



Analyse numérique

Une nouvelle méthode de raffinement de maillage spatio-temporel pour l'équation des ondes

Jerónimo Rodríguez

INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

Reçu le 23 février 2004 ; accepté après révision le 5 juillet 2004

Disponible sur Internet le 21 août 2004

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Dans cette Note on présente une extension de la méthode de raffinement de maillage spatio-temporel conservative introduite par Fouquet et al. On propose aussi un post-traitement en temps de la solution, qui nous permet de réduire les phénomènes parasites provoqués par la non conformité des maillages en temps. Une réinterprétation des équations en termes des nouvelles inconnues donne lieu à un nouveau schéma avec des conditions de raccord consistantes à l'ordre deux. Des expériences numériques 2D et une analyse par ondes planes du modèle 1D montrent une convergence d'ordre deux pour un taux de raffinement arbitraire. *Pour citer cet article : J. Rodríguez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A new space–time mesh refinement for the wave equation. In the present Note we introduce an extension of the conservative space–time mesh refinement method presented by Fouquet et al. We also propose a post-treatment of the solution that reduces the spurious phenomena due to the non-conformity between the time meshes. A reinterpretation of the equations in terms of new unknowns leads to a new scheme with second order consistent coupling equations. Numerical experiments in 2D and a plane wave analysis for the 1D model show that the method is second order accurate for an arbitrary refinement. *To cite this article : J. Rodríguez, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

This Note deals with the numerical resolution of wave propagating like problems as equations (1). For some reasons, it could be interesting to use in the complementary regions $\Omega_l, l \in \{c, f\}$ ($\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_c \cup \bar{\Omega}_f, \Omega_c \cap \Omega_f \neq \emptyset$) a space–time discretization step $(h/q_l, \Delta t/q_l), q_l \in \mathbb{N}, l \in \{c, f\}$, typically uniform on each sub-domain. In order to treat this kind of non-conformity in space and in time, we present an extension of the space–time mesh refinement

Adresse e-mail : Jeronimo.Rodriguez@inria.fr (J. Rodríguez).

method introduced in [5,3] for the 1D case, and generalized in [5,1] for the multidimensional case. Its construction is based in the following ideas. The first step is to treat the system (1) as a transmission problem between both sub-domains using the transmission conditions (2) and (3). Following the mortar element technique for the spatial discretization [2], we introduce two variational problems that are coupled in a weak way by the introduction of a Lagrange multiplier. Then, a Galerkin type approach with a mesh of step h/q_l for $\Omega_l, l \in \{c, f\}$, leads to a differential system of the type (4)–(5). For the time stepping, a centered second order accurate scheme, using a time step $\Delta t/q_l$ in $\Omega_l, l \in \{c, f\}$, is used, obtaining (6). To discretize (2) and (3) we impose the equality (8), that is the conservation of a discrete energy (see (7)). Extending the choice of [5], we set Eqs. (9) to complete (6). The method is stable under usual (strict) CFL in each grid. Most of the coupling equations are off-centered and thus first order consistent. Numerical experiments in the 2D case show that, for example, if $q_c = 1$ and $q_f > 2$, the method is in fact first order accurate due to a high frequency spurious wave propagating in the fine grid (see Fig. 2(a)). This oscillatory behavior increases when the parameter $\alpha = \Delta t/h$ tends to the maximum authorized value.

The structure of Eqs. (9) and the high frequency nature of the error (see Section 5) motivate the post-treatment (10) in both grids that gives better results (see Fig. 2(b)). The method appears to be second order accurate for an arbitrary refinement and less dependent on the value of the parameter α . Rewriting the scheme in terms of the new unknowns, we find a new stable space–time mesh refinement method given by (11) and (12). This time, all the coupling equations are second order consistent.

A Fourier analysis for the 1D case (see [4,5] for more details) when $(q_c, q_f) = (1, q)$ allows us to compare both methods in terms of accuracy when looking at plane wave solutions. When we send an incident wave of amplitude 1 and frequency ω from $\Omega_c = \mathbb{R}^-$, the scattered wave will be composed by a superposition of reflected and transmitted waves. In particular, we will have one reflected and one transmitted waves of amplitude R_h and T_h respectively, both of frequency ω . The solution in the fine grid is completed by $q - 1$ spurious transmitted waves of amplitude T_h^k and frequency $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$, where $k \in \{1, \dots, q - 1\}$ (see Fig. 1(b)). These $q + 1$ unknown amplitudes, that only depends on $\omega \Delta t$ and α , can be determined using the coupling equations associated to each method. Looking for the asymptotic behavior of these reflected and transmitted waves for small $\omega \Delta t$, for $q = 2$, both schemes give us second order accurate results for the amplitudes of the reflected and transmitted (non-spurious) waves (see formulas (13) and (14)). The main difference is on the spurious transmitted wave. With the original method its amplitude is of order one (principal part of the error) while the same quantity for the new method is of order three. We obtain similar results for other values of q (in Fig. 3 we represent the modulus of the spurious wave amplitudes for small $\omega \Delta t$, $q = 7$ and $\alpha = 0.9$).

1. Présentation d'une méthode conservative. Rappels

On s'intéresse à la résolution numérique, à l'aide de schémas explicites, de l'équation des ondes écrite sous forme d'un système du premier ordre pression–vitesse

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{v}) = f & \text{dans } \Omega, \\ C \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

avec des conditions initiales et aux limites qu'on ne considère pas ici pour simplifier. Pour certaines raisons, on suppose que l'on veut utiliser dans deux régions disjointes $\Omega_l, l \in \{c, f\}$ ($\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_c \cup \bar{\Omega}_f$, $\Omega_c \cap \Omega_f \neq \emptyset$) des pas différents pour la discrétisation spatio-temporelle : $(h/q_l, \Delta t/q_l), q_l \in \mathbb{N}, l \in \{c, f\}$. Dans cette section, on présente une extension de la méthode de raffinement de maillage spatio-temporel présentée dans [5,3] dans le cas 1D, généralisée au cas multidimensionnel dans [5] pour les équations de Maxwell et dans [1] pour les équations de l'élastodynamique. On renvoie le lecteur à ces références pour une présentation plus détaillée. Les idées fondamentales de la construction sont les suivantes :

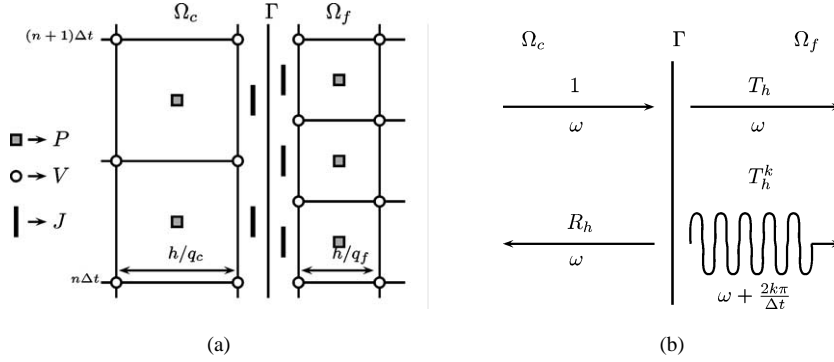


Fig. 1. (a) Distribution spatio-temporelle des inconnues pour $(q_c, q_f) = (2, 3)$; (b) phénomène d'aliasing.

- On réécrit (1) comme un problème de transmission entre Ω_f et Ω_c . On note $(p_l, \mathbf{v}_l) := (p|_{\Omega_l}, \mathbf{v}|_{\Omega_l}), l \in \{c, f\}$. Les systèmes d'équations dans chaque sous domaine sont couplés par les conditions de transmission suivantes sur $\Gamma = \overline{\Omega_f} \cap \overline{\Omega_c}$

$$p_f|_{\Gamma} = p_c|_{\Gamma}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}_f|_{\Gamma} = -\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}_c|_{\Gamma}. \quad (3)$$

- En suivant les techniques d'éléments joints [2], on établit une formulation variationnelle des équations dans chaque sous domaine. Ces formulations sont couplées à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange : une des conditions de transmission est prise en compte de façon faible. En faisant une approximation de type Galerkin de ce problème variationnel (on s'appuie sur un maillage de pas h/q_l pour $\Omega_l, l \in \{c, f\}$), on obtient un système différentiel du type

$$\begin{cases} M_l^p \frac{dP_l}{dt} - D_l V_l = F_l, \\ M_l^v \frac{dV_l}{dt} + D_l^* P_l - C_l^* J_l = 0, \end{cases} \quad l \in \{c, f\}, \quad (4)$$

$$C_f V_f = -C_c V_c, \quad J_f = J_c. \quad (5)$$

- Pour la discrétisation en temps on utilise, dans chaque sous domaine, un schéma centré d'ordre deux avec un pas de temps $\Delta t/q_l$ dans $\Omega_l, l \in \{c, f\}$. Ainsi, les équations pour discrétiser (4) sont, pour $k \in \{0, \dots, q_l - 1\}, l \in \{c, f\}$ (voir la Fig. 1(a))

$$\begin{cases} M_l^p \frac{P_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - P_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t/q_l} - D_l V_l^{n+\frac{k}{q_l}} = F_l^{n+\frac{k}{q_l}}, \\ M_l^v \frac{V_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} - V_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{\Delta t/q_l} + D_l^* P_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - C_l^* J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Pour approcher les conditions de transmission (5) en garantissant la stabilité, on impose la conservation de l'énergie discrète définie aux instants t^n par $\mathbf{E}^n = \mathbf{E}_c^n + \mathbf{E}_f^n$, où

$$\mathbf{E}_l^{n+\frac{k}{q_l}} = \frac{1}{2} \left\{ M_l^v V_l^{n+\frac{k}{q_l}} \cdot V_l^{n+\frac{k}{q_l}} + M_l^p P_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} \cdot P_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}} \right\}, \quad l \in \{c, f\}, \quad (7)$$

ce qui aboutit au résultat suivant :

Lemme 1.1. L'égalité $\mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n$ est équivalente à

$$\sum_{k=0}^{q_f-1} C_f \frac{V_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + V_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f} \cdot J_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} = - \sum_{k=0}^{q_c-1} C_c \frac{V_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + V_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c} \cdot J_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}. \quad (8)$$

En généralisant le choix fait dans [5], on discrétise (5) de la façon suivante :

$$\begin{cases} J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} \equiv J^{n+\frac{1}{2}}, & k \in \{0, \dots, q_l - 1\}, l \in \{c, f\}, \\ \sum_{k=0}^{q_f-1} C_f \frac{V_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + V_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f} = - \sum_{k=0}^{q_c-1} C_c \frac{V_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + V_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}, \end{cases} \quad (9)$$

ce qui complète (6). Cette méthode est stable dès que la condition CFL stricte habituelle est satisfaite dans chaque grille. L'énergie (7) est alors équivalente à la norme L^2 de la solution (cf. [3,1]).

Remarque 1. Presque la totalité des $q_f + q_c$ premières équations dans (9) sont des approximations du premier ordre de (2) tandis que la dernière équation de (9) est une approximation d'ordre deux de (3).

2. Expériences numériques 2D. Phénomènes parasites

Afin d'illustrer le comportement de la méthode, on considère les Éqs. (1) (où on suppose $\rho = 1, C = \text{Id}$) dans $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ avec des conditions initiales nulles et une source très régulière à support dans $\Omega_c = \Omega \setminus [\frac{1}{4}, \frac{6}{20}] \times [\frac{1}{4}, \frac{6}{20}]$. La méthode est stable dès que $\alpha = \frac{\Delta t}{h} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour $(q_c, q_f) = (1, 2)$, lorsqu'on s'intéresse à la solution dans un domaine ne contenant pas l'interface, on constate numériquement que la méthode converge, α étant fixé, en $O(h^2)$. Cependant, à cause de la présence d'une onde parasite haute fréquence localisée au voisinage de cette interface, la méthode n'est pas globalement d'ordre deux (voir [6] pour l'étude 1D). Pour un taux de raffinement supérieur ($q_f > 2$), cette onde parasite n'est plus nécessairement localisée et elle se propage dans Ω_f en polluant la solution numérique. La méthode devient d'ordre un. (Dans la Fig. 2(a) on représente l'évolution de la solution sur un point de la grille fine au cours du temps avec un raffinement 1–4.) De plus, les résultats se dégradent lorsque la valeur du paramètre α se rapproche de la valeur limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Post-traitement en temps

Dans [4], une analyse par ondes planes 1D de la méthode avec $(q_c, q_f) = (1, 2)$ nous montre que, conformément à l'observation numérique, la partie prépondérante de l'erreur est constituée par une onde de très haute fréquence ;

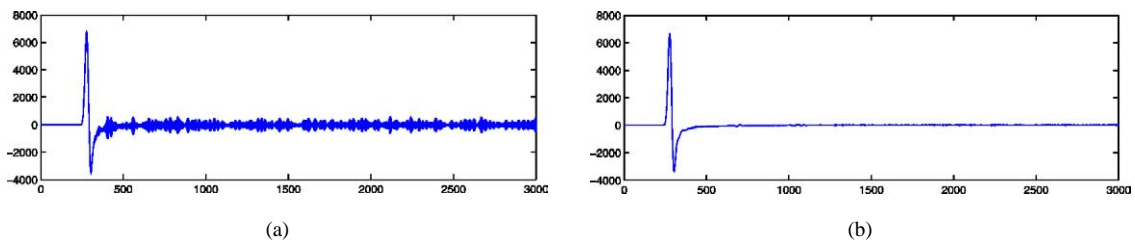


Fig. 2. $q = 4, \alpha = \frac{0.85}{\sqrt{2}}$: (a) méthode original ; (b) méthode post-traitée.

celle-ci oscille à la fréquence maximale du maillage en temps. Ainsi on peut espérer que, en faisant la demi-somme de la solution dans la grille fine entre deux pas de temps consécutifs, les résultats vont s’améliorer. La même idée peut être utilisée pour un taux de raffinement quelconque : la forme de la dernière équation de (9) suggère le post-traitement :

$$\bar{V}_l^{n+\frac{m}{q_l}+\frac{1}{2}} := \sum_{k=0}^{q_l-1} \frac{V_l^{n+\frac{k+1+m}{q_l}} + V_l^{n+\frac{k+m}{q_l}}}{2q_l}, \quad \bar{Q}_l^{n+\frac{2m+1}{2q_l}+\frac{1}{2}} := \sum_{k=0}^{q_l-1} \frac{Q_l^{n+\frac{2m+2k+3}{2q_l}} + Q_l^{n+\frac{2m+2k+1}{2q_l}}}{2q_l}, \quad (10)$$

où $l \in \{c, f\}$, $Q \in \{P, J\}$. La solution ainsi obtenue est, numériquement, d’ordre deux pour un (q_c, q_f) arbitraire (voir la Fig. 2(b) avec $(q_c, q_f) = (1, 4)$). En outre, la dépendance en α est moins forte.

4. Nouveau schéma de raffinement spatio-temporel

Pour des raisons évidentes de place mémoire et de performance, on souhaite avoir un schéma qui calcule directement cette solution post-traitée. Si on considère dans la grille fine les nouvelles inconnues définies par (10), on observe qu’elles vérifient le schéma intérieur suivant, si $k \in \{0, \dots, q_l - 1\}$, $l \in \{c, f\}$

$$\begin{cases} M_l^p \frac{\bar{P}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{P}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t/q_l} - D_l \bar{V}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} = \bar{F}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \\ M_l^v \frac{\bar{V}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t/q_l} + D_l^* \bar{P}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - C_l^* \bar{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

alors que les équations de raccord (9) deviennent

$$\begin{cases} \bar{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2k+1}{2q_l}\right) J^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2k+1}{2q_l} J^{n+\frac{1}{2}}, & k \in \{0, \dots, q_l - 1\}, l \in \{c, f\}, \\ C_f \bar{V}_f^{n+\frac{1}{2}} = -C_c \bar{V}_c^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (12)$$

Le nouveau schéma, qui est clairement stable, est donc donné par (11) et (12). La différence fondamentale entre les deux méthodes réside dans la discrétisation des équations de raccord (5). Notons en particulier que toutes les équations dans (12) sont consistantes à l’ordre deux.

5. Analyse de Fourier 1D

Dans cette section, on se place dans le cas unidimensionnel pour mener une étude qui nous permettra de comparer théoriquement les deux méthodes. Pour simplifier on suppose que $(q_c, q_f) = (1, q)$. On pose $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega_c = \mathbb{R}^-$ et $\Omega_f = \mathbb{R}^+$. Nous étudions la réflexion et la transmission d’une onde incidente harmonique d’amplitude 1 et fréquence ω dans le domaine Ω_c . L’onde diffractée est une combinaison linéaire d’ondes réfléchies et transmises à travers l’interface. On a une onde réfléchie d’amplitude R_h et une onde transmise d’amplitude T_h , les deux de fréquence ω . Cependant, ces deux ondes ne sont pas les seules qui vont intervenir. Étant donné que les fréquences $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$, $k \in \{1, \dots, q - 1\}$, sont identiques sur Ω_c mais différentes sur Ω_f , on a de surcroît, pour chacune des ces fréquences, une onde transmise parasite d’amplitude T_h^k (voir la Fig. 1(b)). Les $q + 1$ inconnues, $R_h, T_h, T_h^1, \dots, T_h^{q-1}$, qui dépendent des paramètres $\omega\Delta t$ et α , sont déterminées à l’aide des $q + 1$ équations de raccord associées à chaque méthode. On peut alors s’intéresser à leur comportement pour $\omega\Delta t$ suffisamment petit. Étant donné que l’interface $\Gamma \equiv \{x = 0\}$ est purement numérique et donc artificielle, les valeurs *physiques* vers lesquels on doit tendre, si la méthode est convergente, sont $R = 0$, $T = 1$, $T^1 = 0, \dots, T^{q-1} = 0$.

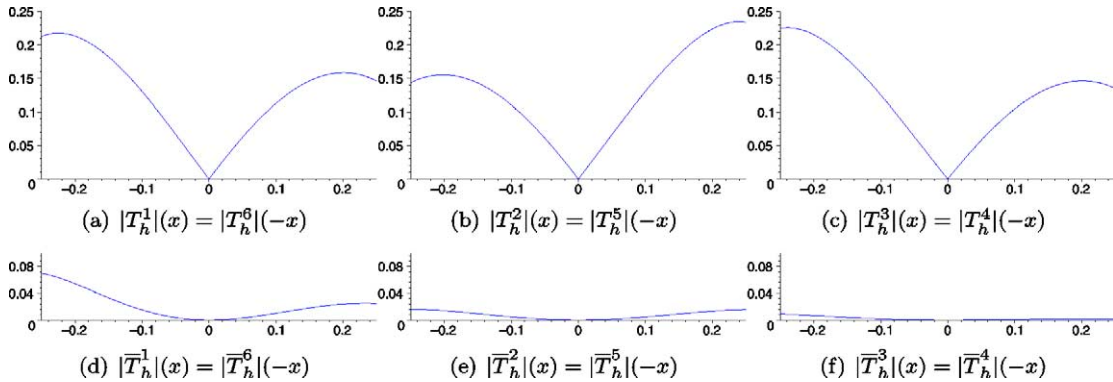


Fig. 3. $q = 7$, $\alpha = 0,9$. Amplitudes des ondes parasites. $x = \omega\Delta t \ll 1$.

Cas $q = 2$. Pour la méthode conservative on démontre, pour $\omega\Delta t$ petit, les comportements suivants :

$$R_h \simeq O((\omega\Delta t)^2), \quad 1 - T_h \simeq O((\omega\Delta t)^2), \quad T_h^1 \simeq \frac{i\alpha}{4\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta t). \quad (13)$$

Les coefficients de réflexion et transmission sont des approximations d'ordre deux des coefficients *physiques*. Cependant l'amplitude de l'onde parasite est d'ordre un. Pour le schéma post-traité on trouve

$$\bar{R}_h \simeq O((\omega\Delta t)^2), \quad 1 - \bar{T}_h \simeq O((\omega\Delta t)^2), \quad \bar{T}_h^1 \simeq \frac{i\alpha}{64\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta t)^3. \quad (14)$$

L'amplitude de l'onde parasite est d'ordre trois et par conséquent cette partie de l'erreur (qui était prépondérante pour la première méthode) est maintenant négligeable par rapport à l'erreur commise sur les ondes réfléchiées et transmises non parasites.

Cas $q > 2$. Pour des taux de raffinement plus élevés, on peut mener une étude analogue numériquement. On remarque que, pour $\omega\Delta t$ proche de l'origine, les deux méthodes nous donnent des résultats semblables pour les coefficients R_h et T_h . Par contre, comme pour $q = 2$, les amplitudes des ondes parasites données par la méthode originale ont un comportement linéaire au voisinage de zéro très différent de celui obtenu par la nouvelle méthode qui semble être d'ordre plus élevé (voir la Fig. 3 pour $q = 7$ et $\alpha = 0,9$).

Remerciements

Je remercie Patrick Joly pour ses conseils dans la rédaction de ce papier et Francis Collino pour avoir mis à ma disposition son code de raffinement de maillage spatio-temporel 2D.

Références

- [1] E. Bécache, P. Joly, J. Rodríguez, Space-time mesh refinement for elastodynamics. Numerical results, J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 2004, in press.
- [2] F. Ben Belgacem, The mortar finite element method with Lagrange multipliers, Numer. Math. 84 (1999) 173–197.
- [3] F. Collino, P. Joly, T. Fouquet, A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. Part I: Construction, Numer. Math. 95 (2003) 197–221.
- [4] F. Collino, P. Joly, T. Fouquet, A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. Part II: Analysis, Numer. Math. 95 (2003) 223–251.
- [5] T. Fouquet, Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell, Thèse, Paris IX Dauphine, 2000.
- [6] P. Joly, J. Rodríguez, An error analysis of conservative space-time mesh refinement methods for the 1D wave equation, 2004, submitted for publication.