Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 339–342
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre/Topologie

De la K-théorie algébrique vers la K-théorie hermitienne

Max Karoubi

Département de mathématiques, UMR 7586 du CNRS, case 7012, université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 24 mai 2005 ; accepté le 7 juin 2005

Disponible sur Internet le 6 septembre 2005

Présenté par Alain Connes

Résumé

Dans cette Note, nous introduisons un morphisme nouveau entre la K-théorie algébrique et la K-théorie hermitienne. L'analogue topologique en est l'opération d'Adams ψ^2 en K-théorie réelle. Nous en déduisons une minoration de la K-théorie algébrique supérieure d'un anneau A en termes du groupe de Witt classique de l'anneau $A \otimes A^{\mathrm{op}}$. ***Pour citer cet article : M. Karoubi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

From algebraic K-theory to Hermitian K-theory. In this Note, we introduce a new morphism between algebraic and hermitian K-theory. The topological analog is the Adams operation ψ^2 in real K-theory. From this morphism, we deduce a lower bound for the higher algebraic K-theory of a ring A in terms of the classical Witt group of the ring $A \otimes A^{\mathrm{op}}$. ***To cite this article: M. Karoubi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. La construction fondamentale

Soit A une k-algèbre unitaire, telle que $1/2 \in A$. Nous nous proposons de construire une « classe caractéristique » nouvelle $K(A) \to L(A \otimes A^{\mathrm{op}})$. Ici $K(A)$ désigne la K-théorie algébrique de A et $L(A \otimes A^{\mathrm{op}})$ la K-théorie hermitienne de l'anneau $B = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$, muni de l'antiinvolution permutant les deux facteurs.

Plus généralement, cette construction algébrique permet de décrire dans la Section 3 une application continue entre les espaces classifiants des K-théories algébrique et hermitienne $\mathbf{K}(A) \to \mathbf{L}(B)$ d'où on déduit une application $K_n(A) \to L_n(B)$ qui est un homomorphisme de groupes si $n > 0$.

La construction est basée sur le foncteur suivant. Soit E un A-module à droite projectif de type fini et soit $E^* = \mathrm{Hom}_A(E, A)$ son dual, qui est un A-module à gauche par la règle $(\lambda.f)(x) = \lambda(f(x))$ où $f \in E^*$ et où les

Adresse e-mail : karoubi@math.jussieu.fr (M. Karoubi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.07.020

lettres grecques désignent des éléments de A. Alors $E^* \otimes_k E$ est un B-module à droite par la règle du produit suivante : $(f \otimes y)(\lambda \otimes \mu) = \mu f \otimes y\lambda$.

Le B-module F peut être muni de la forme hermitienne suivante

$$\varphi\big[(f \otimes y), f' \otimes y')\big] = f(y') \otimes f'(y).$$

Si, pour simplifier, on pose $u = f \otimes y$ et $u' = f' \otimes y'$ et $b = \lambda \otimes \mu$, on a, en effet, les identités suivantes

$$\varphi(ub, u') = \varphi\big[(\mu f \otimes y\lambda), f' \otimes y')\big] = \mu f(y') \otimes f'(y)\lambda = (\mu \otimes \lambda)\big(f(y') \otimes f'(y)\big) = \bar{b}\varphi(u, u'),$$

$$\varphi(u, u'b) = \varphi(f \otimes y, \mu f' \otimes y'\lambda) = f(y')\lambda \otimes \mu f'(y) = \big(f(y') \otimes f'(y)\big)(\lambda \otimes \mu) = \varphi(u, u')b$$

et enfin $\varphi(u', u) = f'(y) \otimes f(y') = \overline{\varphi(u, u')}$.

Par ailleurs, la forme hermitienne φ permet d'identifier F à son antidual F^* (en tant que B-module à droite), grâce au morphisme antilinéaire $\theta : F \to F^*$ défini par $\theta(u)(u') = \varphi(u, u')$. En effet, par additivité, il suffit de le vérifier pour $E = A$, ce qui est évident.

2. Interprétation en termes de traces

Supposons que A soit un anneau commutatif avec involution, notée $a \mapsto \bar{a}$. On définit un homomorphisme $A \otimes A^{\mathrm{op}} \to A$ par la formule $a \otimes b \mapsto a\bar{b}$. Par extension des scalaires, le produit tensoriel $(E^* \otimes E) \otimes_{A \otimes A^{\mathrm{op}}} A$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_A(E, \overline{E})$ (où $\overline{E}$ désigne le A-module conjugué de E). Plus précisément, cette identification ϕ est définie par $(f \otimes y) \otimes a \mapsto [x \mapsto \overline{f(x)}ya]$.

On vérifie aisément que $\phi([\mu f \otimes y\lambda] \otimes a) = \phi([f \otimes y] \otimes \lambda\bar{\mu}a)$.

Proposition 2.1. *Compte tenu des identifications précédentes, la forme hermitienne sur* $\mathrm{Hom}_A(E, \overline{E})$ *est définie par la formule suivante* : $(f, g) \mapsto \mathrm{Tr}(\bar{f}g)$, *où* $\bar{f}$ *est l'application linéaire de* $\overline{E}$ *dans* E *sous-jacente à* f.

Exemple 1. Si A est le corps des complexes $\mathbf{C}$ et $E = \mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}_A(E, \overline{E})$ s'identifie à $\mathbf{C}$ et la forme hermitienne ϕ n'est autre que la forme standard $(\lambda, \mu) \mapsto \bar{\lambda}\mu$. D'une manière générale, la Proposition 2.1 permet d'associer à tout A-module E une *famille* de formes hermitiennes ϕ_σ, σ parcourant l'ensemble des involutions de l'anneau A.

3. Retour à la K-théorie

Soit E un A-module projectif de type fini et soit de nouveau $B = A \otimes A^{\mathrm{op}}$. On note $\psi(E)$ le B-module projectif de type fini $E^* \otimes E$, muni de la forme hermitienne définie dans la Section 1.

Proposition 3.1. *Soient* E *et* F *deux* A*-modules projectifs de type fini. On a alors un isomorphisme canonique de* B*-modules hermitiens* $\psi(E \oplus F) = \psi(E) \oplus \psi(F) \oplus H(E^* \otimes F)$ *où* H *est le foncteur hyperbolique standard.*

Démonstration. Notons d'abord que $E^* \otimes F$ est bien un B-module par la règle de multiplication suivante (déjà explicitée plus haut si $E = F$) : $(u \otimes v)(\lambda \otimes \mu) = \mu u \otimes v\lambda$.

Par ailleurs, on a un isomorphisme

$$(E \oplus F)^* \otimes (E \oplus F) \cong (E^* \otimes E) \oplus (F^* \otimes F) \oplus \big[(E^* \otimes F) \oplus (F^* \otimes E)\big].$$

Enfin, les B-modules $E^* \otimes F$ et $F^* \otimes E$ sont en dualité par l'accouplement induit

$$\big[(f \otimes y), (f' \otimes y')\big] \mapsto f(y') \otimes f'(y),$$

analogue à celui défini plus haut (si $E = F$). Il s'en suit que $[(E^* \otimes F) \oplus (F^* \otimes E)]$, muni de la forme induite, est isomorphe au module hyperbolique $H(E^* \otimes F)$.

Pour étendre ψ au groupe de Grothendieck $K(A)$, on remarque que la correspondance ψ vérifie l'identité suivante sur le semi-groupe des classes d'isomorphie de B-modules hermitiens

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + \gamma(x, y)$$

où γ est une fonction biadditive (c'est le foncteur hyperbolique appliqué au produit tensoriel du dual de x par y). D'après une remarque due à Dold [3], on peut étendre la fonction ψ au groupe de Grothendieck en posant

$$\psi(x-y) = \psi(x) - \psi(y) - \gamma(x, y) + \gamma(y, y).$$

On vérifie que cette formule a un sens : $\psi(x-y)$ ne dépend bien que de la classe de $x-y$ dans la K-théorie de A. En d'autres termes, elle définit une application (pas un homomorphisme) $K(A) \to L(B)$.

En particulier, si y est la classe d'un module libre A^n, on voit que

$$\psi(E - A^n) = \psi(E) - \psi(A^n) + H\big((A^n)^* \otimes A^n\big) - H(E^* \otimes A^n).$$

Il convient de noter que le foncteur $E \mapsto \psi(E)$ donne naissance à une représentation remarquable (pour $E = A^n$)

$$GL_n(A) \longrightarrow O_{p,q}(A \otimes A^{\mathrm{op}})$$

avec $p = n + (n^2 - n)/2$ et $q = (n^2 - n)/2$. Cependant, il n'est pas évident à priori d'en déduire une application continue

$$BGL(A)^+ \longrightarrow BO(A \otimes A^{\mathrm{op}})^+$$

entre les espaces classifiants usuels des K-théories algébrique et hermitienne.

Pour définir une telle application (et expliciter ses propriétés multiplicatives), nous allons procéder de manière indirecte en interprétant la K-théorie algébrique (et hermitienne) en termes de fibrés plats. Par exemple, si X est un CW-complexe fini, la K-théorie algébrique de X à coefficients dans A peut être définie en termes de fibrés plats « virtuels » sur X, dont la fibre est un A-module projectif de type fini (cf. [5] pour les détails). Plus précisément, le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphie de tels fibrés, noté $K_A(X)$, s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans l'espace $K(A) \times BGL(A)^+$ où $K(A)$ est muni de la topologie discrète. En particulier, les groupes $K_n(A)$ peuvent être définis en termes de fibrés plats sur des sphères homologiques de dimension n.

On définit de manière analogue la K-théorie hermitienne de X à coefficients dans un anneau R avec antinvolution, notée $L_R(X)$, qui s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $L(R) \times BO(R)^+$. Puisque la correspondance $E \mapsto \psi(E)$ est fonctorielle, elle définit une *application* entre les groupes de Grothendieck de fibrés virtuels associés, par la méthode de [3] avec $R = B$, soit $K_A(X) \to L_B(X)$.

On en déduit une application continue bien définie à homotopie faible près entre les espaces classifiants correspondants. En choisissant pour X une sphère de dimension $n > 0$ par exemple, on a un homomorphisme de groupes $K_n(A) \to L_n(A \otimes A^{\mathrm{op}})$, qui étend l'application définie précédemment pour $n = 0$. $\square$

4. Interprétation topologique

Supposons maintenant que $A = C(X)$ soit l'algèbre des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace compact X (on pourrait aussi considérer les fonctions à valeurs complexes, en munissant A de l'involution définie par la conjugaison). Le complété naturel de $A \otimes A^{\mathrm{op}} = A \otimes A$ est alors l'algèbre des fonctions continues sur $X \times X$, munie de l'involution associée à la permutation des variables. Le choix d'une métrique sur les fibrés permet d'identifier la K-théorie hermitienne de $C(X \times X)$ à la K-théorie équivariante $K_{\mathbf{Z}/2}(X \times X)$. L'analogue topologique de l'homomorphisme précédent ψ est alors la « power operation » d'Atiyah [1] : $K(X) \to K_{\mathbf{Z}/2}(X \times X)$, où $K(X)$

désigne la K-théorie topologique réelle. En particulier, si on se restreint à la diagonale de $X \times X$, on trouve une opération ψ réduite

$$\psi' : K(X) \longrightarrow K_{\mathbf{Z}/2}(X) \cong K(X) \oplus K(X)$$

dont les deux composantes sont les opérations de Grothendieck $S^2(x)$ et $\lambda^2(x)$. La différence $S^2(x) - \lambda^2(x)$ est l'opération d'Adams ψ^2 considérée comme morphisme d'anneaux de $K(A)$ dans l'anneau de Witt $W(A)$ qui s'identifie à $K(A)$ d'après un théorème bien connu. On notera que ψ^2 est la multiplication par une puissance de 2 sur la K-théorie réduite des sphères. Par conséquent, c'est un isomorphisme modulo la 2-torsion si X est un CW-complexe fini. En effet, le foncteur de K-théorie *topologique* transforme une suite exacte courte d'algèbres de Banach en une suite exacte longue de groupes de K-théorie topologique.

5. Un exemple d'application à la K-théorie algébrique supérieure

Puisque l'opération ψ s'étend aux espaces classifiants, elle induit un homomorphisme sur les théories à coefficients (avec $B = A \otimes A^{\mathrm{op}}$) : $K_n(A; \mathbf{Z}/p^\alpha) \to W_n(B; \mathbf{Z}/p^\alpha)$, pour $n \geqslant 0$. Il est bien défini si $n = 0$ en convenant de poser $K_0(A; \mathbf{Z}/p^\alpha) = K_0(A)/p^\alpha$ et $W_0(B; \mathbf{Z}/p^\alpha) = W_0(B)/p^\alpha$.

Supposons maintenant que p soit un nombre premier impair et désignons par H_n l'image de $K_n(A; \mathbf{Z}/p^\alpha)$ dans $W_n(B; \mathbf{Z}/p^\alpha)$. Nous comptons trouver une minoration de H_n, donc de $K_n(A; \mathbf{Z}/p^\alpha)$, en utilisant le théorème de périodicité en K-théorie hermitienne [4].

Soit $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$. D'après [2], il existe un « élément de Bott » b_{4m} dans $K_{4m}(\mathbf{Z}'; \mathbf{Z}/p^\alpha)$ dont l'image dans le groupe de K-théorie topologique $K_{4\mathrm{m}}^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p^\alpha) \cong \mathbf{Z}/p^\alpha$ est le générateur topologique (avec $m = p^{\alpha-1}(p-1)/2$).

Théorème 5.1. *Avec les notations précédentes, on a un diagramme commutatif*[1]

$$\begin{tikzcd}
K_n(A; \mathbf{Z}/p^\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & W_n(B; \mathbf{Z}/p^\alpha) \arrow[d, "\beta"] \\
K_{n+4m}(A; \mathbf{Z}/p^\alpha) \arrow[r] & W_{n+4m}(B; \mathbf{Z}/p^\alpha)
\end{tikzcd}$$

où γ est le cup-produit par b_{4m} et où β est l'homomorphisme de périodicité en K-théorie hermitienne. Puisque β est un isomorphisme pour $n > 0$ et est injectif pour $n = 0$, on en déduit que l'ordre du groupe H_{n+4m} est minoré par celui de H_n.

Démonstration. L'image du générateur de Bott b_{4m} dans $W_{4n}(\mathbf{R}; \mathbf{Z}/p^\alpha)$ est un générateur de ce groupe qui s'identifie lui-même à $W_{4m}^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}; \mathbf{Z}/p^\alpha) \cong \mathbf{Z}/p^\alpha$ d'après [4]. On conclut la démonstration en remarquant que les morphismes horizontaux sont compatibles avec les structures multiplicatives en K-théorie algébrique et en K-théorie hermitienne (utiliser les fibrés virtuels de la Section 3).

Références

[1] M.F. Atiyah, Power operations in K-theory, Quart. J. Math. Oxford (2) 17 (1966) 165–193.
[2] W. Browder, Algebraic K-theory with coefficients, Lecture Notes in Math., vol. 647, Springer, 1979, pp. 40–84.
[3] A. Dold, K-theory of non-additive functors of finite degree, Math. Ann. 196 (1972) 177–197.
[4] M. Karoubi, Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal, Ann. of Math. 112 (1980) 207–257.
[5] M. Karoubi, Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque, vol. 149, Société Mathématique de France, 1987.

[1] On note W_n le groupe de Witt « supérieur » qui est le conoyau de la flèche naturelle de K_n dans L_n, induite par le foncteur hyperbolique.