INVARIANTS ℓ^2 DE RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET DE GROUPES

par Damien GABORIAU

0. Introduction

On s'intéresse à une étude géométrico-ergodique des groupes discrets dénombrables, en particulier aux liens entre les nombres de Betti ℓ^2 des groupes et leurs actions mesurables préservant une mesure. On en déduit d'une part des résultats sur la classification des relations d'équivalence standards et d'autre part des résultats sur les nombres de Betti ℓ^2 des groupes.

Les nombres de Betti ℓ^2 ont été introduits par M. Atiyah [Ati76] dans un contexte d'actions de groupes cocompactes sur des variétés et en termes de noyau de la chaleur. J. Cheeger et M. Gromov [CG86] ont considérablement étendu les notions, en introduisant la cohomologie ℓ^2 singulière pour les actions topologiques et en permettant, entre autre, de définir la suite $\beta_n(\Gamma)$ des nombres de Betti ℓ^2 pour un groupe dénombrable Γ quelconque. On peut consulter [Gro93, part. 8] pour une multitude de résultats et de questions sur la cohomologie ℓ^2 et [Lüc98,Eck00] pour une introduction à la cohomologie ℓ^2 des actions cocompactes sur des CW-complexes ou [Lüc98a] et [Lüc98b] pour une approche alternative. Dans le contexte des feuilletages mesurés, les nombres de Betti (ℓ^2) ont été introduits par A. Connes dans [Co79].

Soit $(X, \mathscr{B}, \mu)$ un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité ($\mu(X) = 1$) sans atome. Une action α d'un groupe dénombrable discret Γ sur $(X, \mathscr{B}, \mu)$, préservant la mesure, produit une relation d'équivalence $\mathscr{R}_\alpha \subset X \times X$ borélienne :

$$\mathscr{R}_\alpha := \{(x, y) \in X \times X : \alpha(\Gamma)(x) = \alpha(\Gamma)(y)\}.$$

Une telle relation d'équivalence est dite dénombrable standard (voir section 1.3). Dans ce contexte mesurable, les ensembles de mesure nulle sont négligés ; ainsi deux relations $\mathscr{R}_1$ sur (X_1, μ_1) et $\mathscr{R}_2$ sur (X_2, μ_2) sont isomorphes (ou identifiées) s'il existe deux boréliens saturés de mesure totale $X'_1 \subset X_1$ et $X'_2 \subset X_2$ et un isomorphisme borélien $f : X'_1 \to X'_2$, qui envoie μ_1 sur μ_2, tel que pour tout $x, y \in X'_1$, $(x\mathscr{R}_1 y) \Leftrightarrow (f(x)\mathscr{R}_2 f(y))$. Deux telles relations sont aussi dites *orbitalement équivalentes* (OE).

On considère toujours des actions préservant la mesure μ. Une question générale est de savoir la quantité d'information concernant α et Γ qu'on peut retrouver dans $\mathscr{R}_\alpha$. En particulier, quels sont les groupes qui peuvent produire les mêmes relations d'équivalence ?

H. Dye a découvert que pour $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$, le groupe des entiers, tout ce qui concerne α est effacé : toutes les actions ergodiques du groupe $\mathbf{Z}$ sur (X, μ) sont orbitalement équivalentes entre elles [Dye59]. Une suite de travaux menés par plusieurs auteurs (notamment H. Dye, A. Connes, J. Feldman, W. Krieger, A. Vershik...) conduit au théorème de D. Ornstein et B. Weiss [OW80] (voir aussi [CFW81]) : si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes *moyennables* infinis, alors toute action ergodique de Γ_1 est orbitalement équivalente à toute action ergodique de Γ_2. L'unique relation d'équivalence produite est caractérisée parmi celles qui sont ergodiques par le fait qu'elle est limite croissante de relations d'équivalence boréliennes à classes finies.

Si les orbites sont infinies (*i.e.* dans toutes les situations non triviales), l'espace des orbites ne possède pas de structure borélienne agréable (penser à l'action sur le cercle d'une rotation d'angle irrationnel). En particulier, il n'existe pas de domaine fondamental qui soit mesurable : *on ne peut pas choisir mesurablement un point par orbite*. La notion suivante donne un sens au fait que deux relations définissent *le même espace des orbites* ; l'idée étant d'abord, qu'une relation d'équivalence borélienne $\mathscr{R}$ a le même espace des orbites que la relation d'équivalence borélienne $\mathscr{R}_{|A} := \mathscr{R} \cap A \times A$ induite de $\mathscr{R}$ sur un borélien A qui rencontre presque toutes les classes.

Une relation $\mathscr{R}_1$ sur (X_1, μ_1) est *stablement orbitalement équivalente* (SOE) à $\mathscr{R}_2$ sur (X_2, μ_2) s'il existe des boréliens $A_1 \subset X_1$ et $A_2 \subset X_2$, qui rencontrent chaque orbite, tels que les relations induites $\mathscr{R}_{1|A_1}$ et $\mathscr{R}_{2|A_2}$ s'identifient par un isomorphisme borélien $f : A_1 \to A_2$ qui préserve la mesure à une constante multiplicative près. Le rapport $c(f, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2) := \mu_2(A_2)/\mu_1(A_1)$ est appelé *constante de compression* de l'équivalence orbitale stable.

On doit rapprocher cela d'une notion introduite par M. Gromov [Gro93, 0.5.E] et étudiée par A. Furman [Fur99a,Fur99b], qui est un analogue ergodique de la quasi-isométrie des groupes : une *équivalence mesurable* de Γ_1 à Γ_2 est un espace borélien standard de mesure infinie (Ω, m) muni d'actions libres commutantes préservant la mesure de Γ_1 et Γ_2, où chacune des deux actions admet un domaine fondamental B_1 (resp. B_2) de mesure finie. On dit alors que Γ_1 est ME à Γ_2, avec constante de compression $c = m(B_2)/m(B_1)$. ME est une relation d'équivalence sur l'ensemble des groupes et l'exemple standard de deux groupes ME est donné par deux réseaux d'un groupe G localement compact à base dénombrable qui agissent sur G par multiplication respectivement à gauche et à droite. On a l'équivalence :

Proposition **6.2** *(voir aussi [Fur99b]).* — *Γ_1 est ME à Γ_2, avec constante de compression c, si et seulement si Γ_1 et Γ_2 admettent des actions libres préservant une probabilité dont les relations d'équivalence associées sont SOE, avec constante de compression c.*

Le théorème d'Ornstein-Weiss déjà cité montre que tous les groupes moyennables infinis sont dans la même classe de ME que $\mathbf{Z}$. La propriété (T) de Kazhdan est un invariant de ME [Fur99a, th. 8.2] et les travaux combinés de F. Furman et R. Zimmer montrent que pour un groupe de Lie simple de rang supérieur, la collection de tous ses réseaux (modulo groupes finis) constitue une classe de ME (voir [Fur99a] pour plus de détails).

Énoncé des résultats

Théorème **6.3.** — *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *deux groupes discrets dénombrables. Si* Γ_1 *est ME à* Γ_2, *alors ils ont des nombres de Betti* ℓ^2 *proportionnels : pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\beta_n(\Gamma_2) = c\beta_n(\Gamma_1),$$

où c *est la constante de compression de l'équivalence mesurable de* Γ_1 *à* Γ_2.

Notons qu'il n'y a pas d'hypothèse d'ergodicité. Le théorème 6.3 généralise (et sa preuve utilise) le cas particulier $c = 1$:

Théorème **3.2.** — *Si deux groupes ont des actions libres préservant une probabilité qui produisent la même relation d'équivalence alors ils ont les mêmes nombres de Betti* ℓ^2.

Autrement dit, les nombres de Betti ℓ^2 sont des invariants d'équivalence orbitale.

On retrouve en particulier, avec une preuve d'esprit différent (et plus compliquée !), un théorème de Cheeger-Gromov (en effet, Γ produit la même relation qu'une action de $\mathbf{Z}$ pour lequel le résultat est facile)(voir aussi [Eck00]) :

Corollaire **0.1** *[CG86, th. 0.2].* — *Si* Γ *est moyennable infini, alors tous ses nombres de Betti* ℓ^2 *sont nuls.*

Le corollaire suivant du th. 6.3 est bien connu dans le cas des groupes de Lie ou dans le cas des groupes discrets (il s'agit alors de la formule liant les nombres de Betti ℓ^2 des sous-groupes d'indices finis).

Corollaire **0.2.** — *Les nombres de Betti* ℓ^2 *des réseaux d'un même groupe localement compact à base dénombrable sont dans le même rapport que les covolumes. Il en est de même en particulier de leurs caractéristiques d'Euler virtuelles (lorsqu'elles sont définies).*

On obtient des résultats de rigidité, par exemple pour des produits de groupes libres $\mathbf{F}_p$.

Corollaire **0.3.** — *Les groupes de la forme* $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$ *sont dans des classes de ME distinctes pour des valeurs distinctes de* ℓ.

Les groupes $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$*, les groupes libres* $\mathbf{F}_p$ *de rang distincts et les groupes de la forme* $(\mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_n) * \mathbf{F}_k$ *pour différents* $\prod_{j=1}^{\ell}(p_j - 1)$*,* pk *et* $(m-1)\cdot(n-1)$ *produisent des actions libres toutes non orbitalement équivalentes (pour* $m, n, p, p_j, k, \ell > 1$*).*

En effet, les β_j sont tous nuls sauf $\beta_\ell = \prod_{j=1}^{\ell}(p_j - 1)$, resp. $\beta_1 = p - 1$, resp. $\beta_1 = k, \beta_2 = (m-1)\cdot(n-1)$. Observons qu'inversement, par commensurabilité des groupes libres de rangs finis et grâce à la prop. 6.2, les groupes $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$ de même ℓ et de même $\prod_{j=1}^{\ell}(p_j - 1)$ admettent des actions libres orbitalement équivalentes. Il est intéressant de comparer ce corollaire aux problèmes difficiles analogues concernant les facteurs (algèbres de von Neumann) des groupes libres.

On obtient aussi de nouveaux résultats de *rigidité* en rang 1 (puisque les nombres de Betti ℓ^2 des groupes mis en jeu sont tous nuls sauf exactement en dimension moitié de l'espace symétrique associé, voir aussi 1.6) :

Corollaire **0.4.** — *Si deux réseaux de* $\mathrm{Sp}(n, 1)$ *et* $\mathrm{Sp}(p, 1)$ *sont ME, alors* $p = n$*.*
Si deux réseaux de $\mathrm{SU}(n, 1)$ *et* $\mathrm{SU}(p, 1)$ *sont ME, alors* $p = n$*.*
Si deux réseaux de $\mathrm{SO}(2n, 1)$ *et* $\mathrm{SO}(2p, 1)$ *sont ME, alors* $p = n$*.*

M. Cowling et R. Zimmer ont montré ce résultat dans $\mathrm{Sp}(n, 1)$, avec constante de compression $c = 1$ [CZ89, th. 1.1(a)]. P. Jolissaint l'a vérifié pour tout c [Jol01].

On peut évidemment décliner ces exemples à l'infini. Signalons toutefois l'exemple suivant, qu'il est intéressant de comparer et de combiner avec [CZ89, th. 1.1(b)], où les rigidités mises en jeu sont de natures différentes et où le résultat concerne le produit uniquement des $2m_i - 1$:

Corollaire **0.5.** — *Considérons des groupes de Lie de la forme* $\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Sp}(m_i, 1) \times \prod_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{SU}(n_j, 1) \times \prod_{k\in \mathrm{K}} \mathrm{SO}(2p_k, 1)$*, où* $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ *sont des ensembles finis et les* $m_i, n_j \geq 2$ *et* $p_k \geq 1$*. Si dans de tels groupes de Lie* G *et* G'*, on a deux réseaux* Γ *et* Γ' *(irréductibles ou non) qui sont ME, alors les quantités* $\sum_{i\in \mathrm{I}} 2m_i + \sum_{j\in \mathrm{J}} n_j + \sum_{k\in \mathrm{K}} p_k$ *sont égales pour* G *et* G'*.*

Rappelons que les résultats de superrigidité des cocycles pour les réseaux des groupes de Lie de rang réel ≥ 2 ne s'appliquent pas ici puisqu'ils nécessitent la simplicité du groupe de Lie (*cf.* [Zim84, cor. 5.2.2, rem. pp. 97–98, Ex. 5.2.12]).

Le cas de $\mathrm{SO}(n, 1)$ pour n impair est un peu plus délicat, dans la mesure où ses réseaux ont tous leurs nombres de Betti ℓ^2 nuls.

Corollaire **6.9.** — *Si deux réseaux de* $\mathrm{SO}(n, 1)$ *et* $\mathrm{SO}(p, 1)$ *sont ME, alors* n *et* p *ont même parité.*

Si deux réseaux de $\mathrm{SO}(2n + 1, 1)$ *et* $\mathrm{SO}(2p + 1, 1)$ *sont ME, avec* $p \leq n$*, alors* $n \leq 2p$*.*

La preuve de la deuxième assertion de ce corollaire m'a été suggérée par B. Okun.

Signalons un résultat récent de N. Monod et Y. Shalom, reposant sur la cohomologie bornée, qui complète ces descriptions : soit $\mathscr{K}$ la classe de tous les groupes de type fini sans torsion qui ou bien sont des produits libres non triviaux ou bien agissent de façon propre non élémentaire sur un espace CAT(-1) propre. *Soient* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathscr{K}$. *Si* $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ *et* Λ *groupe dénombrable quelconque admettent des actions libres, préservant la probabilité sur* (X, μ), *mélangeantes, qui soient orbitalement équivalentes, alors* Γ *et* Λ *sont isomorphes et les actions sont conjuguées* [MS02]. En particulier, les différents $\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_q$ $(p, q \geq 2)$ n'admettent pas d'actions mélangeantes orbitalement équivalentes. De plus, deux actions mélangeantes d'un tel groupe sont orbitalement équivalentes si et seulement si elles sont conjuguées.

On retrouve aussi dans ce qui suit un certain nombre de résultats de [Gab00a], notamment : si deux groupes libres de rangs p et q ont des actions libres qui produisent la même relation d'équivalence, alors $p = q$ [Gab00a, cor. 1, p. 44]. L'outil principal était la notion, introduite par G. Levitt [Lev95], de *coût* des graphages et des relations d'équivalence. Un *graphage* (voir [Gab00a] et ex. 2.2.2) est une *manière mesurable de voir chaque classe de la relation* $\mathscr{R}$ *comme ensemble de sommets d'un graphe*. Le coût du graphage mesure la *quantité d'arêtes* et le coût de la relation $\mathscr{R}$ est l'infimum des coûts des graphages pour lesquels les graphes associés à chaque orbite sont connexes.

La notion essentielle qu'on introduit est celle de *structure simpliciale sur une relation d'équivalence* $\mathscr{R}$ dénombrable standard sur (X, μ) (sect. 2.2.3), déjà évoquée dans [Ada90, def. 1.7] et suggérée par A. Connes dans les années 70. En première approximation, c'est une *manière mesurable de voir chaque classe de* $\mathscr{R}$ *comme ensemble de sommets d'un complexe simplicial*. Un graphage en donne un exemple de dimension 1 ; il constitue aussi un 1-squelette dont il s'agit maintenant de *boucher des trous*. La structure simpliciale est de *dimension n* (resp. *contractile*, resp. *n-connexe*...) si le complexe simplicial associé à (presque) chaque orbite satisfait cette propriété.

Un autre exemple fondamental est produit de la façon suivante : considérons d'une part une action libre α de Γ sur (X, μ) et d'autre part une action simpliciale libre sur un complexe simplicial K, avec point base $*$. L'espace $X \times K$ est muni de l'*action diagonale* de Γ. À chaque orbite est associée une copie du complexe K ; à chaque point x est associée une copie ΣK_x basée en $(x, *)$ de $(K, *)$. On peut noter l'isomorphisme naturel entre $X \times \Gamma *$ et $\mathscr{R}$ donné par $\Theta(x, \gamma *) = (x, \gamma^{-1} x)$. Le 0-squelette $(X \times K^{(0)})$ s'identifie à un nombre de copies de $\mathscr{R}$ égal au nombre de Γ-orbites de sommets dans K.

Ce qu'on considère en fait, ce sont des $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux Σ, *i.e.* des champs de complexes simpliciaux $x \mapsto \Sigma_x$ sur X, sur lesquels $\mathscr{R}$ agit (vue comme groupoïde) (*cf.* section 2).

Certaines relations d'équivalence sont *arborables* (par exemple celles produites par des actions libres d'un groupe libre) : *il est possible d'associer mesurablement à chaque classe une structure d'arbre.* D'autres relations ne le sont pas. Par exemple, celles produites par une action libre ergodique d'un groupe infini qui possède la propriété (T) de Kazdhan ([AS90, th. 1.8, lem. 2.1]). De nombreux autres exemples sont fournis par la proposition 6.10 (voir aussi [Gab00a, cor. VI.22]). On réinterprète cela en disant que ces relations admettent ou non des $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux de dimension 1 contractiles. De même, on montre que certaines relations n'admettent pas de $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux contractile de dimension 2, 3, ... (cor. 3.17).

La *dimension géométrique* d'une relation $\mathcal{R}$ est le minimum des dimensions des $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux contractiles (déf. 3.18). On introduit aussi une notion de dimension approximative (déf. 5.15). Les relations produites par les actions libres des groupes du corollaire 0.3 sont de dimensions géométriques respectives ℓ, 1 et 2. Une relation d'équivalence à classes infinies possède un arborage si et seulement si elle est de dimension géométrique 0 ou 1. On a montré [Gab00a, th. IV.4] que si une relation $\mathcal{R}$ admet un arborage, alors ses sous-relations d'équivalence standards en admettent aussi un, de même que les relations qui lui sont SOE. De manière comparable, on montre :

Proposition **5.8.** — *Les sous-relations d'une relation de dimension géométrique* $\leq p$ *sont de dimension géométrique* $\leq p$.

Proposition **5.2.** — *Les relations SOE ont même dimension géométrique.*

On introduit la notion de *dimension ergodique* erg-dim(Γ) d'un groupe Γ (déf. 6.4). C'est le minimum des dimensions géométriques des relations d'équivalence produite par une action de Γ libre préservant la probabilité sur le borélien standard (X, μ). Dans l'esprit d'une classification des groupes modulo ME, on montre que la dimension ergodique des groupes est un invariant de ME (prop. 6.5). On obtient :

Corollaire **5.9.** — *La dimension ergodique d'un groupe est supérieure ou égale à celle de ses sous-groupes.*

Question. — *Quelle est la dimension ergodique des réseaux de* $\mathrm{SO}(n,1)$, $\mathrm{SU}(n,1)$, $\mathrm{Sp}(n,1)$ *?*

Quelle est la dimension ergodique des groupes fondamentaux des variétés compactes acycliques ?

Question. — *Toutes les actions libres d'un groupe produisent-elles des relations de même dimension géométrique ?*

Généralisant la “group measure space construction” de Murray et von Neumann ([MvN36, part IV, pp. 192–209]), W. Krieger [Kri70] et aussi J. Feldman et C. Moore [FM77b] ont associé à une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, dénombrable standard préservant une mesure de probabilité μ, une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ à trace finie.

On suppose que μ est une mesure de probabilité. Si Σ est un $\mathcal{R}$-complexe simplicial, le champ de complexes simpliciaux $x \mapsto \Sigma_x$ sur X fournit les champs $x \mapsto \mathrm{C}_n^{(2)}(\Sigma_x)$ de chaînes ℓ^2 associés. Ils s'intègrent en des modules de Hilbert sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$. Si les complexes sont uniformément localement bornés, les champs d'opérateurs bord s'intègrent en des opérateurs bornés, fournissant ainsi un complexe de modules de Hilbert $\mathrm{C}_*^{(2)}(\Sigma)$. On définit les *nombres de Betti* L^2 *du* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial* Σ notés $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$ comme les $\mathcal{M}$-dimensions de von Neumann des homologies L^2 réduite de ce complexe.

Plus généralement, sans les hypothèses de finitude, on s'inspire des travaux de J. Cheeger et M. Gromov [CG86] pour définir les nombres de Betti $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$ d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial quelconque. On montre, et c'est vraiment le cœur de cet article, que :

Théorème **3.13.** — *Tous les* $\mathcal{R}$*-complexes simpliciaux qui sont p-connexes ont le même nombre de Betti* β_p.

Cela permet de définir les **nombres de Betti** L^2 **de la relation** $\mathcal{R}$ comme cette valeur commune, qu'on note $\beta_p(\mathcal{R}, \mu)$.

Plus généralement :

Théorème **0.6** *(corollaire 4.9). — S'il existe un champ mesurable équivariant d'équivalences d'homotopie entre les champs de complexes simpliciaux* Σ *et* Ψ*, alors pour tout* $i \in \mathbf{N}$*, on a* $\beta_i(\Sigma, \mathcal{R}) = \beta_i(\Psi, \mathcal{R})$.

Ces nombres sont bien entendu à rapprocher des nombres de Betti des feuilletages définis par A. Connes [Co79], [Co82, p. 549]. Ils s'interprètent dans le cadre de [Co79] comme dimension formelle de l'espace des formes harmoniques de carré intégrable le long des feuilles. On peut consulter aussi l'interprétation combinatoire de G. Elek [Ele97]. On peut montrer par exemple en utilisant une construction de [HL91] la chose suivante.

Considérons une variété compacte munie d'un feuilletage mesuré ergodique $\mathcal{F}$. Fixons une mesure transverse invariante et choisissons une transversale totale X de mesure 1.

Théorème **0.7.** — *Si le feuilletage* $\mathcal{F}$ *est à feuilles* contractiles, *alors ses nombres de Betti (au sens de A. Connes) coïncident avec ceux de la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *engendrée* *par les applications d'holonomie sur* X. *En particulier, ces nombres ne dépendent que de la relation* $\mathcal{R}$.

On peut illustrer cela grâce à un exemple : considérons un groupe fondamental Γ d'une surface compacte de genre g avec une représentation fidèle dans SO(3) et une action libre cocompacte de Γ sur le plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Le feuilletage par plans hyperboliques de $\mathbf{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ étant préservé par l'action diagonale de Γ fournit un feuilletage sur $\mathbf{H}^2 \times \mathrm{SO}(3)/\Gamma$. Ses nombres de Betti ne sont pas tous nuls [Co79]. Ce sont les mêmes que les nombres de Betti ℓ^2 de la relation donnée par l'action de Γ sur SO(3) (th. 0.7) et que ceux du groupe Γ (*cf.* cor. 3.16 ci-dessous), à savoir $\beta_1 = 2g - 2$ et $\beta_i = 0$ pour $i \neq 1$.

La principale difficulté qu'on a rencontrée pour la démonstration du théorème 3.13 réside dans le fait que les équivalences d'homotopie qu'on doit considérer entre complexes de chaînes ne conduisent pas, en général, à des opérateurs bornés. On est donc amené à travailler sur des approximations. On doit comparer aussi ce résultat aux idées et questions évoquées dans [Gro93, 8.A_4, p. 233] et au *claim* qu'on trouve à cette page : *soient* Γ_i, $i = 1, 2$, *qui admettent des actions isométriques, discrètes et cocompactes sur des variétés contractiles* M_1 *et* M_2. *Si* M_1 *est mesurablement quasi-isométrique à* M_2, *alors les groupes* Γ_1 *et* Γ_2 *ont leurs nombres de Betti* ℓ^2 *proportionnels.* L'hypothèse de quasi-isométrie dans ce cas-là conduit à des opérateurs qui sont bornés. Les résultats de J. Heitch et C. Lazarov [HL91] sur l'invariance homotopique des nombres de Betti des feuilletages reposent également sur une propriété de bornitude analogue.

On démontre aussi qu'on peut calculer les nombres de Betti de certaines relations :

Corollaire **3.16.** — *Si* $\mathcal{R}$ *est produite par une action libre de* Γ, *préservant la mesure de probabilité, alors* Γ *et* $\mathcal{R}$ *ont les mêmes nombres de Betti* ℓ^2.

Dans l'étude générale des relations d'équivalence dénombrables standards [FM77a], il est naturel de considérer plutôt une classe de mesure (au sens de l'absolue continuité) qu'une mesure. Si on remplace la mesure μ par une mesure équivalente (de probabilité et invariante), on obtient la même algèbre de von Neumann. Seule la trace change. Les nombres $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)$ dépendent du choix d'une mesure invariante dans la classe. Cependant, si $\mathcal{R}$ est ergodique (tout borélien $\mathcal{R}$-saturé est de μ-mesure nulle ou totale), il n'existe qu'une seule mesure de probabilité invariante dans la classe. Dans ce cas, on peut supprimer *a priori* la référence à la mesure choisie. Si $\mathcal{R}$ est donnée par une action libre d'un groupe Γ, nos résultats montrent qu'on peut *a posteriori* supprimer la référence à μ.

Les nombres de Betti ℓ^2 de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sont des invariants des paires algèbre de von Neumann/sous-algèbre de Cartan (voir [FM77b]).

Question. — Sont-ils en fait des invariants de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$?

On obtient des inégalités de Morse (prop. 3.19), une formule d'Euler-Poincaré-Atiyah (prop. 3.20) et une comparaison entre le coût et les premiers nombres de Betti (cor. 3.23) : $\mathcal{C}(\mathcal{R}) - 1 \geq \beta_1(\mathcal{R}) - \beta_0(\mathcal{R})$, avec égalité pour les relations arborables.

Proposition **6.10.** — *Supposons que le groupe Γ admet une action libre arborable. Alors $\beta_n(\Gamma) = 0$ pour tout $n \geq 2$. De plus, Γ est moyennable si et seulement si $\beta_1(\Gamma) = 0$.*

On obtient aussi :

Corollaire **5.13.** — *Si $\mathcal{R}$ est une réunion croissante de relations $\mathcal{R}_i$ alors $\beta_n(\mathcal{R}) \leq \liminf_{i\in\mathbf{N}} \beta_n(\mathcal{R}_i)$. En particulier, si $\mathcal{R}$ est une réunion croissante de relations de dimension géométrique $\leq p$, alors $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$ pour tout $n \geq p+1$.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dénombrable standard préservant la probabilité μ et Y (muni de la probabilité $\bar{\mu} = \mu_{|\mathrm{Y}}/\mu(\mathrm{Y})$) un borélien de X qui rencontre toutes les classes de $\mathcal{R}$. On relie (cor. 5.5) les nombres de Betti L^2 de la relation $\mathcal{R}$ avec ceux de la relation $\mathcal{R}_{|\mathrm{Y}}$ sur $(\mathrm{Y}, \bar{\mu})$: pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\beta_n(\mathcal{R}) = \mu(\mathrm{Y})\beta_n(\mathcal{R}_{|\mathrm{Y}})$. On en déduit pour les relations SOE :

Corollaire **5.6.** — *Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux relations d'équivalence préservant une probabilité, stablement orbitalement équivalentes, avec constante de compression $c(f, \mathcal{R}, \mathcal{S})$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$\beta_n(\mathcal{S}) = c(f, \mathcal{R}, \mathcal{S})\beta_n(\mathcal{R}).$$

On définit ainsi pour $\mathcal{T}$, une relation de type II_∞ ergodique (voir section 5.4), ses *nombres de Betti* L^2 : c'est une suite de nombres $(\widehat{\beta}_n(\mathcal{T}))_{n\in\mathbf{N}}$ qui est bien définie projectivement (à une constante multiplicative près) (déf. 5.18). De nombreux énoncés concernant les relations qui préservent une probabilité et leurs nombres de Betti admettent une adaptation immédiate dans le cadre II_∞. On dispose ainsi de deux autres invariants d'une relation de type II_∞, qui sont sa dimension géométrique et sa dimension approximative.

On rappelle que le *groupe fondamental* d'une relation $\mathcal{R}$ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R}^{+*}$ engendré par les valeurs des constantes de compression possibles $c(\mathcal{R}, \mathcal{R})$.

Corollaire **5.7.** — *Les relations d'équivalence ergodiques $\mathcal{R}$ dont un nombre de Betti L^2 n'est ni nul ni infini ont un groupe fondamental trivial.*

C'est le cas des relations d'équivalence produites par les actions libres des groupes dont les β_p ne sont pas tous nuls ou infinis, par exemple les groupes libres non abéliens, le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, les groupes donnés dans les corollaires 0.3 et 0.4,...

On parvient avec nos techniques à distinguer les actions de nombreux groupes. Elles ne donnent rien pour séparer du point de vue SOE les différentes actions d'un même groupe. Par exemple, pour le groupe libre à n générateurs, on sait qu'il possède au moins deux actions libres non SOE (trois selon A. Vershik).

Question. — Peut-on construire une infinité d'actions libres non (OE) du groupe libre à deux générateurs ?

Applications en théorie des groupes

Outre les résultats déjà cités (proportionnalité des nombres de Betti ℓ^2 pour les réseaux, pour les groupes mesurablement équivalents,...) on présente quelques résultats particuliers.

On sait que les nombres de Betti ℓ^2 des groupes satisfont aux formules de Künneth. La question se pose de savoir dans quelle mesure ces formules se généralisent à des extensions avec certaines conditions de finitude. Les résultats de [CG86, th. 0.1 et th. 0.2] entraînent qu'*un groupe qui contient un sous-groupe normal infini moyennable a tous ses nombres de Betti ℓ^2 nuls*. Les deux théorèmes suivants généralisent des résultats de W. Lück [Lüc94], [Lüc98b, quest. 3.11, th. 3.3(5)] qui eux-mêmes répondent à des questions de [Gro93, 8.A_4 p. 229 et p. 235]. Rappelons aussi qu'une majoration du β_1 apporte des informations sur les présentations du groupe : si Γ est de type fini, alors pour toute présentation à g générateurs et r relations, on a $g \leq 1 + \beta_1(\Gamma) + r$ (voir par exemple cor. 3.21 ou [Eck00, th. 4.1.1]).

Théorème **6.6.** — *Soit $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ une suite exacte de groupes infinis où Λ est moyennable. Si n est un entier pour lequel $\beta_n(\mathrm{N})$ est fini, alors $\beta_n(\Gamma) = 0$.*

Et sans l'hypothèse de moyennabilité, il reste :

Théorème **6.8.** — *Soit $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ une suite exacte de groupes infinis. Si $\beta_1(\mathrm{N})$ est fini, alors $\beta_1(\Gamma) = 0$.*

En contraposant, on peut voir ce dernier résultat comme une généralisation du théorème de Schreier sur les sous-groupes normaux des groupes libres : *Si Γ est un groupe qui vérifie $\beta_1(\Gamma) \neq 0$ et N est un sous-groupe normal tel que $\beta_1(\mathrm{N})$ soit fini (par exemple N de type fini), alors N est fini ou d'indice fini.*

Le cadre unificateur entre groupes et relations d'équivalence est celui des groupoïdes. Étant donné les applications qu'on a en vue et pour éviter des complications techniques, on a préféré se restreindre dans ce papier aux relations d'équivalence. Cependant les résultats analogues à ceux présentés ici fonctionnent pour les groupoïdes r-discrets. Cette étude est en projet.

Signalons que certains invariants de torsion comme par exemple les invariants de Novikov-Shubin (voir par exemple [Lüc98, part. 8]) ne sont pas des invariants de relation d'équivalence : ils ne sont pas identiques pour tous les groupes moyennables infinis.

Signalons enfin les analogies numériques constatées entre la notion de coût d'une relation d'équivalence et la théorie de l'entropie libre et de la dimension libre de D. Voiculescu, ainsi que les travaux de D. Shlyakhtenko visant à asseoir ces liens [Shl99a,Shl99b].

Je remercie Alain Valette qui m'a aiguillé sur les nombres de Betti ℓ^2 des groupes, en remarquant que pour tous les exemples de groupes Γ où les valeurs sont connues $\mathscr{C}(\Gamma) - 1 = \beta_1(\Gamma) - \beta_0(\Gamma)$. Pour leur patience et leurs explications, merci à Gilles Carron, Étienne Ghys et Bruno Sévennec. À Carole, Valentine et Alice.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Rappels

1.1. *Algèbres de von Neumann, dimension de von Neumann*

On rappelle très brièvement quelques faits généraux concernant les algèbres de von Neumann, les modules de Hilbert et leur dimension de von Neumann. J'ai beaucoup profité pour cette section et la suivante des parties introductives des travaux de B. Eckmann et W. Lück [Eck00,Lüc98].

Soit H un espace de Hilbert séparable réel et B(H) l'algèbre de ses opérateurs continus. Un élément f de B(H) est :

– un *projecteur orthogonal* si $p^2 = p^* = p$ (c'est le projecteur orthogonal sur Im p) ;
– une *isométrie* si $f^*f = id, ff^* = id$;
– une *isométrie partielle* si $f^*f = p$ et $ff^* = q$ sont des projecteurs (f induit alors une isométrie entre les espaces images de p et q) ;
– *positif* si $f = gg^*$ pour un certain g.

Considérons une partie S de B(H) ; sa *commutante* S′ est définie comme l'ensemble $\{g \in \mathrm{B(H)} : gs = sg, \forall s \in \mathrm{S}\}$ et sa bi-commutante comme S″. Supposons que S est auto-adjointe ($\mathrm{S} = \mathrm{S}^* := \{s^* : s \in \mathrm{S}\}$). Dans ce cas, S′ et S″ sont des algèbres auto-adjointes.

Une *algèbre de von Neumann* $\mathscr{A}$ sur H est une sous-algèbre auto-adjointe de B(H), qui est égale à sa bi-commutante. Puisque $(\mathrm{S}')'' = (\mathrm{S}'')' = \mathrm{S}'$ l'algèbre de von Neumann engendrée par S (partie auto-adjointe) est $\mathscr{A} = \mathrm{S}''$; sa commutante $\mathscr{A}' = \mathrm{S}'$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par S′. Elle contiennent l'identité de H, qu'on notera 1.

Une *trace finie* $\tau : \mathscr{A} \to \mathbf{R}$ est une application linéaire qui vérifie $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour $a, b \in \mathscr{A}$ et $\tau(a) \geq 0$ pour les a positifs. Elle est fidèle si pour les $a \in \mathscr{A}$ positifs, on a $\tau(a) = 0 \Rightarrow a = 0$. Elle est normale si pour $a \in \mathscr{A}$, qui est le supremum (pour l'ordre usuel sur les opérateurs positifs) d'un filtre croissant $\{a_i : i \in \mathrm{I}\}$ d'éléments positifs de $\mathscr{A}$, on a $\tau(a) = \sup\{\tau(a_i) : i \in \mathrm{I}\}$.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann qui possède une trace finie fidèle normale τ (en abrégé une trace). On en considérera deux exemples (sections 1.2 et 1.5). On peut supposer $\tau(1) = 1$. Le produit $\langle a, b\rangle = \tau(ab^*)$ munit $\mathscr{A}$ d'une structure préhilbertienne. On note $\ell^2(\mathscr{A}, \tau)$ sa complétion hilbertienne. Lorsque la trace est sous-entendue, on la note seulement $\ell^2(\mathscr{A})$. Étant donné $b \in \mathscr{A}$, les applications linéaires $a \mapsto ba$ et $a \mapsto ab^*$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ se prolongent par continuité en des opérateurs L_b et R_b de $\ell^2(\mathscr{A})$. Cela définit les représentations régulières gauche et droite $L, R : \mathscr{A} \to B(\ell^2(\mathscr{A}))$. Elles sont fidèles, leurs images sont des algèbres de von Neumann commutantes l'une de l'autre et $\langle L_b(1), 1\rangle = \tau(b) = \langle R_b(1), 1\rangle$ voir [Dix69, I.5.2 th. 1, I.6.2 th. 2] ou [Sun87, sect. 2.2].

En résumé, $(\mathscr{A}, \tau)$ a un espace de représentation favori $\ell^2(\mathscr{A}, \tau)$ et une algèbre commutante favorite munie elle aussi naturellement d'une trace, encore notée τ. Dans les deux situations qui nous intéresserons, $\mathscr{A}$ est donnée par sa représentation régulière.

Notons H^I la somme hilbertienne $\oplus_{i\in I} H_i$ d'une famille au plus dénombrable $(H_i)_{i\in I}$ de copies de $H = \ell^2(\mathscr{A}, \tau)$ et p_i le projecteur orthogonal sur la copie H_i. Tout opérateur $f \in B(H^I)$ admet une décomposition *matricielle par blocs* $p_i f p_j = f_{ij} \in B(H)$. On note π_I la représentation diagonale de $B(H)$ sur H^I, alors $\pi_I(\mathscr{A})$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_I(S)$ et les opérateurs f dans la commutante $\pi_I(\mathscr{A})'$ vérifient $f_{ij} \in \mathscr{A}'$.

Si K est un sous-espace fermé S-invariant de H^I, alors le projecteur orthogonal p de H^I sur K appartient à $\pi_I(\mathscr{A})'$ (on a : $psp = sp$, $\forall s \in S$, et en passant aux adjoints avec $p = p^*$, $psp = ps$, $\forall s \in S^*$).

Si I est fini, on définit sur $\pi_I(\mathscr{A})'$ la trace finie fidèle normale

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i\in I} \tau(f_{ii}).$$

Lorsque I est infini (toujours dénombrable), cette formule s'étend à certains opérateurs de $\pi_I(\mathscr{A})'$, en particulier aux opérateurs positifs comme les projecteurs orthogonaux, si on autorise la valeur $+\infty$ (en effet, dans ce cas, $f = gg*$, avec $g \in \pi_I(\mathscr{A})'$, et $\mathscr{A}' \ni f_{ii} = \sum_{j\in I} g_{ij} g_{ij}^* \geq 0$).

Soit V un espace de Hilbert et λ une application $S \to B(V)$. Supposons qu'il existe un plongement isométrique ψ de V dans un H^I, qui soit S-équivariant ($\pi_I(s)\psi = \psi\lambda(s)$, $\forall s \in S$), alors λ s'étend en une représentation $\lambda : \mathscr{A} \to B(V)$, indépendante de ψ. En effet, pour deux tels plongements ψ_1, ψ_2, d'images K_1, K_2, de projecteurs p_1, p_2, l'isométrie partielle (on peut supposer $I_1 = I_2$) $\varphi = p_2\psi_2\psi_1^{-1}p_1 \in B(H^I)$ entre K_1 et K_2 commute avec $\pi_I(S)$. L'espace V devient un $\mathscr{A}$-module de Hilbert au sens suivant.

Définition **1.1.** — *On appelle* $\mathscr{A}$-module de Hilbert *un espace de Hilbert* V, *qui est muni d'une représentation* $\lambda : \mathscr{A} \to B(V)$, *pour lequel il existe un plongement isométrique* $\mathscr{A}$-*équivariant* ψ *de* V *dans un* H^I.

On appelle $\mathscr{A}$-dimension *(ou* dimension de von Neumann*) du* $\mathscr{A}$*-module de Hilbert* V *et on note*

$$\dim_{\mathscr{A}}(\mathrm{V}) := \mathrm{Tr}(p) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \tau(p_{ii}),$$

la trace du projecteur orthogonal p de H^{I} sur l'image de ψ.

Le plongement ψ n'est pas fixé dans la définition du $\mathscr{A}$-module V, mais sa $\mathscr{A}$-dimension n'en dépend pas (par exemple, pour deux tels plongements avec des I finis, $\mathrm{Tr}(p_1) = \mathrm{Tr}(\varphi\varphi^*) = \mathrm{Tr}(\varphi^*\varphi) = \mathrm{Tr}(p_2)$). La $\mathscr{A}$-dimension n'est pas nécessairement un entier.

Soient U et V des $\mathscr{A}$-modules de Hilbert, W un sous-$\mathscr{A}$-module de Hilbert de U et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un opérateur borné $\mathscr{A}$-équivariant, alors U/W, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\overline{\mathrm{Im}\, f}$ sont des $\mathscr{A}$-modules de Hilbert où $\overline{\mathrm{K}}$ désigne l'adhérence de K. De plus, U/W est $\mathscr{A}$-isométrique au supplémentaire orthogonal de W dans U.

Propriétés **1.2.** — *La $\mathscr{A}$-dimension des $\mathscr{A}$-modules de Hilbert vérifie les propriétés suivantes*

1. $\dim_{\mathscr{A}}(\mathrm{V}) = 0$ *si et seulement si* $\mathrm{V} = 0$
2. $\dim_{\mathscr{A}}(\ell^2(\mathscr{A})) = 1$ *(puisque* $\tau(1) = 1$*)*
3. si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est un opérateur borné $\mathscr{A}$-équivariant entre $\mathscr{A}$-modules de Hilbert, alors* $\dim_{\mathscr{A}}(\mathrm{U}) = \dim_{\mathscr{A}}(\mathrm{Ker}\, f) + \dim_{\mathscr{A}}(\overline{\mathrm{Im}\, f})$ *(théorème du rang)*
4. si $\mathrm{V}_1 \subset \mathrm{V}_2 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_n \subset \cdots$ *est une une suite croissante de sous-espace fermés $\mathscr{A}$-invariants d'un $\mathscr{A}$-module de Hilbert, alors* $\dim_{\mathscr{A}}(\overline{\cup_n \mathrm{V}_n}) = \lim_{n\to\infty} \nearrow \dim_{\mathscr{A}}(\mathrm{V}_n)$.

1.2. *Algèbre de von Neumann et nombres de Betti ℓ^2 des groupes*

Soit Γ un groupe dénombrable discret. Considérons $\ell^2(\Gamma)$, l'espace de Hilbert des fonctions sur Γ à valeurs réelles de carré sommable, $\xi = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma$, et les représentations régulières gauche et droite de Γ données respectivement par $\lambda(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma'\gamma$ et $\rho(\gamma')(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \gamma(\gamma')^{-1}$. L'algèbre de von Neumann du groupe Γ est par définition l'algèbre $\mathrm{N}(\Gamma) = \lambda(\Gamma)''$ engendrée par $\lambda(\Gamma)$ [MvN43, sect. 5.3, pp. 787–793]. Sa commutante est l'algèbre $\lambda(\Gamma)' = \rho(\Gamma)''$ engendrée par $\rho(\Gamma)$. Ces deux algèbres possèdent une trace finie fidèle normale, la *trace standard* $\tau(a) = \langle a(1), 1\rangle$, où 1 est la fonction caractéristique de l'élément neutre du groupe. L'application $a \mapsto a(1)$ induit une identification de $\ell^2(\mathrm{N}(\Gamma), \tau)$ avec $\ell^2(\Gamma)$ et de $\mathrm{L}(\mathrm{N}(\Gamma))$ et $\mathrm{R}(\mathrm{N}(\Gamma))$ avec $\mathrm{N}(\Gamma)$ et $\mathrm{N}(\Gamma)'$ respectivement. Si Γ est fini, la $\mathrm{N}(\Gamma)$-dimension d'un $\mathrm{N}(\Gamma)$-module de Hilbert est sa dimension usuelle divisée par le cardinal de Γ.

Un complexe simplicial K est la donnée d'un ensemble $\mathrm{K}^{(0)}$ de *sommets* et de parties $\mathrm{K}^{(1)} \subset \mathrm{K}^{(0)} \times \mathrm{K}^{(0)}, \cdots, \mathrm{K}^{(n)} \subset \underbrace{\mathrm{K}^{(0)} \times \cdots \times \mathrm{K}^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}}, \cdots$ tels que

1. $\mathrm{K}^{(n)}$ est invariant par le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ de permutations des coordonnées,
2. si $(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in \mathrm{K}^{(n)}$ alors $v_0 \neq v_1$
3. si $(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in \mathrm{K}^{(n)}$ alors $(v_1, \cdots, v_n) \in \mathrm{K}^{(n-1)}$.

Un élément $\sigma = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ de $K^{(n)}$ est un n-simplexe ordonné et l'ensemble de ses sommets est un simplexe non ordonné.

Soit K un complexe simplicial dénombrable sur lequel Γ agit par automorphismes simpliciaux et librement (*i.e.* les simplexes non ordonnés ont des stabilisateurs triviaux).

L'espace $C^n_{(2)}(K)$ des n-cochaînes ℓ^2 de K est l'espace des cochaînes dont les cœfficients sont de carré sommable. Il est isomorphe par dualité à l'espace $C_n^{(2)}(K)$ des *n-chaînes* ℓ^2 de K : une base hilbertienne de ce dernier s'obtient en choisissant une famille de n-simplexes ordonnés qui constitue un domaine fondamental pour l'action du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ de permutation des sommets ; *i.e.* en choisissant un simplexe ordonné associé à chaque simplexe non-ordonné. Une telle famille sera choisie Γ-invariante. Une façon de faire consiste à choisir un simplexe ordonné (qu'on indexera par $1 \in \Gamma$) dans chaque orbite de simplexes et d'indexer ses translatés par les éléments du groupe.

Cela permet de définir une identification Γ-équivariante de $C_n^{(2)}(K)$ avec une somme $\oplus_{i=1}^{i=\alpha_n} \ell^2(\Gamma)$, (où α_n est égal au nombre de Γ-orbites de n-simplexes) et de munir $C_n^{(2)}(K)$ d'une structure de $N(\Gamma)$-module de Hilbert.

Si l'action est cocompacte. — Les opérateurs bord sont bornés et s'étendent par continuité en des opérateurs bornés $\partial_n : C_n^{(2)}(K) \to C_{n-1}^{(2)}(K)$, qui sont $N(\Gamma)$-équivariants. Ils vérifient $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. On appelle homologie ℓ^2 réduite de l'action (K, Γ) l'espace

$$\bar{H}_n^{(2)}(K, \Gamma) := \mathrm{Ker}\ \partial_n / \overline{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}}.$$

Il se plonge isométriquement dans $\mathrm{Ker}\ \partial_n \subset C_n^{(2)}(K)$ comme supplémentaire orthogonal de $\overline{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}}$ et c'est un $N(\Gamma)$-module. L'image de ce plongement est par définition l'espace, noté $\mathscr{H}_n(K)$, des chaînes harmoniques ℓ^2. Les nombres de Betti ℓ^2 de l'action sont les $N(\Gamma)$-dimensions

$$\beta_n(K, \Gamma) := \dim_{N(\Gamma)} \bar{H}_n^{(2)}(K, \Gamma).$$

Dans le cas général (action non nécessairement cocompacte). — Soit $\mathfrak{C}_K$ la catégorie dont les objets sont tous les sous-complexes Γ-invariants cocompacts de K, et les seuls morphismes sont les inclusions. À une telle inclusion $K_\alpha \subset K_\beta$ correspond en homologie le morphisme

$$j_{\alpha,\beta} : \bar{H}_n^{(2)}(K_\alpha, \Gamma) \to \bar{H}_n^{(2)}(K_\beta, \Gamma).$$

Posons

$$\nabla_n(K_\alpha, K_\beta) := \dim_{N(\Gamma)} \overline{\mathrm{Im}\ (j_{\alpha,\beta})}.$$

Pour les $K_\alpha \subset K_\beta$, la fonction ∇_n est décroissante en K_β et croissante en K_α (par le théorème du rang 1.2).

Définition **1.3.** — *L'***homologie** ℓ^2 **réduite** *de l'action de* Γ *sur* K *est la limite inductive suivant* $\mathfrak{C}_K$ *:*

$$\bar{H}_n^{(2)}(K,\Gamma) = \lim_{\mathfrak{C}_K} \bar{H}_n^{(2)}(K_\alpha,\Gamma).$$

Cet espace est muni d'une action de $N(\Gamma)$ mais n'est pas en général un espace de Hilbert. Cependant, J. Cheeger et M. Gromov donnent un sens à la notion de $N(\Gamma)$-dimension pour cet espace.

On appelle ***n*-ième nombre de Betti** L^2 de l'action de Γ sur K la quantité :

$$\beta_n(K,\Gamma) = \sup\left\{\inf\left\{\nabla_n(K_\alpha,K_\beta) : K_\beta \in \mathfrak{C}_K, K_\alpha \subset K_\beta\right\} : K_\alpha \in \mathfrak{C}_K\right\}.$$

En fait J. Cheeger et M. Gromov [CG86] définissent la *cohomologie singulière* ℓ^2 d'une action topologique, et ses nombres de Betti ℓ^2 (bien que ça ne soit pas un module de Hilbert) et ils montrent que ces nombres sont donnés par la formule ci-dessous dans le cas des actions simpliciales libres [CG86, p. 198 (2.8)]. Voir [Lüc98a] pour une approche alternative. Étant donné que cela suffit à nos applications, on adoptera cette formule comme définition. On est passé en homologie pour des raisons techniques (l'existence de la suite $\mathscr{L}$ requise dans [CG86, (3) p. 197] n'est pas assurée en général dans notre situation et n'est pas nécessaire en homologie) mais les valeurs obtenues sont les mêmes puisque par dualité les adhérences des espaces Im $(\bar{H}_n^{(2)}(K_s,\Gamma) \to \bar{H}_n^{(2)}(K_t,\Gamma))$ et Im $(\bar{H}^n_{(2)}(K_t,\Gamma) \to \bar{H}^n_{(2)}(K_s,\Gamma))$ ont même $N(\Gamma)$-dimension.

Définition **1.4** *[CG86, (2.8) p. 198]. — Soit* $(K_s)_{s\in\mathbf{N}}$ *une suite croissante exhaustive de sous-complexes* Γ*-invariants cocompacts de* K*. On appelle n-ième nombre de Betti* ℓ^2 *de l'action de* Γ *sur* K *la quantité :*

$$\beta_n(K,\Gamma) = \lim_{s\to\infty}\nearrow \lim_{\substack{t\geq s \\ t\to\infty}}\searrow \nabla_n(K_s,K_t).$$

Ces nombres ne dépendent pas du choix de la suite exhaustive, ce sont des invariants d'homotopie Γ*-équivariante [CG86, p. 198]. En particulier, les nombres de Betti* ℓ^2 *du groupe* Γ *sont définis comme ceux de l'action de* Γ *sur le revêtement universel* $E\Gamma$ *de n'importe quel modèle de l'espace classifiant de* Γ *:*

$$\beta_n(\Gamma) = \beta_n(E\Gamma,\Gamma).$$

On présente dans les deux tableaux suivants une liste de quelques résultats permettant le calcul effectif des nombres de Betti ℓ^2 d'un grand nombre de groupes.

Propriétés **1.5.**

$\Gamma_1 * \Gamma_2$	*(n = 1)*	$\beta_1(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \beta_1(\Gamma_1) + \beta_1(\Gamma_2) + 1 - (\beta_0(\Gamma_1) + \beta_0(\Gamma_2))$
	(n ≥ 2)	$\beta_n(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \beta_n(\Gamma_1) + \beta_n(\Gamma_2)$
$\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2$ *où* Γ_3 *est moyennable infini (Mayer-Vietoris et [CG86])*		$\beta_n(\Gamma_1 *_{\Gamma_3} \Gamma_2) = \beta_n(\Gamma_1) + \beta_n(\Gamma_2)$
$\Gamma_1 \times \Gamma_2$ *(formule de Künneth)*		$\beta_n(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \sum_{i+j=n} \beta_i(\Gamma_1).\, \beta_j(\Gamma_2)$, *avec* $0.\infty = 0$
Si Γ *est le groupe fondamental d'une variété fermée acyclique de dimension p (dualité de Poincaré)*		$\beta_n(\Gamma) = \beta_{p-n}(\Gamma)$
Si Γ *est engendré par une partie de cardinal g*		$\beta_1(\Gamma) \leq g$
Si Λ *est d'indice fini dans* Γ		$\beta_n(\Lambda) = [\Gamma : \Lambda].\, \beta_n(\Gamma)$

Exemple **1.6.** — *Exemples de valeurs des nombres de Betti* ℓ^2 *de groupes* Γ

Groupe Γ	*Nombres de Betti* ℓ^2 $\beta_0, \beta_1, \beta_2 ::: \beta_n, \cdots$	
Γ *fini*	$\beta_0(\Gamma) = \frac{1}{\lvert\Gamma\rvert}$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
Γ *infini*	$\beta_0(\Gamma) = 0$	
Γ *moyennable infini [CG86, th.0.2] (cf. cor. 0.1)*	*tous les* $\beta_i(\Gamma) = 0$	
groupe libre à n générateurs	$\beta_1(\Gamma) = n - 1$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
groupe fondamental de la surface orientable de genre g	$\beta_1(\Gamma) = 2g - 2$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
réseau de $\mathrm{Sp}(p, q)$	$\beta_{2pq}(\Gamma) \neq 0$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
réseau de $\mathrm{SU}(p, q)$	$\beta_{pq}(\Gamma) \neq 0$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
réseau de $\mathrm{SO}(p, q)$ *(si p ou q est pair)*	$\beta_{pq/2}(\Gamma) \neq 0$	*les autres* $\beta_i(\Gamma) = 0$
(si p et q sont impairs)	*tous les* $\beta_i(\Gamma) = 0$	
réseau de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ $(n > 2)$	*tous les* $\beta_i(\Gamma) = 0$	

Les formules de ce tableau qui concernent les réseaux des groupes de Lie résultent des travaux de A. Borel [Bor85].

1.3. *Relations d'équivalence*

On rappelle dans cette sous-section un certain nombre de définitions et de résultats concernant les relations d'équivalence standards, et on renvoie à [FM77a] pour des preuves ou des références plus complètes, voir aussi [Moo82,Sch87].

Soit X un espace borélien standard de σ-algèbre $\mathscr{B}$, muni d'une mesure de probabilité μ sans atome.

Soit Γ un groupe dénombrable et α une action de Γ sur (X, μ) par automorphismes boréliens préservant la mesure μ. Cette action engendre la relation d'équivalence "être dans la même orbite" :

$$\mathscr{R}_\alpha = \{(x, \gamma. x) : x \in X, \ \ \gamma \in \Gamma\}.$$

Comme partie de $X \times X$, cette relation est simplement la réunion des graphes des automorphismes $\alpha(\gamma)$ (on note indifféremment $\alpha(\gamma)(x)$ et $\gamma. x$). On écrira $\mathscr{R}_\Gamma$ si l'action α est sous-entendue. L'action du groupe Γ est *libre* si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ et pour μ-presque tout $x \in X$, on a $\gamma. x \neq x$. Voici quelques exemples qu'on peut avoir en tête :

Exemples **1.7.** — *1. L'action de* $\mathbf{Z}^n$ *par rotations rationnellement indépendantes sur le cercle muni de la mesure de Lebesgue.*
2. Une action d'un groupe discret préservant le volume sur une variété de volume fini.
3. $(X, \mu) = (K, \mathrm{Haar})$ *est un groupe compact muni de sa mesure de Haar et* Γ *est un sous-groupe qui agit par multiplication.*
4. L'action par décalage des indices (shift de Bernoulli) de Γ *sur l'espace* $X = \{0, 1\}^\Gamma$ *des suites de* 0 *et de* 1 *indexées par* Γ *(les parties de* Γ*), avec n'importe quelle mesure invariante, par exemple le produit de l'équiprobabilité sur* $\{0, 1\}$. *Cette action est libre si* Γ *est infini.*

La simple remarque suivante aura des conséquences importantes :

Remarque **1.8.** — *Un* isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ *est un isomorphisme borélien entre deux parties boréliennes de* X. *Si son graphe est contenu dans* $\mathscr{R}$*, c'est-à-dire si pour tout* $x \in A$*, on a* $(x, \varphi(x)) \in \mathscr{R}$*, alors* A *admet une partition* $A = \coprod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *telle que* $x \in A_\gamma \Rightarrow \varphi(x) = \gamma. x$. *Cela entraîne que* φ *préserve la mesure* μ.

La relation d'équivalence $\mathscr{R} = \mathscr{R}_\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :

1. les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont dénombrables
2. $\mathscr{R}$ comme partie de $X \times X$ est une partie borélienne pour la tribu $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$
3. tout isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ dont le graphe est contenu dans $\mathscr{R}$ préserve la mesure μ.

Plus généralement, une *relation d'équivalence dénombrable standard préservant la mesure* μ sur $(X, \mathscr{B}, \mu)$ est une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ qui vérifie les trois points ci-dessus. **On supposera toujours que μ est invariante** et $\mu(X) = 1$, sauf dans la section 5.4 où on considérera une relation $\mathscr{R}_\infty$ sur l'espace $X \times \mathbf{N}$ de mesure infinie.

On notera indifféremment $(x, y) \in \mathscr{R}$ ou $x\mathscr{R}y$ ou $x \sim y$ si $\mathscr{R}$ est sous-entendue. Les classes d'équivalence sont aussi appelées *orbites*. Le *saturé* d'un borélien B est la réunion des orbites des points de B. On le note $\mathscr{R}.\mathrm{B}$; c'est un borélien. La relation est *ergodique* si les boréliens saturés sont de mesure ou de comesure nulle.

Définition **1.9.** — *La collection des automorphismes boréliens de* X *dont le graphe est contenu dans la relation* $\mathscr{R}$ *est appelé le* groupe plein *de* $\mathscr{R}$ *et noté* $[\mathscr{R}]$. *Il est, en général, non dénombrable. L'ensemble de tous les isomorphismes partiels dont le graphe est contenu dans* $\mathscr{R}$ *sera noté* $[[\mathscr{R}]]$.

Si $(\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}), (\varphi' : \mathrm{A}' \to \mathrm{B}') \in [[\mathscr{R}]]$, *l'isomorphisme partiel* $\varphi\varphi' : \varphi'^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') \to \varphi(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}')$ *est défini par* $\varphi\varphi'(z) = \varphi(\varphi'(z))$ *et* $\varphi^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *par* $\varphi^{-1}\varphi(z) = z$, *pour tout* $z \in \mathrm{A}$.

Théorème **1.10.** — *[FM77a, th. 1] Si* $\mathscr{R}$ *est une relation d'équivalence dénombrable standard préservant* μ *sur* $(\mathrm{X}, \mathscr{B})$, *alors il existe un groupe dénombrable* G *d'automorphismes boréliens de* X *tel que* $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mathrm{G}}$.

Signalons qu'A. Furman [Fur99b] a récemment donné des exemples de relations ergodiques pour lesquelles aucun tel groupe G n'agit librement.

Bien qu'on puisse toujours considérer une relation d'équivalence dénombrable standard comme étant produite par une action d'un groupe dénombrable, on trouve des situations où le groupe d'automorphismes n'apparaît pas de manière évidente. Par exemple lorsqu'on considère la restriction d'une relation à un borélien de X (*cf.* section 5.1). Par exemple aussi lorsqu'on étudie un feuilletage ou une lamination mesuré(e) ergodique : sur une transversale totale X de mesure finie, le pseudogroupe d'holonomie engendre une telle relation d'équivalence.

Deux telles relations $\mathscr{R}_1$ sur (X_1, μ_1) et $\mathscr{R}_2$ sur (X_2, μ_2) sont *isomorphes (ou identifiées)* s'il existe deux boréliens saturés de mesure totale $\mathrm{X}'_1 \subset \mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}'_2 \subset \mathrm{X}_2$ et un isomorphisme borélien $f : \mathrm{X}'_1 \to \mathrm{X}'_2$, qui envoie μ_1 sur μ_2, tel que pour tout $x, y \in \mathrm{X}'_1$, $(x\mathscr{R}_1 y) \Leftrightarrow (f(x)\mathscr{R}_2 f(y))$.

Notons que dans la littérature, on s'intéresse habituellement à des relations d'équivalence sur un espace muni d'une classe de mesure, autrement dit, on remplace "qui envoie μ_1 sur μ_2" par "qui envoie μ_1 sur une mesure équivalente à μ_2". La remarque 1.8 permet de montrer que dans ce cas, la mesure $f_*(\mu_1)$ est elle aussi invariante pour $\mathscr{R}_2$. Lorsque $\mathscr{R}$ est ergodique, la condition *mesure de probabilité invariante* caractérise μ de manière unique dans sa classe.

Lorsque $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ sont produites par des actions α_1 et α_2 de groupes Γ_1 et Γ_2, on dit aussi que les actions sont *orbitalement équivalentes* (OE). L'isomorphisme f permet par conjugaison de définir une action de Γ_1 qui a exactement les mêmes orbites que l'action de Γ_2 sur X'_2. Pour chaque $\gamma \in \Gamma_1$, on peut partitionner X'_2 de sorte que sur chaque pièce, γ coïncide avec un élément ω de Γ_2 (remarque 1.8). Si on s'est donné une partie génératrice de Γ_2, ce changement de variables n'est, en général, pas borné.

C'est-à-dire que la longueur des ω n'est pas bornée. De nombreuses difficultés vont venir de ce fait.

Remarque **1.11.** — *Une relation $\mathcal{R}$ est dite* hyperfinie *si elle est réunion croissante de sous-relations dont toutes les classes sont finies. Dans le cadre où la mesure finie μ sur un borélien standard est préservée, H. Dye a montré que :*

- *toutes les relations ergodiques hyperfinies sont isomorphes entre elles ;*
- *toutes les relations hyperfinies sont données par une action de $\mathbf{Z}$;*
- *toutes les actions de $\Gamma = \mathbf{Z}$ [Dye59, th.1 p. 143 et th.5 p. 154], et toutes actions des groupes Γ abéliens ou à croissance polynomiale [Dye63, th.1, p. 560] sont hyperfinies.*

Le résultat a été étendu par une série de travaux qui culmine avec le célèbre théorème d'Ornstein-Weiss : les actions des groupes moyennables sont toutes hyperfinies [OW80].

On a aussi une réciproque qui ferme ce cercle d'idées : si Γ possède une action libre α préservant μ telle que $\mathcal{R}_\alpha$ soit hyperfinie, alors Γ est moyennable.

En conclusion, dans le cadre ergodique où une mesure de probabilité est préservée, il existe une unique relation d'équivalence produite par les actions libres des groupes moyennables infinis, c'est la relation hyperfinie.

Signalons enfin que toute relation $\mathcal{R}$ dont les classes sont infinies contient une sous-relation hyperfinie à classes infinies (voir par exemple la preuve de l'item -2- de la proposition III.3 de [Gab00a]).

1.4. *Espaces fibrés*

On appellera *espace fibré standard sur* X un espace borélien standard U muni d'une application borélienne donnée $\pi : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$, à fibres dénombrables. On désignera π comme la *projection*. La *mesure naturelle* ν_{U} sur (U, π) est définie comme produit de la mesure μ sur X avec la mesure de comptage dans les fibres. Plus précisément, pour tout borélien C de U,

$$\nu_{\mathrm{U}}(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{X}} |\pi^{-1}(x) \cap \mathrm{C}| d\mu(x),$$

où $|\mathrm{S}|$ désigne le cardinal de S.

Exemple **1.12.** — *Soit $\mathcal{R}$ une relation dénombrable standard sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}, \mu)$ préservant la mesure μ. La relation d'équivalence elle-même, vue comme espace $\mathcal{R} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, est équipée de la tribu induite $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$. Elle est munie de deux projections*

$$\pi_l(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_r(x, y) = y$$

sur les abscisses (resp. les ordonnées), à fibres dénombrables, qui envoient les boréliens de $\mathcal{R}$ sur des boréliens de X. Elle a donc deux structures de fibré standard sur X. L'invariance de μ assure qu'on obtient la même mesure naturelle, qu'on note ν ou ν^1, sur $\mathcal{R}$ en échangeant les rôles de π_l et π_r.

De la même façon, en utilisant n'importe laquelle des projections π_i sur la coordonnée x_i, l'espace

$$\mathscr{R}^{(m)} := \{(x_0, x_1, \cdots, x_m) : (x_i, x_{i+1}) \in \mathscr{R}\}$$

est un espace fibré standard sur X*, muni d'une mesure naturelle* ν^m.

1.5. *Algèbre de von Neumann de* $\mathscr{R}$

L'algèbre de von Neumann associée à une action libre d'un groupe dénombrable sur un espace borélien préservant une classe mesure fut introduite par Murray et von Neumann [MvN36, part IV, pp. 192–209] dans ce qu'on appelle la *group measure space construction.* C'est un invariant d'équivalence orbitale. W. Krieger s'est affranchi de l'hypothèse que l'action est libre [Kri70]. Enfin Feldman et Moore ont défini et étudié l'algèbre de von Neumann associée à une relation d'équivalence dénombrable standard préservant la classe de μ [FM77b] ; voir aussi [Moo82]. Cette algèbre combine les aspects espace mesuré, puisqu'elle contient $L^\infty(X, \mu)$ comme *sous-algèbre de Cartan*, et les aspects dynamiques de la relation d'équivalence. Les propriétés de la relation se traduisent en termes de l'algèbre ou en termes de la paire algèbre/sous-algèbre de Cartan. On rappelle ici quelques faits basiques.

On considère l'espace $(\mathscr{R}, \nu)$ (où ν est définie dans l'exemple 1.12) et l'espace de Hilbert séparable $L^2(\mathscr{R}, \nu)$. On définit la *représentation régulière gauche* de $\mathscr{R}$: pour tout isomorphisme partiel $(\varphi : A \to B) \in [[\mathscr{R}]]$ (*cf.* déf. 1.9) et $\eta \in L^2(\mathscr{R}, \nu)$,

$$L_\varphi . \eta(x, y) = \chi_B(x) \cdot \eta(\varphi^{-1}(x), y)$$

i.e. $L_\varphi . \eta(x, y) = \eta(\varphi^{-1}(x), y)$ si $x \in B$ et $L_\varphi . \eta(x, y) = 0$ sinon.

On a $L_{\varphi\varphi'} = L_\varphi L_{\varphi'}$ et $L_\varphi^* = L_{\varphi^{-1}}$.

De même, on définit la *représentation régulière droite* de $\mathscr{R}$:

$$R_\varphi . \eta(x, y) = \chi_B(y) \cdot \eta(x, \varphi^{-1}(y)).$$

L'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs continus R_φ de $L^2(\mathscr{R}, \nu)$ est notée $\mathscr{M}_R$ et celle engendrée par les L_φ est notée $\mathscr{M}_L$. Cette algèbre $\mathscr{M}_L$ est caractérisée comme l'algèbre des opérateurs continus de $L^2(\mathscr{R}, \nu)$ qui commutent avec les R_φ (et inversement pour $\mathscr{M}_R$). Les deux algèbres $\mathscr{M}_L$ et $\mathscr{M}_R$ sont commutantes l'une de l'autre [FM77b, Prop. 2.5].

On appelle $\mathscr{M} := \mathscr{M}_L$ l'*algèbre de von Neumann de la relation d'équivalence* $\mathscr{R}$.

Remarque **1.13.** — *L'algèbre* $\mathscr{M}_L$ *contient* $L^\infty(X, \mu)$.

En effet, $\mathscr{M}_L$ *contient déjà les fonctions caractéristiques* χ_A *des boréliens* A *de* X *par* $\chi_A \mapsto L_\varphi$ *où* $\varphi : A \to A$ *est l'isomorphisme partiel restriction de l'identité de* X *à* A.

Plus généralement, si $\phi \in L^\infty(X, \mu)$, *alors l'opérateur noté* L_ϕ *et défini par* $L_\phi . \eta(x, y) = \phi(x) \cdot \eta(x, y)$ *commute avec les* R_φ. *On a bien sûr l'analogue pour* $\mathscr{M}_R$.

En vertu de la remarque 1.8, $\mathscr{M}$ est aussi engendrée par $\{L_g, L_\phi : g \in [\mathscr{R}], \phi \in L^\infty(X, \mu)\}$. *On dira encore que les* L_g, L_ϕ *pour* $g \in [\mathscr{R}], \phi \in L^\infty(X, \mu)$ *définissent une représentation de* $\mathscr{R}$.

Si G *est un groupe dénombrable tel que* $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, *alors* $\{L_g, L_\phi : g \in G, \phi \in L^\infty(X, \mu)\}$ *engendre* $\mathscr{M}$.

Notons $\chi_D \in L^2(\mathscr{R}, \nu)$ la fonction caractéristique de la diagonale D de $\mathscr{R}$. C'est un *vecteur cyclique* (*i.e.* $\mathscr{M}_L\chi_D$ (resp. $\mathscr{M}_R\chi_D$) est dense dans $L^2(\mathscr{R}, \nu)$) et *séparant* (*i.e.* pour $a \in \mathscr{M}_L$ (resp. $a \in \mathscr{M}_R$) $a\chi_D = 0 \Rightarrow a = 0$) pour les deux algèbres $\mathscr{M}_L$ et $\mathscr{M}_R$.

Elles possèdent toutes deux une trace finie : pour tout $a \in \mathscr{M}_L$ (resp $a \in \mathscr{M}_R$),

$$\tau(a) := \langle a\chi_D, \chi_D\rangle.$$

L'application $a \mapsto a\chi_D$ induit une identification de $\ell^2(\mathscr{M}, \tau)$ avec $L^2(\mathscr{R}, \nu)$ et les représentations régulières gauche et droite de $\mathscr{M}$ correspondent à $\mathscr{M}_L$ et $\mathscr{M}_R$ (voir section 1.1). Si H est un sous-espace fermé $\mathscr{M}$-invariant de $L^2(\mathscr{R}, \nu)$, alors le projecteur orthogonal P_H sur H appartient à $\mathscr{M}_R$ et la *$\mathscr{M}$-dimension de* H est la trace $\tau(P_H)$ (voir 1.1)

$$\dim_{\mathscr{M}}(H) := \tau(P_H) = \langle P_H\chi_D, \chi_D\rangle.$$

On note parfois aussi $\dim_{\mathscr{R}}$ au lieu de $\dim_{\mathscr{M}}$.

Exemple **1.14.** — *Soit* A *un borélien de* X *(on pense à* X *comme étant* vertical*), et* $\widetilde{A} = \pi_r^{-1}(A)$ *sa préimage dans* $\mathscr{R}$ (bande horizontale). *L'espace* $L^2(\widetilde{A}, \nu_{|\tilde{A}})$ *est* $\mathscr{M}_L$*-invariant, c'est l'image du projecteur orthogonal* R_{χ_A}, *sa $\mathscr{M}$-dimension est égale à*

$$\begin{aligned}\dim_{\mathscr{M}}(L^2(\widetilde{A}, \nu_{|\tilde{A}})) &:= \langle R_{\chi_A} \cdot \chi_D, \chi_D\rangle \\ &= \int_{\mathscr{R}} \chi_A(y)\chi_D(x,y) \cdot \chi_D(x,y)d\nu(x,y) = \mu(A).\end{aligned}$$

En particulier, $\dim_{\mathscr{M}}(L^2(\mathscr{R}, \nu)) = 1$.

Si $P \in \mathscr{M}_R$ *est le projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé $\mathscr{M}$-invariant* H *de* $L^2(\widetilde{A}, \nu_{|\tilde{A}})$, *alors* $\dim_{\mathscr{M}} H = \langle P\chi_B, \chi_B\rangle$, *où* B *est une π_r-section borélienne de* A. *En effet,* $P\chi_D = P\chi_{D\cap\tilde{A}}$ *et si* π_l *est injective en restriction à* B *(à un ensemble de mesure nulle près), alors* $\chi_{D\cap\tilde{A}} = L_\varphi\chi_B$ *où* $L_\varphi \in \mathscr{M}_L$ *est une isométrie de* $L^2(\widetilde{A}, \nu_{|\tilde{A}})$. *Le cas général s'y ramène en considérant une partition dénombrable de* A.

On rappelle qu'un *$\mathscr{M}$-module de Hilbert* est un espace de Hilbert H muni d'une représentation de $\mathscr{R}$ qui admet un plongement isométrique équivariant dans une somme hilbertienne dénombrable $\oplus L^2(\mathscr{R}, \nu)$. Sa $\mathscr{M}$-dimension $\dim_{\mathscr{M}}(H)$ est la somme des traces des termes diagonaux dans la décomposition par blocs du projecteur orthogonal sur l'image de H dans $\oplus L^2(\mathscr{R}, \nu)$ (voir déf. 1.1 et le paragraphe qui la précède).

2. Actions simpliciales d'une relation d'équivalence

2.1. *Espaces fibrés et actions*

On retrouve dans cette section quelques cas particuliers élémentaires de notions introduites par A. Connes dans [Co79].

Étant donnés deux espaces fibrés standards (U, π) et (V, π') sur X, leur *produit fibré* (l'ensemble des paires qui ont même projection) est un espace fibré standard sur X :

$$\mathrm{U} * \mathrm{V} = \{(u, v) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} : \ \pi(u) = \pi'(v)\}.$$

Soit sur $(\mathrm{X}, \mathscr{B}, \mu)$ une relation $\mathscr{R}$ dénombrable standard, préservant la mesure μ.

Rappelons que $\mathscr{R}$ possède deux structures d'espace fibré standard sur X, via π_r et π_l (*cf.* ex. 1.12). La structure de *groupoïde* de $\mathscr{R}$ est donnée par l'application borélienne

$$\begin{aligned} (\mathscr{R}, \pi_r) * (\mathscr{R}, \pi_l) &\to \mathscr{R} \\ ((x, y), (y, z)) &\mapsto (x, z). \end{aligned}$$

Une *$\mathscr{R}$-action à gauche* est une application borélienne

$$\begin{aligned} (\mathscr{R}, \pi_r) * (\mathrm{U}, \pi) &\to \mathrm{U} \\ ((x, y), u) &\mapsto (x, y).\, u \end{aligned}$$

où (U, π) est un espace fibré standard sur X, telle que les identités évidentes

$$(x, y).\, [(y, z).\, u] = (x, z).\, u \text{ et } (z, z).\, u = u$$

soient vérifiées dès qu'elles ont un sens, *i.e.* pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $x \sim y \sim z \in \mathrm{X}$ tels que $z = \pi(u)$. On dit que (U, π) est un *$\mathscr{R}$-espace fibré standard*.

L'*orbite* de u est l'ensemble $\mathscr{R}.\, u := \{(x, y).\, u : (x, y) \in \mathscr{R}, y = \pi(u)\}$ et le *saturé* d'un borélien $\mathrm{B} \subset \mathrm{U}$ est la réunion $\mathscr{R}.\,\mathrm{B}$ des orbites qui rencontrent B.

L'espace (X, id) lui-même est un $\mathscr{R}$-espace fibré standard avec action $((x, y), y) \mapsto x$ et pour un $\mathscr{R}$-espace fibré standard (U, π), la projection est $\mathscr{R}$-équivariante : $\pi((x, y).\, u) = (x, y).\, \pi(u)$.

Définition **2.1.** — *Une $\mathscr{R}$-action à gauche est* discrète *si elle admet un* domaine fondamental borélien F, *i.e. s'il existe un borélien* $\mathrm{F} \subset \mathrm{U}$ *qui rencontre chaque orbite une fois et une seule. On dit alors que* U *est un* $\mathscr{R}$-espace discret.

Bien que l'action soit à gauche, on notera $\mathrm{U}/\mathscr{R}$ l'espace quotient de U par l'action de $\mathscr{R}$, *i.e.* l'espace des orbites de la $\mathscr{R}$-action. Observons que la projection $\mathrm{U} \to \mathrm{U}/\mathscr{R}$ induit un isomorphisme borélien de F avec $\mathrm{U}/\mathscr{R}$.

Exemple **2.2.** — *Un exemple évident de $\mathcal{R}$-espace discret est l'espace fibré* $(\mathrm{U},\pi)=(\mathcal{R},\pi_l)$ *lui-même, avec l'action* $\mathcal{R} * \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, $((x,y),(y,z)) \mapsto (x,z)$. *La diagonale* D *de* $\mathcal{R}$ *est un domaine fondamental. Notons les isomorphismes naturels* $\mathrm{X} \simeq \mathrm{D} \simeq \mathcal{R}/\mathcal{R}$.

Soit F un domaine fondamental de la $\mathcal{R}$-action sur U. La projection étant à fibres dénombrables, on peut trouver une partition dénombrable $\mathrm{F} = \coprod_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{F}_j$ telle que π soit injective sur chaque F_j (théorème de sélection). On a alors une identification naturelle de chaque F_j avec la partie diagonale $\mathrm{D}_j = \{(z,z) : z \in \pi(\mathrm{F}_j)\} \subset \mathcal{R}$ qui préserve la mesure et qui s'étend par équivariance (ex. 2.2) en un isomorphisme borélien entre les saturés $\mathcal{R}.\mathrm{F}_j$ et $\mathcal{R}.\mathrm{D}_j = \pi_r^{-1}(\pi(\mathrm{F}_j))$. On obtient ainsi un isomorphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards entre $\mathrm{U} = \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}.\mathrm{F}_j$ et $\coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}.\mathrm{D}_j \subset \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}$. On a montré :

Lemme **2.3.** — *Tout espace fibré standard* (U,π) *sur* X *muni d'une* $\mathcal{R}$ *action discrète admet une identification* $\mathcal{R}$*-équivariante avec un borélien saturé dans la réunion disjointe d'une infinité dénombrable de copies de* $\mathcal{R}$. *L'image de* ν_{U} *dans chaque copie de* $\mathcal{R}$ *est égale à la restriction de* ν.

Si $g \in [\mathcal{R}]$, on note $g.u$ pour $(x,y).u$, où $y = \pi(u)$ et $x = g(y)$.

Définition **2.4.** — *Pour* $g \in [\mathcal{R}]$ *ou* $\phi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X},\mu)$, *on dispose d'une* représentation de $\mathcal{R}$: *la famille des opérateurs continus* $\mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}})$

$$\mathrm{L}_g^{\mathrm{U}}.\,\eta(u) = \eta(g^{-1}.\,u) \qquad \mathrm{L}_\phi^{\mathrm{U}}.\,\eta(u) = \phi(\pi(u)).\,\eta(u).$$

Soient U *et* V *deux* $\mathcal{R}$*-espaces discrets. Une application linéaire* $h : \mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{V},\nu_{\mathrm{V}})$ *est* $\mathcal{R}$-équivariante *si* $\mathrm{L}_*^{\mathrm{V}} \circ h = h \circ \mathrm{L}_*^{\mathrm{U}}$.

Proposition **2.5.**

(1) Les opérateurs $\mathrm{L}_g^{\mathrm{U}}$, $\mathrm{L}_\phi^{\mathrm{U}}$ *induisent sur l'espace* $\mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}})$ *une structure de* $\mathcal{M}$*-module de Hilbert ; on note encore* L^{U} *la représentation correspondante de* $\mathcal{M}$.

(2) Soit H *un sous-espace fermé* $\mathcal{M}$*-invariant de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}})$, *alors* $\dim_{\mathcal{M}}(\mathrm{H}) = \sum_{j\in\mathrm{J}}\langle \mathrm{P}(\chi_{\mathrm{F}_j}),\chi_{\mathrm{F}_j}\rangle$ *où* P *est le projecteur orthogonal sur* H *et les* χ_{F_j} *sont les fonctions caractéristiques des* F_j.

Démonstration. — L'isomorphisme entre $\mathrm{U} = \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}.\mathrm{F}_j$ et $\coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}.\mathrm{D}_j \subset \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathcal{R}$ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}}) = \oplus_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{L}^2(\mathcal{R}.\mathrm{F}_j,\nu_{\mathrm{U}}) \simeq \oplus_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{L}^2(\mathcal{R}.\mathrm{D}_j,\nu) \subset \oplus_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{L}^2(\mathcal{R},\nu),$$

qui est $\mathcal{R}$-équivariant. La structure de $\mathcal{M}$-module de Hilbert de $\mathrm{L}^2(\mathrm{U},\nu_{\mathrm{U}})$ s'en déduit.

Par définition, la $\mathcal{M}$-dimension de l'image H' de H dans $\oplus_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{L}^2(\mathcal{R},\nu)$ s'obtient comme $\dim_{\mathcal{M}} \mathrm{H}' = \sum_{j\in\mathrm{J}}\langle \mathrm{P}'(\chi_{\Delta_j}),\chi_{\Delta_j}\rangle$, où P' est le projecteur orthogonal de $\oplus_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{L}^2(\mathcal{R},\nu)$ sur H' et où χ_{Δ_j} est la fonction caractéristique de la diagonale de la

j-ième copie de $\mathscr{R}$. Puisque $\mathrm{P}'(\chi_{\Delta_j}) = \mathrm{P}'(\chi_{\mathrm{D}_j})$, on en déduit $\dim_{\mathscr{M}} \mathrm{H} = \dim_{\mathscr{M}} \mathrm{H}' = \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle \mathrm{P}'(\chi_{\mathrm{D}_j}), \chi_{\mathrm{D}_j}\rangle = \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle \mathrm{P}(\chi_{\mathrm{F}_j}), \chi_{\mathrm{F}_j}\rangle$. □

Si U est un $\mathscr{R}$-espace discret de domaine fondamental F, alors $\mathrm{U} * \mathrm{U} * \cdots * \mathrm{U}$ est un $\mathscr{R}$-espace discret de domaine fondamental $\mathrm{F} * \mathrm{U} * \cdots * \mathrm{U}$.

Par exemple, avec $(\mathrm{U}, \pi) = (\mathscr{R}, \pi_l)$, le produit fibré

$$\mathrm{U} * \mathrm{U} * \cdots * \mathrm{U} = \{((x_0, x_1), (x_0, x_2), \cdots , (x_0, x_n)) : x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n\}$$

s'identifie avec

$$\mathscr{R}^{(n)} := \{(x_0, x_1, \cdots , x_n) : x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n\},$$

avec domaine fondamental caractérisé par $x_0 \in \mathrm{D}$.

Le *groupe de permutations des coordonnées* dans $\underbrace{\mathrm{U} * \cdots * \mathrm{U}}_{n \text{ fois}}$ sera noté $\mathfrak{S}_n$. Observons qu'il commute avec l'action de $\mathscr{R}$.

2.2. *Actions simpliciales d'une relation d'équivalence*

Définition **2.6.** — *Un* $\mathscr{R}$-complexe simplicial Σ *consiste en la donnée suivante :*

– *un $\mathscr{R}$-espace discret $\Sigma^{(0)}$ (déf. 2.1), de projection* $\Sigma^{(0)} \xrightarrow{\pi} \mathrm{X}$
– *des parties boréliennes $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \cdots , \Sigma^{(n)}, \cdots$, où* $\Sigma^{(n)} \subset \underbrace{\Sigma^{(0)} * \cdots * \Sigma^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}}$, *telles que pour tout $n > 0$*

1. $\mathscr{R}.\Sigma^{(n)} = \Sigma^{(n)}$ *(invariance)*
2. *si $(v_0, v_1, \cdots , v_{n+1}) \in \Sigma^{(n+1)}$ alors $(v_0, \cdots , \widehat{v_i}, \cdots , v_{n+1}) \in \Sigma^{(n)}$, pour tout i (condition de bord)*
3. *$\Sigma^{(n)}$ est invariant par permutations des coordonnées dans $\Sigma^{(0)} * \cdots * \Sigma^{(0)}$ (permutations)*
4. *si $(v_0, v_1, \cdots , v_n) \in \Sigma^{(n)}$ alors $v_0 \neq v_1$ (non dégénérescence).*

Un point $(v_0, v_1, \cdots , v_n) \in \Sigma^{(n)}$ est un *n-simplexe ordonné*, son *i-ième sommet* est v_i et on obtient sa *i-ième face* $(v_0, v_1, \cdots , \widehat{v_i}, \cdots , v_n)$ en supprimant v_i. Un point de $\Sigma^{(0)}$ est aussi appelé un *sommet*. Un point de $\Sigma^{(n)}/\mathfrak{S}_{n+1}$ est un *n-simplexe* (non ordonné, non orienté).

Associé à un $\mathscr{R}$-complexe simplicial Σ, on a un *champ de complexes simpliciaux $\mathscr{R}$-équivariant* sur X : à $x \in \mathrm{X}$ correspond le complexe simplicial Σ_x (non nécessairement connexe *a priori*), dont les n-simplexes sont constitués des points de $\Sigma^{(n)}$ dans la fibre de x. Si $(x, y) \in \mathscr{R}$, l'action de $\mathscr{R}$ fournit un isomorphisme simplicial évident entre Σ_x et Σ_y.

On notera ν^n la mesure naturelle sur $\Sigma^{(n)}$. Le lemme 2.3 permet d'identifier $\Sigma^{(0)}$ avec une partie de la réunion disjointe d'une infinité de copies de $\mathscr{R}$, puis $\Sigma^{(n)}$ avec une partie de la réunion disjointe d'une infinité de copies de $\mathcal{R}^{(n)}$. La notation ν^n est donc assez consistante avec celle de l'exemple 1.12.

Définition **2.7.** — *On dit que* Σ *est*

- **uniformément localement borné (ULB)** *s'il existe un entier* N *tel que (presque) tout point* $h \in \Sigma^{(0)}$ *est un sommet d'au plus* N *simplexes, et si de plus* $\Sigma^{(0)}$ *a un domaine fondamental de* ν*-mesure finie,*
- **de dimension** n*, resp.* **contractile***, resp.* n**-connexe***, si pour* μ *presque tout* $x \in X$*, le complexe simplicial* Σ_x *est de dimension* n*, resp. contractile, resp.* n*-connexe.*

Remarque : un $\mathcal{R}$-complexe simplicial ULB est nécessairement de dimension finie. Un complexe simplicial usuel n-connexe pour $n \geq 0$ ou contractile est non vide.

2.2.1. *Exemple : le* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial universel* On introduit maintenant un "espace classifiant" pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On doit bien entendu rapprocher cette construction de celle du classifiant d'un feuilletage ou d'un groupoïde défini par A. Haefliger [Hae71, 5] ou de celle donnée A. Connes dans ses cours (voir aussi [BCH94]). Ici, la trivialité des groupes d'isotropie permet même de considérer un espace très simple et naturel qui contient tous les $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux (lemme 2.8 ci-dessous).

Le *$\mathcal{R}$-complexe simplicial universel* $E\mathcal{R}$ est défini *comme le plus gros $\mathcal{R}$-complexe simplicial possible,* $(E\mathcal{R}^{(0)}, \pi)$ est la réunion disjointe d'une infinité dénombrable de copies de $(\mathcal{R}, \pi_l)$:

$$E\mathcal{R}^{(0)} := \coprod_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{R} = \{v = (x, y, i) : x, y \in X, x \sim y, i \in \mathbf{N}\} \text{ et } \pi(x, y, i) = x$$

et

$$E\mathcal{R}^{(n)} := \{(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in \underbrace{E\mathcal{R}^{(0)} * \cdots * E\mathcal{R}^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}} : v_s \neq v_t \text{ pour } s \neq t\}.$$

C'est un exemple de $\mathcal{R}$-complexe simplicial contractile. Il est de dimension infinie.

Un point $(v_0, v_1, \cdots, v_n) \in E\mathcal{R}^{(n)}$ où $v_s = (x, y_s, i_s)$ sera aussi noté $(x, (y_0, i_0), (y_1, i_1), \cdots, (y_n, i_n))$. Un domaine fondamental pour $E\mathcal{R}^{(0)}$ est donné par la réunion des diagonales de $\coprod_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{R}$, à savoir $\coprod_{i \in \mathbf{N}} D_i = \{v = (x, x, i) : x \in X, i \in \mathbf{N}\}$.

Une simple application du lemme 2.3 à $E\mathcal{R}^{(0)}$ permet de montrer :

Lemme **2.8.** — *Tout $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ se plonge de façon $\mathcal{R}$-équivariante comme un sous-complexe simplicial $\mathcal{R}$-invariant dans $E\mathcal{R}$.* □

2.2.2. *Exemple : graphages* Un *graphage sur* $\mathcal{R}$ est une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_j : \mathrm{A}_j \to \mathrm{B}_j)_{j\in \mathrm{I}}$ d'isomorphismes boréliens entre parties boréliennes A_j, B_j de X dont les graphes sont contenus dans $\mathcal{R}$ (voir [Lev95,Gab00a]), *i.e.* $\forall x \in \mathrm{A}_j$, $(x, \varphi_j(x)) \in \mathcal{R}$. Supposons que Φ n'a ni boucles ni arêtes doubles c'est-à-dire que les graphes des $\varphi_j^{\pm 1}$ ne rencontrent pas la diagonale de $\mathcal{R}$ et sont deux à deux disjoints. Un tel graphage Φ dans $\mathcal{R}$ définit un $\mathcal{R}$-complexe simplicial $\Sigma\Phi$ de dimension 1 :

$$\Sigma\Phi^{(0)} = \mathcal{R}, \qquad \Sigma\Phi^{(1)} = \cup_{j\in \mathrm{I}}\{(x, u, v) : x \sim u \sim v, v = \varphi_j^{\pm 1}(u)\},$$

où l'on note (x, u, v) au lieu de $((x, u), (x, v))$.

L'ensemble $\mathrm{F}^{(1)} = \cup_{j\in \mathrm{J}}\{(u, u, \varphi_j(u)) : u \in \mathrm{A}_j\} \cup \{(v, \varphi_j(v), v) : v \in \mathrm{A}_j\}$ forme un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{R}$ sur $\Sigma\Phi^{(1)}$.

Rappelons que le *coût de* Φ [Lev95,Gab00a] est défini par $\mathscr{C}(\Phi) = \sum_{j\in \mathrm{I}} \mu(\mathrm{A}_j)$ $= \frac{1}{2}\nu^1(\mathrm{F}^{(1)}) = \frac{1}{2}\nu^1(\Sigma\Phi^{(1)}/\mathcal{R})$ et que le *coût* $\mathscr{C}(\mathcal{R})$ *de la relation* $\mathcal{R}$ est défini comme l'infimum des coûts des graphages pour lesquels $\Sigma\Phi$ est connexe (= presque tous les $\Sigma\Phi_x$ sont connexes). Le graphage Φ est un *arborage* de $\mathcal{R}$ si $\Sigma\Phi$ est simplement connexe (= si chaque $\Sigma\Phi_x$ est un arbre). Dans ce cas, on a montré $\mathscr{C}(\Phi) = \mathscr{C}(\mathcal{R})$ [Gab00a, th. IV.1].

On peut montrer que $\mathcal{R}$ est *arborable* (elle admet un arborage) si et seulement si elle admet un $\mathcal{R}$-complexe simplicial contractile de dimension 1 (ou 0 si $\mathcal{R} = \mathrm{D}$ est triviale).

2.2.3. *Structure simpliciale sur* $\mathcal{R}$ Soit Σ un $\mathcal{R}$-complexe simplicial. L'espace quotient $\Sigma^{(0)}/\mathcal{R}$ s'identifie avec un borélien de $\mathrm{X} \times \mathbf{N}$. On appelle le quotient $\Sigma/\mathcal{R}$ une *structure simpliciale sur* $\mathcal{R}$. C'est un complexe simplicial *mesurable* sur l'ensemble des sommets $\Sigma^{(0)}/\mathcal{R}$. La mesure $\nu^n(\Sigma^{(n)}/\mathcal{R})$ est égale à celle d'un domaine fondamental F pour l'action de $\mathcal{R}$ sur $\Sigma^{(n)}$.

On peut voir l'espace quotient $\Sigma/\mathcal{R}$ comme une *lamination singulière* $\mathscr{L}$ dont les feuilles sont des complexes simpliciaux et où le 0-squelette $\Sigma^{(0)}/\mathcal{R}$ est une transversale totale. Si v_0 est un sommet de Σ_x, alors la feuille qui passe par le point $\bar{v}_0 = \mathcal{R}.v_0$ de $\Sigma^{(0)}/\mathcal{R}$ s'identifie à Σ_x.

3. Nombres de Betti L^2 d'une relation $\mathcal{R}$

3.1. *Chaînes* L^2 *d'un* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial*

Étant donné un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ, on dispose, associé au champ de complexes simpliciaux $x \mapsto \Sigma_x$, des *champs d'espaces de chaînes entières :*

$$x \mapsto \mathrm{C}_n(\Sigma_x, \mathbf{Z})$$

et des *champs d'espaces de chaînes* ℓ^2 *:*

$$x \mapsto C_n^{(2)}(\Sigma_x).$$

Le but de ce qui suit est essentiellement de munir ces champs d'espaces de Hilbert d'une structure de champs mesurables, de montrer que leurs intégrales hilbertiennes $C_n^{(2)}(\Sigma) = \int^{\oplus} C_n^{(2)}(\Sigma_x)d\mu(x)$ sont naturellement des $\mathscr{M}$-modules de Hilbert et de décrire comment on y calcule les $\mathscr{M}$-dimensions.

Toute section borélienne s du fibré $\Sigma^{(n)} \to X$ définit un champ de simplexes ordonnés ; elle définit donc un champ de vecteurs $x \mapsto s(x)$ à valeurs dans $C_n(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \subset C_n^{(2)}(\Sigma_x)$. Un champ de vecteurs $x \mapsto \sigma(x) \in C_n^{(2)}(\Sigma_x)$ est dit *borélien* si $x \mapsto \langle \sigma(x), s(x)\rangle_x$ est une fonction borélienne pour toute section borélienne s.

L'intégrale hilbertienne des espaces $C_n^{(2)}(\Sigma_x)$ est appelée *espace des n-chaînes* L^2 et notée :

$$C_n^{(2)}(\Sigma) := \int_X^{\oplus} C_n^{(2)}(\Sigma_x)d\mu(x).$$

Rappelons qu'elle est définie comme l'espace des champs de vecteurs boréliens σ qui sont de carré intégrable : $x \mapsto ||\sigma(x)||_x \in L^2(X, \mu)$, avec le produit scalaire $\langle \sigma, \sigma'\rangle = \int_X \langle \sigma(x), \sigma'(x)\rangle_x d\mu(x)$.

Rappelons que l'action du groupe fini $\mathfrak{S}_{n+1}$ de permutations des coordonnées de $\underbrace{\Sigma^{(0)} * \cdots * \Sigma^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}}$ sur $\Sigma^{(n)}$ commute avec celle de $\mathscr{R}$.

Soit $\Sigma_{ro}^{(n)}$ un domaine fondamental (borélien) $\mathscr{R}$-invariant pour cette action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur $\Sigma^{(n)}$. Il sélectionne mesurablement pour chaque $\mathscr{R}$-orbite de simplexes non ordonnés (constituée de $(n+1)!$ $\mathscr{R}$-orbites de simplexes ordonnés) *une* $\mathscr{R}$-orbite de représentants ordonnés (ro).

Soit F' un domaine fondamental (borélien) du $\mathscr{R}$-espace discret $\Sigma_{ro}^{(n)}$. C'est aussi un domaine fondamental pour l'action de $\mathscr{R} \times \mathfrak{S}_{n+1}$.

Soit $F' = \coprod_{j\in J} F'_j$ une partition (borélienne) de F' telle que la projection $\pi : \Sigma^{(n)} \to X$ soit injective sur chaque F_j.

La fonction caractéristique χ_{F_j} définit un champ de vecteurs $\sigma_j \in C_n^{(2)}(\Sigma)$, où :

$\sigma_j(x) = 0$ si x n'appartient pas à $\pi(F_j)$ et

$\sigma_j(x) \in C_n(\Sigma_x, \mathbf{Z})$ est le n-simplexe orienté associé au n-simplexe ordonné $\pi^{-1}(x) \in F_j$, sinon.

Définition **3.1.** — *On dit que* $(\sigma_j)_{j\in J}$ *est une* famille de champs de représentants *de* $\Sigma^{(n)}$.

On justifie l'existence de tels objets :

Une identification de Σ avec un sous-complexe $\mathscr{R}$-invariant de $E\mathscr{R}$ (lemme 2.8) assure qu'il suffit de montrer leur existence pour $E\mathscr{R}$, le cas général s'obtenant alors par restrictions. Puisque X est un borélien standard, on peut supposer que $X = [0, 1]$ et choisir un ordre total sur $X \times \mathbf{N}$. On peut alors prendre pour $E\mathscr{R}^{(n)}_{ro}$ l'ensemble des $(x, (y_0, i_0), (y_1, i_1), \cdots, (y_n, i_n))$ pour lesquels $(y_0, i_0) < (y_1, i_1) < \cdots < (y_n, i_n)$, et pour F' ajouter la condition $y_0 = x$.

On considère (*cf.* déf. 2.4) pour $g \in [\mathscr{R}]$ ou $\phi \in L^\infty(X, \mu)$, les opérateurs continus

$$\begin{aligned} &L^2(\Sigma^n, \nu^{n+1}) \longrightarrow L^2(\Sigma^n, \nu^{n+1}) \quad L^n_g.\, \eta(u) = \eta(g^{-1}.\, u) \\ &\text{et} \quad L^n_\phi.\, \eta(u) = \phi(\pi(u)).\, \eta(u). \end{aligned}$$

Proposition **3.2.**

(1) *Les opérateurs* L^n_g, L^n_ϕ *sur* $L^2(\Sigma^n, \nu^{n+1})$ *induisent sur les espaces* $C^{(2)}_n(\Sigma)$ *une structure de* $\mathscr{M}$*-module de Hilbert ; on note* L^n *la représentation correspondante de* $\mathscr{M}$.

(2) *Soit* H *un sous-espace fermé* $\mathscr{M}$*-invariant de* $C^{(2)}_n(\Sigma)$ *alors* $\dim_{\mathscr{M}}(H) = \sum_{j\in J_n} \langle p(\sigma_j), \sigma_j\rangle$ *où* p *est le projecteur orthogonal sur* H *et les* σ_j *parcourent une famille de champs de représentants de* $\Sigma^{(n)}$.

(3) *En particulier,* $\dim_{\mathscr{M}} C^{(2)}_n(\Sigma) = \frac{1}{(n+1)!}\nu^n(\Sigma^{(n)}/\mathscr{R})$.

Ce qu'on vient de définir fournit des isomorphismes naturels

$$C^{(2)}_n(\Sigma) \simeq L^2(\Sigma^{(n)}_{ro}, \nu^n) \simeq L^2(\Sigma^{(n)}/\mathfrak{S}_{n+1}, \nu^n).$$

On applique alors la proposition 2.5. La structure de $\mathscr{M}$-module de Hilbert ne dépend évidemment pas des choix. Pour différents choix, on obtient différents plongements isométriques $\mathscr{R}$-équivariants de $C^{(2)}_n(\Sigma)$ dans $\oplus_{j\in J} L^2(\mathscr{R}, \nu)$. Puisque $\mathscr{M}$ est engendrée par la représentation de $\mathscr{R}$ sur $L^2(\mathscr{R}, \nu)$, ces différents plongements sont $\mathscr{M}$-isomorphes. Le (3) s'obtient immédiatement par définition des champs de représentants et par 2.2.3. Le terme $\frac{1}{(n+1)!}$ vient de l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$. □

Retenons que l'espace $\Sigma^{(n)}/\mathfrak{S}_{n+1}$, quotient de l'action sur $\Sigma^{(n)}$ du groupe de permutations des coordonnées de $\underbrace{\Sigma^{(0)} * \cdots * \Sigma^{(0)}}_{n+1 \text{ fois}}$ est un $\mathscr{R}$-espace discret et qu'on a un isomorphisme naturel

$$C^{(2)}_n(\Sigma) \simeq L^2(\Sigma^{(n)}/\mathfrak{S}_{n+1}, \nu^n).$$

Définition **3.3.** — *Une* suite exhaustive de champs de vecteurs *est une suite de champs mesurables* $(\tau_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *à valeurs dans* $C_n(\Sigma_x, \mathbf{Z})$ *telle que pour tout x, la suite* $(\tau_i(x))_i$ *parcourt l'ensemble dénombrable* $C_n(\Sigma_x, \mathbf{Z})$ *tout entier.*

Prenons une famille de champs de représentants $(\sigma_j)_{j\in \mathrm{J}}$ et un groupe dénombrable G tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mathrm{G}}$. La famille dénombrable des $(\mathrm{L}^n_g\sigma_j)_{g\in \mathrm{G}, j\in \mathrm{J}_n}$ exhauste tous les n-simplexes. Les combinaisons linéaires à cœfficients entiers de ces champs forment une *suite exhaustive de champs de vecteurs.*

Définition **3.4.** — *Étant donnés deux $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux Σ et Σ', on appelle* champ borélien équivariant d'applications linéaires entières *la donnée pour chaque $x \in \mathrm{X}$ d'une application linéaire $t_x : \mathrm{C}_n(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \to \mathrm{C}_p(\Sigma'_x, \mathbf{Z})$ tel que*

(1) les champs $(t_x\tau_j)$ sont mesurables, pour une suite de champs de vecteurs $(\tau_j)_j$ telle que pour tout $x \in \mathrm{X}$, la suite $(\tau_j(x))_j$ engendre $\mathrm{C}_n(\Sigma_x, \mathbf{Z})$,

(2) $t_{g.x}\mathrm{L}^n_g = \mathrm{L}^p_g t_x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $g \in [\mathscr{R}]$.

De tels champs s'étendent en des champs d'applications linéaires densément définies sur les champs de chaînes ℓ^2. Les *champs d'applications bord* en fournissent des exemples :

$$\partial^x_n : \mathrm{C}_n(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \to \mathrm{C}_{n-1}(\Sigma_x, \mathbf{Z}).$$

Si les t_x sont uniformément bornés, le champ s'intègre en un opérateur borné $\mathrm{T} = \int^{\oplus} t_x d\mu(x)$ [Dix69, chap. II, §2], qui est $\mathscr{M}$-équivariant.

3.2. *Si la structure simpliciale est uniformément localement bornée*

Si Σ est uniformément localement borné (ULB)(déf. 2.7), alors les ∂^x_n sont uniformément bornés et s'intègrent en des opérateurs bornés $\mathscr{M}$-équivariants (on peut se référer au lemme 4.11) et on dispose alors d'un complexe de $\mathscr{M}$-modules de Hilbert :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} \mathrm{C}^{(2)}_0(\Sigma) \xleftarrow{\partial_1} \mathrm{C}^{(2)}_1(\Sigma) \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} \mathrm{C}^{(2)}_n(\Sigma) \xleftarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{C}^{(2)}_{n+1}(\Sigma) \xleftarrow{\partial_{n+2}} \cdots$$

Définition **3.5.** — *L'*homologie L^2 réduite du $\mathscr{R}$-complexe simplicial uniformément localement borné Σ *est constituée des $\mathscr{M}$-modules de Hilbert :*

$$\bar{\mathrm{H}}^{(2)}_n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu) = \mathrm{Ker}\ \ \partial_n/\overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}},$$

où $\overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}}$ est l'adhérence de $\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}$.

Leurs $\mathscr{M}$-dimensions donnent les nombres de Betti L^2 de Σ *:*

$$\beta_n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu) := \dim_{\mathscr{M}}(\bar{\mathrm{H}}^{(2)}_n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu)).$$

Définition **3.6.** — *Le $\mathscr{M}$-module $\bar{\mathrm{H}}^{(2)}_n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu)$ se plonge isométriquement dans* $\ker \partial_n \subset$ $\mathrm{C}^{(2)}_n(\Sigma)$ *comme supplémentaire orthogonal de $\overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}}$. L'image de ce plongement,*

$$\mathscr{H}^{(2)}_n(\Sigma) := \mathrm{Ker}\ \partial_n \ominus \overline{\mathrm{Im}\ \ \partial_{n+1}}$$

est appelé l'espace des n-chaînes harmoniques L^2 *de* Σ.

De même, dualement, avec les opérateurs $\partial_{n+1}^* : C_n^{(2)}(\Sigma) \to C_{n+1}^{(2)}(\Sigma)$, on définit la *cohomologie réduite* $\bar{H}_{(2)}^n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu) = \operatorname{Ker} \partial_{n+1}^* / \overline{\operatorname{Im} \ \partial_n^*}$ et l'espace des *cochaînes harmoniques*

$$\mathscr{H}_{(2)}^n(\Sigma) := \operatorname{Ker} \partial_{n+1}^* \ominus \overline{\operatorname{Im} \ \partial_n^*}.$$

On a des isomorphismes naturels de $\mathscr{M}$-modules de Hilbert

$$\bar{H}_n^{(2)}(\Sigma) \simeq \mathscr{H}_n^{(2)}(\Sigma) = \operatorname{Ker} \Delta_n = \mathscr{H}_{(2)}^n(\Sigma) \simeq \bar{H}_{(2)}^n(\Sigma)$$

où Δ_n est le laplacien $\Delta_n = \partial_n^* \partial_n + \partial_{n+1} \partial_{n+1}^*$ sur $C_n^{(2)}(\Sigma)$.

3.3. *Dans le cas général (structure simpliciale non nécessairement ULB)*

Soit $\mathfrak{C}_\Sigma$ la catégorie dont les objets sont tous les sous-complexes simpliciaux $\mathscr{R}$-invariants uniformément localement bornés de Σ et dont les seuls morphismes sont les inclusions. À une telle inclusion $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$ correspond en homologie le morphisme

$$J_{\alpha,\beta} : \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma_\alpha, \mathscr{R}, \mu) \to \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma_\beta, \mathscr{R}, \mu).$$

Posons

$$\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) := \dim_{\mathscr{M}} \overline{\operatorname{Im} \ (J_{\alpha,\beta})}.$$

Pour des $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta \subset \Sigma_\gamma$, on a $J_{\alpha,\gamma} = J_{\beta,\gamma} J_{\alpha,\beta}$. Pour les $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$, la fonction ∇_n est décroissante en Σ_β et croissante en Σ_α (par le théorème du rang 1.2).

Définition **3.7.** — *L'***homologie** L^2 **réduite** *du $\mathscr{R}$-complexe simplicial Σ est la limite inductive suivant $\mathfrak{C}_\Sigma$:*

$$\bar{H}_n^{(2)}(\Sigma, \mathscr{R}, \mu) = \lim_{\mathfrak{C}_\Sigma} \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma_\alpha, \mathscr{R}, \mu).$$

*On appelle n***-ième nombre de Betti** L^2 *de Σ la quantité :*

$$\text{(3.7.*)} \qquad \beta_n(\Sigma, \mathscr{R}, \mu) = \sup\Big\{\inf\big\{\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) : \Sigma_\beta \in \mathfrak{C}_\Sigma, \Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta\big\} : \Sigma_\alpha \in \mathfrak{C}_\Sigma\Big\}.$$

Proposition **3.8.** — *Si Σ est ULB, alors ces définitions coïncident avec celle de (3.5).*

Remarque-Démonstration de 3.8. — Une preuve directe s'obtient en appliquant le lemme 4.2.(1), après avoir remarqué que par décroissance de ∇_n pour α fixé, $\inf_{\beta\geq\alpha}\left\{\nabla_n(\Sigma_\alpha,\Sigma_\beta)\right\} = \nabla_n(\Sigma_\alpha,\Sigma)$.

Une approche alternative est intéressante : la limite inductive $\bar{\mathrm{H}}_n^{(2)}(\Sigma,\mathscr{R},\mu)$ est un $\mathscr{M}$-module (pas nécessairement de Hilbert). Il possède une $\mathscr{M}$-dimension généralisée au sens de W. Lück. Cette dimension prolonge la dimension de von Neumann et est précisément donnée par la formule (3.7.$*$) [Lüc98a, th. 2.9]. Si Σ est ULB, $\mathfrak{C}_\Sigma$ a pour objet final Σ et les définitions de l'homologie coïncident donc. Le résultat de W. Lück permet de conclure que les nombres de Betti dans les deux définitions sont les mêmes.

Proposition **3.9.** — *Soit* $(\Sigma_s)_{s\in\mathbf{N}}$ *une suite croissante exhaustive de sous-complexes* $\mathscr{R}$*-invariants ULB de* Σ*. Alors*

$$\beta_n(\Sigma,\mathscr{R},\mu) = \lim_{s\to\infty}\nearrow \lim_{t\geq s\ t\to\infty}\searrow \nabla_n(\Sigma_s,\Sigma_t).$$

Autrement dit, dans la formule (3.7.$*$), on peut remplacer $\mathfrak{C}_\Sigma$ par n'importe quelle suite croissante exhaustive. Cette proposition essentielle sera prouvée en section 4.1.

3.4. *Si* $\mathscr{R}$ *est donnée par une action libre de* Γ

Supposons dans cette section que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence définie par une action libre préservant la mesure d'un groupe dénombrable discret Γ.

Définition **3.10.** — *Soit* K *un complexe simplicial dénombrable sur lequel* Γ *agit librement et simplicialement. L'espace*

$$\Sigma\mathrm{K} := \mathrm{X}\times\mathrm{K}$$

est muni de l'action diagonale *de* Γ*. Cette action s'étend en une* $\mathscr{R}$*-action pour faire de* $\Sigma\mathrm{K}$ *un* $\mathscr{R}$-complexe simplicial*. Plus précisément, l'espace* $\Sigma\mathrm{K}^{(0)} := \mathrm{X}\times\mathrm{K}^{(0)}$ *est un espace fibré standard de la façon la plus naturelle :* $\pi(x,s) = x$*. L'action diagonale de* Γ *sur* $\mathrm{X}\times\mathrm{K}^{(0)}$ *s'étend en une action discrète de* $\mathscr{R}$ *:* $(\gamma.x,x).(x,s) = (\gamma.x,\gamma.s)$*. Les espaces de n-simplexes ordonnés s'obtiennent à partir de ceux de* K *:* $\Sigma\mathrm{K}^{(n)} = \mathrm{X}\times\mathrm{K}^{(n)}$.

Une identification mesurable Θ de $\Sigma\mathrm{K}$ avec un sous-complexe $\mathscr{R}$-invariant de $\mathrm{E}\mathscr{R}$ s'obtient comme suit : choisissons un ensemble $\{s_0,s_1,s_2\cdots\}$ de représentants des orbites de Γ sur le 0-squelette K^0 de K (*i.e.* un sommet par Γ-orbite de sommets). Posons $\Theta(x,\gamma_0 s_j) = (x,\gamma_0^{-1}x,j)\in\mathrm{E}\mathscr{R}^{(0)}$ pour $(x,\gamma_0 s_j)\in\Sigma\mathrm{K}^{(0)}$. Alors via Θ, l'action de Γ n'est que sur la première coordonnée :

$$\gamma.\big(x,\gamma_0^{-1}x,j\big) = \Theta(\gamma.(x,\gamma_0 s_j)) = \big(\gamma.x,(\gamma\gamma_0)^{-1}\gamma.x,j\big) = \big(\gamma.x,\gamma_0^{-1}x,j\big).$$

Plus généralement, si σ est un n-simplexe ordonné de K de la forme $\sigma = (\gamma_0 s_{j_0}, \gamma_1 s_{j_1}, \cdots, \gamma_n s_{j_n})$, on a $\Theta(\gamma(x,\sigma)) = \big(\gamma x, (\gamma_0^{-1}x, j_0), (\gamma_1^{-1}x, j_1), \cdots, (\gamma_n^{-1}x, j_n)\big)$. Chaque $\Sigma\mathrm{K}_x$ basé en (x, s_0) s'identifie avec K basé en s_0.

Théorème **3.11.** — *Si* Γ *agit librement en préservant la probabilité* μ *sur* X *et si* Γ *agit librement sur le complexe simplicial* K*, alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$\beta_n(\mathrm{K}, \Gamma) = \beta_n(\Sigma\mathrm{K}, \mathscr{R}).$$

Ce théorème sera démontré en section 4.2.

Théorème **3.12.** — *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *admettent des actions libres préservant la probabilité* μ *sur* X *qui produisent la même relation d'équivalence* $\mathscr{R}$*, alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,*

$$\beta_n(\Gamma_1) = \beta_n(\Gamma_2).$$

La preuve est très simple maintenant que les objets sont définis et quand on dispose du théorème 3.11.

Démonstration du théorème 3.12. — Soient $\mathrm{K}_1 = \mathrm{E}\Gamma_1$ et $\mathrm{K}_2 = \mathrm{E}\Gamma_2$ les revêtements universels des espaces classifiants de Γ_i obtenus en prenant le joint infini de Milnor d'une infinité dénombrables de copies de Γ_i. Les nombres $\beta_n(\mathrm{K}_i, \Gamma_i)$ sont les nombres de Betti ℓ^2 de Γ_i. Considérons les $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux associés $\Sigma\mathrm{K}_1$ et $\Sigma\mathrm{K}_2$ (ils s'identifient à l'espace introduit dans [Hae71, 5]). Quitte à ôter une partie négligeable de X, ils s'identifient l'un avec l'autre. Plus précisément leurs images dans $\mathrm{E}\mathscr{R}$ via les applications Θ sont identiques. En effet, $\Sigma\mathrm{K}_i^{(0)} \simeq \mathrm{E}\mathscr{R}^{(0)}$ puisqu'on a une infinité d'orbites de sommets dans K_i, indexées par les entiers ; les n-simplexes sont formés de tous les $n+1$-uplets de points $v_i = (x, y_i, j_i)$ qui sont dans la même fibre (même x) et dont les j_i sont deux à deux distincts. Par conséquent, grâce au théorème 3.11 :

$$\begin{aligned} \beta_n(\Gamma_1) = \beta_n(\mathrm{K}_1, \Gamma_1) &= \beta_n(\Sigma\mathrm{K}_1, \mathscr{R}) \\ &= \beta_n(\Sigma\mathrm{K}_2, \mathscr{R}) \\ &= \beta_n(\mathrm{K}_2, \Gamma_2) = \beta_n(\Gamma_2). \end{aligned}$$

□

3.5. *Nombres de Betti* L^2 *de la relation*

Théorème **3.13.** — *Tous les* $\mathscr{R}$*-complexes simpliciaux* p*-connexes ont le même nombre de Betti* β_p*. Si* Σ *et* Ψ *sont deux* $\mathscr{R}$*-complexes simpliciaux tels que* Σ *soit* p*-connexe et* Ψ *soit* $(p-1)$*-connexe, alors*

$$\beta_p(\Sigma, \mathscr{R}) \leq \beta_p(\Psi, \mathscr{R}).$$

Ce théorème est le résultat central de ce papier. Il sera démontré en section 4.3.

Définition **3.14.** — *On appelle alors n*-**ième nombre de Betti** L^2 **de la relation d'équivalence** $\mathcal{R}$ *et on note*

$$\beta_n(\mathcal{R},\mu)$$

le n-ième nombre de Betti L^2 *de n'importe quel* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial n-connexe, par exemple celui de son* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial universel* $\mathrm{E}\mathcal{R}$ *(voir section 2.2.1).*

Propriétés **3.15.** — *1. Si les classes de* $\mathcal{R}$ *sont infinies, alors* $\beta_0(\mathcal{R}) = 0$.
2. Si Σ *est de dimension* $\leq p$*, alors pour tout* $n > p$ *on a* $\beta_n(\Sigma,\mathcal{R},\mu) = 0$.

Seul l'item (1) demande une explication. Si Σ est un $\mathcal{R}$-complexe simplicial ULB et si $\sigma \in \mathscr{H}^0_{(2)}(\Sigma,\mathcal{R},\mu)$, alors σ est constante sur les composantes connexes, donc nulle sur les composantes connexes infinies. Il suffit alors de trouver un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ connexe de dimension 1 et une suite croissante exhaustive (Σ_s) de sous-complexes ULB à composantes connexes infinies (et donc vérifiant $\mathscr{H}^0_{(2)}(\Sigma_s,\mathcal{R},\mu) = \{0\}$ pour tout s). Pour ce faire, considérons une sous-relation de $\mathcal{R}$ hyperfinie à classes infinies (*cf.* 1.11). Elle est engendrée par un isomorphisme $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Soit $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_j, \cdots)$ un graphage sur $\mathcal{R}$ qui engendre $\mathcal{R}$ (*i.e.* pour lequel les $\Sigma\Phi$ sont connexes, *cf.* exemple 2.2.2) et qui contient φ. La suite de $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux $\Sigma\Phi_s$ associée aux graphages $\Phi_s = (\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_s)$ vérifie la condition. □

On obtient comme corollaires du théorème :

Corollaire **3.16.** — *Si* $\mathcal{R}$ *est produite par une action libre de* Γ *préservant* μ *sur* X*, alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$

$$\beta_n(\mathcal{R},\mu) = \beta_n(\Gamma).$$

Corollaire **3.17.** — *S'il existe un* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial contractile de dimension* $\leq p$*, alors* $\beta_n(\mathcal{R}) = 0$*, pour* $n > p$.

Si $\mathcal{R}$ *est produite par une action libre de* Γ *et si* $\mathcal{R}$ *admet un* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial contractile de dimension* $\leq p$*, alors* $\beta_n(\Gamma) = 0$*, pour tout* $n > p$.

Définition **3.18.** — *On appelle* **dimension géométrique de** $\mathcal{R}$ *le minimum des dimensions des* $\mathcal{R}$*-complexes simpliciaux contractiles.*

Par exemple, les relations $\mathcal{R}$ dont (presque) toutes les orbites sont finies sont de dimension 0. Une relation d'équivalence arborable est de dimension 0 ou 1 selon que ses orbites sont presque toutes finies ou non. Si $\beta_p(\mathcal{R}) \neq 0$ alors la dimension géométrique de $\mathcal{R}$ est $\geq p$. Les groupes qui apparaissent dans le corollaire 0.3

– $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell}$, $p_j \geq 2$,
– groupes libres $\mathbf{F}_p$,
– $(\mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_n) * \mathbf{F}_k$,

ont des actions libres sur des complexes simpliciaux contractiles de dimensions respectives $p = \ell, 1, 2$. Par ailleurs leurs nombres de Betti ℓ^2 sont tous nuls

– sauf $\beta_\ell = \prod_{j=1}^{\ell}(p_j - 1)$,
– sauf $\beta_1 = p - 1$,
– sauf $\beta_1 = k$, $\beta_2 = (m-1)\cdot(n-1)$.

Ainsi, si les p_j, p, m, n sont non nuls, les relations d'équivalence produites par des actions libres de ces groupes sont de dimensions géométriques respectives $p = \ell, 1, 2$.

3.6. *Inégalités de Morse-Caractéristique d'Euler*

Soit Σ un $\mathscr{R}$-complexe simplicial. Posons $\alpha_i(\Sigma) = \dim_{\mathscr{M}} \mathrm{C}_i^{(2)}(\Sigma) = \frac{\nu^i(\Sigma^{(i)}/\mathscr{R})}{(i+1)!}$.

Proposition **3.19.** — *(Inégalités de Morse) Si les $\alpha_i(\Sigma)$ sont finis pour $i = 0, \cdots, n$, alors :*

$$\alpha_n(\Sigma) - \alpha_{n-1}(\Sigma) + \cdots + (-1)^n\alpha_0(\Sigma) \geq \beta_n(\Sigma) - \beta_{n-1}(\Sigma) + \cdots + (-1)^n\beta_0(\Sigma).$$

Cette proposition sera démontrée en section 4.4.

On appelle **caractéristique d'Euler** de Σ la somme alternée des mesures des espaces de i-simplexes (non ordonnés), lorsque la somme de cette série a un sens (par exemple si les $\alpha_i(\Sigma)$ sont finis et cette série convergente) :

$$\chi(\Sigma) = \sum_i \frac{(-1)^i}{(i+1)!}\nu^i(\Sigma^{(i)}/\mathscr{R}) = \sum_i (-1)^i\alpha_i(\Sigma).$$

De même si les sommes des séries existent, on définit la **caractéristique d'Euler** L^2 **de** Σ et la **caractéristique d'Euler** L^2 **de** $\mathscr{R}$:

$$\chi^{(2)}(\Sigma) = \sum_i (-1)^i\beta_i(\Sigma)$$
$$\chi^{(2)}(\mathscr{R}) = \sum_i (-1)^i\beta_i(\mathscr{R}).$$

Proposition **3.20.** — *(formule d'Euler-Poincaré-Atiyah) Si la caractéristique d'Euler de Σ est bien définie, alors la caractéristique d'Euler L^2 de Σ est bien définie et ces deux quantités sont égales :*

$$\chi(\Sigma) = \chi^{(2)}(\Sigma).$$

Démonstration de la proposition 3.20. — Les inégalités de Morse fournissent les encadrements :

$$\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i\alpha_i(\Sigma) \leq \sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i\beta_i(\Sigma) \leq \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\beta_i(\Sigma) \leq \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\alpha_i(\Sigma).$$

Cela assure la convergence de la caractéristique d'Euler L^2 de Σ et l'égalité annoncée. □

On rappelle, avec la même preuve que [Eck00, th. 4.1.1], le lien entre $\beta_1(\Gamma)$ et les présentations de Γ, pour Γ de type fini :

Corollaire **3.21.** — *Si Γ est de type fini, alors pour toute présentation de Γ à g générateurs et r relations, on a l'inégalité : $g \leq 1 + \beta_1(\Gamma) + r$.*

Si Γ est infini, de présentation finie, il agit librement sur le revêtement universel de son complexe de Cayley, qui est un CW-complexe de dimension 2 simplement connexe, à 1 (resp. g, resp. r) cellules de dimension 0 (resp. 1, resp. 2). Il agit alors librement sur un complexe simplicial K tel que $1-g+r = \alpha_0(\Sigma\mathrm{K}) - \alpha_1(\Sigma\mathrm{K}) + \alpha_2(\Sigma\mathrm{K}) = \beta_0(\Sigma\mathrm{K}) - \beta_1(\Sigma\mathrm{K}) + \beta_2(\Sigma\mathrm{K}) \geq -\beta_1(\Gamma)$. □

Lorsque Σ est ULB (donc de dimension finie) et $\Sigma^{(0)} = \mathscr{R}$, la caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma)$ s'interprète bien sûr comme une courbure moyenne sur les sommets $x \in \mathrm{X}$ des complexes simpliciaux Σ_x, où la courbure au sommet x est la somme alternée des nombres, pondérés par $\frac{1}{i+1}$, de i-simplexes ordonnés contenant x (voir aussi [Ele97, th. 2]).

Proposition **3.22.** — *Si $\mathscr{R}$ est produite par une action libre de Γ et si la caractéristique d'Euler virtuelle de Γ est bien définie (voir par exemple [Bro82, IX.7]) alors*

$$\chi_{virt}(\Gamma) = \chi^{(2)}(\mathscr{R}).$$

En effet, on sait que la caractéristique d'Euler virtuelle est égale à la somme alternée des nombres de Betti ℓ^2 de Γ (= la caractéristique d'Euler ℓ^2 de Γ [CG86, prop. 0.4 et (0.25)]). On conclut à l'aide du théorème 3.16.

Corollaire **3.23.** — *On a une inégalité $\mathscr{C}(\mathscr{R}) - 1 \geq \beta_1(\mathscr{R}) - \beta_0(\mathscr{R})$, entre le coût et les premiers nombres de Betti L^2 de $\mathscr{R}$. Si $\mathscr{R}$ est une relation arborable, alors on obtient l'égalité.*

Démonstration. — Si Φ est un graphage de la relation $\mathscr{R}$, comme dans l'exemple 2.2.2, alors $\dim_{\mathscr{M}} \mathrm{C}_1^{(2)}(\Sigma\Phi) = \alpha_1 = \mathscr{C}(\Phi)$. L'égalité de la proposition 3.20 entre les caractéristiques d'Euler (avec $\alpha_0 = 1$), et l'inégalité du théorème 3.13 assurent pour tout graphage Φ de $\mathscr{R}$: $\mathscr{C}(\Phi) - 1 = \beta_1(\Sigma\Phi) - \beta_0(\Sigma\Phi) \geq \beta_1(\mathscr{R}) - \beta_0(\mathscr{R})$, avec égalité si Φ est un arborage. Les énoncés s'en déduisent par définition de $\mathscr{C}(\mathscr{R})$ comme infimum (exemple 2.2.2). □

Question. — *On ne connaît aucun exemple d'inégalité stricte. A-t-on toujours l'égalité* $\mathscr{C}(\mathscr{R})-1=\beta_1(\mathscr{R})-\beta_0(\mathscr{R})$ *?*

Plus généralement, a-t-on toujours l'égalité $\inf\{\alpha_n(\Sigma)-\alpha_{n-1}(\Sigma)+\cdots+(-1)^n\alpha_0(\Sigma)\}=\beta_n(\mathscr{R})-\beta_{n-1}(\mathscr{R})+\cdots+(-1)^n\beta_0(\mathscr{R})$, *où l'infimum est pris sur tous les* $\mathscr{R}$*-complexes simpliciaux* $(n-1)$*-connexes ?*

4. Démonstrations

On dit qu'un morphisme de $\mathscr{M}$-modules $h:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ est un **ϵ-isomorphisme** si son noyau Ker (h) et son "conoyau" $\mathrm{B}/\overline{\mathrm{Im}\ (h)}$ sont de $\mathscr{M}$-dimensions inférieures à ϵ.

On note

$$d(\Sigma,\Sigma')=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}\nu^j((\Sigma^{(j)}\Delta\Sigma'^{(j)})/\mathscr{R})$$

(où $\Sigma^{(j)}\Delta\Sigma'^{(j)}$ est la différence symétrique) la "distance" entre deux sous-complexes simpliciaux $\mathscr{R}$-invariants d'un $\mathscr{R}$-complexe simplicial donné, quantité finie lorsque les structures sont ULB.

Lemme **4.1.** — *Considérons un diagramme commutatif :* $\begin{array}{ccc}\mathrm{A} & \xrightarrow{s} & \mathrm{C}\\ g\downarrow & & \downarrow h\\ \mathrm{B} & \xrightarrow{t} & \mathrm{D}\end{array}$ *de* $\mathscr{M}$*-modules de Hilbert. Si* $\dim_{\mathscr{M}}\mathrm{Ker}\ (t)\leq\epsilon$ *et* $\dim_{\mathscr{M}}\mathrm{C}/\overline{s(\mathrm{A})}\leq\epsilon$ *alors la restriction* $t':\overline{\mathrm{Im}\ (g)}\longrightarrow\overline{\mathrm{Im}\ (h)}$ *de* t *est un* ϵ*-isomorphisme.*

Démonstration du lemme 4.1. — Par commutation, t' est bien défini. Son noyau est contenu dans celui de t. Par ailleurs h induit entre $\mathrm{C}/\overline{s(\mathrm{A})}$ et $\overline{\mathrm{Im}\ h}/\overline{\mathrm{Im}\ h\circ s}=\overline{\mathrm{Im}\ h}/\overline{\mathrm{Im}\ t'}$ un morphisme surjectif. Le théorème du rang 1.2 permet de conclure. □

Rappelons qu'on note $\nabla_n(\Sigma',\Sigma)$ la $\mathscr{M}$-dimension de l'adhérence de l'image de $\bar{\mathrm{H}}_n^{(2)}(\Sigma')\xrightarrow{j}\bar{\mathrm{H}}_n^{(2)}(\Sigma)$.

Lemme **4.2.** — *Soit* Σ *un* $\mathscr{R}$*-complexe simplicial ULB.*

(1) Si Σ' *est un sous-complexe* $\mathscr{R}$*-invariant de* Σ *alors les applications linéaires induites en homologie par l'inclusion* $\bar{\mathrm{H}}_n^{(2)}(\Sigma')\xrightarrow{j}\bar{\mathrm{H}}_n^{(2)}(\Sigma)$, *sont des* $d(\Sigma,\Sigma')$*-isomorphismes.*

(2) Si on a quatre sous-complexes $\mathscr{R}$*-invariants de* Σ *tels que* $\begin{array}{ccc}\Sigma_1 & \subset & \Sigma_2\\ \cup & & \cup\\ \Sigma_3 & \subset & \Sigma_4\end{array}$ *, alors pour tout* n

$$|\nabla_n(\Sigma_1,\Sigma_2)-\nabla_n(\Sigma_3,\Sigma_4)|\leq\max\{d(\Sigma_1,\Sigma_3),d(\Sigma_2,\Sigma_4)\}.$$

Démonstration du lemme 4.2. — Σ est de dimension finie $\leq p$ puisque ULB. La somme $d(\Sigma, \Sigma')$ est finie. Les applications linéaires d'inclusion $C_n^{(2)}(\Sigma') \xrightarrow{i} C_n^{(2)}(\Sigma)$ sont des plongements isométriques, entre espaces de $\mathscr{M}$-dimensions respectives $\frac{\nu^n(\Sigma'^{(n)}/\mathscr{R})}{(n+1)!}$ et $\frac{\nu^n(\Sigma^{(n)}/\mathscr{R})}{(n+1)!}$. Ce sont donc des $d(\Sigma, \Sigma')$-isomorphismes. Ils commutent avec les opérateurs bord ∂_n (notés ∂'_n lorsqu'ils concernent Σ'). On applique le lemme 4.1 pour montrer que les $\mathscr{M}$-dimensions des espaces $\overline{\mathrm{Im}\ (\partial_{n-1})}$ et $\overline{\mathrm{Im}\ (\partial'_{n-1})}$ diffèrent d'au plus $d(\Sigma, \Sigma')$. On utilise alors les décompositions orthogonales :

(a) $C_n^{(2)}(\Sigma') = \mathrm{Ker}\ (\partial'_n)^{\perp} \oplus \overline{\mathrm{Im}\ (\partial'_{n-1})} \oplus \mathscr{H}'_n$

(b) $C_n^{(2)}(\Sigma) = \mathrm{Ker}\ (\partial_n)^{\perp} \oplus i\big(\overline{\mathrm{Im}\ (\partial'_{n-1})}\big) \oplus \Big(\overline{\mathrm{Im}\ (\partial_{n-1})} \ominus i\big(\overline{\mathrm{Im}\ (\partial'_{n-1})}\big)\Big) \oplus \mathscr{H}_n.$

L'espace $\mathscr{H}'_n \simeq \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma')$ se plonge par i dans les deux derniers termes de (b). Le noyau de j est donc isomorphe à un sous-espace de $\big(\overline{\mathrm{Im}\ (\partial_{n-1})} \ominus i(\overline{\mathrm{Im}\ (\partial'_{n-1})})\big)$, de $\mathscr{M}$-dimension $\leq d(\Sigma, \Sigma')$. On applique le lemme 4.1 à
$$\begin{array}{ccc} C_n(\Sigma') & \xrightarrow{i} & C_n(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\Sigma') & \xrightarrow{j} & H_n(\Sigma) \end{array}$$
pour montrer (1). La partie (2) s'en déduit encore par une application du lemme 4.1. □

4.1. *Démonstration de la proposition 3.9*

Soit $s \in \mathbf{N}$ fixé. Montrons :

Lemme **4.3.** — $\inf\{\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) : t \geq s\} = \inf\{\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_\beta) : \Sigma_\beta \in \mathfrak{C}_\Sigma, \Sigma_\beta \supset \Sigma_s\}.$

On a *a priori* une inégalité $\geq$. Pour tout $\Sigma_\beta \supset \Sigma_s$, on a $\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) \leq \nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_\beta \cap \Sigma_t)$. Par exhaustion, pour tout $\epsilon > 0$, il existe t_0 à partir duquel $d(\Sigma_\beta \cap \Sigma_t, \Sigma_\beta) \leq \epsilon$. Alors grâce au lemme 4.2.(2), $\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_\beta \cap \Sigma_t) \leq \nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_\beta) + 3\epsilon$. Cela permet de montrer l'autre inégalité. Montrons maintenant :

Lemme **4.4.** — $\sup\{\inf\{\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) : t \geq s\} : s \in \mathbf{N}\} = \sup\{\inf\{\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) : \Sigma_\beta \supset \Sigma_\alpha\} : \Sigma_\alpha \in \mathfrak{C}_\Sigma\}.$

Vu ce qui précède, on a *a priori* une inégalité $\leq$. Pour tout $\Sigma_\alpha \in \mathfrak{C}_\Sigma$ et tout $t \geq s$, on a $\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) \geq \nabla_n(\Sigma_s \cap \Sigma_\alpha, \Sigma_t \cup \Sigma_\alpha)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe s_0 à partir duquel $d(\Sigma_s \cap \Sigma_\alpha, \Sigma_\alpha) \leq \epsilon$. Alors (lemme 4.2.(2)),

$\nabla_n(\Sigma_s \cap \Sigma_\alpha, \Sigma_t \cup \Sigma_\alpha) \geq \nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_t \cup \Sigma_\alpha) - 3.\epsilon \geq \inf\{\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) : \Sigma_\beta \supset \Sigma_\alpha\} - 3.\epsilon.$

Ainsi, $\sup\{\inf\{\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) : t \geq s\} s \in \mathbf{N}\} = \sup\{\inf\{\nabla_n(\Sigma_s, \Sigma_t) : t \geq s\} s \geq s_0\} \geq \inf\{\nabla_n(\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta) : \Sigma_\beta \supset \Sigma_\alpha\} - 3.\epsilon$. L'autre inégalité s'en déduit. □

4.2. *Démonstration du théorème 3.11*

On commence par montrer ce théorème dans le cas où K est cocompact. On montre mieux :

Lemme **4.5.** — *Soient* $K_1 \subset K_2$ *deux sous-complexes* Γ*-invariants* **cocompacts** *de* K*, soient* j *et* J *les opérateurs induits en homologie (ou sur les chaînes harmoniques) par l'inclusion. On a :*

$$\begin{aligned}\nabla_n(\Sigma K_1, \Sigma K_2) &:= \dim_{\mathscr{M}}(\mathrm{Im}\ \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma K_1) \xrightarrow{J} \bar{H}_n^{(2)}(\Sigma K_2)) \\ &= \dim_\Gamma(\mathrm{Im}\ \bar{H}_n^{(2)}(K_1) \xrightarrow{j} \bar{H}_n^{(2)}(K_2)).\end{aligned}$$

Si $\tau \in C^n_{(2)}(K)$ est une n-cochaîne de K, on appelle τ_Θ la n-cochaîne associée de $C^n_{(2)}(\Sigma K)$ dont les valeurs ne dépendent pas de x : $\tau_\Theta c(x,\sigma) = \tau(\sigma)$. De même pour les chaînes.

Si σ est une (co)-chaîne L^2 de ΣK, on appelle $\sigma(x)$ la (co)-chaîne ℓ^2 de K_x correspondante ; bien définie pour μ-presque tout $x \in X$.

Si h est un opérateur borné défini sur les (co)-chaînes de K_i, on note $\int h$ l'opérateur associé sur les (co)-chaînes de ΣK_i, donné par $(\int h(\sigma))_x = h(\sigma(x))$. Il est clair que les opérateurs bord, cobord, laplacien et l'opérateur d'inclusion de K_i s'intègrent en les opérateurs correspondants de ΣK_i. Considérons une chaîne $\sigma \in C_n^{(2)}(\Sigma K_i)$. On a clairement :

$\sigma \in \mathrm{Ker}\ (\int h)$ si et seulement si pour μ-presque tout $x \in X$ la chaîne $\sigma(x) \in \mathrm{Ker}\ h$.

En particulier, σ est harmonique si et seulement si $\sigma(x)$ est harmonique pour μ-presque tout $x \in X$. On a aussi :

$\sigma \in \mathrm{Ker}\ (\int h)^\perp$ si et seulement si pour μ-presque tout $x \in X$ la chaîne $\sigma(x) \in \mathrm{Ker}\ h^\perp$.

En effet, si $\sigma \in \mathrm{Ker}\ (\int h)^\perp$ alors pour tout τ dans Ker h, $\langle \sigma, \tau_\Theta \rangle = 0$ donc pour μ-presque tout $x \in X$, $\langle \sigma(x), \tau \rangle = 0$. On obtient l'implication $\Rightarrow$ en faisant parcourir à τ une famille dénombrable totale. Inversement, $\langle \sigma, \sigma' \rangle = 0$ dès lors que, pour μ-presque tout $x \in X$, $\sigma'(x) \in \mathrm{Ker}\ h$.

Cela suffit pour montrer que les projecteurs orthogonaux (p_ϵ et P_ϵ pour $\epsilon = 1, 2$) sur les n-chaînes harmoniques de K_ϵ et de ΣK_ϵ se correspondent par intégration, de même que ceux (p_j et P_J) sur le noyau de j et J.

Soient $\tau_1, \cdots, \tau_s$ une famille de représentants des n-simplexes ordonnés de K_1 (on a choisi un simplexe ordonné pour chaque Γ-orbite de simplexes). Par définition de la Γ-dimension, on a :

$$\dim_\Gamma \mathscr{H}_n(K_1) = \mathrm{Tr}(p_1) = \sum_i \langle p_1 \tau_i, \tau_i \rangle$$

$$\dim_\Gamma \mathrm{Ker}\ j = \mathrm{Tr}(p_j) = \sum_i \langle p_j \tau_i, \tau_i \rangle$$

La famille des $\tau_{i\Theta}$ est une famille de représentants des n-simplexes ordonnés de ΣK_1. Par définition de la $\mathscr{M}$-dimension, on a :

$$\dim_{\mathscr{M}} \mathscr{H}_n(\Sigma K_1) = \mathrm{Tr}(P_1) = \sum_i \langle P_1 \tau_{i\Theta}, \tau_{i\Theta} \rangle$$
$$\dim_{\mathscr{M}} \mathrm{Ker}\, J = \mathrm{Tr}(P_J) = \sum_i \langle P_J \tau_{i\Theta}, \tau_{i\Theta} \rangle$$

Par définition du produit scalaire sur $C_n^{(2)}(\Sigma K_1)$, on a

$$\langle P_1 \tau_{i\Theta}, \tau_{i\Theta} \rangle = \int_X \langle P_1 \tau_{i\Theta}(x), \tau_{i\Theta}(x) \rangle_x d\mu(x) = \int_X \langle p_1 \tau_i, \tau_i \rangle d\mu(x) = \langle p_1 \tau_i, \tau_i \rangle$$

et de même pour P_J. Cela montre $\dim_\Gamma \mathscr{H}_n(K_1) = \dim_{\mathscr{M}} \mathscr{H}_n(\Sigma K_1)$ et $\dim_\Gamma \mathrm{Ker}\, j = \dim_{\mathscr{M}} \mathrm{Ker}\, J$ et, par le théorème du rang 1.2, l'égalité des dimensions des images de j et J. Cela montre le lemme.

Une suite croissante exhaustive $(K_s)_s$ de sous-complexes Γ-invariants cocompacts permet de calculer $\beta_n(K, \Gamma)$ par la formule de la définition 1.4 sur les actions simpliciales. La suite associée $(\Sigma K_s)_s$ permet de calculer $\beta_n(K, \mathscr{R})$ par la proposition 3.9. Le lemme précédent assure alors l'égalité de ces deux nombres. $\square$

4.3. *Démonstration du théorème 3.13*

Lemme **4.6.** — *Soient Σ et Ψ deux $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux tels que Σ soit p-connexe et Ψ soit $p-1$-connexe, alors il existe des champs boréliens équivariants t_x^i et r_x^i $(i = 0, 1, \cdots p)$ et s_x^i $(i = 0, 1, \cdots p+1)$ d'applications linéaires entières (déf. 3.4) telles que dans le diagramme suivant :*

(**4.6.**$*$)
$$\begin{tikzcd}
0 & C_0(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, "\partial_x^0"'] \arrow[r, shift left, "r_x^0"] \arrow[d, shift right, "t_x^0"'] & \cdots \arrow[l, shift left, "\partial_x^1"] \arrow[r, shift left, "r_x^{p-1}"] & C_p(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, shift left, "\partial_x^p"] \arrow[r, shift left, "r_x^p"] \arrow[d, shift right, "t_x^p"'] & C_{p+1}(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, shift left, "\partial_x^{p+1}"] \\
0 & C_0(\Psi_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, "\partial_x^0"] \arrow[u, shift right, "s_x^0"'] & {} \arrow[l, "\partial_x^1"'] & C_p(\Psi_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, "\partial_x^p"'] \arrow[u, shift right, "s_x^p"'] & C_{p+1}(\Psi_x, \mathbf{Z}) \arrow[l, "\partial_x^{p+1}"'] \arrow[u, "s_x^{p+1}"']
\end{tikzcd}$$

qui vérifient

(**4.6.**$**$) $\quad (a)\ t_x^{i-1}\partial_x^i = \partial_x^i t_x^i \quad (b)\ s_x^{i-1}\partial_x^i = \partial_x^i s_x^i \quad$ *et* $\quad (c)\ s_x^i t_x^i - id = r_x^{i-1}\partial_x^i + \partial_x^{i+1} r_x^i.$

La preuve de ce lemme utilise le lemme suivant :

Lemme **4.7.** — *Si on a trois $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ sur $\mathscr{R}$ et deux champs boréliens (u_x) et (v_x) équivariants d'applications linéaires entières (déf. 3.4)*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}_l(\Sigma_x, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{u_x} & \mathrm{C}_n(\Sigma''_x, \mathbf{Z}) \\ & & \uparrow{\scriptstyle v_x} \\ & & \mathrm{C}_m(\Sigma'_x, \mathbf{Z}) \end{array}$$

*tels que (***ponctuellement***) pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $\sigma \in \mathrm{C}_l(\Sigma_x, \mathbf{Z})$ l'équation $u_x(\sigma) = v_x(\mathrm{W})$ admette une solution $\mathrm{W} \in \mathrm{C}_m(\Sigma'_x, \mathbf{Z})$ alors il existe un* **champ borélien** *équivariant d'applications linéaires entières $w_x : \mathrm{C}_l(\Sigma_x, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{C}_m(\Sigma'_x, \mathbf{Z})$ tel que pour tout pour tout x, σ on ait $u_x(\sigma) = v_x w_x(\sigma)$.*

Démonstration du lemme 4.7. — Soit $(\sigma_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de champs de représentants (*cf.* 3.1) pour $\mathrm{C}_l(\Sigma_x, \mathbf{Z})$ et (τ_j) une suite exhaustive de champs de vecteurs de $\mathrm{C}_m(\Sigma'_x, \mathbf{Z})$. L'ensemble A_i^j des $x \in \mathrm{X}$ tels que j soit le premier entier k pour lequel $u_x(\sigma_i(x)) = v_x(\tau_k(x))$ est borélien. On pose $w_x(\sigma_i(x)) := \sum_j \chi_{\mathrm{A}_i^j}(x)\tau_j(x)$. Le champ de vecteurs $x \mapsto w_x(\sigma_i(x))$ est mesurable. On l'étend à toutes les chaînes données par un simplexe en imposant l'équivariance : $w_{g.x}\mathrm{L}_g^l(\sigma_i(x)) := \mathrm{L}_g^m w_x(\sigma_i(x))$ pour $g \in [\mathscr{R}]$. On a compatibilité puisque si g fixe x alors g fixe les $\sigma(x)$. Par équivariance de (u_x) et (v_x) on a encore $u_{g.x}(\mathrm{L}_g^l\sigma_i(x)) = v_{g.x}w_{g.x}(\mathrm{L}_g^l\sigma_i(x))$. L'ensemble $\{g.\sigma_i(x) : i \in \mathrm{I}, g \in [\mathscr{R}]\}$ formant une base, on étend (w_x) par linéarité à $\mathrm{C}_l(\Sigma_x, \mathbf{Z})$. Le champ d'applications linéaires obtenu est mesurable puisque les champs de vecteurs $x \mapsto w_{g.x}(\mathrm{L}_g^l\sigma_i(x))$ le sont. Il est équivariant par construction. Le lemme 4.7 est démontré. □

Démonstration du lemme 4.6. — Pour construire s_x^0, on choisit une famille de champs de représentants $(\sigma_j)_{j\in\mathrm{J}}$ de $\Psi^{(0)}$ (ou un domaine fondamental mesurable partitionné $\mathrm{F} = \coprod_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{F}_j$ de l'action de $\mathscr{R}$ sur $\Psi^{(0)}$) (*cf.* déf. 3.1). On choisit aussi une section mesurable S de la projection $\pi : \Sigma^{(0)} \to \mathrm{X}$. On pose alors $s_x^0(\sigma_j(x)) = \mathrm{S}(x)$, puis on étend par $\mathscr{R}$-équivariance et $\mathbf{Z}$-linéarité. On procède de même pour t_x^0. Par connexité de Σ, les équations $s_x^0 t_x^0 - id = \partial_x^0 \mathrm{R}_x^0$ ont des solutions en R, le lemme précédent 4.7 permet de construire le champ (r_x^0). De manière standard, on construit les (r_x^i), (s_x^{i+1}) et (t_x^{i+1}) successivement, vérifiant les identités analogues à (4.6.∗∗). Les identités en degré 1 de moins sont utilisées pour montrer que ponctuellement des cycles sont des bords et la i-connexité assure l'existence de solutions ponctuelles. À nouveau, le lemme 4.7 permet alors de construire des champs mesurables équivariants. On construit ainsi des champs jusqu'à (r_x^p), (s_x^{p+1}) et (t_x^p). □

Théorème **4.8.** — *Soient Σ et Ψ deux $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux. Supposons qu'il existe des champs boréliens équivariants t_x^i et r_x^i $(i = 0, 1, \cdots p)$ et s_x^i $(i = 0, 1, \cdots p+1)$ d'applications linéaires tels que dans le diagramme (4.6.∗) qui vérifient les identités (4.6.∗∗), alors*

$$\beta_i(\Sigma, \mathscr{R}) \leq \beta_i(\Psi, \mathscr{R}), \ \textit{pour } i = 0, 1, \cdots, p.$$

Corollaire **4.9.** — *Supposons qu'il existe un champ borélien équivariant d'équivalences d'homotopie entre les champs de complexes simpliciaux Σ et Ψ, alors pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a $\beta_i(\Sigma, \mathscr{R}) = \beta_i(\Psi, \mathscr{R})$.*

Remarque **4.10.** — *Si les $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux Σ et Ψ sont ULB et si les champs t^i_x, s^i_x, r^i_x sont uniformément bornés, le diagramme (4.6.∗) s'intègre en x et on en déduit des morphismes bornés (continus) $\mathscr{M}$-équivariants $\bar{\mathrm{H}}^{(2)}_i(\Sigma) \xrightarrow{\mathrm{T}^i_*} \bar{\mathrm{H}}^{(2)}_i(\Psi) \xrightarrow{\mathrm{S}^i_*} \bar{\mathrm{H}}^{(2)}_i(\Sigma)$, tels que $\mathrm{S}^i_*\mathrm{T}^i_* = id$. Cela permet alors de montrer le théorème dans ce cas particulier.*

Démonstration du théorème 4.8. — Tous les $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux considérés sont des sous-complexes du $\mathscr{R}$-complexe simplicial universel $\mathrm{E}\mathscr{R}$ (lemme 2.8).

Soient Σ' et Σ'' des $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux et $u_x : \mathrm{C}_n(\Sigma'_x, \mathbf{Z}) \to \mathrm{C}_m(\Sigma''_x, \mathbf{Z})$ un champ borélien équivariant d'applications linéaires entières. Soit Ω^{aux} un $\mathscr{R}$-complexe simplicial auxiliaire ULB. Il y a, pour chaque $x \in \mathrm{X}$, sur la réalisation géométrique de Ω^{aux}_x une distance naturelle d_f, donnée par la structure simpliciale (la distance entre deux composantes connexes distinctes est ∞). Cette distance est invariante par l'action de $\mathscr{R}$. Soit un entier N. Le nombre de sommets d'une boule quelconque de rayon N dans un (Ω^{aux}_x, d_f) est majoré uniformément en x ; il existe un nombre M qui majore le nombre de simplexes de Ω^{aux}_x contenus dans le $\mathrm{N}+2$-voisinage pour d_f d'un ensemble quelconque de $m+1$ points (m est la dimension des simplexes de Σ'' considérés) de Ω^{aux}_x.

Lemme **4.11.** — *Si $\Sigma' \subset \Omega^{aux}$ et si pour tout $x \in \mathrm{X}$ et pour tout simplexe σ de Σ'_x, on a :*

– $||u_x(\sigma)|| \leq \mathrm{N}$, *et*
– *le support de $u_x(\sigma)$ est dans Ω^{aux}_x et dans le* N*-voisinage de σ pour d_f,*

alors le champ (u_x) est uniformément borné : pour tout $x \in \mathrm{X}$, $||u_x|| \leq \mathrm{M.\,N}$.

Ce champ s'intègre donc en un opérateur borné $\mathscr{M}$-équivariant $\mathrm{U} := \int^{\oplus} u_x d\mu(x) : \mathrm{C}^{(2)}_n(\Sigma') \to \mathrm{C}^{(2)}_m(\Sigma'')$.

Exemple : les champs d'opérateurs bord pour une structure ULB vérifient ces conditions.

Démonstration du lemme 4.11. — Fixons $x \in \mathrm{X}$ et soit $(\sigma_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (resp. $(\tau_j)_{j\in\mathrm{J}}$) une base de $\mathrm{C}_n(\Sigma'_x, \mathbf{Z})$ (resp. de $\mathrm{C}_m(\Sigma''_x, \mathbf{Z})$) constituée de simplexes.

Pour tout i, $u_x(\sigma_i) = \sum_j b_{j,i}\tau_j$. Si $b_{j,i} \neq 0$, alors σ_i est contenu dans le $\mathrm{N}+2$-voisinage de τ_j. Pour tout $j \in \mathrm{J}$, l'ensemble I_j des i pour lesquels $b_{j,i} \neq 0$ est donc de cardinal inférieur à M. Il s'agit alors simplement d'une application du théorème de Cauchy-Schwarz.

Soit $\xi = \sum_i a_i\sigma_i$ un élément de $\mathrm{C}_n(\Sigma'_x, \mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}||u_x(\xi)||^2 &= ||\textstyle\sum_i a_i(\sum_j b_{j,i}\tau_j)||^2 = \sum_j |\sum_{i\in\mathrm{I}_j} a_i b_{j,i}|^2 \leq \sum_j(|\mathrm{I}_j| \sum_{i\in\mathrm{I}_j} |a_i b_{j,i}|^2)\\ &\leq \mathrm{M.}\textstyle\sum_i(\sum_{\{j:i\in\mathrm{I}_j\}} |a_i|^2|b_{j,i}|^2) \leq \mathrm{M.}\sum_i(|a_i|^2 \sum_{\{j:i\in\mathrm{I}_j\}} |b_{j,i}|^2) \leq \mathrm{M.\,N}||\xi||^2.\end{aligned}$$

Le champ u_x est donc un champ d'opérateurs continus essentiellement uniformément bornés, il s'intègre en un opérateur borné U [Dix69, chap. II. §2]. On a clairement, pour $g \in [\mathscr{R}]$ ou $\phi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$, $\mathrm{L}^m_g\mathrm{U} = \mathrm{UL}^n_g$ et $\mathrm{L}^m_\phi\mathrm{U} = \mathrm{UL}^n_\phi$. On en déduit la $\mathscr{M}$-équivariance de U. Cela prouve le lemme. □

Lemme **4.12.** — *Sous les hypothèses du th. 4.8, c'est-à-dire, soient Σ et Ψ deux $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux et supposons qu'il existe des champs boréliens équivariants t^i_x et r^i_x $(i = 0, 1, \cdots p)$ et s^i_x $(i = 0, 1, \cdots p+1)$ d'applications linéaires tels que dans le diagramme (4.6.$*$) qui vérifient les identités (4.6.$**$), alors il existe trois suites $(\Xi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$, $(\Psi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$, $(\Sigma_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$, de $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux ULB, qui sont croissantes et exhaustives respectivement de Σ, Ψ et Σ telles que*

– les champs boréliens équivariants d'applications linéaires suivants sont bien définis par restriction et uniformément bornés, (les j^i_x sont donnés par l'inclusion) :

$$(\mathbf{4.12.}*_a)\qquad \begin{tikzcd} 0 & \mathrm{C}^{(2)}_0(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l] \arrow[d, "t^0_x"'] & \cdots \arrow[l, "\partial^1_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_p(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^p_x"'] \arrow[d, "t^p_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_{p+1}(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^{p+1}_x"'] \\ 0 & \mathrm{C}^{(2)}_0(\Psi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l] \arrow[d, "s^0_x"'] & \cdots \arrow[l, "\partial^1_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_p(\Psi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^p_x"'] \arrow[d, "s^p_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_{p+1}(\Psi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^{p+1}_x"'] \arrow[d, "s^{p+1}_x"'] \\ 0 & \mathrm{C}^{(2)}_0(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l, "\partial^1_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_p(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^p_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_{p+1}(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^{p+1}_x"'] \end{tikzcd}$$

et

$$(\mathbf{4.12.}*_b)\qquad \begin{tikzcd} 0 & \mathrm{C}^{(2)}_0(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l] \arrow[d, "j^0_x"'] \arrow[dr, "r^0_x"] & \cdots \arrow[l, "\partial^1_x"'] \arrow[dr, "r^{p-1}_x"] & \mathrm{C}^{(2)}_p(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^p_x"'] \arrow[d, "j^p_x"'] \arrow[dr, "r^p_x"] & \mathrm{C}^{(2)}_{p+1}(\Sigma_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^{p+1}_x"'] \arrow[d, "j^{p+1}_x"'] \\ 0 & \mathrm{C}^{(2)}_0(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l, "\partial^1_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_p(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^p_x"'] & \mathrm{C}^{(2)}_{p+1}(\Xi_{\mathrm{N},x}) \arrow[l, "\partial^{p+1}_x"'] \end{tikzcd}$$

– ces opérateurs vérifient les identités analogues à (4.6.$**$) *:*

$$(\mathbf{4.12.}**)\qquad t^{i-1}_x\partial^i_x = \partial^i_x t^i_x \qquad s^{i-1}_x\partial^i_x = \partial^i_x s^i_x \qquad \textit{et} \qquad s^i_x t^i_x - j^i_x = r^{i-1}_x\partial^i_x + \partial^{i+1}_x r^i_x.$$

Démonstration du lemme 4.12. — Soit $(\Omega^{aux}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$ une suite auxiliaire, croissante et exhaustive de $\mathrm{E}\mathscr{R}$, de sous-complexes simpliciaux ULB $\mathscr{R}$-invariants. On définit les trois suites (dans cet ordre $(\Xi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$, $(\Psi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$ et $(\Sigma_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbf{N}}$) de $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux ULB, qui sont croissantes et exhaustives respectivement de Σ, Ψ et Σ.

a- Posons $\Xi_\mathrm{N} = \Sigma \cap \Omega^{aux}_\mathrm{N}$

b- **définition de** $\Psi^{(i)}_\mathrm{N}$**.** Les conditions suivantes, portant sur les simplexes σ, écrites successivement pour les dimensions i croissantes, permettent de définir un sous-complexe ULB Ψ_N de Ψ, $\mathscr{R}$-invariant de dimension $\leq p+1$:

(b_1) σ est de dimension i
(b_2) σ est dans $\Psi \cap \Omega_{\mathrm{N}}^{aux}$
(b_3) le bord de σ est dans $\Psi_{\mathrm{N}}^{(i-1)}$
(b_4) le support de $s_x^i(\sigma)$ est contenu dans Ξ_{N}
(b_5) le support de $s_x^i(\sigma)$ est dans le N-voisinage de σ pour la distance de $\Omega_{\mathrm{N}}^{aux}$
(b_6) $||s_x^i(\sigma)|| \leq \mathrm{N}$

c-**définition de $\Sigma_{\mathrm{N}}^{(i)}$.** De la même manière, on définit un sous-complexe simplicial ULB $\mathscr{R}$-invariant Σ_{N}, de dimension $\leq p+1$, tel que $\Sigma_{\mathrm{N}} \subset \Xi_{\mathrm{N}} \subset \Sigma$, par les conditions suivantes (pour $i \leq p$) :

(c_1) σ est de dimension i
(c_2) σ est dans $\Xi_{\mathrm{N}} \cap \Omega_{\mathrm{N}}^{aux}$
(c_3) le bord de σ est dans $\Sigma_{\mathrm{N}}^{(i-1)}$
(c_4) le support de $t_x^i(\sigma)$ est contenu dans Ψ_{N}
(c_5) le support de $t_x^i(\sigma)$ est dans le N-voisinage de σ pour la distance de $\Omega_{\mathrm{N}}^{aux}$
(c_6) $||t_x^i(\sigma)|| \leq \mathrm{N}$
(c_7) le support de $r_x^i(\sigma)$ est contenu dans Ξ_{N}
(c_8) le support de $r_x^i(\sigma)$ est dans le N-voisinage de σ pour la distance de $\Omega_{\mathrm{N}}^{aux}$
(c_9) $||r_x^i(\sigma)|| \leq \mathrm{N}$

et par les conditions (c_1) à (c_3) seulement pour la dimension $p+1$.

Les conditions (b_3), (b_4), (c_2), (c_3), (c_4), (c_7) montrent que les champs d'opérateurs $r^\cdot, s^\cdot, t^\cdot, j^\cdot$ sont bien définis au niveau des chaînes usuelles. L'application du lemme 4.11 ci-dessus–grâce aux conditions ULB pour les opérateurs bord et aux conditions (b_5), (b_6) (resp. (c_5), (c_6), resp. (c_8), (c_9)) pour les opérateurs s_x^i (resp. t_x^i, resp. r_x^i) – montre qu'ils sont uniformément bornés donc s'étendent aux chaînes ℓ^2. Le lemme 4.12 est démontré. □

Ces champs d'opérateurs s'intègrent, grâce au lemme 4.11, en des opérateurs bornés $\mathscr{M}$-équivariants :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}}^i : \mathrm{C}_i^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{N}}) \to \mathrm{C}_i^{(2)}(\Psi_{\mathrm{N}})$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^i : \mathrm{C}_i^{(2)}(\Psi_{\mathrm{N}}) \to \mathrm{C}_i^{(2)}(\Xi_{\mathrm{N}}),$$
$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}}^i : \mathrm{C}_i^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{N}}) \to \mathrm{C}_{i+1}^{(2)}(\Xi_{\mathrm{N}})$$
$$\mathrm{J}_{\mathrm{N}}^i : \mathrm{C}_i^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{N}}) \to \mathrm{C}_i^{(2)}(\Xi_{\mathrm{N}}) \quad \text{(induit par l'inclusion)}$$

qui vérifient encore les identités analogues à (4.6.∗∗) :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}}^{i-1}\partial_{\mathrm{N}}^i = \partial_{\mathrm{N}}^i \mathrm{T}_{\mathrm{N}}^i \ (i \leq p),$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^{i-1}\partial_{\mathrm{N}}^i = \partial_{\mathrm{N}}^i \mathrm{S}_{\mathrm{N}}^i \ (i \leq p+1),$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^i \mathrm{T}_{\mathrm{N}}^i - \mathrm{J}_{\mathrm{N}}^i = \mathrm{R}_{\mathrm{N}}^{i-1}\partial_{\mathrm{N}}^i + \partial_{\mathrm{N}}^{i+1}\mathrm{R}_{\mathrm{N}}^i \ (i \leq p).$$

Pour $N \leq N'$ et $i < p$, ces opérateurs induisent le diagramme commutatif suivant dont les flèches sont des opérateurs bornés $\mathscr{M}$-équivariants, dont les flèches verticales et les deux composées horizontales coïncident avec les morphismes induits par l'inclusion :

$$\begin{tikzcd} \bar{H}_i^{(2)}(\Sigma_N) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \bar{H}_i^{(2)}(\Psi_N) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \bar{H}_i^{(2)}(\Xi_N) \arrow[d] \\ \bar{H}_i^{(2)}(\Sigma_{N'}) \arrow[r] & \bar{H}_i^{(2)}(\Psi_{N'}) \arrow[r, "c"] & \bar{H}_i^{(2)}(\Xi_{N'}) \end{tikzcd}$$

Pour $i = p$, on obtient un diagramme analogue, en remplaçant dans la première colonne les $\bar{H}_i^{(2)}(\Sigma_.)$ par les cycles de $C_i^{(2)}(\Sigma_.)$.

On en déduit, pour tout $i \leq p$, la relation entre les dimensions des images de cba et de b :

$$\nabla_i(\Sigma_N, \Xi_{N'}) \leq \nabla_i(\Psi_N, \Psi_{N'}).$$

Soit $\alpha < \beta_i(\Sigma)$. On obtient, par la proposition 3.9 (calcul des nombres de Betti par une suite exhaustive) les deux inégalités suivantes, pour N assez grand (première inégalité), et par le lemme 4.3 pour tout $N' \geq N$ (puisque $\Sigma_N \subset \Xi_{N'}$) (deuxième inégalité) :

$$\alpha \leq \inf_{N'' \geq N} \nabla_i(\Sigma_N, \Sigma_{N''}) \leq \nabla_i(\Sigma_N, \Xi_{N'}).$$

En faisant tendre N' vers l'infini puis N vers l'infini, on en tire (proposition 3.9)

$$\alpha \leq \beta_i(\Psi).$$

Cette inégalité vraie pour tout minorant α de $\beta_i(\Sigma)$, entraîne

$$\beta_i(\Sigma) \leq \beta_i(\Psi).$$

Le théorème 4.8 est démontré. □

Et cela achève la preuve du théorème 3.13. □

4.4. *Démonstration de la proposition 3.19 (inégalités de Morse)*

Si Σ est ULB, les inégalités de Morse se montrent de manière classique : $C_i^{(2)}(\Sigma) = \mathscr{H}_{(2)}^i(\Sigma) \oplus \overline{\operatorname{Im}}\, \partial_{i+1} \oplus \operatorname{Ker}\, \partial_i^\perp$ et puisque $\operatorname{Ker}\, \partial_i^\perp \simeq \overline{\operatorname{Im}}\, \partial_i$, en notant $b_i = \dim_{\mathscr{M}} \overline{\operatorname{Im}}\, \partial_i$, on obtient $\alpha_i = \beta_i + b_{i+1} + b_i$. Les sommes alternées des α_i et des β_i coïncident donc, à $b_{n+1} \geq 0$ et $b_{-1} = 0$ près.

Si Σ n'est pas ULB, on choisit une suite croissante exhaustive ULB $(\Sigma_s)_s$. Soit $\epsilon > 0$. Pour s assez grand, et $t \geq s$, le lemme 4.2 assure que les morphismes $\bar{H}_i^{(2)}(\Sigma_s) \to \bar{H}_i^{(2)}(\Sigma_t)$ sont des ϵ-isomorphismes pour $i < n$, donc à ϵ près, $\nabla_i(\Sigma_s, \Sigma_t) = \beta_i(\Sigma_s) = \beta_i(\Sigma)$. Par ailleurs, pour s assez grand, $\beta_n(\Sigma_s) \geq \beta_n(\Sigma) - \epsilon$. Les inégalités s'en déduisent alors du cas ULB. □

5. Induction, relations SOE, sous-relations, limites

5.1. *Induction et relations SOE*

Soient la relation $\mathcal{R}$ sur X qui préserve la mesure de probabilité μ, et $Y \subset X$ un borélien qui rencontre presque toutes les classes de $\mathcal{R}$. On appelle $\bar{\mu} = \frac{\mu_{|Y}}{\mu(Y)}$ la mesure induite normalisée et on définit la **relation induite** $\mathcal{R}_Y = \mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ sur $(Y, \bar{\mu})$.

Rappelons la définition de (SOE) (voir aussi section 5.4 pour une explication terminologique).

Définition **5.1.** — *Une relation* $\mathcal{R}_1$ *sur* (X_1, μ_1) *est* stablement orbitalement équivalente (SOE) *à* $\mathcal{R}_2$ *sur* (X_2, μ_2) *s'il existe des boréliens* $A_1 \subset X_1$ *et* $A_2 \subset X_2$, *qui rencontrent chaque orbite, tels que les relations induites* $\mathcal{R}_{1|A_1}$ *et* $\mathcal{R}_{2|A_2}$ *s'identifient par un isomorphisme borélien* $f : A_1 \to A_2$ *qui préserve la mesure à une constante multiplicative près. C'est-à-dire que* $f_*(\mu_1) = \lambda.\mu_2$. *Le rapport* $c(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) := \lambda^{-1} = \mu_2(A_2)/\mu_1(A_1)$ *est appelé* constante de compression *de l'équivalence orbitale stable.*

Tout $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ, induit par restriction de l'espace de base un $\mathcal{R}_Y$-complexe simplicial Σ_Y tel que pour tout $y \in Y$, on a $(\Sigma_Y)_y = \Sigma_y$. Inversement, un $\mathcal{R}_Y$-complexe simplicial Σ_Y s'étend en un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ. Il suffit de remarquer que le $\mathcal{R}_Y$-complexe simplicial universel $E\mathcal{R}_Y$ est contenu dans le $\mathcal{R}$-complexe simplicial universel $E\mathcal{R}$. Σ est de dimension $\leq n$ (resp. ULB, resp. contractile, resp. n-connexe), si et seulement s'il en est de même de Σ_Y. On a donc :

Proposition **5.2.** — *Deux relations d'équivalence SOE ont la même dimension géométrique.*

Théorème **5.3.** — *Soit* $Y \subset X$ *un borélien qui rencontre presque toutes les classes de* $\mathcal{R}$ *et* Σ *un* $\mathcal{R}$*-complexe simplicial. Les nombres de Betti* L^2 *de* Σ *et* Σ_Y *sont reliés par la formule :*

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) = \mu(Y)\beta_n(\Sigma_Y, \mathcal{R}_Y, \bar{\mu}).$$

Démonstration. — Le projecteur orthogonal P de $C_n^{(2)}(\Sigma)$ sur $C_n^{(2)}(\Sigma_Y)$ n'est autre que $L^n_{\chi_Y}$, pour la fonction caractéristique $\chi_Y \in L^\infty(X, \mu)$ de Y (*cf.* prop. 3.2). C'est un projecteur de $\mathcal{M}$, encore noté P. Appelons $\mathcal{M}_Y$ l'algèbre de von Neumann de la relation induite $\mathcal{R}_Y$, alors $\mathcal{M}_Y$ s'identifie à $P\mathcal{M}P$.

Lemme **5.4.** — *Si* H *est un sous-espace fermé* $\mathcal{M}$*-invariant de* $C_n^{(2)}(\Sigma)$, *alors l'espace* P(H) *est* $\mathcal{M}_Y$*-invariant et* $\dim_{\mathcal{M}} H = \mu(Y) \dim_{\mathcal{M}_Y} P(H)$.

Démonstration. — Le projecteur orthogonal Q sur H commute avec $\mathcal{M}$, donc avec P et $QP = PQ$ est le projecteur orthogonal sur P(H). L'invariance s'en déduit. Une famille de champs de représentants (σ_j) pour Σ_Y (*cf.* 3.1) est aussi une famille de champs de représentants pour Σ. Par la formule (3) de la proposition 3.2 :

$\dim_{\mathscr{M}_{\mathrm{Y}}} \mathrm{P}(\mathrm{H}) = \sum_j \langle \mathrm{QP}(\sigma_j), \sigma_j\rangle_{\bar{\mu}} = \sum_j \langle \mathrm{Q}(\sigma_j), \sigma_j\rangle_{\bar{\mu}}$, où les produits scalaires sont calculés par rapport à la mesure $\bar{\mu}$. Lorsqu'on les calcule par rapport à la mesure μ, on trouve

$$= \frac{1}{\mu(\mathrm{Y})} \sum_j \langle \mathrm{QP}(\sigma_j), \sigma_j\rangle_{\mu} = \frac{1}{\mu(\mathrm{Y})} \dim_{\mathscr{M}} \mathrm{H}. \qquad \square$$

Soit (Σ_s) une suite croissante exhaustive de $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux ULB de Σ, alors la suite associée $(\Sigma_{\mathrm{Y}s})$ est croissante exhaustive ULB de Σ_{Y}. On applique le lemme à

$$\mathrm{H} = \mathrm{C}_n^{(2)}(\Sigma_s, \mu) \quad \text{et}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}) = \mathrm{C}_n^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{Y}s}, \bar{\mu})$$

puis

$$\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{C}_n^{(2)}(\Sigma_s) \to \mathscr{H}_n^{(2)}(\Sigma_s) \xrightarrow{\mathrm{J}_{s,t}} \mathscr{H}_n^{(2)}(\Sigma_t)\right) \quad \text{et}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}) = \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{C}_n^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{Y}s}) \to \mathscr{H}_n^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{Y}s}) \xrightarrow{\mathrm{J}_{s,t}^{\mathrm{Y}}} \mathscr{H}_n^{(2)}(\Sigma_{\mathrm{Y}t})\right),$$

avec $t \geq s$, où les espaces $\mathscr{H}_n^{(2)}$ sont les espaces de chaînes harmoniques L^2 (*cf.* 3.6). Cela permet de conclure en utilisant le théorème du rang 1.2, et puisque les flèches $\mathrm{C}_n^{(2)}(.) \to \mathscr{H}_n^{(2)}(.)$ sont surjectives, que

$$\dim_{\mathscr{M}} \mathrm{Im}\, \mathrm{J}_{s,t} = \mu(\mathrm{Y}) \dim_{\mathscr{M}_{\mathrm{Y}}} \mathrm{Im}\, \mathrm{J}_{s,t}^{\mathrm{Y}}.$$

Le théorème s'en déduit en utilisant les suites exhaustives pour le calcul des nombres de Betti L^2 (proposition 3.9). $\square$

Corollaire **5.5.** — *Les nombres de Betti* L^2 *de la relation* $\mathscr{R}$ *et de la relation* $\mathscr{R}_{\mathrm{Y}}$, *induite sur un borélien* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *qui rencontre presque toutes les classes de* $\mathscr{R}$, *sont reliés par la formule :*

$$\beta_n(\mathscr{R}, \mu) = \mu(\mathrm{Y})\beta_n(\mathscr{R}_{\mathrm{Y}}, \bar{\mu}).$$

Corollaire **5.6.** — *Si* $\mathscr{R}$ *et* $\mathscr{S}$ *sont deux relations d'équivalence préservant une probabilité, stablement orbitalement équivalentes, avec constante de compression* $c(f, \mathscr{R}, \mathscr{S})$, *alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\beta_n(\mathscr{S}) = c(f, \mathscr{R}, \mathscr{S})\beta_n(\mathscr{R}).$$

On rappelle que le *groupe fondamental* $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{R}$ engendré par les différentes constantes de compression $c(f, \mathscr{R}, \mathscr{R})$ de $\mathscr{R}$ avec elle-même, c'est-à-dire engendré par les mesures des boréliens sur lesquels la relation induite est isomorphe à $\mathscr{R}$.

Corollaire **5.7.** — *Les relations d'équivalence ergodiques* $\mathscr{R}$ *dont un nombre de Betti n'est ni nul ni infini sont incompressibles : leur groupe fondamental* $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ *est trivial* $= \{1\}$.

C'est le cas des relations d'équivalence produites par les actions libres des groupes dont certains β_p sont finis non nuls, comme par exemple ceux du corollaire 0.3. Les groupes moyennables infinis fournissent des exemples de groupes qui sont mesurablement équivalents à eux mêmes avec une constante de compression c différente de 1. D'ailleurs, toutes les valeurs de $c \in]0, 1]$ sont possibles. On a aussi des exemples non moyennables, comme le produit direct $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de deux groupes infinis, l'un moyennable, l'autre non. Une action produit d'une action (compressible) de Γ_1 et d'une action de Γ_2 est compressible.

5.2. *Sous-relations*

Soit $\mathscr{S}$ une relation d'équivalence dénombrable standard sur (X, μ), où μ est une mesure de probabilité. Soit $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$ une sous-relation standard sur (X, μ), *i.e.* toute classe $\mathscr{R}.x$ est contenue dans la classe $\mathscr{S}.x$.

Pour tout $x \in X$, la classe $\mathscr{S}(x)$ se partitionne en $\iota(x) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ classes de $\mathscr{R}$. Supposons pour simplicité que $\mathscr{S}$ est ergodique. Le nombre $\iota(x)$ est constant μ p.s., on l'appelle l'indice de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{S}$, noté $[\mathscr{S} : \mathscr{R}]$. Consulter [FSZ89] pour des généralités sur les sous-relations.

Si (U, π) est un $\mathscr{S}$-espace discret, c'est aussi par restriction un $\mathscr{R}$-espace. Il est discret. En effet, il existe une manière mesurable de se donner un bon ordre sur chaque $\mathscr{S}$-orbite (partir d'un domaine fondamental D et d'un bon ordre sur un groupe dénombrable d'automorphismes de X qui engendre $\mathscr{S}$). Pour $z \in D$, soient z_1 le premier point de $\mathscr{S}.z \setminus \mathscr{R}.z$, puis z_2 le premier point de $\mathscr{S}.z \setminus \mathscr{R}.\{z, z_1\}$, ... , z_{i+1} le premier point de $\mathscr{S}.z \setminus \mathscr{R}.\{z, z_1, z_2, \cdots, z_i\}$. L'ensemble des $\{z, z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots : z \in D\}$ constitue un domaine fondamental borélien pour le $\mathscr{R}$-espace U.

Inversement, tout $\mathscr{R}$-espace discret (V, π) s'étend en un $\mathscr{S}$-espace discret $(\bar{V}, \bar{\pi})$ de manière naturelle. Appuyons-nous sur l'exemple bien connu des groupes. Si $\Lambda \subset \Gamma$ sont deux groupes discrets et si Λ agit sur un espace W, alors l'action de Λ par multiplication à droite sur Γ induit une action diagonale sur $W \times \Gamma$ et l'action par multiplication à gauche de Γ sur lui-même induit alors une action de Γ sur l'espace quotient $(W \times \Gamma)/\Lambda$. De même, le $\mathscr{R}$-espace discret (V, π) fournit le $\mathscr{S}$-espace discret $\bar{V} := (V * \mathscr{S})/\mathscr{R}$, où $\mathscr{S}$ dans $V * \mathscr{S}$ fibre sur X via π_r, $\mathscr{R}$ agit sur $\mathscr{S}$ par multiplication à droite (pour $(x, y) \in \mathscr{R}$ et $(z, y) \in \mathscr{S}$) $(x, y).(z, y) = (z, x)$ et où $\bar{\pi}$ est donnée par π_l sur $\mathscr{S}$.

On vérifie que $\dim_{\mathscr{R}} L^2(V, \nu_V) = \dim_{\mathscr{S}} L^2(\bar{V}, \nu_{\bar{V}})$ (formule de réciprocité).

Ainsi, tout $\mathscr{R}$-complexe simplicial Σ fournit naturellement un $\mathscr{S}$-complexe simplicial $\bar{\Sigma}$ de même dimension, et on a

$$\beta_n(\Sigma, \mathscr{R}) = \beta_n(\bar{\Sigma}, \mathscr{S}).$$

Si Σ est un $\mathscr{S}$-complexe simplicial, alors par restriction de l'action, c'est aussi un $\mathscr{R}$-complexe simplicial. Le caractère contractile de Σ ne dépend pas du groupoïde

$\mathscr{S}$ ou $\mathscr{R}$ qui agit. On avait montré [Gab00a, th. IV.4] que si une relation $\mathscr{R}$ admet un arborage, alors ses sous-relations d'équivalence standards en admettent aussi un. On obtient ici immédiatement, en considérant des Σ contractiles :

Proposition **5.8.** — *Les sous-relations d'une relation de dimension géométrique $\leq p$ sont de dimension géométrique $\leq p$.*

Cet énoncé permet de poursuivre la classification lorsque les nombres de Betti ℓ^2 sont nuls, par exemple pour des actions de $\mathbf{F}_{p_1} \times \mathbf{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{p_\ell} \times \mathbf{Z}$.

Corollaire **5.9.** — *La dimension ergodique d'un groupe est supérieure ou égale à celle de ses sous-groupes.*

Remarque **5.10.** — *Il existe des relations d'équivalence dont tous les nombres de Betti* L^2 *sont triviaux mais qui ne sont pas de dimension géométrique finie : faire agir un groupe à β_i triviaux (comme $\Gamma \times \mathbf{Z}$) qui contient des sous-groupes Γ_i dont le $\beta_i(\Gamma_i)$ est non trivial pour une suite infinie de valeurs de i.*

Proposition **5.11.** — *Si $\mathscr{R}$ est une sous-relation d'indice fini ($[\mathscr{S} : \mathscr{R}] < \infty$) de $\mathscr{S}$, alors les nombres de Betti* L^2 *de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont reliés par la formule qu'on attend : $\beta_p(\mathscr{R}) = [\mathscr{S} : \mathscr{R}]\beta_p(\mathscr{S})$.*

Soit (U, π) un $\mathscr{S}$-espace discret. Un domaine fondamental pour l'action de $\mathscr{R}$ rencontre exactement $[\mathscr{S} : \mathscr{R}]$ fois chaque $\mathscr{S}$-orbite. Un sous-espace fermé H de $\mathrm{L}^2(\mathrm{U}, \nu)$ qui est invariant pour l'algèbre de von Neumann $\mathscr{M}(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$ est invariant pour l'algèbre $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ et il n'est pas difficile de vérifier que ses dimensions satisfont $\dim_{\mathscr{M}(\mathscr{R})} \mathrm{H} = [\mathscr{S} : \mathscr{R}] \dim_{\mathscr{M}(\mathscr{S})} \mathrm{H}$. Si Σ est un $\mathscr{S}$-complexe simplicial ULB, le $\mathscr{R}$-complexe simplicial Σ est aussi ULB (ce n'est pas le cas si $[\mathscr{S} : \mathscr{R}]$ est infini et Σ non vide, puisque le domaine fondamental de $\Sigma^{(0)}$ pour $\mathscr{R}$ n'est plus de mesure finie). Le résultat s'en déduit en considérant un $\mathscr{S}$-complexe simplicial contractile Σ et une suite exhaustive $(\Sigma_s)_{s\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{S}$-complexes simpliciaux ULB. □

5.3. *Limites*

Théorème **5.12.** — *Soit $(\Sigma_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux et notons leur réunion $\Sigma_\infty := \cup_{i\in\mathbf{N}} \nearrow \Sigma_i$, alors*

$$\beta_n(\Sigma_\infty) \leq \liminf_{i\in\mathbf{N}} \beta_n(\Sigma_i).$$

On a des cas d'inégalité stricte avec par exemple une suite croissante de groupes de la forme $\Gamma_i = \mathbf{F}_{2^i+1} \times (\oplus_1^i \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (de $\beta_1 = 1$) dont la réunion $\Gamma_\infty = \mathbf{F}_\infty \times (\oplus_{j\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ vérifie $\beta_1 = 0$ (où $\mathbf{F}_n$ est le groupe libre sur $n = 1, \ldots \infty$ générateurs).

Démonstration du théorème 5.12. — Soit $(\Omega_s)_s$ une suite croissante exhaustive (ULB) de Σ_∞. Les $(\Sigma_i \cap \Omega_s)_s$ constituent, pour chaque i, une suite croissante exhaustive (ULB) de Σ_i, tandis que la suite diagonale $\Theta_s := \Sigma_s \cap \Omega_s$ donne une telle suite pour Σ_∞. En considérant $\Theta_s = \Sigma_s \cap \Omega_s \subset \Sigma_s \cap \Omega_t \subset \Theta_t$, pour $s \leq t$, on montre que $\nabla_n(\Theta_s, \Theta_t) \leq \nabla_n(\Sigma_s \cap \Omega_s, \Sigma_s \cap \Omega_t)$. Donc pour s fixé et $t \to \infty$, $\lim_{t\to\infty} \nabla_n(\Theta_s, \Theta_t) \leq \beta(\Sigma_s)$ et donc $\lim_{s\to\infty} \lim_{t\to\infty} \nabla_n(\Theta_s, \Theta_t) \leq \liminf_s \beta_n(\Sigma_s)$. □

Corollaire **5.13.** — *Si $\mathscr{R}$ est réunion croissante de relations $\mathscr{R}_i$ alors $\beta_n(\mathscr{R}) \leq \liminf_{i\in\mathbf{N}} \beta_n(\mathscr{R}_i)$. En particulier, si $\mathscr{R}$ est une réunion croissante de relations de dimension géométrique $\leq p$, alors $\beta_n(\mathscr{R}) = 0$ pour tout $n \geq p+1$.*

Les $\mathscr{R}_i$-complexes simpliciaux universels $\mathrm{E}\mathscr{R}_i$ (section 2.2.1) sont tous des sous-complexes de $\mathrm{E}\mathscr{R}$. Ils s'étendent, avec conservation de leur domaine fondamental pour chaque dimension, en des $\mathscr{R}$-complexes simpliciaux $\overline{\mathrm{E}\mathscr{R}_i}$. On peut aussi appliquer la construction du début de la section 5.2. On vérifie $\beta_n(\mathrm{E}\mathscr{R}_i, \mathscr{R}_i) = \beta_n(\overline{\mathrm{E}\mathscr{R}_i}, \mathscr{R})$. On applique alors le théorème à la suite $(\overline{\mathrm{E}\mathscr{R}_i})_i$ en remarquant que $\mathrm{E}\mathscr{R}$ est la réunion des $\overline{\mathrm{E}\mathscr{R}_i}$. □

Cela permet de répondre à une question de Y. Peres : une action libre d'un produit direct de deux groupes libres non cycliques n'est pas une limite croissante de relations arborables.

Corollaire **5.14.** — *Si Γ est une réunion croissante, $\Gamma = \cup_i \nearrow \Gamma_i$, alors $\beta_n(\Gamma) \leq \liminf \beta_n(\Gamma_i)$.* □

Définition **5.15.** — *Une relation $\mathscr{R}$ est* **approximativement de dimension** *n si elle est réunion croissante de relations de dimension géométrique n. La* **dimension approximative** *de $\mathscr{R}$ est le minimum des tels n.*

Proposition **5.16.** — *Si $\mathscr{R}$ est une sous-relation de $\mathscr{S}$, alors la dimension approximative de $\mathscr{S}$ majore celle de $\mathscr{R}$.* □

Exemple **5.17.** — *Les actions libres du groupe $\mathbf{F}_{n_1} \times \mathbf{F}_{n_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{n_p}$ ($n_i \geq 2$) sont toutes de dimension approximative p, égale à leur dimension géométrique. Si Λ est une réunion croissante de groupes finis (e.g. $\Lambda = \oplus_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$), les actions libres du groupe $\mathbf{F}_{n_1} \times \mathbf{F}_{n_2} \times \cdots \times \mathbf{F}_{n_p} \times \Lambda$ sont toutes de dimension approximative p. Le groupe $\mathbf{F}_2 \times \Lambda$ est de dimension approximative 1 et de dimension ergodique 2 (*cf.* prop. 6.10, puisque son β_1 est nul).*

5.4. *Relations de type II_∞*

Soit $\mathscr{R}$ une relation préservant la mesure de probabilité sur (X, μ), à classes infinies. La relation d'équivalence $\mathscr{R}_\infty$ sur $\mathrm{X} \times \mathbf{N}$ définie par $(x_1, m_1) \sim (x_2, m_2)$ si et seulement si $(x_1, x_2) \in \mathscr{R}$ est appelée la stabilisation de $\mathscr{R}$ et est dite *de type* II_∞ (*cf.* [FM77a]). Elle préserve la mesure infinie $\mu_\infty = \mu \times$comptage.

Notons que deux relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ (sur (X, μ) et (X', μ') respectivement) sont stablement orbitalement équivalentes si et seulement si leurs stabilisations sont isomorphes (*cf.* [FM77a, th. 3]) : il existe un isomorphisme borélien $g : X \times \mathbf{N} \to X' \times \mathbf{N}$ tel que $g_*(\mu_\infty) = c(\mathscr{R}, \mathscr{R}')^{-1}\mu'_\infty$ qui envoie les classes de $\mathscr{R}_\infty$ sur celles de $\mathscr{R}'_\infty$. Cela explique le terme *stablement* orbitalement équivalent.

Toutes les notions invariantes par SOE qu'on a introduites dans le cadre d'une relation d'équivalence préservant une mesure de probabilité admettent une adaptation naturelle au cas II_∞, où la mesure préservée n'est plus finie. En particulier on définit les dimensions géométriques, les dimensions approximatives et les nombres de Betti L^2 :

Définition **5.18.** — *Soit $\mathscr{T}$ une relation d'équivalence de type II_∞ (dénombrable standard). La suite de ses nombres de Betti L^2 est la suite $(\widehat{\beta}_i(\mathscr{T}))_{i\in\mathbf{N}}$, bien définie à une constante multiplicative près, des nombres de Betti L^2 de la restriction de $\mathscr{T}$ à n'importe quel borélien de mesure finie qui rencontre toutes les classes.*

6. Applications

6.1. *Équivalence mesurable*

Rappelons le critère topologique de quasi-isométrie de deux groupes donné par M. Gromov.

Critère [Gro93, 0.2.C_2']. — Deux groupes Γ_1 et Γ_2 de type fini sont quasi-isométriques si et seulement si il existe des actions propres cocompactes de Γ_1 et Γ_2 qui commutent, sur un espace localement compact.

Rappelons ce qu'on a déjà dit dans l'introduction. La notion d'équivalence mesurable est un analogue mesurable de la quasi-isométrie :

Définition **6.1.** — *Deux groupes Γ_1 et Γ_2 sont* mesurablement équivalents *(ME) s'il existe un espace borélien standard de mesure infinie (Ω, m) muni d'actions libres commutantes préservant la mesure de Γ_1 et Γ_2, où chacune des deux actions admet un domaine fondamental B_1 (resp. B_2) de mesure finie. Le rapport $c_\Omega = m(B_2)/m(B_1)$ est appelé* constante de compression *de l'équivalence mesurable.*

L'équivalence mesurable est une relation d'équivalence sur l'ensemble des groupes (*cf.* [Fur99a, sect. 2]) et l'exemple standard de deux groupes ME est donné par deux réseaux, pas nécessairement cocompacts, d'un groupe G localement compact à base dénombrable qui agissent sur G par multiplication respectivement à gauche et à droite. La définition de relations stablement orbitalement équivalentes a été rappelée en 5.1.

Proposition **6.2** *(cf. [Fur99b, sect. 2]). — Deux groupes* Γ_1 *et* Γ_2 *admettent des actions libres préservant une probabilité qui sont stablement orbitalement équivalentes (SOE) si et seulement si ils admettent une équivalence mesurable, avec même constante de compression.*

Démonstration. — Partant d'une équivalence mesurable (Ω, m) de Γ_1 et Γ_2, on montre en coupant et collant que les actions de Γ_1 sur Ω/Γ_2 et de Γ_2 sur $\Gamma_1\backslash\Omega$ sont stablement orbitalement équivalentes, par un morphisme qui préserve la mesure (si les espaces quotient ne sont pas normalisés). Pour s'assurer qu'elles sont libres, il suffit de remplacer Ω par son produit avec un espace de probabilité X sur lequel Γ_1 a une action libre α et Γ_2 agit par l'identité et de considérer les actions diagonales des Γ_i.

Partant d'une équivalence orbitale stable entre les relations $\mathcal{R}_i$, les relations $\mathcal{R}_{1\infty}$ et $\mathcal{R}_{2\infty}$ (voir section 5.4) sont identifiées à l'aide d'un isomorphisme $f_\infty : X_1 \times \mathbf{N} \to X_2 \times \mathbf{N}$, qui préserve les mesures $\mu_i \times$ comptage à une constante multiplicative près. Grâce à cet isomorphisme, on considère $\mathcal{R}_{1\infty}$ et $\mathcal{R}_{2\infty}$ comme une seule relation d'équivalence $\mathcal{R}_\infty$, réalisée comme partie de $(X_1 \times \mathbf{N}) \times (X_2 \times \mathbf{N})$, qu'on peut munir de deux mesures ν_1 ou ν_2.

Si la relation $\mathcal{R}_i$ est donnée par l'action libre du groupe Γ_i, alors la partie $\Omega := \mathcal{R}_\infty \cap (X_1 \times \{0\}) \times (X_2 \times \{0\})$, munie de la mesure ν_1 fournit une équivalence mesurable entre Γ_1 et Γ_2 lorsqu'on la munit des actions commutantes de Γ_1 sur la première coordonnée et Γ_2 sur la deuxième coordonnée. N'importe quelle section $\pi_r^{-1}(X_2 \times \{0\})$ (resp. $\pi_l^{-1}(X_1 \times \{0\})$) fournit un domaine fondamental pour Γ_1 (resp. Γ_2) de ν_1-mesure finie égale à $c(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1}\mu_2(X_2) = c(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1}$ (resp. $\mu_1(X_1) = 1$). □

Une simple application du corollaire 5.6 donne alors le théorème suivant :

Théorème **6.3.** — *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *deux groupes discrets dénombrables. Si* Γ_1 *est ME à* Γ_2*, alors ils ont des nombres de Betti* ℓ^2 *proportionnels : pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\beta_n(\Gamma_2) = c\beta_n(\Gamma_1),$$

où c est la constante de compression de l'équivalence mesurable de Γ_1 *à* Γ_2.

Par analogie avec les notions de dimension géométrique et de dimension cohomologique d'un groupe (voir [Bro82, VII.2]), on introduit :

Définition **6.4.** — *La* dimension ergodique *erg-dim*(Γ) *d'un groupe* Γ *est le minimum des dimensions géométriques des relations d'équivalence produites par une action libre de* Γ *préservant la probabilité sur le borélien standard* (X, μ).

Proposition **6.5.** — *Les groupes ME entre eux ont même dimension ergodique.*

Démonstration. — Soit α une action libre de Γ sur (X, μ), qui réalise la dimension ergodique de Γ. Alors pour toute action β de Γ sur (Y, ν), qui préserve une probabilité, l'action diagonale $\alpha \times \beta$ sur $X \times Y$ réalise la dimension ergodique de Γ. En effet, tout $\mathscr{R}_\alpha$-complexe simplicial Σ induit un $\mathscr{R}_{\alpha\times\beta}$-complexe simplicial $\widehat{\Sigma} = \Sigma \times Y$ qui vérifie pour tout $(x, y) \in X \times Y$, que les complexes simpliciaux $\widehat{\Sigma}_{(x,y)}$ et Σ_x sont isomorphes.

Si dans la preuve de la proposition 6.2, partant d'une ME entre Γ_1 et Γ_2, l'action libre α qu'on prend réalise la dimension ergodique erg-dim(Γ_1) de Γ_1, alors l'action libre de Γ_1 sur $(X \times \Omega)/\Gamma_2 = X \times (\Omega/\Gamma_2)$ est aussi de dimension géométrique erg-dim(Γ_1). Il en est de même de l'action libre SOE de Γ_2 sur $\Gamma_1/(X\times\Omega)$ (prop. 5.2). Cela montre que erg-dim$(\Gamma_1) \geq$ erg-dim(Γ_2). □

La classe de ME de $\mathbf{Z}$ contient tous les groupes moyennables infinis. Les groupes libres de type fini sont tous ME entre eux et leur classe contient tous les produits libres, en nombre fini, de groupes moyennables infinis ainsi que les groupes fondamentaux des surfaces compactes. En particulier, la dimension ergodique du groupe fondamental d'une surface compacte est égal à 1. Cette classe ne contient pas tous les produits amalgamés $\mathbf{F}_p *_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_q$ puisque certains d'entre eux ne sont pas de dimension ergodique 1 (*cf.* [Gab00a, p. 90]).

On pourrait croire l'équivalence mesurable plus grossière que la quasi-isométrie des groupes. Elle ne distingue pas, par exemple, les groupes de différentes croissances polynomiales (tous moyennables) comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}^2$. En fait, il existe des groupes quasi-isométriques qui ne sont pas ME. A. Furman a observé que la propriété (T) de Kazhdan est un invariant de ME ([Fur99a, th. 8.2]) tandis que ce n'est pas le cas pour la quasi-isométrie. De plus, les produits de groupes libres de la forme $\Gamma_p = (\mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_3) * \mathbf{F}_p$ pour diverses valeurs de $p \geq 2$ ne sont pas ME (leurs nombres de Betti ℓ^2 – $0, p, 4, 0, 0, 0, \cdots$ – ne sont pas proportionnels) alors qu'ils sont quasi-isométriques (*cf.* [Har00, IV-B 46]).

Question. — Les groupes de dimension ergodique 1 sont-ils tous dans la classe de ME d'un groupe libre (de $\mathbf{F}_\infty$, $\mathbf{F}_2$ *ou de* $\mathbf{Z}$*) ?*[1]

6.2. *Théorèmes d'annulation*

Dans [Gro93, p. 229 et p. 235], M. Gromov rappelle qu'une source importante de groupes avec $\beta_p = 0$ vient de produits directs $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_1 et Γ_2 sont infinis et $\beta_i(\Gamma_1) = 0$ pour $i = 0, 1, \cdots p - 1$. et demande si cela reste vrai pour des produits semi-directs sous certaines hypothèses de finitude (qui sont nécessaires comme on le

[1] Un résultat récent de G. Hjorth permet de donner une réponse positive à cette question. Il assure que *les relations ergodiques arborables de coût entier sont produites par une action libre d'un groupe libre* ([Hjo02], voir aussi [Kec01]).

voit par exemple avec le groupe libre à deux générateurs $\mathbf{F}_2$ écrit comme produit semi-direct de $\mathbf{Z}$ avec $\mathbf{F}_\infty$). Il pose en particulier deux questions :

Question [Gro93, p. 229]. — Si Γ *est le groupe fondamental d'une variété compacte asphérique qui fibre sur le cercle, ses nombres de Betti* ℓ^2 *sont-ils tous triviaux ?*

Question [Gro93, p. 235]. — Soit $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ *une suite exacte de groupes infinis qui sont les groupes fondamentaux de CW-complexes finis asphériques. Le premier nombre de Betti* ℓ^2 *de* Γ *est-il trivial ?*

W. Lück [Lüc94] a apporté une réponse positive à ces deux questions. Plus tard, il généralise ces résultats :

Si on a une suite exacte $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ *tel que, pour tout* p, *les* $\beta_p(\mathrm{N})$ *sont finis et* Λ *est infini* élémentairement *moyennable, alors les* $\beta_p(\Gamma)$ *sont tous nuls* (voir [Lüc98b, question 3.11]).

Soit $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \to \Lambda \to 1$ *une suite exacte de groupes infinis tels que* $\beta_1(\mathrm{N}) < \infty$, *et tels que* Λ *contient un élément* d'ordre infini *ou un sous-groupe fini* d'ordre arbitrairement grand. *Alors* $\beta_1(\Gamma) = 0$ (voir [Lüc98b, th. 3.3 (5)]).

Nos deux théorèmes suivants (th. 6.6 et th. 6.8) étendent ces deux énoncés en passant des groupes élémentairement moyennables à tous les groupes moyennables ou en supprimant l'hypothèse parasite sur le quotient. En fait, le théorème [Lüc98b, th. 3.3 (5)] concerne aussi les nombres de Betti β_p pour des $p > 1$ et il semble que nos techniques donnent aussi des résultats pour p quelconque ; on étudiera cela prochainement.

Théorème **6.6.** — *Soit* $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda \to 1$ *une suite exacte, où* Λ *est moyennable infini. Si* n *est un entier pour lequel* $\beta_n(\mathrm{N})$ *est fini, alors* $\beta_n(\Gamma) = 0$.

Démonstration du théorème 6.6. — Considérons d'abord la situation générale d'une suite exacte $1 \to \mathrm{N} \to \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda \to 1$ où N et Λ sont des groupes infinis. Considérons ensuite une action libre de Γ (resp. de Λ) préservant la mesure de probabilité sur le borélien standard X (resp. Y). L'action diagonale $\gamma.(x, y) = (\gamma.x, f(\gamma).y)$ de Γ sur $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ est libre et préserve la probabilité produit. Utilisons la notation suggestive $\mathscr{R}_\Gamma^{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$ et $\mathscr{R}_\Lambda^{\mathrm{Y}}$ pour les relations produites par Γ sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ et Λ sur Y. Appelons π la projection de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ sur Y, et π_1 la projection de $\mathscr{R}_\Gamma^{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$ sur $\mathscr{R}_\Lambda^{\mathrm{Y}}$: $((x, y), (x', y')) \mapsto (y, y')$. L'image inverse par π_1 de la relation triviale sur Y (celle dont les classes sont les singletons) est exactement la relation sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ produite par N.

Soit $\mathscr{T}$ une sous-relation hyperfinie de $\mathscr{R}_\Lambda^{\mathrm{Y}}$. Elle s'écrit comme réunion croissante d'une suite de relations $\mathscr{T}_i$ à orbites finies, qui possèdent chacune un domaine fondamental borélien Y_i. Soit alors $\widehat{\mathcal{T}_i} := \pi_1^{-1}(\mathcal{T}_i)$. Sa restriction au borélien $\pi^{-1}(Y_i) \subset X \times Y$ est donnée par l'action de N sur $\pi^{-1}(Y_i)$ et $\pi^{-1}(Y_i)$ rencontre toutes les orbites de la relation $\widehat{\mathcal{T}_i}$. Puisque $\widehat{\mathcal{T}} := \pi_1^{-1}(\mathcal{T})$ est la réunion croissante des $\widehat{\mathcal{T}_i}$ et $\mu_{X\times Y}(\pi^{-1}(Y_i)) = \mu_Y(Y_i)$, on obtient par le corollaire 5.13

$$\beta_n(\widehat{\mathcal{T}}) \leq \liminf_i \mu_Y(Y_i).\, \beta_n(N),$$

quantité qui tend vers 0 comme $\mu_Y(Y_i)$ dès que $\beta_n(N)$ est fini. On a montré :

Lemme **6.7.** — *Si* $\beta_n(N)$ *est fini alors* $\beta_n(\widehat{\mathcal{T}}) = 0$.

Si maintenant Λ est supposé moyennable, la relation $\mathcal{R}_\Lambda^Y$ elle-même, définie par l'action de Λ sur Y, est hyperfinie ([OW80], [CFW81]) et $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$. Le théorème est alors démontré en appliquant le lemme. □

Théorème **6.8.** — *Soit* $1 \to N \to \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda \to 1$ *une suite exacte où* N *et* Λ *sont des groupes infinis. Si* $\beta_1(N)$ *est fini, alors* $\beta_1(\Gamma) = 0$.

Démonstration. — On reprend les notations du premier paragraphe de la preuve du théorème 6.6. On sait que la relation $\mathcal{R}_\Lambda^Y$ contient une sous-relation hyperfinie $\mathcal{T}$ à classes infinies (voir par exemple la preuve de l'item -2- de la proposition III.3 de [Gab00a]). Alors la sous-relation $\widehat{\mathcal{T}} = \pi_1^{-1}(\mathcal{T})$ de $\mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$ vérifie $\beta_1(\widehat{\mathcal{T}}) = 0$ (lemme 6.7) et contient comme sous-relation la relation engendrée par N.

Soit Σ un $\widehat{\mathcal{T}}$-complexe simplicial simplement connexe tel que (l'ensemble de sommets) $\Sigma^{(0)} = \widehat{\mathcal{T}}$. Par simple connexité, $\beta_1(\Sigma, \widehat{\mathcal{T}}) = \beta_1(\widehat{\mathcal{T}}) = 0$. Ce Σ s'étend en un $\mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$-complexe simplicial $\bar{\Sigma}$ tel que $\bar{\Sigma}^{(0)} = \mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$, qui vérifie aussi $\beta_1(\bar{\Sigma}, \mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}) = 0$ (*cf.* formule de réciprocité, section 5.2).

Soit $\epsilon > 0$. Il existe une suite $(Z_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de boréliens de $X \times Y$ de mesures $\mu(Z_j) \leq \epsilon/2^j$ et qui chacun rencontre μ-presque toutes les orbites de l'action de N sur $X \times Y$ (voir par exemple [Lev95, prop. 1]). Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_j, \cdots)$ une famille génératrice de Γ. On définit des isomorphismes boréliens partiels φ_j comme restriction de γ_j à Z_j. On considère le graphage $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_j, \cdots)$ et $\Sigma\Phi$ le $\mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$-complexe simplicial de dimension 1 associée à Φ (voir ex. 2.2.2 pour les définitions).

Le $\mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$-complexe simplicial $\Omega := \bar{\Sigma} \cup \Sigma\Phi$ vérifie $\Omega^{(0)} = \mathcal{R}_\Gamma^{X\times Y}$. Il est connexe. En effet, pour (presque tout) $z \in X \times Y$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, montrons que (z, z) et $(z, \gamma z)$ sont dans la même composante connexe de Ω_z. Il suffit de le voir pour $\gamma = \gamma_j$. Puisque Z_j rencontre toutes les N-orbites, il existe $g \in N$ qui envoie z dans Z_j. Par normalité, $\gamma_j g \gamma_j^{-1} = g' \in N$. Observons que deux sommets (z, z_1) et (z, z_2) sont dans la même composante connexe de $\bar{\Sigma}_z$ si et seulement si z_1 et z_2 sont $\widehat{\mathcal{T}}$-équivalents, en particulier si z_1 et z_2 sont N-équivalents. Alors les sommets suivants sont dans la même composante connexe :

$$\begin{aligned}&(z,z)\ \text{ et }\ (z,g.z)\ \text{ grâce à }\ \bar{\Sigma},\\&(z,g.z)\ \text{ et }\ (z,\gamma_j g.z)\ \text{ grâce à }\ \Sigma\Phi_j,\\&(z,\gamma_j g.z)\ \text{ et }\ (z,g'^{-1}\gamma_j g.z)=(z,\gamma_j.z)\ \text{ grâce à }\ \bar{\Sigma}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\beta_1(\Gamma)=\beta_1(\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})\leq\beta_1(\Omega,\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})$ (cor. 3.16, th. 3.13).

Il reste à calculer $\beta_1(\Omega,\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})$. Pour cela considérons la suite croissante $(\bar{\Sigma}_j\cup\Sigma\Phi_j)_j$ de $\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y}$-complexes simpliciaux ULB exhaustive de Ω, où $(\bar{\Sigma}_s)_{s\in\mathbf{N}}$ est une exhaustion ULB $\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y}$-invariante de $\bar{\Sigma}$, où Φ_j est la suite croissante de graphages $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_j)$ et $\Sigma\Phi_j$ le $\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y}$-complexe simplicial de dimension 1 associée à Φ_j.

Puisque $d(\bar{\Sigma}_j\cup\Sigma\Phi_j,\bar{\Sigma}_j)\leq\sum_{k=1}^{j}\mu(Z_k)\leq\epsilon$, le lemme 4.2 assure que $|\nabla_n(\bar{\Sigma}_j\cup\Sigma\Phi_j,\bar{\Sigma}_t\cup\Sigma\Phi_t)-\nabla_n(\bar{\Sigma}_j,\bar{\Sigma}_t)|\leq\epsilon$. On en déduit que $\beta_1(\Omega,\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})=\beta_1(\bar{\Sigma},\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})$ à ϵ près, cela pour tout ϵ, donc $\beta_1(\Omega,\mathscr{R}_\Gamma^{X\times Y})=0$. □

6.3. *Divers*

Corollaire **6.9.** — *Si deux réseaux de* $\mathrm{SO}(n,1)$ *et* $\mathrm{SO}(p,1)$ *sont ME, alors n et p ont même parité.*

Si deux réseaux de $\Gamma\subset\mathrm{SO}(2n+1,1)$ *et* $\Lambda\subset\mathrm{SO}(2p+1,1)$ *sont ME, avec* $p\leq n$, *alors* $n\leq 2p$.

Démonstration. — La première partie repose uniquement sur la nullité de tous les nombres de Betti ℓ^2 des réseaux pour n impair, ce qui n'est pas le cas pour n pair. La preuve de la deuxième assertion de ce corollaire m'a été suggérée par B. Okun. Soit Γ_1 un réseau de $\mathrm{SO}(2n+1,1)$ qui contient comme sous-groupe un réseau Γ_2 de $\mathrm{SO}(2n,1)$. Puisque $\beta_n(\Gamma_2)\neq 0$, les actions libres de Γ_2 sont de dimension géométrique $\geq n$. Celles de Γ_1 aussi par le corollaire 5.9. Soit Λ_1 un réseau non cocompact de $\mathrm{SO}(2p+1,1)$. Ses actions libres sont de dimension géométrique $\leq 2p$. Une ME entre Γ et Λ en donne une par transitivité entre Γ_1 et Λ_1. Les actions libres SOE associées ont même dimension géométrique $n\leq$ et $\leq 2p$. □

Proposition **6.10.** — *Supposons que le groupe* Γ *admet une action libre arborable (cf. ex. 2.2.2), ou autrement dit que* Γ *est de dimension ergodique* ≤ 1. *Alors* $\beta_n(\Gamma)=0$ *pour tout* $n\geq 2$. *De plus,* Γ *est moyennable si et seulement si* $\beta_1(\Gamma)=0$.

Démonstration. — Supposons Γ infini et $\beta_1(\Gamma)=0$. Soit Φ un arborage de l'action, alors $\mathscr{C}(\Phi)=\beta_1(\Sigma\Phi)+1=\beta_1(\Gamma)+1$ (prop. 3.20). On en déduit ([Lev95, th. 2] ou [Gab00a, prop. III.3]) que la relation d'équivalence produite est hyperfinie et donc que le groupe est moyennable ([FM77a, prop. 4.5]). C'était la seule implication non évidente. □

On obtient comme application immédiate que les seuls réseaux de groupes de Lie semi-simples qui admettent des actions libres arborables sont ceux de SO(2, 1).

BIBLIOGRAPHIE

[Ada90] S. Adams, Trees and amenable equivalence relations, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **10**(1) (1990), 1–14.

[AS90] S. Adams and R. Spatzier, Kazhdan groups, cocycles and trees, *Amer. J. Math.*, **112**(2) (1990), 271–287.

[Ati76] M. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pp. 43–72. Astérisque, No. 32–33. Paris: Soc. Math. France, 1976.

[BCH94] P. Baum, A. Connes and N. Higson, Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras, In C*-*algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, pp. 240–291. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

[BV97] M. Bekka and A. Valette, Group cohomology, harmonic functions and the first L^2-Betti number, *Potential Anal.*, **6**(4) (1997), 313–326.

[Bor85] A. Borel, The L^2-cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **10** (1985), 95–105.

[Bro82] K. Brown, *Cohomology of groups*, New York: Springer, 1982.

[CFW81] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **1**(4), 431–450 (1982), 1981.

[CG86] J. Cheeger and M. Gromov, L_2-cohomology and group cohomology, *Topology*, **25**(2) (1986), 189–215.

[Co79] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pp. 19–143. Lect. Notes 725. Berlin: Springer, 1979.

[Co82] A. Connes, A survey of foliations and operator algebras, In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pp. 521–628. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1982.

[CZ89] M. Cowling and R. Zimmer, Actions of lattices in $sp(1, n)$, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **9**(2) (1989), 221–237.

[Dix69] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[Dye59] H. Dye, On groups of measure preserving transformations, I, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 119–159.

[Dye63] H. Dye, On groups of measure preserving transformations, II, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 551–576.

[Eck00] B. Eckmann, Introduction to l_2-methods in topology: reduced l_2-homology, harmonic chains, l_2-Betti numbers, *Israel J. Math.*, **117** (2000), 183–219. Notes prepared by Guido Mislin.

[Ele97] G. Elek, Betti numbers and Euler's formula for combinatorial foliations, *Manuscripta Math.*, **92**(2) (1997), 239–247.

[FM77a] J. Feldman and C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234**(2) (1977), 289–324.

[FM77b] J. Feldman and C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234**(2) (1977), 325–359.

[FSZ89] J. Feldman, C. Sutherland and R. Zimmer, Subrelations of ergodic equivalence relations, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **9**(2) (1989), 239–269.

[Fur99a] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)*, **150**(3) (1999), 1059–1081.

[Fur99b] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)*, **150**(3) (1999), 1083–1108.

[Gab00a] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes, *Invent. Math.*, **139**(1) (2000), 41–98.

[Gab00b] D. Gaboriau, Sur la (co-)homologie L^2 des actions préservant une mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**(5) (2000), 365–370.

[Gro93] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, pp. 1–295. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

[Har00] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago, IL: University of Chicago Press, 2000.

[Hae71] A. Haefliger, Homotopy and integrability, In *Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*, pp. 133–163. Berlin: Springer, 1971.

[Hjo02] G. Hjorth, A lemma for cost attained, *Manuscrit*, 2002.

[HL91] J. Heitsch and C. Lazarov, Homotopy invariance of foliation Betti numbers, *Invent. Math.*, **104**(2) (1991), 321–347.

[Jol01] P. Jolissaint, Approximation properties for measure equivalent groups, *Manuscrit*, 2001.

[Kec01] A. Kechris, Lectures on costs of equivalence relations and groups, *Prépublication Caltech*, 2001.

[Kri70] W. Krieger, On constructing non-*isomorphic hyperfinite factors of type III, *J. Functional Analysis*, **6** (1970), 97–109.

[Lev95] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15**(6) (1995), 1173–1181.

[Lüc94] W. Lück, L^2-torsion and 3-manifolds, In *Low-dimensional topology (Knoxville, TN, 1992)*, pp. 75–107. Cambridge, MA: Internat. Press, 1994.

[Lüc98] W. Lück, L^2-invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes, à paraître in "Handbook of Geometry", Elsevier, 1998.

[Lüc98a] W. Lück, Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers, I, Foundations, *J. Reine Angew. Math.*, **495** (1998), 135–162.

[Lüc98b] W. Lück, Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers, II, Applications to Grothendieck groups, L^2-Euler characteristics and Burnside groups, *J. Reine Angew. Math.*, **496** (1998), 213–236.

[Moo82] C. Moore, Ergodic theory and von Neumann algebras, In *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, pp. 179–226. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1982.

[MS02] N. Monod and Y. Shalom, en préparation. Communication personnelle.

[MvN36] F. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 116–229.

[MvN43] F. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, IV, *Ann. of Math.* (2), **44** (1943), 716–808.

[OW80] D. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions, I, The Rohlin lemma, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **2**(1) (1980), 161–164.

[Pau99] F. Paulin, Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes, *Markov Process. Related Fields*, **5**(2) (1999), 163–200.

[Sch87] K. Schmidt, Some solved and unsolved problems concerning orbit equivalence of countable group actions, *Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics, II (Georgenthal, 1986)*, pp. 171–184, Leipzig: Teubner, 1987.

[Shl99a] D. Shlyakhtenko, Free Fisher information with respect to a completely positive map and cost of equivalence relations, *MSRI preprint 1999-030*, 1999.

[Shl99b] D. Shlyakhtenko, Microstates free entropy and cost of equivalence relations, *preprint*, http://xxx.lanl.gov/abs/math.OA/9912224.

[Sun87] V. Sunder, *An invitation to von Neumann algebras*, New York: Springer, 1987.

[Zim78] R. Zimmer, Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks, *J. Functional Analysis*, **27**(3) (1978), 350–372.

[Zim84] R. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1984.

D. G.
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (UMPA),
Unité Mixte de Recherche CNRS 5669,
46, allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, France,
damien.gaboriau@umpa.ens-lyon.fr,
http://www.umpa.ens-lyon.fr/~gaboriau/

Manuscrit reçu le 7 avril 2001.