Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

Ann. I. H. Poincaré – PR 42 (2006) 81–88

ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

www.elsevier.com/locate/anihpb

Bornes inférieures pour les marches aléatoires sur les groupes p-adiques moyennables

Sami Mustapha

Institut mathématique de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013, Paris, France

Reçu le 7 décembre 2004 ; accepté le 8 février 2005

Disponible sur Internet le 22 juin 2005

Résumé

On donne des estimations centrales inférieures du noyau de transition d'une marche aléatoire symétrique sur un groupe p-adique moyennable.

Abstract

We give central lower estimates for the transition kernels corresponding to symmetric random walks on amenable p-adic groups.

MSC: 22E35; 60B15; 60G50

Keywords: Random walks; p-adic groups

1. Introduction

Soit G un groupe localement compact et moyennable. Notons $\mathrm{d}g = \mathrm{d}^l g$ et $\mathrm{d}^r g$ respectivement les mesures de Haar gauche et droite sur G. Notons $m(g) = \mathrm{d}^r g/\mathrm{d}^l g$ la fonction module sur G normalisée par $m(e) = 1$, e désignant l'élément identité. Soit $\mathrm{d}\mu(g) = \varphi(g)\,\mathrm{d}^r g \in \mathbf{P}(G)$ une mesure de probabilité sur G où $\varphi(g)$ est supposée à support compact ou à décroissance rapide à l'infini. Supposons μ symétrique (i.e. stabilisée par l'involution $g \to g^{-1}$) et considérons la marche aléatoire sur G induite par μ, i.e. le G-processus $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ évoluant de la manière suivante : si $X_n = g$ à l'instant n alors $X_{n+1} = gh$, h étant choisi selon μ. Notons $\mathrm{d}\mu^{*n}(g) = \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^r g$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les puissances de convolution successives de la mesure μ. Une question centrale est de décider de la rapidité de la convergence de $\varphi_n(e) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Adresse e-mail : sam@math.jussieu.fr (S. Mustapha).

0246-0203/$ – see front matter
doi:10.1016/j.anihpb.2005.02.004

Dans le cas des groupes de Lie unimodulaires (et moyennables) la réponse à cette question est contenue dans le type de croissance du volume du goupe G. Rappelons que si G désigne un groupe localement compact à génération compacte, la croissance du volume est définie de la manière suivante. On fixe Ω un voisinage compact, symétrique, de l'élément identité de G tel que $G=\bigcup_{n\geqslant 0}\Omega^n$ où $\Omega^n=\Omega\cdot\Omega\cdots\Omega$ (n fois) et $\Omega^0=\{e\}$ et on pose (cf. [12])

$$\gamma(n)=\mathrm{Vol}\big(\Omega^n\big),\quad n=1,2,\ldots$$

où le volume est calculé relativement à la mesure de Haar (gauche ou droite) sur G. On pose

$$|g|_G=\inf\big\{n,\ g\in\Omega^n\big\},\quad g\in G.$$

On définit une distance invariante à gauche sur G en posant $d(g,g')=|g^{-1}g'|_G$. La fonction $\gamma(n)$ apparaît alors comme la fonction donnant le volume de la boule centrée sur e et de rayon n dans G. Si Ω' est un autre voisinage symétrique compact de e, engendrant G, alors les fonctions $\gamma(n)$, $\gamma'(n)$ qui correspondent respectivement à Ω et Ω' vérifient l'équivalence $\gamma(n)\approx\gamma'(n)$, i.e.

$$\gamma'(n)\leqslant C\gamma(Cn)+C\leqslant C'\gamma'(C'n)+C',\quad n\geqslant 1,$$

où $C,C'>0$ désignent des constantes convenables. Il en est aussi de même pour les distances associées à Ω et Ω'. C'est ce qui justifie la notation $|\cdot|_G$ (cf. [12,35]).

Pour les groupes de Lie on a la dichotomie suivante (cf. [12,16]) : soit

$$\gamma(n)\approx n^D$$

où $D=D(G)=1,2,\ldots$ est un entier qui ne dépend que du groupe G, soit

$$\gamma(n)\approx e^n.$$

Dans le premier cas on dit que G est à croissance polynômiale (du volume) et dans le second on dit que G est à croissance exponentielle. Pour les groupes de Lie moyennables unimodulaires le comportement de $\varphi_n(e)$ est lié à la croissance du volume de la manière suivante (cf. [1,8,13,35]) :

$$\varphi_n(e)\approx n^{-D/2}\Longleftrightarrow\gamma(n)\approx n^D,$$
$$\varphi_n(e)\approx e^{-n^{1/3}}\Longleftrightarrow\gamma(n)\approx e^n.$$

Pour les groupes de Lie moyennables non-unimodulaires le comportement de $\varphi_n(e)$ n'est plus décidé par la croissance du volume (ces groupes sont tous à croissance exponentielle) mais par la géométrie des racines de l'action du radical sur le nilradical (cf. [31,32]).

Le cas discret et plus généralement celui des groupes localement compacts à génération compacte est beaucoup plus délicat (cf. [1,8,20–23,28–30,35,36]). D'abord on ne dispose en général pas de dichotomie pour la croissance du volume pour les groupes moyennables (cf. [11]). D'autre part bien que l'on dispose dans le cas des groupes à croissance polynômiale de l'équivalence $\varphi_n(e)\approx n^{-D/2}$ (où il faut se restreindre aux indices pairs pour l'estimation inférieure), on ne dispose, dans le cas des groupes unimodulaires à croissance exponentielle, que de l'estimation supérieure (cf. [14])

$$\varphi_n(e)\leqslant C\exp\big(-cn^{1/3}\big),\quad n\geqslant 1.$$

En effet cette estimation supérieure n'est pas accompagnée, en général, d'une estimation inférieure analogue. Ch. Pittet et L. Saloff-Coste ont établi l'existence de groupes discrets résolubles, à croissance exponentielle pour lesquels la décroissance de $\varphi_n(e)$ est en $\exp(-cn^{\alpha})$ avec $\alpha\in(0,1)$ pouvant être pris arbitrairement proche de 1 (cf. [21,22]). L'estimation inférieure $\varphi_{2n}(e)\geqslant c\exp(-Cn^{1/3})$ est cependant vérifiée dans le cas des groupes polycycliques (cf. [1]). Pittet et Saloff-Coste ont récemment étendu ce résultat aux groupes résolubles finiment engendrés de rang de Prüfer fini (cf. [23]). Ils ont posé le problème de déterminer (cf. [23], §8) si une telle estimation inférieure était satisfaite dans le cas des groupes analytiques p-adiques. Nous donnons ici une réponse à ce problème (pour une réponse partielle dans le cas des produits semi-directs $\mathbf{Q}_p^m \rtimes (\mathbf{Q}_p^*)^l$ où il est possible de calculer explicitement $\varphi_n(e)$ cf. [17]).

Dans toute la suite on désigne par k un corps commutatif, localement compact, non discret, totalement disconnecté, de caractéristique 0 et on considère G un groupe algébrique connexe sur k. On suppose ce groupe moyennable et à génération compacte. On désigne par $\mathrm{d}\mu(g) = \varphi(g)\mathrm{d}^r g \in \mathbf{P}(G)$ une mesure de probabilité sur G, symétrique, de support compact. On note $\mathrm{d}\mu^{*n}(g) = \mathrm{d}(\mu * \cdots * \mu)(g) = \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^r g$ les puissances de convolution successives de μ. On suppose que la densité φ est continue et qu'il existe $e \in \Omega = \Omega^{-1} \subset G$ tel que

$$\inf\bigl\{\varphi(g), g \in \Omega\bigr\} > 0, \qquad G = \bigcup_{n \geqslant 0} \Omega^n,$$

où e désigne l'élément identité de G.

Théorème 1. *Avec les notations ci-dessus on a* :

$$\varphi_{2n}(e) \geqslant c \exp\bigl(-Cn^{1/3}\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

pour des constantes $c, C > 0$ indépendantes de n.

Dans le cas où le groupe G est unimodulaire, on a :

Théorème 2. *Soient G et $\mu \in \mathbf{P}(G)$ comme ci-dessus. Supposons le groupe G unimodulaire, alors*

$$\frac{1}{C} \exp\bigl(-c_1 n^{1/3}\bigr) \leqslant \varphi_{2n}(e) \leqslant C \exp\bigl(-c_2 n^{1/3}\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

pour des constantes $c_1, c_2, C > 0$ indépendantes de n.

Pour aider le lecteur à mieux situer les résultats ci-dessus rappelons que Varopoulos a montré dans [32] qu'une estimation inférieure en $\exp(-ct^{1/3})$ était toujours satisfaite par le noyau de la chaleur associé à un sous-Laplacien (ou le noyau de transition d'une marche aléatoire) dans le cas où G est un groupe de Lie réel connexe moyennable, unimodulaire ou non. Le Théorème 1 ci-dessus montre que ceci est aussi le cas pour les groupes analytiques p-adiques. Le cas p-adique présente cependant la particularité suivante. Si on suppose le radical unipotent de G non trivial alors le fait d'être à génération compacte force le groupe G à être à croissance exponentielle (cf. [24]). Si on suppose en plus que G est unimodulaire on peut alors utiliser les résultats généraux de [14] qui entraînent l'estimation supérieure $\varphi_n(e) \leqslant C \exp(-cn^{1/3})$, $n = 1, 2, \ldots$. Cette estimation combinée avec l'estimation (1) entraîne (2). D'où le Théorème 2.

Les estimations inférieures dans le cas de la croissance polynômiale sont établies à partir d'estimations hors diagonales de type gaussien intégrées sur des boules de rayon convenable (cf. [14]). De telles estimations gaussiennes peuvent être établies dans le cas de la croissance exponentielle (cf. [10,18,34]) mais sont en générales insuffisantes pour permettre l'obtention d'estimations centrales inférieures (cf. néanmoins [18,33]).

On peut distinguer deux autres approches pour obtenir des estimations centrales inférieures : une approche géométrique (cf. [6,8,9]), qui consiste à construire des ensembles de Følner (cf. [19]) adaptés à des inégalités de type *anti*-Faber–Krahn (cf. [7]) qui permettent de déduire les bonnes estimations inférieures pour $\varphi_n(e)$ et une approche probabiliste (cf. [1,32]) qui consiste à établir des estimations inférieures pour les probabilités d'occurrence de certains évènements qui permettent d'estimer inférieurement $\varphi_n(e)$. L'approche géométrique dont le spectre d'application est assez large (variétés Riemanniennes, graphes, groupes de Lie, groupes discrets, ...) semble utiliser d'une manière cruciale des propriétés de symétrie du noyau $\varphi_n(\cdot)$, ce qui, par exemple dans le cas des groupes de Lie, requiert l'unimodularité. Comme ici nous ne faisons pas une telle hypothèse nous utilisons la deuxième approche.

2. Racines de l'action adjointe

Soit G un groupe algébrique connexe sur k, un corps commutatif, localement compact, non discret, totalement disconnecté, de caractéristique 0. Soient Q et U resp. le radical et le radical unipotent de G (cf. [5,27]). On supposera G moyennable, ce qui signifie que le groupe semi-simple G/Q est compact (cf. [25]).

On sait que le radical Q se décompose comme produit semi-direct $Q = U \bowtie A$, où A est un groupe algébrique abélien constitué d'éléments semi-simples de G. Le groupe A s'écrit aussi comme produit direct d'un tore T et d'un groupe fini F_0 (cf. [5]).

Nous allons définir les racines de l'action de T sur U en nous appuyant sur la structure des corps locaux totalement disconnectés. Soit $|\cdot|$ la valeur absolue standard sur k (cf. [2,4]). On pose $|k| = \{|x|,\ x \in k,\ x \neq 0\}$. On désigne par p un générateur du groupe cyclique infini $|k|$ (on choisit $p = |x_0|$, où x_0 est une uniformisante de k vérifiant $|x_0| > 1$). Le groupe multiplicatif du corps k est le produit direct du groupe des unités de k, i.e le groupe compact $\{x \in k,\ |x| = 1\}$ et du groupe cyclique infini $\{x_0^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Le tore T étant isomorphe à $\dim T = d$ copies du groupe multiplicatif de k (cf. [5]), il s'écrit $T \cong \mathbf{Z}^d \times K$, où K est un sous-groupe compact de T. Notons

$$\pi : T \to \mathbf{Z}^d, \tag{3}$$

fixons $\pi_1 = \pi^{-1}(e_1), \ldots, \pi_d = \pi^{-1}(e_d) \in T$, $e_1, \ldots, e_d$ désignant la base canonique de $\mathbf{Z}^d$. Pour

$$t = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d} \tau \tag{4}$$

où $n_1, \ldots, n_d \in \mathbf{Z}$, $\tau \in K$, on a

$$Ad\,(t) = (Ad\,\pi_1)^{n_1} \cdots (Ad\,\pi_d)^{n_d} (\mathrm{Ad}\,\tau). \tag{5}$$

Observons que du fait que la caractéristique de k est nulle, il est possible d'identifier U à son algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(U)$ en utilisant l'application exponentielle (cf. [5,26]).

Soit $\bar{k}$ une extention finie de k contenant toutes les racines de $\det(Ad(\pi_j) - \lambda I)) = 0$, $j = 1, \ldots, d$. De la preuve du Lemme de Zassenhaus (cf. [15]) on déduit qu'il existe une décomposition de $\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k}$ en une somme directe

$$\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r \tag{6}$$

où les sous-espaces W_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, sont invariants par $Ad\,(\pi_i)$, $i = 1, \ldots, d$, et telle que la restriction de chaque $Ad\,(\pi_i)$ à W_j soit la somme d'un scalaire $\lambda_j(\pi_i)$ et d'un endomorphisme nilpotent. Il existe alors une base de $\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k}$ où chaque $Ad\,(\pi_i)$ est représenté par une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs $B_j(\pi_i)$, $j = 1, \ldots, r$, est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux égaux à $\lambda_j(\pi_i)$. Pour $t = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d} \tau \in T$ on pose $\tilde{t} = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d}$ de sorte que $Ad\,(t) = Ad\,(\tilde{t}) Ad\,(\tau)$. En posant

$$\chi_j(t) = \chi_j(\tilde{t}) = \lambda_j(\pi_1)^{n_1} \cdots \lambda_j(\pi_d)^{n_d}, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

on voit alors que $Ad\,(\tilde{t})$ est représenté, dans la base de $\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k}$ considérée ci-dessus, par une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs $B_j(\tilde{t})$, $j = 1, \ldots, r$, est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux égaux à $\chi_j(t)$. Comme τ commute avec $\tilde{t}$ les espaces $W_1, W_2, \ldots, W_r$ sont stables par $Ad\,(\tau)$. Nous appelons les homomorphismes $\chi_j : T \to \bar{k}^*$ définis par (7) racines de l'action de T sur U.

Observons par ailleurs que la valeur absolue $|\cdot|$ possède une extension sur $\bar{k}$. Nous notons aussi cette extension $|\cdot|$. On a $|x| \in \{\bar{p}^n, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$ pour $x \in \bar{k}$, où $\bar{p}$ est une puissance rationnelle de p (cf. [4]). Afin d'alléger les notations nous continuons à noter p le nombre $\bar{p}$.

Considérons pour $j = 1, \ldots, r$ les valeurs absolues distinctes associées aux racines χ_j, i.e. les homomorphismes définis de $T \to \{p^n, n \in \mathbf{Z}\} = p^{\mathbf{Z}}$, par $t \to |\chi_j(t)|$. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ les différentes valeurs absolues associées aux racines χ_j.

Il est facile de voir, en utilisant la caractérisation donnée dans [3], que le groupe G est à génération compacte si et seulement si tous les α_j sont distincts de 1 (i.e. l'homomorphisme de $T \to p^{\mathbf{Z}}$ identiquement égal à 1). Remarquons que pour $t = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d} \tau \in T$:

$$\alpha_j(t) = p^{\gamma_{j,1} n_1 + \gamma_{j,2} n_2 + \cdots + \gamma_{j,d} n_d}, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{8}$$

où les $n_j = n_j(t) \in \mathbf{Z}$, où le d-uplet $(\gamma_{j,1}, \cdots, \gamma_{j,d}) \in \mathbf{Z}^d$ ne dépend que de α_j. Dans toute la suite on notera L_j, $j = 1, \ldots, s$, la $\mathbf{Z}$-forme linéaire sur $\mathbf{Z}^d$ définie par (8), i.e.

$$L_j(n_1, \ldots, n_d) = \gamma_{j,1}n_1 + \gamma_{j,2}n_2 + \cdots + \gamma_{j,d}n_d, \quad (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbf{Z}^d. \tag{9}$$

Les racines définies ci-dessus vont nous permettre d'analyser certains aspects géométriques de l'action de T sur $\mathrm{Lie}(U)$.

3. Un lemme ultramétrique et son interprétation géométrique

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_\delta$ une base fixée de $\mathrm{Lie}(U)$. Pour $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_\delta u_\delta \in \mathrm{Lie}(U)$, on définit $\|x\| = \max_i |x_i|$. $\|x\|$ vérifie l'inégalité ultramétrique $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$, $x, y \in \mathrm{Lie}(U)$, et vérifie $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in k$, $x \in \mathrm{Lie}(U)$. On note $B = \{x \in \mathrm{Lie}(U),\ \|x\| \leqslant 1\}$. La boule unité ainsi définie est une partie compacte ouverte de $\mathrm{Lie}(U)$ vérifiant : $u + v \in B$, $\alpha u \in B$, pour $u, v \in B$ et $\alpha \in k$ tel que $|\alpha| \leqslant 1$. Les définitions ci-dessus s'étendent d'une manière évidente à $\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k}$. Munissons $\mathrm{End}_{\bar{k}}(\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k})$ de la norme $|||A||| = \sup_{\|u\| \leqslant 1} \|Au\|$. On a alors, pour $A, A' \in \mathrm{End}_{\bar{k}}(\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k})$

$$|||A + A'||| \leqslant \max\bigl(|||A|||, |||A'|||\bigr). \tag{10}$$

Remarquons que pour $t = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d}\tau \in T$ et $\mathrm{Ad}(t) \in \mathrm{End}_{\bar{k}}(\mathrm{Lie}(U) \otimes_k \bar{k})$ on a (cf. (5))

$$\bigl|\bigl|\bigl|\mathrm{Ad}(t)\bigr|\bigr|\bigr| \leqslant p^{C|t|_T}, \quad t \in T, \tag{11}$$

où $|t|_T = |n_1| + \cdots + |n_d|$ et où $C > 0$ désigne une constante positive.

Proposition 1. *Les notations étant comme ci-dessus, soient $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T$ et soient $u > 0$ et $v > 0$ tels que $|t_j|_T \leqslant u$, $j = 1, \ldots, m$, et $\alpha_k(t_1 \cdots t_m) \leqslant p^v$, $k = 1, \ldots, s$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\bigl|\bigl|\bigl|\mathrm{Ad}(t_1)\,\mathrm{Ad}(t_2) \cdots \mathrm{Ad}(t_m)\bigr|\bigr|\bigr| \leqslant p^{Cu+Cv}. \tag{12}$$

La preuve de cette proposition repose sur le résultat élémentaire suivant :

Lemme 1. *Soient $T_j = (t^j_{\alpha,\beta}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\bar{k})$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ l matrices triangulaires supérieures strictes et $M_j = \lambda_j I + T_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, où $\lambda_j \in \bar{k}^*$. Soient $N \in \mathbf{N}$ et $M \in \mathbf{N}$ tels que $|||T_j||| \leqslant p^N$, $|\lambda_j|^{-1} \leqslant p^N$, $|\lambda_1 \cdots \lambda_l| \leqslant p^M$. Alors*

$$|||M_1M_2 \cdots M_l||| \leqslant p^{2nN+M}.$$

Preuve du Lemme 1. Il suffit d'observer que

$$M_1M_2 \cdots M_l = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_l \sum_{\alpha, i_j} (\lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_\alpha})^{-1} T_{i_1}T_{i_2} \cdots T_{i_\alpha}$$

où tous les termes tels que $\alpha > n$ sont nuls et d'utiliser (10). □

Preuve de la Proposition 1 . On a (avec les notations de (6), (7))

$$\mathrm{Ad}(\tilde{t}_j)|_{W_k} = \chi_k(t_j)I + T_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{13}$$

où T_j est une matrice triangulaire supérieure stricte. D'autre part, pour $t_j = \pi_1^{n_1} \cdots \pi_d^{n_d}\tau \in T$

$$\chi_k(t_j) = \chi_k\bigl(\pi_1^{n_1} \ldots \pi_d^{n_d}\bigr) = \chi_k(\pi_1)^{n_1} \ldots \chi_k(\pi_d)^{n_d}.$$

Ainsi

$$\left|\chi_k(t_j)\right| \leqslant p^{C|t_j|_T}, \qquad \left|\chi_k(t_j)^{-1}\right| \leqslant p^{C|t_j|_T}. \tag{14}$$

En combinant (11), (13) et (14) on déduit facilement que

$$\left\|\left|T_j\right|\right\| \leqslant p^{C|t_j|} \leqslant p^{Cu}.$$

Il suffit alors pour déduire (12) d'appliquer le Lemme 1 aux $\mathrm{Ad}(\tilde{t}_j)|_{W_k}$, $k = 1, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

4. Preuve du Théorème 1

Nous suivons de près [32]. Soit G comme dans le Théorème 1. Le groupe G (resp. G/U) se décompose comme produit semi-direct (resp. direct)

$$G = Q \bowtie S = (U \bowtie A) \bowtie S \cong U \bowtie (A \times S),$$
$$G/U \cong A \times S \cong T \times F_0 \times S \cong \mathbf{Z}^d \times \tilde{K} \times S$$

où $\tilde{K}$ et S sont compacts ; les notations sont celles de la Section 2. Ceci résulte de la moyennabilité du groupe G et de la décomposition de Levi. Pour $z = t\sigma = \tilde{t}\tau\sigma \in A \times S \cong G/U \cong \mathbf{Z}^d \times \tilde{K} \times S$, on définit

$$|z|_{G/U} = |\tilde{t}|_T = \left|n_1(\tilde{t})\right| + \cdots + \left|n_d(\tilde{t})\right|,$$

où $\tilde{t} = (n_1(\tilde{t}), \ldots, n_d(\tilde{t})) \in \mathbf{Z}^d$. Soit $\mathrm{d}\mu(g) = \varphi(g)\,\mathrm{d}^r g \in P(G)$ et $\mathrm{d}\mu^{*n}(g) = \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^r g$ comme dans le Théorème 1. Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots \in G$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi $\mathrm{d}\mu(g)$ et soit $X_n = \xi_1\xi_2\cdots, \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, la marche aléatoire sur G associée aux variables $\xi_1, \xi_2, \ldots$, ($X_0 = e$). On a, pour toute partie borélienne $A \subset G$:

$$\mathbf{P}_e[X_n \in A] = \int_A \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^r g, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

La mesure $\mathrm{d}\mu(g)$ étant symétrique, on a

$$\mathrm{d}\mu(g) = \mathrm{d}\mu\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)\,\mathrm{d}^r g = \varphi\left(g^{-1}\right)\mathrm{d}g = \varphi(g)m(g)\,\mathrm{d}g,$$

d'où l'identité

$$\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)m(g), \quad g \in G.$$

On a aussi

$$\varphi_n\left(g^{-1}\right) = \varphi_n(g)m(g), \quad g \in G,\ n = 1, 2, \ldots.$$

D'autre part

$$\varphi_{2n}(e) = \int_G \varphi_n\left(g^{-1}\right)\varphi_n(g)\,\mathrm{d}g = \int_G \varphi_n(g)m(g)\varphi_n(g)\,\mathrm{d}g = \int_G \varphi_n(g)^2\,\mathrm{d}^r g.$$

L'inégalité de Schwarz appliquée à (15) donne alors

$$\varphi_{2n}(e) \geqslant \frac{(\mathbf{P}_e[X_n \in A])^2}{|A|}, \quad A \subset G,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

où $|A|$ désigne la mesure de Haar droite de la partie A.

En utilisant le fait que G se décompose comme produit semi-direct $G = U \bowtie (A \times S)$ on peut écrire

$$X_n = \xi_1\xi_2\cdots\xi_n = u_1z_1u_2z_2\cdots u_nz_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

où $\xi_j = u_j z_j$ avec $u_j \in U$ et $z_j \in A \times S$, $j = 1, 2, \ldots$. En utilisant les automorphismes intérieurs $x^y = yxy^{-1}$, $x, y \in G$, on peut réécrire

$$X_n = u_1 u_2^{z_1} u_3^{z_1 z_2} \cdots u_n^{z_1 \cdots z_{n-1}} z_1 z_2 \cdots z_n = \Gamma_n Z_n,$$
$$\Gamma_n \in U, \quad Z_n \in A \times S, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ introduisons les évènements

$$E_n = \{ |Z_n|_{G/U} \leqslant n^{5/6} \},$$
$$E'_n = \{ |L_j(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_k)| \leqslant n^{1/3},\ 1 \leqslant j \leqslant s,\ k = 1, \ldots, n \}$$

où $\zeta_j = \tilde{\pi}(z_j)$, $j = 1, 2, \ldots$; $\tilde{\pi}$ désignant la projection canonique $\tilde{\pi} : A \times S \to \mathbf{Z}^d$ et où les L_j sont comme dans (9).

En utilisant la Proposition 1 et la formule de Campbell–Haussdorff on voit que

$$\Gamma_n = \exp(\gamma_n), \quad \gamma_n \in \mathrm{Lie}(U), \quad \|\gamma_n\| \leqslant C p^{C n^{1/3}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de n et où les notations sont celles de la Section 3.

On déduit de ce qui précède que l'évènement $E_n \cap E'_n \subset [X_n \in A_n]$ où la partie $A_n \subset G = U \bowtie (A \times S)$ est définie par

$$A_n = \exp\left(\{ \|u\| \leqslant C p^{C n^{1/3}} \}\right) \{ |z|_{G/U} \leqslant n^{5/6} \}.$$

Il est facile de voir (par une désintégration de la mesure $\mathrm{d}^r g$) que

$$|A_n| \leqslant C n^{5d/6} p^{C n^{1/3}} = \mathrm{O}\left(\exp\left(C n^{1/3}\right)\right). \tag{17}$$

Par ailleurs la probabilité $\mathbf{P}(E_n^c)$ peut être estimée inférieurement par

$$\mathbf{P}(E_n^c) \geqslant \mathbf{P}\left[|\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n|_{\mathbf{Z}^d} \geqslant C n^{5/6} \right] \geqslant \exp\left(-C n^{2/3}\right), \tag{18}$$

où $|\cdot|_{\mathbf{Z}^d}$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbf{Z}^d$. L'estimation (18) résulte du fait que le noyau de transition de la marche aléatoire symétrique $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n \in \mathbf{Z}^d$ vérifie des estimations gaussiennes inférieures (cf. par exemple [14]).

Enfin pour estimer $\mathbf{P}(E'_n)$ il suffit d'utiliser l'estimation maximale inférieure (cf. [34], Appendix)

$$\mathbf{P}\left[|\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_k|_{\mathbf{Z}^d} \leqslant \alpha,\ 1 \leqslant k \leqslant n \right] \geqslant \frac{1}{C} \exp\left(-C \frac{n}{\alpha^2} \right), \quad n = 1, 2, \ldots,\ \alpha > 0.$$

En choisissant $\alpha \approx n^{1/3}$ dans cette dernière estimation et en utilisant (18) on déduit que

$$\mathbf{P}(E_n \cap E'_n) \geqslant c\, e^{-C n^{1/3}}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

L'estimation (1) est une conséquence immédiate de (16), (17) et (19). Ceci complète la preuve du Théorème 1.

Références

[1] G. Alexopoulos, A lower estimate for central probabilities on polycyclic groups, Canad. J. Math. 44 (1992) 897–910.
[2] G. Bachman, Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory, Academic Press, 1964.
[3] A. Borel, J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965) 55–150.
[4] J.W.S. Cassels, Local Fields, Cambridge University Press, 1986.
[5] C. Chevalley, Théorie des Groupes de Lie, tome III, Hermann, 1955.
[6] Th. Coulhon, Large time behaviour of heat kernels on Riemannian manifolds: fast and slow decays, in: Journées équations aux dérivées partielles, St-Jean-de-Monts, 1998, pp. 1–12.
[7] Th. Coulhon, A. Grigor'yan, On diagonal lower bounds for heat kernels on non-compact manifolds and Markov chains, Duke Math. J. 89 (1) (1997) 133–199.

[8] Th. Coulhon, A. Grigor'yan, Ch. Pittet, A geometric approach to on-diagonal heat kernel lower bounds on groups, Ann. Inst. Fourier 51 (6) (2001) 1763–1827.
[9] A. Grigor'yan, Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold, Rev. Mat. Iberoamericana 10 (2) (1994) 395–452.
[10] A. Grigor'yan, Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds, J. Differential Geom. 45 (1) (1997) 33–52.
[11] R.I. Grigorchuk, Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (5) (1984) 939–985. English translation: Math. USSR-Izv. 25 (1985), 259–300.
[12] Y. Guivarc'h, Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques, Bull. Soc. Math. France 101 (1973) 333–379.
[13] W. Hebisch, On heat kernels on Lie groups, Math. Z. 210 (1992) 593–605.
[14] W. Hebisch, L. Saloff-Coste, Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, Ann. Probab. 21 (1993) 673–709.
[15] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience, 1962.
[16] J. Jenkins, Growth of connected locally compact groups, J. Funct. Anal. 12 (1973) 113–127.
[17] S. Mustapha, Random walks on unimodular p-adic groups, Preprint.
[18] S. Mustapha, Gaussian estimates for heat kernels on Lie groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 128 (1) (2000) 45–64.
[19] Ch. Pittet, Følner sequences on polycyclic groups, Rev. Mat. Iberoamericana 11 (3) (1995) 675–686.
[20] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, A survey on the relationship between volume growth, isoperimetry, and the behavior of simple random walk on Cayley graphs, with examples, Preprint, 1997.
[21] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks, in: Geometric Group Theory Down Under (Canberra, 1996), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 293–316.
[22] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, On random walks on wreath products, Ann. Probab. 30 (2) (2002) 1–30.
[23] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, Random walks on finite rank solvable groups, J. Eur. Math. Soc. 4 (2003) 313–342.
[24] C.R.E. Raja, On classes of p-adic Lie groups, New York J. Math. 5 (1999) 101–105.
[25] H. Rieter, Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups, Oxford Math. Monograph, Oxford University Press, 1968.
[26] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups, Benjamin, New York, 1965.
[27] T.A. Springer, Linear algebraic groups, in: A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.), Algebraic Geometry IV, Springer-Verlag, 1993.
[28] N.Th. Varopoulos, Random walks on soluble groups, Bull. Sci. Math. 107 (1983) 337–344.
[29] N.Th. Varopoulos, A potential theoritic property of soluble groups, Bull. Sci. Math. 108 (1983) 263–273.
[30] N.Th. Varopoulos, Groups of superpolynomial growth, in: S. Igasi (Ed.), Harmonic Analysis (Sendai, 1990), ICM Satellite Conference Proceedings, Springer, 1991.
[31] N.Th. Varopoulos, Diffusion on Lie groups, Canad. J. Math. 46 (2) (1994) 438–448.
[32] N.Th. Varopoulos, Diffusion on Lie groups II, Canad. J. Math. 46 (5) (1994) 1073–1092.
[33] N.Th. Varopoulos, Hardy–Littlewood theory on unimodular groups, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 31 (4) (1995) 669–688.
[34] N.Th. Varopoulos, The heat kernel on Lie groups, Rev. Mat. Iberoamericana 12 (1) (1996) 147–186.
[35] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, Th. Coulhon, Analysis and Geomety on Groups, Cambridge Tracts in Math., vol. 102, Cambridge University Press, 1993.
[36] W. Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups, Cambridge Tracts in Math., vol. 138, Cambridge University Press, 2000.