que

$$L(x_0, y_0, \rho, R') < -N,$$

ce qui donne

$$L(x_0, y_0, R, R') < -N \qquad \text{pour} \quad R < \rho, \quad R' < \rho'.$$

N étant quelconque, on obtient finalement

$$\lim_{R \to 0,\ R' \to 0} L(x_0, y_0, R, R') = -\infty.$$

$V(x, y)$ est donc en tout point $(x, y) \in D$, la limite de $L(x, y, R, R')$. D'après la proposition 9 elle sera semi-continue supérieurement.

On en déduit la mesurabilité de V dans R^{p+q}. L'intégrale itérée $L(x_0, y_0, R, R')$ est alors une intégrale double, et l'on peut intervertir l'ordre de l'intégration.

PROPOSITION 11. — *Si* V *est de la classe* $S_{x,y}(D)$, *la moyenne portant sur les volumes :*

$$A(x_0, y_0, R, R') = \frac{1}{\tau_p(R)\,\tau_q(R')} \int_{B(x_0, R) \times B(y_0, R')} V(x, y)\, d\tau_p(x)\, d\tau_q(y)$$

est finie pour $R > 0$, $R' > 0$, *quel que soit* $(x_0, y_0) \in D$.

En effet, $V(x, y)$ étant mesurable dans R^{p+q} et bornée supérieurement sur tout compact de D, sera sommable au sens large. Comme la moyenne spatiale d'une fonction sousharmonique dans une boule est au moins égale à la valeur prise par cette fonction au centre de la boule, on aura en calculant $A(x_0, y_0, R, R')$ comme une intégrale itérée : $A(x_0, y_0, R, R') \geq V(x_0, y_0)$. Si $A(x_0, y_0, R, 'R)$ n'est pas finie, il existera un ensemble mesurable η de diamètre arbitrairement petit tel que

$$\int_{\eta} V(x, y)\, d\tau_p(x)\, d\tau_q(y) = -\infty.$$

Alors en tout point (x_1, y_1) centre d'un produit de boules contenant η, on aura $V(x_1, y_1) = -\infty$, car la moyenne correspondante sera $-\infty$. On en déduirait que $V(x, y) \equiv -\infty$, sur un ouvert de D contrairement à la proposition 8.

THÉORÈME 9. — *Une fonction* V *de la classe* $S_{x,y}(D)$, *est une fonction sousharmonique dans* D *de l'ensemble des variables* $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \in D$.

D'après les propositions 10 et 11, V est sommable, semi-continue supérieurement dans D. Il suffit pour établir le théorème de montrer qu'en tout point $(x_0, y_0) \in D$, $V(x_0, y_0)$ est au plus égale à sa moyenne spatiale sur toute boule $B(x_0, y_0, R) \subset\subset D$. Pour commodité d'écriture, supposons $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Soit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$ un vecteur unitaire de R^p, défini à l'aide des paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$, qui avec $r = \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, définissent les coordonnées sphériques du point $x \in \mathrm{R}^p$. ρ, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1})$ les coordonnées analogues du point $y \in \mathrm{R}^q$. Un point de R^{p+q} est alors défini par les coordonnées r, ρ, θ, φ. La boule $\mathrm{B}(o, o, \mathrm{R}) \subset \mathrm{R}^{p+q}$, sera définie par $r^2 + \rho^2 \leqq \mathrm{R}^2$. Avec les nouvelles coordonnées l'élément de volume dans R^{p+q}, a une expression de la forme ([11])

$$d\tau_{p+q} = r^{p-1} \rho^{q-1} \mathrm{A}(\theta) \mathrm{B}(\varphi)\, dr\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-1}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{q-1}.$$

Par conséquent :

$$\int_{(\mathrm{B}, 0, 0, \mathrm{R})} \mathrm{V}(r, \rho, \theta, \varphi)\, d\tau_{p+q}$$

$$\iint_{r^2+\rho^2 \leqq \mathrm{R}^2} dr\, d\rho \int_{\theta} r^{p-1} \mathrm{A}(\theta)\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-1} \int_{\varphi} \mathrm{V}(r, \rho, \theta, \varphi)\, \rho^{q-1} \mathrm{B}(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_q.$$

La dernière intégrale n'est autre que la moyenne de V sur la frontière de la boule $\mathrm{B}(o, \rho) \subset \mathrm{R}^q$ au facteur $\sigma_{q-1}(\rho)$ près. L'intégrale portant sur θ est égale au facteur $\sigma_{p-1}(r)\sigma_{q-1}(\rho)$ près à l'intégrale itérée $\mathrm{L}(o, o, r, \rho)$, définie précédemment. On a donc, en remarquant que $\mathrm{L}(o, o, r, \rho) \geqq \mathrm{V}(o, o)$:

$$\int_{(\mathrm{B}\, 0, 0, \mathrm{R})} \mathrm{V}(r, \rho, \theta, \varphi)\, d\tau_{p+q} \geqq \mathrm{V}(o, o) \int_{r^2+r^2 \leqq \mathrm{R}^2} \sigma_{p-1}(r)\, \sigma_{q-1}(\rho)\, dr\, d\rho = \tau_{p+q}(\mathrm{R})\, \mathrm{V}(o, o)$$

[$\tau_{p+q}(\mathrm{R})$ est rappelons-le volume de la boule $\mathrm{B}(o, o, \mathrm{R}]$. Finalement on a :

$$\mathrm{V}(o, o) \leqq \frac{1}{\tau_{p+q}(\mathrm{R})} \int_{(\mathrm{B}\, 0, 0, \mathrm{R})} \mathrm{V}(r, \rho, \theta, \varphi)\, d\tau_{p+q},$$

ce qui établit le théorème.

DÉFINITION 4. — *Une fonction* $\mathrm{V}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ *sera dite de la classe* $\mathrm{H}_{x,y}(\mathrm{D})$ *où* D *est un domaine de* R^{p+q}, *si :*

$$\mathrm{V} \in \mathrm{S}_{x,y}(\mathrm{D}), \qquad -\mathrm{V} \in \mathrm{S}_{x,y}(\mathrm{D}).$$

Du théorème 9 résulte :

COROLLAIRE 2. — *Une fonction de la classe* $\mathrm{H}_{x,y}(\mathrm{D})$ *est harmonique de l'ensemble des* $p + q$ *variables* $(x, y) \in \mathrm{D}$.

En effet, V et — V seront alors sousharmoniques en (x, y) dans D, d'après le théorème 9.

2. Nous obtiendrons maintenant une seconde définition de la classe $\mathrm{S}_{x,y}(\mathrm{D})$. La définition B des fonctions plurisousharmoniques (*voir* les préliminaires) nous suggère, en effet, d'obtenir un résultat analogue pour les fonctions de la classe $\mathrm{S}_{x,y}(\mathrm{D})$.

([11]) Rappelons que

$$x_1 = r\cos\theta_1 \ldots \cos\theta_{p-1}, \qquad x_j = r\cos\theta_1 \ldots \cos\theta_{p-j} \sin\theta_{p-j+1} \qquad [(1 < j < p),\ x_p = r\sin\theta_1].$$

Auparavant, démontrons l'énoncé suivant, analogue à un énoncé concernant les fonctions plurisousharmoniques [23].

PROPOSITION 12. — *Pour qu'une fonction* V *soit de la classe* $S_{x,y}(D)$ *il faut et il suffit que* V *soit sousharmonique dans* $D \subset R^{p+q}$ *par rapport à l'ensemble des variables* (x, y), *et demeure après toute transformation*

$$(3.7) \qquad T: \quad x_i = x_i^0 + \lambda x_i', \qquad y_j = y_j^0 + \mu y_j' \qquad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$$

une fonction $\varphi_{\lambda,\mu}(x_i', y_j') = V(x_i^0 + \lambda x_i', y_j^0 + \mu y_j')$, *sousharmonique des* $p+q$ *variables* (x', y') *dans* $T^{-1}(D)$.

Les conditions suffisantes. — Montrons que si $V(x, y)$ est sousharmonique en (x, y) et reste sousharmonique en (x', y') après toute substitution (3.7), elle est de la classe $S_{x,y}(D)$. Supposons tout d'abord V dérivable, et calculons le laplacien de $\varphi_{\lambda,\mu}(x_i', y_j')$ qui sera par hypothèse positif.

$$\Delta_{x',y'}\varphi_{\lambda,\mu}(x_i', y_j') = \lambda^2 \Delta_x V + \mu^2 \Delta_y V \geqq 0 \qquad [(x, y) \in D].$$

soit $\mu = \lambda k$, on a

$$\lambda^2 \Delta_x V \geqq -\mu^2 \Delta_y V = -\lambda^2 k^2 \Delta_y V.$$

Donc

$$(3.8) \qquad \Delta_x V \geqq -k^2 \Delta_y V \qquad [(x, y) \in D].$$

Comme $\Delta_y V$ est bornée sur tout compact $K \subset D$, (3.8) donnera, si $|k| \to 0$,

$$\Delta_x V \geqq 0 \qquad [(x, y) \in D].$$

V est alors sousharmonique de x pour y fixé. De la même façon, on voit qu'elle est sousharmonique de y pour x fixé. Finalement, V est de la classe $S_{x,y}(D)$. D'où la proposition dans le cas où V est dérivable,

Remarquons pour la suite que si $V_t(x, y)$ est une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$, dépendant d'un paramètre t, $0 < t \leqq 1$, et si $V_t(x, y)$ est non croissante lorsque t décroît vers zéro, alors la fonction $V(x, y) = \lim_{t \to 0} V_t(x, y)$ sera de la classe $S_{x,y}(D)$, ou identique à $-\infty$ (car la limite d'une suite décroissante de fonctions sousharmoniques est de même nature où la constante $-\infty$.

Revenons à la démonstration de la proposition 12. Si V n'est pas dérivable, on formera le produit de composition de V avec le noyau régularisant $\alpha_r(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ défini dans R^{p+q}, de la manière suivante :

Soit $\alpha_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$, fonction indéfiniment dérivable et ayant comme support la boule $B(0, 0, 1) \subset R^{p+q}$. On suppose que α ne dépend que de la distance $r = \sqrt{\sum_1^p x_i^2 + \sum_1^q y_j^2}$, et

$$\int \alpha_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\, d\tau_{p+q}(x, y) = 1;$$

on pose

$$\alpha_r(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha_1\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_p}{r}, \frac{y_1}{r}, \ldots, \frac{y_q}{r}\right) r^{-(p+q)}$$

α_r a comme support la boule $B(o, o, r)$, et vérifie :

$$\int \alpha_r(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\, d\tau_{p+q}(x, y) = 1.$$

La fonction :

$$\Phi_r(x, y) = V(x, y) \star \alpha_r = \int V(x_i + ru, y_j + rv_j)\, \alpha_1(u, v)\, d\tau_{p+q}(u, v),$$

sera sousharmonique de (x, y), et indéfiniment dérivable ([12]). Il en est de même de la fonction

$$\Phi_r(x_i^0 + \lambda x'_i, y_j^0 + \mu y'_j) = \int V(x_i^0 + \lambda x'_i + ru, y_j^0 + \mu y'_j + rv_j)\, \alpha_1(u, v)\, d\tau_{p+q}(u, v).$$

Donc, d'après la première partie de la démonstration $\Phi_r(x, y)$ sera de la classe $S_{x,y}(D)$. $\Phi_r(x,y)$, tend en décroissant ($r \downarrow o$) vers $V(x, y)$. V étant non identiquement $-\infty$, sera de la classe $S_{x,y}(D)$, d'après la remarque faite plus haut.

Les conditions sont nécessaires. — En effet, on a vu (Théorème 9) qu'une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$ est sousharmonique en (x, y). D'autre part, si $u(x)$ est une fonction sousharmonique, $u(x_i^0 + \lambda x'_i) = u_\lambda(x')$ sera sousharmonique en $x'(\lambda \neq o)$; par conséquent $\varphi_{\lambda,\mu}(x'_i, y'_j)$ sera encore de la classe $S_{x',y'}(D)$, donc encore une fonction sousharmonique en (x'_i, y'_j) (théorème 9).

THÉORÈME 10. — *Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction* $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$, $-\infty \leqq V < +\infty$, *soit de la classe* $S_{x,y}(D)$;

a. V *sommable sur tout compact* $K \subset D$;

b. Les distributions ([13])

$$\Delta_x V = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta_y V = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 V}{\partial y_j^2}$$

sont positives dans D.

c. En tout point $P \in D$, *on a* $V(P) = V_m(P)$, *où* $V_m(P)$ *est le maximum en mesure de* V *au point* P.

([12]) On sait que si $V(x)$ est sousharmonique, le produit de composition $V(x) \star \alpha_r(x)$, est sousharmonique (car α_r est positive), et tend en décroissant vers $V(x)$. Cette dernière propriété résulte de l'égalité :

$$V(x) \star \alpha_r(x) = \int V(x_i + ru_i)\, \alpha_1(u_i)\, d\tau_p(u_i) = \tau_p(1) \int_0^1 L(V, x, rt)\, \psi(t)\, t^{p-1}\, dt,$$

où L, est la moyenne de V sur la frontière de la boule $B(x, rt)$, et $\psi(t) = \alpha_1$; t étant la distance de $(u) = (u_i)$ à l'origine.

([13]) Les distributions seront prises au sens de Schwartz [25].

Les conditions sont suffisantes. — Car (b) entraîne que la distribution $\Delta V = \Delta_x V + \Delta_y V$, soit positive dans D. Cette condition avec (a) et (c) assurent comme on sait [13] la sousharmonicité de V par rapport à l'ensemble des variables (x, y). Or V demeure sousharmonique en (x', y') après la transformation T définie dans (3.7); sa transformée vérifie en effet encore les conditions (a) et (c), et les distributions :

$$\Delta_{x'}(\mathrm{TV}) = \lambda^2 \Delta_x V, \qquad \Delta_{y'}(\mathrm{TV}) = \mu^2 \Delta_y V,$$
$$\Delta_{x',y'}(\mathrm{TV}) = \lambda^2 \Delta_x V + \mu^2 \Delta_y V,$$

sont encore positives dans D. Alors la proposition 12 nous permet d'affirmer que V appartient à $S_{x,y}(D)$.

Les conditions sont nécessaires. — En effet, soit $V \in S_{x,y}(D)$ et V deux fois différentiables, on a nécessairement $\Delta_x V \geqq 0$, $\Delta_y V \geqq 0$. Si V n'est pas dérivable, nous considérons le produit de composition

$$V \star \alpha_r(x, y) = V_r(x, y) \in S_{x,y}(D).$$

on a, si $f \geqq 0$, est indéfiniment dérivable à support compact dans D :

$$(\Delta_x V)(f) = \int V(x, y)\, \Delta_x f(x, y)\, d\tau_{p+q}(x, y) = \lim_{r \to 0} \int V_r(x, y)\, \Delta_x f(x, y)\, d\tau_{p+q}(x, y),$$

cette dernière limite est positive, car $V_r(x, y)$ est de la classe $S_{x,y}(D)$ et dérivable, de sorte qu'on a :

$$\int V_r(x, y)\, \Delta_x f(x, y)\, d\tau_{p+q}(x, y,) = \int \Delta_x V_r(x, y) f(x, y)\, d\tau_{p+q}(x, y) \geqq 0.$$

Donc $(\Delta_x V)(f) \geqq 0$. De même, on a $(\Delta_y V)(f) \geqq 0$.

Le théorème est donc établi.

VI. Prolongement des fonctions de la classe $H_{xy}(D)$.

3. Proposition 13. — *Soit* $V(x, y) = V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ *une fonction définie dans le domaine* $D = D_x \times D_y (D_x \subset R_p,\ D_y \subset R_q)$ *et vérifiant les conditions suivantes*

a. Pour y fixé, $V(x, y)$ *est harmonique de* $x \in D_x$;

b. Pour x fixé, $V(x, y)$ *est harmonique de* $y \in D_y$.

Dans ces conditions, à chaque compact $K \subset D_x$, *correspond un ouvert* $\omega \subset D_y$, *tel que* $|V(x, y)|$ *soit bornée sur* $K \times \omega$. *En particulier, à tout domaine* D'_x *d'adhérence, compact dans* D_x, *correspond un ouvert* $\omega \subset D_y$, *tel que* $V(x, y)$ *est de la classe* $H_{x,y}$ *dans* $D_x \times \omega$.

La fonction $|V(x, y)|$ est une fonction séparément continue par rapport à chaque groupe de variables, la fonction $M(y) = \sup_{x \in K} |V(x, y)|$ (où K est un compact de D_x), est finie pour chaque $y \in D_y$ fixé ; comme $M(y)$ est semi-continue inférieurement, il existera un ouvert $\omega \subset D_y$ (qui dépend de K) tel que $|V(x, y)|$, soit uniformément bornée dans $K \times \omega$ [14]. $V(x, y)$ vérifie alors dans $K \times \omega$ les conditions de la définition 4, elle est donc de la classe $H_{x,y}(K \times \omega)$, et d'après le corollaire 2 harmonique de l'ensemble des variables $(x, y) \in K \times \omega$.

Désignons par o l'origine des coordonnées de R^q.

PROPOSITION 14. — *Soit* V *une fonction vérifiant les conditions* (*a*) *et* (*b*) *de la proposition* 13, *dans un domaine de la forme* $D_x \times B(o, \rho)$ $(D_x \subset R^p)$; *et* φ *un vecteur unité porté par* o*y*. *S'il existe un nombre* $\rho_1 < \rho$, *tel que* $V(x, y)$ *soit de la classe* $H_{x,y}$ *dans* $D_x \times B(o, \rho_1)$, *alors chaque terme de la série* :

$$V(x, y) = \sum_{s=0}^{+\infty} A_s(x, \varphi) |y|^s \qquad (|y| < \rho), \tag{3.8}$$

obtenu en développant $V(x, y)$ (*pour* $x \in D_x$ *fixé*), *en une série de polynomes homogènes des* y_j, *est de la classe* $H_{x,y}[D_x \times B(o, \rho)]$, *donc harmonique de l'ensemble des variables* (x, y) *dans* $D_x \times B(o, \rho)$.

La proposition résultera du lemme suivant :

LEMME 11. — *Les coefficients* $A_s(x, \varphi)$ *figurant dans* (3.8), *sont pour chaque* *s* *et* φ *fixés, harmoniques de* $x \in D_x$. *Pour chaque* *s*, $|A_s(x, \varphi)|$ *est bornée sur tout compact de* D_x, *uniformément par rapport à* φ *et à* *x*.

En effet, le développement (3.8), s'obtient grâce à l'intégrale de Poisson sur la frontière de la boule $B(o, \rho') \subset B(o, \rho)$; ρ' pouvant être aussi voisin qu'on voudra de ρ. On a

$$\left\{\begin{aligned} &V(x, y) = \frac{1}{\sigma_{q-1}(1)} \int \frac{1 - u^2}{(1 - 2u\cos\theta + u^2)^{\frac{q}{2}}} V(x, \rho'\vec{\alpha})\, d\sigma_{q-1}(\vec{\alpha}), \\ &u = \frac{|y|}{\rho'}, \qquad x \in D_x, \qquad \theta = (\overrightarrow{oy}, \vec{\alpha}). \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

A partir de (3.9) et du développement (uniformément convergente en θ tant que $u < 1$) : $(1 - 2u\cos\theta + u^2)^{-\frac{q}{2}} = 1 + qu\cos\theta + \sum_{s=2}^{+\infty} P_s^{(q)}(\cos\theta) u^s$, on trouve

---

[14] Nous utilisons ici la forme suivante de Baire (Bourbaki [7]). Dans certains espace E (dits de Baire) et en particulier dans l'espace métrique, on a le théorème suivant : *soit* $f_\alpha(y)$ *une famille de fonctions numériques semi-continues inférieurement dans* E, *telle qu'en tout point* $y \in E$, $\sup_\alpha f_\alpha(y)$ *soit finie. Alors tout ensemble ouvert non vide contient un sous-ensemble ouvert non vide dans lequel* $f_\alpha(y)$ *est uniformément borné.*

l'expression du coefficient $A_s(x, \varphi)$:

$$\sigma_{q-1}(1)A_0(x) \quad = \int V(x, \rho' \vec{a})\, d\sigma_{q-1}(\vec{a}),$$

$$\sigma_{q-1}(1)A_1(x, \varphi) = \frac{q}{\rho'} \int V(x, \rho' \vec{a}) \cos\theta \, d\sigma_{q-1}(\vec{a}),$$

$$\sigma_{q-1}(1)A_s(x, \varphi) = \frac{1}{\rho'^s} \int V(x, \rho' \vec{a}) [P_s^{(q)}(\cos\theta) - P_{s-2}^{(q)}(\cos\theta)]\, d\sigma_{q-1}(\vec{a}) \qquad (s \geqq 2).$$

Remarquons que $A_s(x, \varphi)$ est indépendante de $\rho' < \rho$ [cela résulte de l'unicité du développement (3.8), pour x fixé]. Donc, si l'on choisit $\rho' = \rho_1' < \rho_1$, $A_s(x, \varphi)$ (pour φ fixé) sera harmonique en $x \in D_x$. En effet, $V(x, y)$ est (par hypothèse) de la classe $H_{x,y}[D_x \times B(0, \rho_1)]$, donc harmonique de l'ensemble des variables $(x, y) \in D_x \times B(0, \rho_1)$ (corollaire 2). L'intégrale donnant $A_s(x, \varphi)$ sera continue en x, et elle satisfait à la condition de la moyenne ; car pour toute boule $B(x, R)$ portée par D_x, la moyenne de $A_s(x, \varphi)$ sur $B^*(x, R)$, s'obtient en remplaçant la fonction $V(x, \rho' \vec{a})$ figurant dans l'expression de $A_s(x, \varphi)$, par sa moyenne ($\rho' \vec{a}$ fixé) sur $B^*(x, R)$, et comme $V(x, \rho' \vec{a})$ est harmonique en x (pour $\rho' \vec{a}$ fixé) il en résulte l'harmonicité de $A_s(x, \varphi)$ par rapport à x(φ fixé). D'autre part $|A_s(x, \varphi)|$ est pour chaque s, uniformément bornée sur tout compact $K \subset D_x$. Car $|V(x, y)|$ est bornée dans $K \times B(0, \rho_1')$, et $|P_s^{(q)}(\cos\theta) - P_{s-2}^{(q)}(\cos\theta)|$ est majorée par $|P_s^{(q)}(1)| + |P_{s-2}^{(q)}(1)|$ (voir les préliminaires). La fonction $A_s(x, \varphi)|y|^s$ sera donc bornée en module sur tout compact contenu dans $D_x \times B(0, \rho)$. Comme elle est séparément harmonique, elle sera de la classe $H_{x,y}[D_x \times B(0, \rho)]$ (définition 4). D'où la proposition.

4. Soit W un ensemble de points du domaine $D = D_x \times D_y$, $D_x \subset R^p$, $D_y \subset R^q$. Nous dirons qu'une fonction $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ de la classe $H_{x.y}(D - W)$, se prolonge en une fonction de la classe $H_{x.y}(D)$, s'il existe une fonction $\tilde{V}(x, y) \in H_{x.y}(D)$, qui coïncide avec V dans $D - W$.

Dans la suite, W sera l'ensemble des points de $D = D_x \times D_y$, défini par :

$$W: \quad (y_1 = 0, \ldots, y_q = 0) \times D_x \qquad (0 \in D_y).$$

Soit $V(x, y)$ une fonction de la classe $H_{x,y}(D - W)$, et $E(\varepsilon, R)$ ensemble des points y de D_y vérifiant $0 < \varepsilon < |y| < R$. Considerons le domaine :

$$\delta(\varepsilon, R) = [D_x \times E(\varepsilon, R)] \subset D - W.$$

On peut représenter la fonction $V(x, y)$ en tant que fonction harmonique en y à partir de la formule

$$(3.10) \quad \begin{cases} k_q V(x, y) = \displaystyle\int_{E^*} \left[V(x, y') \frac{d}{dn_i} h_q(y, y') - h_q(y, y') \frac{d}{dn_i} V(x, y') \right] d\sigma_{q-1}(y') \\ \qquad\qquad [(x, y) \in \delta(\varepsilon, R)]. \end{cases}$$

où k_q est une constante numérique égale à $(q-2)\,\sigma_{q-1}(1)$ $\Big[$Rappelons que $E^\star$ est la frontière de $E(\varepsilon, R)$, $h_q(y, y')$ le noyau de la théorie de potentiel newtonien dans R^q et $\dfrac{d}{dn_i}$ la dérivée selon la normale intérieure à $E(\varepsilon, R)\Big]$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1}$, $|y|$, sont les coordonnées sphériques du point y, la formule (3.10), va nous permettre d'obtenir dans $D - W$, le développement :

$$(3.11)\quad k_p V(x, y) = c(x) + \frac{\alpha(x)}{|y|^{q-2}} + \sum_{s=1}^{+\infty} A_s(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1})\,|y|^s + \sum_{s=1}^{+\infty} B_s(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1})\,|y|^{2-q-s} \qquad (q \geqq 3).$$

En effet, utilisons les développements classiques suivants (pour $q \geqq 3$) :

$$(3.12)\quad h_q(y, y') = \frac{1}{|y|^{q-2}} + \sum_{s=1}^{+\infty} P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\,|y|^{2-q-s}\varepsilon^s \qquad \text{si} \quad |y'| = \varepsilon,\ |y| > \varepsilon,$$

$$(3.13)\quad h_q(y, y') = \frac{1}{R^{q-2}} + \sum_{s=1}^{+\infty} P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\,R^{2-q-s}|y|^s \qquad \text{si} \quad |y'| = R,\ |y| < R$$

$\big[\theta =$ l'angle $(\overrightarrow{oy}, \overrightarrow{oy'})\big]$. Les séries sont absolument et uniformément convergentes, respectivement pour $|y| > \varepsilon$, et $|y| < R$. Pour obtenir les développements analogues pour les dérivées selon la normale à $E^\star$ du noyau $h_q(y, y')$, il suffit de dériver les développements ci-dessus respectivement par rapport à ε et R (y fixé). En remarquant qu'il s'agit d'une dérivée selon la normale intérieure à $E(\varepsilon, R)$ on obtient :

$$(3.14)\quad \frac{dh_q(y, y')}{dn_i} = \sum_{s=1}^{+\infty} s P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\,|y|^{2-q-s}\varepsilon^{s-1} \qquad \text{si} \quad |y'| = \varepsilon,\ |y| > \varepsilon,$$

$$(3.15)\quad \begin{cases} \dfrac{dh_q(y, y')}{dn_i} = \dfrac{q-2}{R^{q-1}} + \displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty} (s+q-2)\,P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\,R^{1-s-q}|y|^s \\ \text{si} \quad |y'| = R,\ |y| < R. \end{cases}$$

Les séries convergent uniformément en θ et absolument

$$\left[\text{car} \quad |P_s^{(q-2)}(\cos\theta)| \leqq \frac{(q+s-3)!}{(q-3)!\,s!}\right].$$

Décomposons l'intégrale figurant dans (3.10) en deux intégrales étendues respectivement à $B^\star(o, R) \subset D_y$, $B^\star(o, \varepsilon) \subset D_y$. La première intégrale est invariante quand R croît (en restant inférieure à la distance minimale de o à la frontière de D_y). La seconde intégrale est invariante quand $\varepsilon > o$ décroît. En substituant les séries (3.13), (3.15), dans l'intégrale portant sur $B^*(0, R)$, et les séries (3.12), (3.14) dans celle portant sur $B^*(0, \varepsilon)$, nous trouvons [15]

$$c(x) = \int (q-2)\, V(x, R\vec{a}) + R\frac{d}{dR} V(x, R\vec{a})\, d\sigma_{q-1}(\vec{a})$$

$$\alpha(x) = -\int \varepsilon^{q-1} \frac{d}{d\varepsilon} V(x, \varepsilon\vec{a})\, d\sigma_{q-1}(\vec{a})$$

$$A_s(x, \varphi) = \frac{1}{R^s}\int \left[R\frac{d}{dR} V(x, R\vec{a}) + (s+q-2)\, V(x, R\vec{a})\right] P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\, d\sigma_{q-1}(\vec{a})$$

$$B_s(x, \varphi) = \varepsilon^{q-2+s}\int \left[s V(x, \varepsilon\vec{a}) - \varepsilon\frac{d}{d\varepsilon} V(x, \varepsilon\vec{a})\right] P_s^{(q-2)}(\cos\theta)\, d\sigma_{q-1}(\vec{a})$$

5. **Propriétés des coefficients figurant dans (3.11).** — Remarquons que les dérivées partielles de $V(x, y)$ appartiennent à la classe $H_{x,y}(D - W)$. Par exemple $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y_j}$ est tout d'abord harmonique en (x, y) et bornée localement en module; car c'est une dérivée d'une fonction harmonique de $p+q$ variables. D'autre part, elle est harmonique en y comme étant la dérivée d'une fonction harmonique en y. Pour chacune des séries figurant dans (3.11), la série des modules est majorée par des séries numériques convergentes lorsque x appartient à un compact $K_x \subset D_x$, et $|y| < R$ fixé $< R_0$ (R_0 étant la distance minimale de 0 à la frontière de D_y) ou respectivement $|y| > \varepsilon_1 > \varepsilon > 0$. En effet, soit R_1 un nombre compris entre R et R_0, et pour $x \in K_x$, soit

$$\varphi(R_1, K_x) = \sup_{x, \vec{a}} \left| R_1 \frac{d}{dR_1} V(x, R_1\vec{a})\right|$$

$$M(R_1, K_x) = \sup_{x, \vec{a}} |V(x, R_1\vec{a})|.$$

$A_s(x, \varphi)$ est alors majorée par :

$$|A_s(x, \varphi)| \leq [\varphi(R_1, K_x) + (s+q-2)\, M(R_1, K_x)]\, |P_s^{(q-2)}(1)|\, \sigma_{q-1}(1) \frac{1}{R_1^s} \qquad (x \in K_x).$$

Donc, pour $|y| < R < R_1 < R_0$:

$$\sum_{s=1}^{+\infty} |A_s(x, \varphi)|.|y|^s \leq \quad \varphi(R_1, K_x)\, \sigma_{q-1}(1) \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(q+s-3)\,!}{(q-3)\,!\,s\,!}\left(\frac{R}{R_1}\right)^s$$
$$+ M(R_1, K_x)\, \sigma_{q-1}(1) \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(q+s-2)\,!}{(q-3)\,!\,s\,!}\left(\frac{R}{R_1}\right)^s.$$

---

[15] Dans le cas $q = 2$, le noyau $|\gamma|^{2-q}$ figurant dans (3.11) doit être remplacé par $\log\frac{1}{|y|}$, l'expression de $c(x)$ est alors :

$$\int \left[V(x, R\vec{a}) + R\log\frac{1}{R}\frac{d}{dR} V(x, R\vec{a})\right] d\sigma_1(\vec{a}).$$

Les dernières séries étant convergentes, d'où la conclusion. Même raisonnement pour la deuxième série figurant dans (3.11).

Les coefficients $A_s(x, \varphi)$, $B_s(x, \varphi)$, sont d'autre part pour φ fixé, harmoniques en $x \in D_x$ (même raisonnement que dans le lemme 11). Les coefficients $A_s(x, \varphi)|y|^s$, $B_s(x, \varphi)|y|^{2-q-s}$ seront finalement de la classe respectivement de $H_{x,y}(D)$, et de $H_{x,y}(D-W)$. Ainsi :

Une fonction de la classe $H_{x,y}(D-W)$ *se développe selon* (3.11). *Les séries figurant dans ce développement sont uniformément, absolument convergentes quand* (x, y) *appartient à un compact* $K_x \times E[\varepsilon_0 \leqq |y| \leqq R_0] \subset \subset D-W$. *Les coefficients* $c(x)$, $\alpha(x)$, $A_s(x, \varphi)$, $B_s(x, \varphi)$ *qui sont des fonctions Laplace de* y *pour* x *fixé, sont en outre harmoniques de* $x \in D_x$*; les termes* $A_s(x, \varphi)|y|^s$, *ainsi que leur somme sont de la classe* $H_{x,y}(D)$*; les termes* $B_s(x, \varphi)|y|^{2-q-s}$, *et leur somme sont de la classe* $H_{x,y}(D-W)$. *On en déduit :*

Soit η *un ensemble de l'espace* R^p *tel que toute fonction harmonique dans un domaine* D_x *de* R^p *s'annulant sur* $\eta \cap D_x$, *soit identiquement nulle; alors, si* $V \in H_{x,y}(D-W)$, $D \subset R^{p+q}$, *et si pour tout* $x \in (\eta \cap D_x)$ *certains termes de* (3.11), *disparaissent; ils disparaîtront aussi pour tout* $x \in D_x$.

6. *Applications.* — Les propriétés des fonctions harmoniques au voisinage d'un point, ce point exclu, et l'étude ci-dessus nous donnent :

THÉORÈME 11. — *Soit* $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ *une fonction de la classe* $H_{x,y}(D-W)$, *où* D *est le produit topologique de deux domaines* $D_x \subset R^p$, $D_y \subset R^q$*; et* W *la variété :*

$$W: \quad (y_1 = 0, \ldots, y_q = 0) \times D_x \qquad (0 \in D_y).$$

Si W *contient un point* $(x = x_0, y = 0)$*; tel que sur un voisinage* $\Omega \subset D$ *de ce point, la fonction* V *demeure bornée supérieurement, alors* V *est bornée au voisinage de tout compact de* W *sur* $D-W$, *et se prolonge d'une façon unique en une fonction de la classe* $H_{x,y}(D)$. *Plus généralement, cette conclusion demeure si l'on a, pour un nombre* $0 < s_0 \leqq q-2$,

$$(3.16) \qquad L(V^+, 0, |y|) = o(|y|^{-s_0}) \qquad (y \to 0) \qquad (x \in \omega \cap D_x),$$

où ω *est un voisinage de* $x_0 \in D_x$, *et* L *la moyenne de* $V^+ = sup(V, 0)$ *sur la frontière de la boule* $B(0, |y|) \subset D_y$. *Si maintenant* (3.16) *est vérifié avec* $s_0 > q-2$, *alors on a :*

$$V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = o(|y|^{-s_0}) \qquad (y \to 0) \qquad [(x, y) \in D-W].$$

Pour $x = x_0$ fixé, (3.11) est le développement classique de la fonction harmonique (en y) $V(x_0, y)$ au voisinage de $y = 0$. Il est connu que si $V(x_0, y)$ est bornée supérieurement au voisinage de $y = 0$, les coefficients $\alpha(x_0)$, $B_s(x_0, \varphi)$ seront nuls pour tout $s \geqq 1$. Plus généralement, on sait que si pour un nombre s_0, $V(x_0, y)$ vérifie $L[V^\star(x_0, y), 0, |y|] = o(|y|^{-s_0})$, $y \to 0$, on a le même résultat sous l'hypothèse $s_0 < q-2$. Et si $s_0 > q-2$, $B_s(x_0, \varphi)$ est nul pour tout s tel que $q-2+s \geqq s_0$ ([16]). Ceci étant rappelé, considérons le développement (3.11), et utilisons le fait que les coefficients $B_s(x, \varphi)$ sont harmoniques en $x \in D_x$. Par hypothèse pour tout (x, y), appartenant à Ω, $V(x, y)$ est bornée supérieurement; il en résulte que pour chaque $x = x_0$ fixé, $x_0 \in [\Omega \cap (y=0)]$, on a $B_s(x_0, \varphi) = 0$, $\alpha(x_0) = 0$. Or $\Omega \cap [y = y_0]$ est un ouvert dans R^p, donc $B_s(x, \varphi) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 0$, pour $x \in D_x$. V sera alors de la forme :

$$V = c(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} A_s(x, \varphi)\,|y|^s \qquad [(x, y) \in D - W].$$

Donc bornée au voisinage de tout compact de W sur D — W. Le prolongement se fait alors par continuité en posant :

$$\begin{aligned} V^\star(x, y) &= V(x, y) &\quad &\text{si} \quad (x, y) \in D - W \\ V^\star(x, 0) &= c(x) &\quad &\text{si} \quad (x, 0) \in W \cap D. \end{aligned}$$

$V^\star(x, y)$ étant de la classe $H_{x,y}(D)$, prolonge V.

Plus généralement, si (3.16), est vérifié pour tout x appartenant à $\omega \cap D_x$, on aura pour $x = x_0$ fixé, $x_0 \in \omega \cap D_x$:

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad s_0 < q-2, \quad B_s(x_0, \varphi) = 0, \quad \alpha(x_0) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots); \\ &\text{si} \quad s_0 > q-2, \quad B_s(x_0, \varphi) = 0 \quad \text{pour tout } s \text{ tel que} \quad q-2+s \geqq s_0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\omega \cap D_x$ étant ouvert, on aura dans D_x :

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad s_0 < q-2, \quad B_s(x, \varphi) \equiv 0, \quad \alpha(x) \equiv 0 \quad (s = 1, 2, \ldots); \\ &\text{si} \quad s_0 > q-2, \quad B_s(x, \varphi) \equiv 0 \quad \text{pour tout } s \text{ tel que} \quad q-2+s \geqq s_0. \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, $V(x, y)$ sera de la forme :

$$V = \text{fonction de la classe } H_{x,y}(D) + \sum_{s < s_0 - q + 2} \frac{B_s(x, \varphi)}{|y^{q-2+s}|} \qquad [(x, y) \in D - W].$$

D'où le théorème.

Corollaire 3. — *Soit* E *un ensemble compact appartenant à un sous-espace de* $D = D_x \times D_y$ *et défini par*

$$E: \quad (y_1 = y_1^0, \quad \ldots, \quad y_q = y_q^0) \times (x \in K),$$

où K *est un compact de* D_x. *Si* V *est de la classe* $H_{x,y}(D - E)$, *alors* V *se prolonge par continuité en une fonction de la classe* $H_{x,y}(D)$.

En effet, supposons $y_j^0 = 0 (j = 1, \ldots, q)$, et considérons le développement (3.11). Les coefficients $\alpha(x)$, $B_s(x, \varphi)$ doivent être nuls pour tout x appartenant à $D_x - K$. Comme $D_x - K$ est un ouvert, on aura $\alpha(x) \equiv 0$,

([16]) *Voir* par exemple, M. Brelot [10], [12], [13].

$B_s(x, \varphi) \equiv 0 \, (s = 1, 2, \ldots)$. V est alors bornée au voisinage de tout compact de E sur D — E. On conclut comme dans le théorème 11.

Le théorème 11 *montre ainsi l'existence d'une classe d'ensembles* E *fermés tels que si* E, *est contenu dans un domaine* D *de* R^{p+q}, *et si* $V \in H_{x,y}(D - E)$, *on ait* $V \in H_{x,y}(D)$ *le prolongement se faisant de* D — E *à* D *d'une façon unique. On sait qu'il existe de telle classe d'ensembles appelés ensembles singuliers impropres* ([17]) *pour les fonctions plurisousharmoniques* (cf. [23]).

PROPOSITION 15. — *Soit* V *une fonction de la classe* $H_{x,y}(D - W)$. *Si* V *est positive au voisinage* ω *d'un point* $(x = x_0, y = 0)$ *de* W, *alors* V *est dans* D — W, *de la forme* :

$$V = \textit{fonction de la classe } H_{x,y}(D) + \frac{\alpha(x)}{|y|^{q-2}} \qquad [(x, y) \in D - W].$$

En effet, pour $x = x_0$ fixé, $x_0 \in (\omega \cap D_x)$, considérons le développement (3.11). On sait que si $V(x_0, y)$ est positive au voisinage de $y = 0$, tous les coefficients $B_s(x_0, \varphi)$ sont nuls [10]. Comme $\omega \cap D_x$ est un ensemble ouvert, on aura $B_s(x, \varphi) \equiv 0$, pour $x \in D_x$. V est alors de la forme indiquée.

VII. Support des masses d'une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$.

7. Soit $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ une fonction de la classe $S_{x,y}(D)$. D'après le théorème 9, V est sousharmonique de l'ensemble des variables (x, y). Si $d\mu$ est la mesure de Radon positive associée à V en tant que fonction sousharmonique en (x, y), l'intégrale $\int_E d\mu$, sera appelée la masse de V portée par $E \subset\subset D$.

PROPOSITION 16. — *Soit* V *une fonction de la classe* $S_{x,y}(D)$, *où* D *est un domaine de* R^{p+q}. *Si la masse de* V *dans tout compact* $K \subset D$ *disparaît, alors* V *est de la classe* $H_{x,y}(D)$.

En effet, si $d\mu$ est la mesure de Radon associée à V en tant que fonction sousharmonique en (x, y), la condition $\int_K d\mu = 0$, pour tout $K \subset D$, entraîne que $d\mu$ est une mesure nulle dans D. Donc, dans la décomposition de Riesz de V dans un domaine $D' \subset\subset D$, le terme potentiel disparaît, on en déduit que V est harmonique en (x, y), donc dérivable. On a dans $D' \subset\subset D$:

$$\Delta_x V \geqq 0, \qquad \Delta_y V \geqq 0, \qquad \Delta_x V + \Delta_y V = \Delta V = 0.$$

([17]) Soit V^m une variété différentiable à m dimensions, E une partie fermée de E telle que $\Omega = V^m - E$ soit un ensemble ouvert connexe. Désignons par $L(\Omega)$ l'ensemble des fonctions d'une certaine classe L défini sur Ω. On dit que E est un ensemble singulier impropre pour les fonctions de la classe L, si toute fonction de la classe $L(\Omega)$ se prolonge d'une façon unique en une fonction de la classe $L(V^m)$ (*cf.* [23]).

Donc, $\Delta_x V \equiv 0$, $\Delta_y V \equiv 0$, dans D'. D' étant quelconque dans D, d'où la proposition.

Proposition 17. — *Soit* $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ *harmonique en* (x, y) *à l'extérieur* E *d'un domaine borné de* R^{p+q}, *et de la classe* $H_{x,y}$ *dans un ouvert* $\omega \subset E$. *Si* V *tend vers zéro, lorsque* $|x| + |y| \to +\infty$, *alors*

$$V \equiv 0, \qquad (x, y) \in E.$$

En effet, $V(x, y)$ sera de la classe $H_{x,y}(E)$. Car $\Delta_x V(x, y)$ qui est harmonique en (x, y) dans E, est identiquement nulle dans $\omega \subset E$, sera identiquement nulle dans E, et V sera de la classe $H_{x,y}(E)$. D'autre part, E étant l'extérieur d'un domaine borné de R^{p+q}, on peut trouver un cylindre $c : [x \in \omega_1, -\infty < y_j < +\infty]$, $j = 1, 2, \ldots, q$, contenu dans E; et en particulier V sera de la classe $H_{x,y}(c)$. Supposons $x = x_0 \in \omega_1$ fixé, $V(x_0, y)$ étant harmonique dans tout R^q, et tendant vers zéro quand $|y| \to +\infty$, est identiquement nulle. Ainsi pour tout $x \in \omega_1$, $V(x, y) \equiv 0$, comme $V(x, y)$ est harmonique en (x, y) dans E, et nulle dans un ouvert de E, est identiquement nulle dans E.

Théorème 12. — *Si* $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ *est une fonction de la classe* $H_{x,y}$ *au voisinage de la frontière d'un domaine borné* $D \subset R^{p+q}$, *elle se prolonge en une fonction de la classe* $H_{x,y}(D)$.

Ce théorème est à rapprocher du théorème de Hartogs : *Une fonction analytique de plusieurs variables complexes sur la frontière d'un domaine borné se prolonge en une fonction analytique à l'intérieur de ce domaine.*

Considérons ([18]) un voisinage U de la frontière extérieure de D, ayant des frontières F_1 et $F_2 (F_1 \subset D)$, assez régulières pour qu'on puisse appliquer la formule (3.10). F_1 et F_2 sont construits de manière que V soit de la classe $H_{x,y}$ sur F_1 et F_2 et dans le domaine U limité par F_1 et F_2.

L'intégrale (3.10), étendue à $F_1 + F_2$, donne la valeur de V en un point $(x, y) \in U$. Décomposons cette intégrale en deux autres portant sur F_1 et F_2, et posons

$$V = I_{F_1}(x, y) + I_{F_2}(x, y) = I_{F_1+F_2}(x, y).$$

On a dans U :

$$(3.11) \quad K_{p+q} I_{F_1}(x, y)$$
$$= \int_{F_1} V(\xi, \eta) \frac{d}{dn_i}\left[\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i - \xi_i)^2 + \sum_{j=1}^{q}(y_j - \eta_j)^2\right)^{-\frac{p+q-2}{2}}\right] d\sigma_{p+q-1}(\xi, \eta)$$
$$- \int_{F_1}\left[\sum_{i=1}^{p}(x_i - \xi_i)^2 + \sum_{j=1}^{q}(y_j - \eta_j)^2\right]^{-\frac{p+q-2}{2}} \frac{d}{dn_i} V(\xi, \eta)\, d\sigma_{p+q-1}(\xi, \eta),$$

$I_{F_2}(x, y)$ ayant une expression analogue étendue à F_2.

([18]) Un procédé analogue a déjà été utilisé par S. Bochner [5] [6].

$I_{F_1}(x, y)$ est une fonction harmonique en (x, y) dans le domaine (A) contenant le point $x = +\infty$, $y = +\infty$, et de frontière F_1. Elle tend vers zéro, lorsque $|x| + |y| \to +\infty$. D'autre part, c'est une fonction de la classe $H_{x,y}(A)$. En effet, faisons dans (3.11), le changement de variables :

$$\xi'_i = \xi_i - x_i \qquad (i = 1, \ldots, p).$$
$$\eta'_j = \eta_j - y_j \qquad (j = 1, \ldots, q).$$

On obtient (dans U) :

$$k_{p+q}\, I_{F_1}(x, y) = \int V(x_i + \xi'_i,\ y_j + \eta'_j) \frac{d}{dn_i}\left[\left(\sum_{i=1}^{p} \xi'^2 + \sum_{j=1}^{q} \eta'^2_j\right)^{-\frac{p+q-2}{2}}\right] d\sigma_{p+q-1}(\xi', \eta')$$
$$- \int \left(\sum_{i=1}^{p} \xi'^2_i + \sum_{j=1}^{q} \eta'_j\right)^{-\frac{p+q-2}{2}} \frac{d}{dn_i} V(x_i + \xi'_i,\ y_j + \eta'_j)\, d\sigma_{p+q-1}(\xi', \eta').$$

La première intégrale $\left[\text{qui est harmonique en } (x, y), \text{ et tend vers zéro avec } \frac{1}{|x| + |y|}\right]$ est de la classe $H_{x,y}$ au voisinage de la frontière de D. Car cette intégrale est de la forme $\int V(x_i + \xi'_i,\ y_j + \eta'_j)\, d\mu(\xi', \eta')$, avec

$$d\mu(\xi', \eta') = \frac{d}{dn_i}\left[\left(\sum_{i=1}^{p} \xi'^2_i + \sum_{j=1}^{q} \eta'^2_j\right)^{-\frac{p+q-2}{2}}\right] d\sigma_{p+q-1}(\xi', \eta') \qquad \text{et} \qquad \int d\mu(\xi', \eta') < +\infty,$$

donc l'intégrale portant sur $V(x_i + \xi'_i,\ y_j + \eta'_j)$, sera de la classe $H_{x,y}$ au voisinage de la frontière de D; car $V(x_i + \xi'_i, y_j + \eta'_j)$ l'est, et l'on intègre par rapport à une mesure bornée. D'après la proposition 17, elle sera identiquement nulle. Même raisonnement pour la deuxième intégrale; car $\frac{dV}{dn_i}(x_i + \xi'_i,\ y_j + \eta'_j)$, est encore de la classe $H_{x,y}$ au voisinage de la frontière de D. Finalement

$$I_{F_1}(x, y) \equiv 0, \qquad V(x, y) = I_{F_2}(x, y).$$

Or $I_{F_2}(x, y)$ est harmonique en (x, y) dans D, et est d'autre part de la classe $H_{x,y}$ au voisinage de la frontière de D (même raisonnement que pour I_{F_1}); elle est donc dans D de la classe $H_{x,y}$, comme étant une fonction harmonique en $(x, y) \in D$, et de la classe $H_{x,y}$ dans un ouvert $\omega \subset D$.

$I_{F_2}(x, y)$ prolonge donc $V(x, y)$, et le théorème est établi.

Proposition 18. — *Soient* V *une fonction de la classe* $S_{x,y}(D)$, *et* K *un compact contenu dans* D. *Si de plus* V *appartient à la classe* $H_{x,y}(D - K)$, *alors* V *appartient à la classe* $H_{x,y}(D)$.

En effet, soit $K \subset D_1 \subset D$, D_1 étant un ouvert de frontière D_1^* assez régulière. $D - K$ est un voisinage de la frontière de D_1; donc V de la classe $H_{x,y}(D - K)$, se prolonge en une fonction $\tilde{V}(x, y)$ de la classe $H_{x,y}(D_1)$. La masse de V en tant que fonction sousharmonique en (x, y), disparaît dans D_1. Car cette masse à un facteur près est égale à

$$\int_{D_1^*} \frac{d\,V(x, y)}{dn_i}\, d\sigma_{p+q-1}(x, y) = \int_{D_1^*} \frac{d\,\tilde{V}(x, y)}{dn_i}\, d\sigma_{p+q-1}(x, y) = 0.$$

La proposition 16 montre alors que V est de la classe $H_{x,y}(D_1)$, et comme D_1 est quelconque, V est de la classe $H_{x,y}(D)$.

Proposition 19. — *Le support des masses d'une fonction de la classe* $S_{x,y}(D)$, *n'est jamais contenu dans un compact, sauf si elles s'annulent, auquel cas la fonction est de la classe* $H_{x,y}(D)$.

En effet, si le support des masses de V de la classe $S_{x,y}(D)$, est contenu dans un compact $K \subset D$, V sera de la classe $H_{x,y}(D - K)$ (proposition 16), et finalement de la classe $H_{x,y}(D)$ (proposition 18).

Corollaire 4. — *Une fonction de la classe* $S_{x,y}(D)$, *ne possède pas de masse isolée.*

En particulier, ce corollaire est valable pour les fonctions plurisousharmoniques (et en particulier pour les fonctions de la forme $V = \log|f(z_1, \ldots, z_p)|$, f holomorphe). Il étend ainsi à la classe $S_{x,y}(D)$ une propriété connue des fonctions plurisousharmoniques et est à rapprocher (mais d'une manière plus lointaine) du fait qu'une fonction analytique de $p > 1$ variables n'a pas de zéro isolé.

CHAPITRE IV.

VIII. Mesures de Radon dépendant harmoniquement d'un groupe de paramètres.

1. Soient E un espace compact, F_E l'espace vectoriel des fonctions continues (dans E) à valeurs réelles, muni de la norme usuelle $\|f\| = \sup|f|$, qui définit sur F_E la topologie de la convergence uniforme. On désigne par F_1 un sous-espace vectoriel fermé de F_E, et par D un domaine de R^q. μ_y sera une forme linéaire définie sur F_1 (mesure si $F_1 \equiv F_E$), dépendant d'un paramètre réel $y = (y_1, \ldots, y_q) \in D \subset R^q$ (y sera considéré comme un point de R^q). On suppose qu'on a de plus, sur tout compact $K \subset D$ une majoration :

$$(4.1) \qquad |\mu_y(f)| \leq M(K)\,\|f\| \qquad (f \in F_1,\ y \in K).$$

M(K) ne dépendant que de K.

E étant compact, μ_y sera continue dans F_1, pour la topologie de la convergence uniforme.

Le problème qu'on se propose est le suivant : on se donne un domaine $D_1 \subset \subset D$, et l'on suppose que pour tout $f \in F_1$, $\mu_y(f)$ en tant que fonction de $y \in D$, appartient à une classe (c). Pour y contenu dans $D_1 \subset \subset D$, peut-on prolonger μ_y définie sur F_1 en $\tilde{\mu}_y$ sur F_E de manière que $\tilde{\mu}_y(g)$, $g \in F_E$, appartienne aussi à la même classe (c) comme fonction de y dans D_1, et que la norme de $\tilde{\mu}_y$ satisfasse sur D_1 à la condition :

$$\sup_{y \in D_1}(\| \tilde{\mu}_y \|_{F_E}) = \sup_{y \in D_1}(\| \mu_y \|_{F_1}) \ ? \tag{4.2}$$

Remarquons que dans (4.2), nous exigeons l'égalité des bornes supérieures dans D_1 des deux fonctions de y, et non leur égalité pour chaque y fixé.

Cette condition fait intervenir D_1, et peut n'être pas réalisée dans un sous-domaine $D_2 \subset D_1$.

Évidemment, le théorème de Hahn-Banach [8], nous permet de prolonger μ_y pour chaque y fixé, en une mesure de Radon $\tilde{\mu}_y$ vérifiant l'égalité $\| \mu_y \|_{F_1} = \| \tilde{\mu}_y \|_{F_E}$, pour tout y; mais il s'agit de voir s'il existe des prolongements tels que, comme fonction de y, $\tilde{\mu}(g)$, $g \in F_E$, soit encore de la classe (c).

Nous examinons ce problème dans le cas où (c) est la classe des fonctions harmoniques.

Définition 5. — *Nous dirons que la forme linéaire μ_y définie sur F_1 et $y \in D$, dépend harmoniquement de y, si μ_y vérifie* (4.1), *et que l'application :*

$$f \to \mu_y(f) \qquad (f \in F_1)$$

nous fournit une fonction harmonique en $y \in D$, pour tout $f \in F_1$. Si $F_1 \equiv F_E$, μ_y sesa dite mesure de Radon dépendant harmoniquement de $y \in D$.

Exemple. — Soient G un ouvert de R^p et $D \subset \subset G$, un sous-domaine. $\bar{D}$ la fermeture de D. Pour toute fonction $f \in F_{\bar{D}}$, considérons la valeur prise au point $y \in D$, par la solution du problème de Dirichlet relatif à D, et pour une donnée égale à f sur la frontière $D^\star$ supposée assez régulière. Quand f varie dans $F_{\bar{D}}$, cette solution définit une mesure de Radon dépendant harmoniquement de $y \in D$.

Un autre exemple nous est fourni grâce à l'énoncé suivant :

Proposition 20. — *Soit $V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ une fonction définie dans le domaine borné $D = D_x \times D_y (D_x \subset R^p,\ D_y \subset R^q)$, bornée en module sur tout compact de D et telle que :*

Pour x fixé, $V(x, y)$ soit harmonique en $y \in D_y$, et pour y fixé, $V(x, y)$ soit sousharmonique en $x \in D_x$. Avec ces hypothèses, la mesure de Radon positive μ_y associée à $V(x, y)$ en tant que fonction sousharmonique en x (pour y fixé), vérifie une condition analogue à (4.1), *et la condition suivante : pour toute fonction f à support $K(f)$ contenu dans un compact de D_x, la fonction de y, $\mu_y(f)$ est harmonique en $y \in D_y$.*

En effet, soit f une fonction continue à support compact $K(f)$ contenu dans D_x. Considérons une suite de fonctions $\varphi_n(x)$ indéfiniment dérivables à support $K(\varphi_n)$ compact dans D_x, avec $K(f) \subset K(\varphi_n)$, suite qui converge uniformément en décroissant vers $f(x)$.

On a au sens des distributions :

$$\mu_y(\varphi_n) = (p-2)\,\sigma_{p-1}(1) \int \Delta_x V(x, y)\, \varphi_n(x)\, d\tau_p(x)$$
$$= (p-2)\,\sigma_{p-1}(1) \int V(x, y)\, \Delta_x \varphi_n(x)\, d\tau_p(x).$$

$\mu_y(\varphi_n)$ est harmonique sur tout domaine D_2 d'adhérence $\bar{D}_2$ compacte dans D_1; car $|V(x, y)|$ est bornée sur $\bar{D}_2 \times K(\varphi_n)$, et l'on intègre par rapport à une mesure positive et bornée, portant sur le paramètre x. Comme la mesure μ_y correspondant à $\Delta_x V(x, y)$ $(y \in \bar{D}_2$, fixé$)$, est une mesure positive et bornée sur un compact K contenant tous les $K(\varphi_n)$, $\mu_y(\varphi_n)$ tend en décroissant vers $\mu_y(f)$ qui sera nécessairement harmonique en $y \in \bar{D}_2$. Le raisonnement fait établit que pour $y \in \bar{D}_2$, $|\mu_y(f)| \leqq A(f)$, où $A(f)$ est indépendant de $y \in \bar{D}_2$. Or le théorème de Banach-Steinhaus [3], énonce qu'une famille $A_{(\alpha)}(x)$ de fonctionnelles linéaires sur un espace de Banach ne peut être bornée pour tout x sans que la famille des normes $\|A_{(\alpha)}\|$ soit bornée uniformément. Il en résulte que $\|\mu_y\|$, $y \in \bar{D}_2$, est uniformément bornée, c'est-à-dire il existe un nombre $M(\bar{D}_2)$ ne dépendant que de $\bar{D}_2$, tel que

$$|\mu_y(f)| \leqq M(\bar{D}_2)\, \|f\| \qquad (y \in \bar{D}_2).$$

D'où la proposition, puisque D_2, D_1 sont quelconques dans D_x.

Nous nous plaçons dans la suite dans l'espace E défini au début du chapitre.

Proposition 21. — *Si μ_y est une mesure de Radon dépendant harmoniquement de $y \in D$, sa norme $\|\mu_y\| = \sup_{\|f\| \leqq 1} |\mu_y(f)|$, est une fonction sousharmonique de $y \in D$, qui est positive continue. En particulier si μ_y est une mesure positive pour tout y, sa norme sera harmonique de $y \in D$.*

En effet, $\mu_y(f)$, $f \in F_E$, étant harmonique de $y \in D$, $|\mu_y(f)|$ sera sousharmonique. Comme $\mu_y(f)$ vérifie (4.1), $\|\mu_y\|$ sera l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sousharmoniques positives bornées sur tout compact de D. Elle est donc quasi sousharmonique. D'autre part $\mu_y(f)$, $\|f\| \leqq 1$, est une famille également continue de fonctions harmoniques en $y \in D$, ce qui entraîne l'égale continuité en y de $|\mu_y(f)|$ $(\|f\| < 1)$, et finalement la continuité pour l'enveloppe supérieure $\|\mu_y\|$. Cette propriété et celle de quasi-sousharmonicité entraînent la sousharmonicité.

D'autre part, on sait que pour une mesure μ définie sur E (qui est rappelons-le, un espace compact), le nombre réel $\mu(1)$ (positif ou négatif), est appelé la masse totale de μ; lorsque μ est une mesure positive, sa masse totale est égale à sa norme [9]. Donc si μ_y est une mesure de Radon positive dépendant harmoniquement de $y \in D$, $\|\mu_y\| = \mu_y(1)$ sera harmonique en $y \in D$. D'où la proposition.

2. Proposition 22. — *Soit* H *un sous-espace vectoriel partout dense dans* F_E *au sens de la convergence uniforme. Une forme linéaire* μ_y *définie sur* H *et dépendant harmoniquement d'un paramètre* $y \in D$, *est prolongeable pour* $y \in D$, *en une mesure de Radon dépendant harmoniquement de* $y \in D$ (*d'une façon unique, et sans augmentation de norme pour chaque* y *fixé*).

Soient $f \in F_E$, $f \notin H$, et f_n une suite de fonctions appartenant à H et qui converge (pour la topologie de la convergence uniforme) vers f. On sait alors que si ν est une forme linéaire continue sur H, elle est prolongeable sans augmentation de norme par continuité en une mesure de Radon $\tilde{\nu}$ sur F_E. On définit la valeur de $\tilde{\nu}(f)$ comme étant égale à la limite de $\nu(f_n)(n \to +\infty)$. Dans notre cas, il existe donc pour chaque y fixé (rappelons que μ_y est continue pour chaque y fixé), une mesure de Radon (unique) $\tilde{\mu}_y$ prolongeant μ_y; il suffit seulement de vérifier si $\tilde{\mu}_y$ va dépendre encore harmoniquement de y. On a $\tilde{\mu}_y(f) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \mu_y(f_n)(f_n \in H)$; $\mu_y(f_n)$ est harmonique pour chaque n, et elle converge simplement vers une fonction de y, $\tilde{\mu}_y(f)$. Or $\mu_y(f_n)$ est une suite de fonctions harmoniques bornées en modules sur tout compact K de D, par $M(K) \sup\limits_n \|f_n\| < +\infty$, ou $M(K)$ est indépendante de y [condition (4.1)], donc la convergence simple entraîne la convergence uniforme et la limite est harmonique.

Théorème 13. — *Soient* F_1 *un sous-espace vectoriel fermé de* F_E, μ_y *une forme linéaire dépendant harmoniquement de* $y \in D$, *et définie sur* F_1. *Lorsque* y *demeure dans un ouvert* D_1 *compactement contenu dans* D, μ_y *se prolonge de* F_1 *à* F_E, *en une mesure de Radon* $\tilde{\mu}_y$ *qui dépend harmoniquement de* $y \in D_1$, *de plus le prolongement peut être fait de manière que* $\tilde{\mu}_y$ *vérifie relativement au domaine* D_1 *choisi;* $D_1 \subset\subset D$:

$$\sup_{y \in D_1} \|\tilde{\mu}\|_{F_E} = \sup_{y \in F_1} \|\mu_y\|_{F_1}; \tag{4.3}$$

si l'on considère $D_2 \subset D_1$, $\tilde{\mu}_y$ *ne satisfait pas* (4.3), *relativement à* D_2 *en général.*

Soit g un élément de F_E qui n'appartient pas à F_1, H_1 l'espace vectoriel fermé engendré par les combinaisons linéaires de g et des éléments de F_1. Nous allons prolonger μ_y de F_1 à H_1, en une forme linéaire μ_y^* telle que, pour tout élément de H_1, la valeur prise par μ_y^* soit encore harmonique en $y \in D_1$, et que $\|\mu_y^*\|_{H_1}$ vérifie (4.3).

Considérons en effet, la famille de fonctions harmoniques :

$$(4.4) \qquad \mu_y(f) + \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|f-g\|,$$
$$y \in \mathrm{D}_1,\ f \in \mathrm{F}_1,\ \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1) = \sup_{y \in \overline{\mathrm{D}}_1} \|\mu_y\|_{\mathrm{F}_1}.$$

Pour f variant dans F_1, (4.4) est une famille bornée inférieurement; car quels que soient h et f, appartenant à F_1, et $y \in \mathrm{D}_1$:

$$\mu_y(h) - \mu_y(f) \leqq |\mu_y(h) - \mu_y(f)| \leqq |\mu_y(h-f)| \leqq \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|h-f\|$$
$$\leqq \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)(\,\|h-g\| + \|f-g\|\,),$$

donc

$$(4.5) \qquad \mu_y(h) - \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|h-g\| \leqq \mu_y(f) + \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|f-g\| \qquad (y \in \mathrm{D}_1).$$

Donc, si h_0 est un élément de F_1 fixé, $\mu_y(h_0)$ est harmonique de $y \in \overline{\mathrm{D}}_1$, on aura $\sup\limits_{y \in \overline{\mathrm{D}}_1} \mu_y(h_0) = \alpha_0 > -\infty$; soit $\delta = \|g - h_0\|$; la famille (4.4), sera minorée d'après (4.5), par $\alpha_0 - \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\delta$. On en déduit que l'enveloppe inférieure $\underline{u}_g(y)$ de (4.4), est surharmonique continue de $y_1 \in \mathrm{D}_1$ (car toute famille de fonctions harmoniques bornée inférieurement sur tout compact par une constante finie, a une enveloppe inférieure qui est continue ou éventuellement une constante, et comme d'autre part elle est quasi surharmonique est surharmonique). Soit donc

$$\underline{u}_g(y) = \inf_{f \in \mathrm{F}_1} [\,\mu_y(f) + \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|f-g\|\,].$$

D'après (4.5), on a, pour tout $h \in \mathrm{F}_1$;

$$\mu_y(f) - \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|h-g\| \leqq \underline{u}_g(y) \qquad (y \in \mathrm{D}_1).$$

$\underline{u}_g(y)$ a ainsi une minorante harmonique dans D_1, on sait]13[que si une fonction V surhamonique admet une minorante sousharmonique dans D_1, l'enveloppe supérieure des minorantes sousharmoniques de V dans D_1 est une fonction harmonique dans D_1, et c'est la plus grande minorante harmonique de V dans D_1. La famille de fonctions sousharmoniques dans D_1 qui minorent $\underline{u}_g(y)$ dans D_1, contient en particulier les fonctions harmoniques $\mu_y(h) - \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|h-g\|$, $h \in \mathrm{F}_1$; elle a une enveloppe supérieure $m_g(y)$ harmonique dans D_1, et l'on aura pour tout $h \in \mathrm{F}_1$, $f \in \mathrm{F}_1$, $y \in \overline{\mathrm{D}}_1$:

$$(4.6) \qquad \mu_y(h) - \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|h-g\| \leqq m_g(y) \leqq \underline{u}_g(y) \leqq \mu_y(f) + \mathrm{M}(\overline{\mathrm{D}}_1)\,\|f-g\|.$$

Nous définissons une forme linéaire $\mu_y^\star$ sur H_1 (l'espace vectoriel fermé engendré par F_1 et $g \notin \mathrm{F}_1$; $g \in \mathrm{F}_\mathrm{E}$) de la manière suivante : par convention nous posons :

$$(4.7) \qquad \begin{cases} \mu_y^\star(f) = \mu_y(f) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{F}_1, \\ \mu_y^\star(g) = m_g(y), \\ \mu_y^\star(ag+f) = a\mu_y^\star(g) + \mu_y^\star(f)\,[= a m_g(y) + \mu_y(f)], \end{cases}$$

a étant un scalaire,

μ_y^* est alors linéaire (car toute fonction qui appartient à H_1 est de la forme $ag+f$). Sa valeur pour un élément de H_1 est d'autre part harmonique en $y \in D_1$ [grâce au choix de $m_g(y)$ et du fait que $\mu_y^*(f) = \mu_y(f)$, est harmonique de $y \in \overline{D}_1$, pour tout $f \in F_1$]. Il suffit donc de montrer l'inégalité :

$$|\mu_y^*(ag+f)| \leq M(\overline{D}_1)\,\|ag+f\| \qquad (f \in F_1,\ y \in D_1),$$

pour affirmer que μ_y^* dépend harmoniquement de $y \in D_1$.

Dans (4.6), remplaçons h et f, par $-\dfrac{f}{a}$ [ce qui est légitime car (4.6), est vérifiée pour tous éléments h et f appartenant à F_1 qui est un sous-espace vectoriel fermé], ce qui donne :

$$-M(\overline{D}_1)\left\|\frac{f}{a}+g\right\| \leq m_g(y) + \mu_g\left(\frac{f}{a}\right) \leq M(\overline{D}_1)\left\|\frac{f}{a}+g\right\|,$$

c'est-à-dire

$$(4.8) \qquad |am_g(y) + \mu_y(f)| \leq M(\overline{D}_1)\,\|f+ag\|.$$

D'après les conventions (4.7),

$$am_g(y) + \mu_y(f) = \mu_y^*(ag+f),$$

donc finalement d'après (4.8),

$$|\mu_y^*(ag+f)| \leq M(\overline{D}_1)\,\|ag+f\|.$$

Ainsi μ_y^* est une forme linéaire définie sur le sous-espace vectoriel $H_1 = F_1 + \{g\}$; elle dépend harmoniquement de $y \in \overline{D}_1$, et vérifie (4.3), par rapport à D_1, et elle prolonge μ_y de F_1 à H_1.

L'extension à tout l'espace F_E se fait en appliquant le théorème de Zorn : *Tout ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal.*

On a vu que μ_y se prolonge de F_1 à H_1 en une forme linéaire μ_y^* dépendant harmoniquement de $y \in D_1$, et vérifiant (4.3). On peut évidemment recommencer à partir de μ_y^* et H_1, en prolongeant μ_y^* de H_1 à un sous-espace vectoriel fermé engendré par H_1 et un élément $g_1 \in F_E$, $g_1 \notin H_1$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les prolongements obtenus par ce procédé appliqué successivement. L'ensemble $\mathcal{F}$ est totalement ordonné par inclusion, car étant donné deux éléments de $\mathcal{F}$, l'un est nécessairement le prolongé de l'autre. D'autre part, $\mathcal{F}$ est inductif, c'est-à-dire toute partie de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée a un majorant. En effet, la réunion d'un nombre quelconque des éléments d'une partie de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée, est encore un prolongement qui contient tous ces éléments, et est par conséquent un majorant pour ces éléments. Il en résulte que les hypothèses du théorème de Zorn sont satisfaites. L'ensemble $\mathcal{F}$ a un élément maximal $\tilde{\mu}_y$, son domaine de définition est nécessairement F_E, sinon $\tilde{\mu}_y$ serait encore prolongeable et ne serait pas maximal; $\tilde{\mu}_y$ dépend harmoniquement de $y \in D_1$, et satisfait (4.3), car c'est un élément de $\mathcal{F}$, et l'on sait que tous les éléments de $\mathcal{F}$ possèdent ces propriétés, en effet elles se conservent par passage à la limite inductive. $\tilde{\mu}_y$ prolonge donc μ_y de F_1 à F_E, et le théorème est établi.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. Avanissian, *Sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques de deux groupes de variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 2273-2275).

[2] V. Avanissian, *Mesures dépendant harmoniquement d'un ou de deux groupes de variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 2278-2281).

[3] Banach-Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités* (*Fundamenta Math.*, t. 9. 1927, p. 50-61).

[4] S. Bochner and W. Martin, *Several complex variables*, Princeton University Press, 1948.

[5] S. Bochner, *Analytic and meromorphic continuation by means of Green formula* (*Annals of Math.*, t. 44, 1943, p. 659-673).

[6] S. Bochner, *Partial differential équations and analytic continuation* (*Proc. Nat. Acad, Sc.*, t. 38, 1952, p. 227-230.

[7] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Livre III, chap. IX (*Actualités scientifiques et industrielles*, 1048, Hermann, Paris, 1948.

[8] N. Bourbaki, *Espace vectoriels topologiques*, Liare V, chap. I, II (*Actualités scientifiques et industrielles*, 1189, Hermann, Paris, 1953).

[9] N. Bourbaki, *Intégration*, Livre IV (*Actualités scientifiques et industrielles* 1175, Hermann, Paris, 1952.

[10] M. Brelot, *Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* (*Actualités scientifiques et industrielles*, 139, Hermann, Paris, 1934).

[11] M. Brelot, *Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 836).

[12] M. Brelot, *Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 1, 1949).

[13] M. Brelot, *Élément de la théorie classique du potentiel* (Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1959).

[14] P. Lelong, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 58, 1941).

[15] P. Lelong, *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945).

[16] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques, mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes*, Bruxelles, 1953).

[17] P. Lelong, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 67, 1950).

[18] P. Lelong, *On a problem of M. A. Zorn* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 2, n° 1, 1951, p. 12-19).

[19] P. Lelong, *Sus la représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 691-693),

[20] P. Lelong, *Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237. 1953, p. 865-867).

[21] P. Lelong, *Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème des fonctions entières de n variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1379-1381).

[22] P. Lelong, *Sur l'aire des ensembles analytiques complexes* (*Publications Ann. Ac. Sc. Fennic*, 1958).

[23] P. Lelong, *Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques* (*J. Math. pures et appliquées*, t. 36, 1957).

[24] E. Lindwart, *Über eine Methode von Laguerr zur Bestimmung des Geschlichtes einer ganzen Function* (*Diss Göhingen*, t. 37, 1914).

[25] L. Schwartz, *Théorie des distributions* (*Actualités Scientifiques et industrielles*, 1091 et 1122, Hermann, Paris, 1950 et 1951).

[26] W. Stoll, *Ganz Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Math. Z.*, t. 57, 1953).