

Statistique/Probabilités

# Stationnarité et inférence asymptotique de modèles bilinéaires périodiques

Abdelouahab Bibi<sup>a</sup>, Antony Gautier<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Département de Mathématiques, Université Mentouri, Constantine, Algérie*

<sup>b</sup> *Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085 CNRS, Université de Rouen, Faculté des Sciences,  
Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint Étienne du Rouvray, France*

Reçu le 28 octobre 2004 ; accepté après révision le 20 septembre 2005

Disponible sur Internet le 28 octobre 2005

Présenté par Paul Deheuvels

---

## Résumé

Cette Note établit des propriétés dans  $L^2$  et considère l'estimation de la sous-classe des modèles de séries temporelles purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques. Nous donnons des conditions assurant la stationnarité, la causalité, l'inversibilité et l'existence de moments d'ordre supérieur. Le problème de l'estimation des paramètres est également traité par une approche fondée sur les moments empiriques d'ordre 2 et 3. *Pour citer cet article : A. Bibi, A. Gautier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Stationarity and asymptotic inference of some periodic bilinear models.** This Note derives  $L^2$ -properties and considers estimation of the subclass of completely bilinear and strictly superdiagonal time series models with periodic coefficients. Conditions ensuring stationarity, causality, invertibility and existence of higher-order moments are given. The problem of estimating the parameters is also investigated with an approach based on second and third empirical moments. *To cite this article : A. Bibi, A. Gautier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Pour pallier l'insuffisance pragmatique des modèles linéaires, les modèles bilinéaires à coefficients constants ont suscité un vif intérêt en séries temporelles (voir Priestley [7]). L'existence de séries à structure simultanément périodique et non-linéaire (voir, par exemple, Gabr et Subba Rao [5]) souligne cependant la nécessité de relâcher l'hypothèse d'unicité de la dynamique au profit de modèles bilinéaires à coefficients périodiques. Cette Note se positionne dans l'étude probabiliste et statistique des modèles bilinéaires à coefficients dépendant du temps dont Bibi [2] est une référence récente. L'objectif majeur de la Note réside dans l'étude de l'existence et de l'unicité dans  $L^2$ , de la stationnarité stricte et au second ordre, ainsi que dans l'estimation des processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  purement bilinéaires et

---

Adresses e-mail : [a.bibi@wissal.dz](mailto:a.bibi@wissal.dz) (A. Bibi), [antony.gautier@univ-rouen.fr](mailto:antony.gautier@univ-rouen.fr) (A. Gautier).

strictement superdiagonaux à coefficients périodiques (de période  $s \in \mathbb{N}^*$ ), notés  $\text{PBL}(0, 0, P, 1)_s$  et vérifiant l'équation

$$X_{st+v} = \sum_{i=2}^P b_i(v) X_{st+v-i} \epsilon_{st+v-1} + \epsilon_{st+v}, \quad (1)$$

pour  $v = 1, \dots, s$  et  $P \geq 2$ , où la suite  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  contient des variables aléatoires iid telles que  $E(\epsilon_t) = E(\epsilon_t^3) = 0$ ,  $E(\epsilon_t^2) = 1$  et  $E(\epsilon_t^4) < \infty$ . Toutes les égalités entre variables aléatoires sont définies au sens presque sûr (p.s.). On suppose que  $\epsilon_t$  et  $X_u$  sont indépendants pour tout  $u < t$ . Les modèles de la forme (1) sont des bruits blancs faibles dans la mesure où la suite  $\{X_{st+v}, \mathfrak{F}_t(X)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est une différence de martingale, en désignant par  $\mathfrak{F}_t(X)$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $(X_{st+v-j-2})_{j \geq 0}$ . Les preuves et des illustrations numériques des résultats énoncés dans cette Note sont présentées dans Bibi et Gautier [3].

## 2. Représentation vectorielle

Soient les vecteurs  $\underline{\epsilon}_t = (\epsilon_{st+1}, \dots, \epsilon_{st+s})'$  et  $\underline{X}_t = (X_{st+1}, \dots, X_{st+s})'$ . On note  $P^* = [(P-1)/s] + 1$  (où  $[\cdot]$  désigne la partie entière). Le lemme suivant fournit une représentation vectorielle pour (1).

**Lemme 2.1.** *L'Éq. (1) s'exprime sous la forme vectorielle suivante :*

$$\underline{X}_t = C_0(\underline{\epsilon}_t) \underline{X}_t + \sum_{j=1}^{P^*} C_j(\underline{\epsilon}_t, \underline{\epsilon}_{t-1}) \underline{X}_{t-j} + \underline{\epsilon}_t, \quad (2)$$

où  $C_0(\underline{\epsilon}_t) = C_0^{(0)} \{\underline{\epsilon}_t \otimes \mathbf{I}_{(s)}\}$ ,  $C_j(\underline{\epsilon}_t, \underline{\epsilon}_{t-1}) = C_j^{(0)} \{\underline{\epsilon}_t \otimes \mathbf{I}_{(s)}\} + C_j^{(1)} \{\underline{\epsilon}_{t-1} \otimes \mathbf{I}_{(s)}\}$  (où  $\mathbf{I}_{(s)}$  désigne la matrice identité de taille  $s \times s$ ) et les  $C_j^{(m)}$ ,  $0 \leq m \leq 1$ ,  $m \leq j \leq P^*$ , sont des matrices réelles de taille  $s \times s^2$  uniquement déterminées par les constantes  $b_i(v)$ .

D'après la représentation (2), la relation vectorielle

$$A_0(t) \underline{\epsilon}_t = A_1(t) \underline{\epsilon}_{t-1} + \underline{X}_t \quad (3)$$

est également vérifiée, où  $A_1(t) = -\sum_{j=1}^{P^*} C_j^{(1)} \{\underline{X}_{t-j} \otimes \mathbf{I}_{(s)}\}$  et  $A_0(t) = \mathbf{I}_{(s)} + \sum_{j=0}^{P^*} C_j^{(0)} \{\underline{X}_{t-j} \otimes \mathbf{I}_{(s)}\}$  est une matrice triangulaire inférieure, inversible et dont le terme de la  $\ell$ -ième ligne et de la  $k$ -ième colonne est  $\{A_0(t)\}_{\ell,k} = \delta_{\ell,k} + \sum_{j=2}^P b_j(\ell) X_{st+\ell-j} \delta_{\ell,k+1}$  (où  $\delta_{\ell,k} = 1$  si  $\ell = k$ , 0 sinon).

## 3. Stationnarité, causalité, inversibilité et existence de moments d'ordre supérieur

Introduisons les matrices  $C_0 = E\{C_0^{\otimes 2}(\underline{\epsilon}_t)\}$  et  $C_j = E\{C_j^{\otimes 2}(\underline{\epsilon}_t, \underline{\epsilon}_{t-1})\}$  pour  $j = 1, \dots, P^*$  (où, pour tout entier  $d \geq 1$  et pour toute matrice  $M$ ,  $M^{\otimes d}$  représente le produit de Kronecker de  $M$  avec elle-même effectué à  $d$  reprises). Le résultat suivant généralise celui de Berlinet et Francq [1], obtenu dans le cas non-périodique (i.e.  $s = 1$ ).

**Théorème 3.1.** *Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'un processus  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au second ordre et solution de l'Éq. (2) est*

$$\det \left\{ \mathbf{I}_{(s^2)} - \sum_{j=0}^{P^*} z^j C_j \right\} \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1. \quad (4)$$

La matrice  $\Gamma = E(\underline{X}_t \underline{X}_t')$  est donnée par  $\text{Vec}(\Gamma) = \{\mathbf{I}_{(s^2)} - \sum_{j=0}^{P^*} C_j\}^{-1} \text{Vec}\{\mathbf{I}_{(s)}\}$ . Le processus est également strictement stationnaire, non-anticipatif et ergodique. Par ailleurs, une condition nécessaire d'existence d'un processus  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au second ordre, non-anticipatif et solution de (2) est qu'il existe une matrice de variance-covariance  $\Gamma$  solution de l'équation  $\{\mathbf{I}_{(s^2)} - \sum_{j=0}^{P^*} C_j\} \text{Vec}(\Gamma) = \text{Vec}\{\mathbf{I}_{(s)}\}$ .

D’après la relation (3), on note  $A(t) = A_0^{-1}(t)A_1(t)$ . Précisément, le terme générique de la matrice  $A(t)$  s’écrit  $\{A(t)\}_{\ell,k} = \delta_{k,s} \prod_{v=1}^{\ell} (-1)^v \sum_{j=2}^P b_j(v) X_{st+v-j}$ . On sait que, si  $E \ln^+ \|A(t)\| < +\infty$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  (où  $\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$  pour tout réel  $x > 0$ ), alors le coefficient de Lyapunov de la suite  $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , noté

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} E \ln \left\| \prod_{j=0}^n A(t-j) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s.} \sup \frac{1}{n+1} \ln \left\| \prod_{j=0}^n A(t-j) \right\|,$$

existe dans  $[-\infty, +\infty)$ . Nous sommes alors en mesure d’énoncer le Théorème 3.2 qui concerne l’inversibilité du processus  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini par l’Éq. (2). Ce théorème généralise les résultats de même nature présentés par Francq [4] dans le cas non-périodique.

**Théorème 3.2.** *On suppose que (4) est vérifiée. Si  $\gamma < 0$ , alors l’Éq. (3) admet une unique solution donnée par  $\underline{\epsilon}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \{\prod_{j=1}^n A(t-j)\} A_0^{-1}(t-n) \underline{X}_{t-n}$  où la série précédente converge presque sûrement.*

Notons  $\rho(M)$  le rayon spectral d’une matrice  $M$ . Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes à l’existence de moments d’ordre  $2r$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ , pour le processus  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini par (2).

**Théorème 3.3.** *Soit  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une solution stationnaire au second ordre non-anticipative de (2). Alors, pour tout  $r \geq 1$ ,  $E(\underline{X}_t^{\otimes 2r}) < +\infty$  si et seulement si  $\rho\{E[C^{\otimes 2r}(\underline{\epsilon}_t, \underline{\epsilon}_{t-1})]\} < 1$ .*

#### 4. Estimation paramétrique

A partir d’une série d’observations  $(X_1, \dots, X_n)$  d’un processus généré par (1), on introduit les estimateurs empiriques  $\widehat{C}_{v,n}(0)$  et  $\widehat{C}_{v,n}(1, j)$  de  $C_v(0) = E(X_{st+v}^2)$  et de  $C_v(1, j) = E(X_{st+v} X_{st+v-1} X_{st+v-j})$ , définis par

$$\widehat{C}_{v,n}(0) = n^{-1} \sum_{t=0}^{n-1} X_{st+v}^2 \quad \text{et} \quad \widehat{C}_{v,n}(1, j) = n^{-1} \sum_{t=0}^{n-1} X_{st+v} X_{st+v-1} X_{st+v-j}, \tag{5}$$

pour tout  $v = 1, \dots, s$  et  $j$  entier fixé, en posant  $X_t = 0$  pour  $t \notin \{1, \dots, n\}$ . Notons que l’expression des moments théoriques d’ordre 1, 2 et 3 du modèle (1) peut être obtenue dans Bibi et Gautier [3]. Le théorème ergodique nous permet d’établir la convergence forte des estimateurs (5).

**Théorème 4.1.** *Si  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus de  $L^4$  généré par (2), alors, pour tout  $v = 1, \dots, s$ ,  $\widehat{C}_{v,n}(0)$  et  $\widehat{C}_{v,n}(1, j)$  convergent presque sûrement vers les moments théoriques  $C_v(0)$  et  $C_v(1, j)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Remarque 1.** L’expression d’un estimateur du coefficient  $b_i(v)$  de l’Éq. (1) est donnée par

$$\widehat{b}_{i,n}(v) = \widehat{C}_{v,n}(1, i) \{\widehat{C}_{v,n}(0)\}^{-1}$$

pour  $i = 2, \dots, P$ . Une conséquence importante du Théorème 4.1 est alors la convergence p.s. de  $\widehat{b}_{i,n}(v)$  vers les vraies valeurs  $b_i(v)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Pour éviter des notations trop lourdes, la normalité asymptotique des estimateurs (5) n’est établie que pour le modèle (1) avec  $P = 2$ . Il est néanmoins évident que les résultats qui suivent peuvent être obtenus pour des ordres supérieurs. Dans le cas PBL(0, 0, 2, 1)<sub>s</sub>, le modèle (1) peut s’écrire

$$\underline{X}_t = B(t) \underline{X}_{t-1} + \underline{\eta}_t, \tag{6}$$

où  $(\underline{\eta}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite de vecteurs aléatoires iid centrés et  $B(t)$  est une matrice aléatoire de taille  $s \times s$ . Le Théorème 4.2 établit la normalité asymptotique des variables  $n^{-1/2} \sum_{t=0}^{n-1} \underline{X}_t^{\otimes 2}$  et  $n^{-1/2} \sum_{t=0}^{n-1} \underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j}$ , où  $i$  et  $j$  sont deux entiers fixés.

**Théorème 4.2.** *Soit  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  l’unique solution stationnaire au second ordre de l’Éq. (6).*

(i) Si  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^4$ , alors

$$n^{-1/2} \sum_{t=0}^{n-1} \underline{X}_t^{\otimes 2} \rightsquigarrow \mathcal{N}\{\Gamma^{(2)}, V\} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{où } \Gamma^{(2)} = E(\underline{X}_t^{\otimes 2}) \text{ et } V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(\underline{X}_t^{\otimes 2}, \underline{X}_{t-k}^{\otimes 2}).$$

(ii) Si  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^6$ , alors

$$n^{-1/2} \sum_{t=0}^{n-1} \underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j} \rightsquigarrow \mathcal{N}\{\Gamma^{(3)}(i, j), W(i, j)\} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{où } \Gamma^{(3)}(i, j) = E(\underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j}) \text{ et } W(i, j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(\underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j}, \underline{X}_{t-k} \otimes \underline{X}_{t-k-i} \otimes \underline{X}_{t-k-j}).$$

## 5. Exemple

On considère le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifiant l'équation

$$X_{2t+v} = b(v)X_{2(t-1)+v} + \epsilon_{2t+v-1} + \epsilon_{2t+v}$$

pour  $v = 1, 2$ , où  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc fort  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Il s'agit d'un modèle PBL(0, 0, 2, 1)<sub>2</sub>. Avec les notations utilisées dans la Section 2, ce modèle peut s'écrire sous la forme vectorielle

$$\underline{X}_t = D(t)\underline{X}_{t-1} + \underline{\epsilon}_t \tag{7}$$

où  $D(t) = C_0\{\underline{\epsilon}_t \otimes \mathbf{I}_{(2)}\} + C_1\{\underline{\epsilon}_{t-1} \otimes \mathbf{I}_{(2)}\}$  avec  $\{C_0\}_{2,2} = b(2)$ ,  $\{C_0\}_{\ell,k} = 0$  pour tout  $(\ell, k) \neq (2, 2)$ ,  $\{C_1\}_{1,3} = b(1)$ ,  $\{C_1\}_{\ell,k} = 0$  pour tout  $(\ell, k) \neq (1, 3)$ . Le corollaire suivant provient du Théorème 3.1 et sa preuve consiste en des calculs de rayons spectraux de quantités de la forme  $E\{D^{\otimes k}(t)\}$ . On y retrouve les conditions données par Grahm [6] dans le cas non-périodique.

**Corollaire 5.1.** *Considérons le modèle (7). Alors,*

- (i)  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire dans  $L^2$ , ergodique et non-anticipatif si et seulement si  $\max_{v=1,2}\{b^2(v)\} < 1$  ;
- (ii)  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^4$  si et seulement si  $\max_{v=1,2}\{3b^4(v)\} < 1$  ;
- (iii)  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^6$  si et seulement si  $\max_{v=1,2}\{15b^6(v)\} < 1$  ;
- (iv)  $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^8$  si et seulement si  $\max_{v=1,2}\{105b^8(v)\} < 1$ .

Enfin, en application du Théorème 4.2, le lecteur pourra trouver dans Bibi et Gautier [3] l'expression de la matrice de variance asymptotique du vecteur  $\{\widehat{C}_{v,n}(1, 2), \widehat{C}_{v,n}(0)\}'$ .

## Références

- [1] A. Berline, C. Francq, Stationnarité et identification d'un processus bilinéaire strictement superdiagonal, *Statistique et Analyse des Données* 15 (1990) 1–24.
- [2] A. Bibi, On the covariance structure of time-varying bilinear models, *Stochastic Anal. Appl.* 21 (2003) 25–60.
- [3] A. Bibi, A. Gautier, Propriétés dans  $L^2$  et estimation des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques (version longue), document de travail, 2005.
- [4] C. Francq, ARMA models with bilinear innovations, *Stochastic Models* 15 (1999) 29–52.
- [5] M.M. Gabr, T. Subba Rao, The estimation and prediction of subset bilinear time series models with applications, *J. Time Ser. Anal.* 2 (1981) 155–171.
- [6] T. Grahm, A conditional least squares approach to bilinear time series estimation, *J. Time Ser. Anal.* 16 (1995) 509–529.
- [7] M.P. Priestley, *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Academic Press, London, 1988.