PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ÉTIENNE GHYS

# Rigidité différentiable des groupes fuchsiens

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 78 (1993), p. 163-185

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1993__78__163_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# RIGIDITÉ DIFFÉRENTIABLE DES GROUPES FUCHSIENS

par ÉTIENNE GHYS

## 1. Introduction

Soit $\Gamma_g$ le groupe fondamental d'une surface fermée orientée de genre $g \geqslant 2$ et $\Phi : \Gamma_g \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ un morphisme à valeurs dans le groupe des difféomorphismes directs du cercle, de classe $C^r (0 \leqslant r \leqslant \infty)$. On associe classiquement à $\Phi$ un entier $\mathrm{eu}(\Phi)$, appelé *nombre d'Euler*, qui peut être défini de la façon suivante. Partant de la présentation usuelle de $\Gamma_g$ :

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle,$$

on choisit des difféomorphismes $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{A}_g, \tilde{B}_g$ de $\mathbf{R}$ qui relèvent les difféomorphismes $\Phi(a_1), \Phi(b_1), \ldots, \Phi(a_g), \Phi(b_g)$ du cercle $S^1 \approx \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Le produit des commutateurs $\tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1^{-1} \ldots \tilde{A}_g \tilde{B}_g \tilde{A}_g^{-1} \tilde{B}_g^{-1}$, relevant l'identité, est alors une translation entière qui ne dépend pas des choix faits. L'amplitude de cette translation est $\mathrm{eu}(\Phi)$.

J. Milnor et J. Wood montrent dans [Mi] et [Wo] que cet entier $\mathrm{eu}(\Phi)$ ne peut prendre que des valeurs inférieures ou égales (en valeur absolue) à $2g - 2$. Ils constatent par ailleurs que cette valeur maximale est effectivement atteinte lorsque $\Phi$ est un plongement de $\Gamma_g$ comme sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$. Cette dernière inclusion correspond à l'action projective de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur la droite projective réelle $P^1$, difféomorphe au cercle. Ces plongements de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, à conjugaison près, paramètrent l'espace de Teichmüller de la surface fermée orientée de genre $g$; ils constituent donc un espace de dimension finie $6g - 6$.

Le but principal de cet article est de démontrer le théorème suivant qui répond positivement à une question que nous posions dans [Gh4].

*Théorème principal.* — *Soit* $\Phi : \Gamma_g \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $(3 \leqslant r \leqslant \infty)$ *un morphisme dont le nombre d'Euler est maximal, c'est-à-dire égal à* $2g - 2$. *Alors il existe un difféomorphisme* $f$ *du cercle,* **de classe $C^r$**, *tel que le conjugué de* $\Phi$ *par* $f$ *soit un plongement dont l'image est un sous-groupe discret cocompact de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$.

Avant de décrire le plan de cet article, donnons quelques commentaires sur ce résultat. L'existence d'un *homéomorphisme* $f$ tel que le conjugué de $\Phi$ par $f$ soit à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est un résultat de S. Matsumoto [Mat]. Insistons sur le fait que deux plongements de $\Gamma_g$ comme sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$

sont toujours conjugués par un homéomorphisme (voir par exemple [Gr]) mais ne sont conjugués par un $C^1$-difféomorphisme que s'ils sont conjugués dans $PSL(2, \mathbf{R})$ c'est-à-dire s'ils définissent le même point dans l'espace de Teichmüller ([Gh1], [Su1]).

Une version locale du théorème ci-dessus a été obtenue dans [Gh1] et [Gh5]; on y fait l'hypothèse supplémentaire que $\Phi$ est $C^1$-proche ($C^3$-proche dans [Gh1]) d'une représentation à valeurs dans $PSL(2, \mathbf{R})$. C'est une élaboration des idées de ces deux articles qui a mené au présent travail.

Le § 2 est un rappel sur les géométries affines et projectives de la droite. Dans le § 3, nous classons les difféomorphismes d'Anosov du tore $T^2$ dont les distributions stable et instable sont de classe $C^2$. Nous ne faisons pas l'hypothèse que le difféomorphisme préserve l'aire car on dispose dans ce cas d'une preuve très élémentaire, due à A. Avez [Av]. Une autre (esquisse de) preuve, sans l'hypothèse d'invariance d'aire, se trouve dans [Gh5] et utilise le théorème de M. Herman sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. La preuve élémentaire que nous proposons ici est indépendante du théorème de M. Herman et a l'avantage de pouvoir être étendue en dimension 3. On peut d'ailleurs considérer que le théorème de S. Matsumoto déjà cité est analogue au théorème de A. Denjoy décrivant les difféomorphismes du cercle à conjugaison topologique près alors que le théorème principal de cet article est analogue à celui de M. Herman.

Dans le § 4, on utilise des idées similaires pour décrire les flots d'Anosov en dimension 3 dont les feuilletages stable et instable faibles sont de classe $C^2$. Ceci répond positivement à une question de [Gh5]. Notons que T. Barbot, utilisant ces résultats, obtient une classification topologique des flots d'Anosov dont l'un des feuilletages faibles est de classe $C^2$ [Ba]. Le § 5 contient la preuve du théorème principal qui se ramène à l'étude faite au § 4. Enfin, dans le § 6, on étudie les déformations holomorphes de ces groupes fuchsiens.

## 2. Géométries affines et projectives de la droite

Soit I une variété de dimension 1 (éventuellement à bord) munie d'une structure affine. Cela signifie que I est recouverte par des ouverts $U_i$ et que l'on dispose de difféomorphismes $f_i$ de $U_i$ sur un intervalle de $\mathbf{R}$, de telle sorte que les changements de cartes $f_i \circ f_j^{-1}$ soient des restrictions de difféomorphismes affines de $\mathbf{R}$ à leurs domaines de définition.

Soit maintenant J une autre variété affine de dimension 1 et $f: I \to J$ un difféomorphisme non nécessairement affine, de classe $C^r$ ($r \geqslant 2$). Si $x_0$ est un point de I et si l'on choisit des cartes affines aux voisinages de $x_0$ et $f(x_0)$, le difféomorphisme $f$ peut être considéré comme un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbf{R}$. On peut alors construire la forme différentielle sur I définie dans ces coordonnées par :

$$n(f) = \frac{f''}{f'}\, dx.$$

Il est immédiat que $n(f)$ ne dépend que de $f$ et pas des choix des cartes affines utilisées pour la définir.

Nous résumons dans une proposition quelques propriétés faciles à établir.

*Proposition* **2.1.** — *a)* $n(f)$ *est identiquement nulle si et seulement si* $f$ *est un difféomorphisme affine.*

*b) Si* $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ *et* $g: \mathrm{J} \to \mathrm{K}$ *sont deux difféomorphismes entre variétés affines, on a*

$$n(g \circ f) = f^* n(g) + n(f).$$

*c) En particulier, si* $h_1: \mathrm{I} \to \mathrm{I}'$ *et* $h_2: \mathrm{J} \to \mathrm{J}'$ *sont des difféomorphismes affines entre variétés affines, on a*

$$n(h_2 \circ f \circ h_1^{-1}) = h_1^* n(f). \quad \square$$

Si I est une variété affine et si $\alpha$ est une 1-forme différentielle de classe $\mathrm{C}^r$ $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$, l'équation $n(f) = \alpha$ a des solutions locales $f: \mathrm{I}' \to \mathbf{R}$ définies sur des intervalles $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ et deux solutions diffèrent d'une application affine. Ainsi :

*Si* I *est affine, il y a bijection naturelle entre les (autres) structures affines sur* I *de classe* $\mathrm{C}^{r+2}$ $(r \geqslant 0)$ *sur* I *et les* 1*-formes différentielles sur* I *de classe* $\mathrm{C}^r$.

Nous n'avons défini $n(f)$ que lorsque $f$ est de classe $\mathrm{C}^2$. Il est cependant facile d'affaiblir légèrement cette condition. Nous conviendrons de dire qu'un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbf{R}$ est de classe $\mathrm{C}^{1,1}$ si sa différentielle est localement lipschitzienne. Si $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ est de classe $\mathrm{C}^{1,1}$, on peut encore définir $n(f)$ qui est alors une 1-forme mesurable, définie presque partout, localement bornée. Les propriétés de la proposition 2.1 restent valides.

De la même manière, on peut considérer les variétés de dimension 1 munies de structures projectives; les changements de cartes étant alors des homographies $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Si $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ est un difféomorphisme de classe $\mathrm{C}^3$ entre deux telles variétés projectives, on considère la différentielle quadratique $s(f)$, définie en coordonnées locales projectives, par la dérivée schwarzienne

$$s(f) = \left( \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \right) dx^2.$$

Ceci est bien indépendant des cartes projectives utilisées. Des propriétés analogues aux précédentes sont satisfaites.

*Proposition* **2.2.** — *a)* $s(f)$ *est identiquement nulle si et seulement si* $f$ *est un difféomorphisme projectif.*

*b) Si* $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ *et* $g: \mathrm{J} \to \mathrm{K}$ *sont deux difféomorphismes entre variétés projectives, on a*

$$s(g \circ f) = f^* s(g) + s(f).$$

*c) En particulier, si* $h_1 : I \to I'$ *et* $h_2 : J \to J'$ *sont des difféomorphismes projectifs entre variétés projectives, on a*

$$s(h_2 \circ f \circ h_1^{-1}) = h_1^* s(f).$$

*d) Si* I *est une variété projective de dimension 1, il y a bijection naturelle entre les (autres) structures projectives sur* I *de classe* $C^{r+3}$ $(r \geqslant 0)$ *sur* I *et les formes différentielles quadratiques sur* I *de classe* $C^r$. □

## 3. Difféomorphismes d'Anosov du tore $T^2$

Rappelons qu'un difféomorphisme $\varphi$ du tore $T^2$, de classe $C^r$ $(r \geqslant 2)$, est de type *Anosov* s'il existe deux champs de droites $E^s$ et $E^u$ sur $T^2$, invariants par la différentielle de $\varphi$ et des constantes $C > 0$, $\lambda > 1$ tels que, pour tout $v_s$ de $E^s$ et $v_u$ de $E^u$ et tout entier $n \geqslant 0$, on ait

$$|| d\varphi^n(v_s) || \leqslant C\lambda^{-n} || v_s ||, \qquad || d\varphi^n(v_u) || \geqslant C\lambda^n || v_u ||,$$

où $||.||$ désigne une métrique riemannienne auxiliaire sur $T^2$.

Les champs $E^s$ et $E^u$ sont alors uniquement intégrables et définissent deux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ dont les feuilles sont de classe $C^r$ et varient continûment dans la topologie $C^r$. Ces feuilletages ne sont cependant en général que de classe $C^1$ (voir [An]).

D'un point de vue topologique, on sait que tout difféomorphisme d'Anosov du tore $T^2$ est conjugué par un homéomorphisme à un automorphisme linéaire induit par une matrice de $GL(2, \mathbf{Z})$ agissant sur $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ (voir [Fr]). Les questions traitées dans ce paragraphe ont trait à l'étude des difféomorphismes à conjugaison différentiable près.

Le résultat suivant est connu (voir [Gh5], [Su3]).

*Proposition* **3.1.** — *Il existe une unique structure affine sur les feuilles de* $\mathcal{F}^s$ *(resp.* $\mathcal{F}^u$*) qui est de classe* $C^r$ *sur chaque feuille, qui dépend continûment du point (voir plus bas) et qui est invariante par* $\varphi$. *Pour cette structure, chaque feuille de* $\mathcal{F}^s$ *(resp.* $\mathcal{F}^u$*) est affinement isomorphe à la droite* $\mathbf{R}$.

*Preuve.* — La longueur d'arc sur chaque feuille de $\mathcal{F}^s$ définit une structure euclidienne et donc affine mais qui n'est bien entendu pas nécessairement invariante par $\varphi$. Soit $\xi$ un champ de vecteurs unitaires tangents à $\mathcal{F}^s$. Pour chaque feuille L de $\mathcal{F}^s$, la restriction de $\varphi$ à L définit un difféomorphisme de L sur $\varphi(L)$ et on peut donc considérer $n(\varphi|_L)$. C'est une 1-forme différentielle sur L qui, évaluée sur $\xi$, donne une fonction $u : T^2 \to \mathbf{R}$. Il est clair que $u$ est continue, de classe $C^{r-2}$ sur chaque feuille, et que toutes les dérivées directionnelles $\xi^{(i)}(u)$ $(0 \leqslant i \leqslant r-2)$ sont continues sur $T^2$.

Nous cherchons une structure affine sur chaque feuille de $\mathcal{F}^s$. D'après ce que nous avons vu, cela revient à chercher, sur chaque feuille de $\mathcal{F}^s$, une 1-forme différentielle. Evaluée sur $\xi$, cette forme est donnée par une fonction $v : T^2 \to \mathbf{R}$. Nous

dirons que la structure affine dépend continûment du point si $v$ ainsi que toutes ses dérivées directionnelles $\xi^{(i)}(v)$ $(0 \leqslant i \leqslant r-2)$ sont continues.

La structure affine associée à la fonction $v$ est invariante par $\varphi$ si et seulement si

$$(*) \qquad u = \lambda_s . v \circ \varphi - v,$$

où $\lambda_s$ est la fonction définie sur $T^2$ par

$$d\varphi(\xi) = \lambda_s . \xi.$$

La définition des difféomorphismes d'Anosov montre que l'opérateur P défini sur l'espace de Banach des fonctions continues $v$ sur $T^2$ par

$$P(v) = \lambda_s . v \circ \varphi$$

est tel qu'une puissance assez grande $P^k$ contracte strictement la norme uniforme. Par le principe du point fixe de Banach, l'équation fonctionnelle $(*)$ a bien une unique solution continue. Il est facile de vérifier par ailleurs qu'une puissance assez élevée de P contracte aussi les dérivées $\xi^{(i)}(v)$ $(0 \leqslant i \leqslant r-2)$. Il en résulte que la solution $v$ de $(*)$ est de classe $C^{r-2}$ sur chaque feuille et que les dérivées $\xi^{(i)}(v)$ $(0 \leqslant i \leqslant r-2)$ sont continues sur $T^2$. Ceci établit la première partie de la proposition.

Une variété affine simplement connexe de dimension 1 est affinement isomorphe à un intervalle de $\mathbf{R}$. Par conséquent, si une telle variété admet un difféomorphisme affine ayant un point fixe strictement contractant, alors cette variété est affinement isomorphe à $\mathbf{R}$. Toutes les feuilles de $\mathcal{F}^s$ passant par un point périodique de $\varphi$ sont donc isomorphes à $\mathbf{R}$ et la densité des orbites périodiques de $\varphi$ montre qu'il en est de même pour toutes les feuilles de $\mathcal{F}^s$. □

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

*Théorème* **3.2.** — *Soit $\varphi$ un difféomorphisme d'Anosov de classe $C^r$ $(2 \leqslant r \leqslant \infty)$ du tore $T^2$. Si $\mathcal{F}^s$ est transversalement de classe $C^{1,1}$, alors $\mathcal{F}^s$ est transversalement affine. Plus précisément, le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}^s$ préserve les structures affines des feuilles de $\mathcal{F}^u$.*

*Corollaire* **3.3.** — *Si $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe $C^{1,1}$, alors $\varphi$ est $C^r$-conjugué à un automorphisme linéaire du tore $T^2$.*

*Preuve du corollaire.* — Le revêtement universel de $T^2$ est difféomorphe au produit $L^s \times L^u$ d'une feuille de $\mathcal{F}^s$ et d'une feuille de $\mathcal{F}^u$, muni des feuilletages produits (car nous savons déjà que $\varphi$ est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire). D'après le théorème 3.2, le groupe fondamental $\mathbf{Z}^2$ de $T^2$ opère affinement sur chaque facteur de $L^s \times L^u \approx \mathbf{R}^2$, donc par translations puisque cette action est sans point fixe. Ainsi, le tore $T^2$ hérite d'une structure affine complète, c'est-à-dire qu'il s'identifie à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et le difféomorphisme $\varphi$ opère affinement sur $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Nous avons donc bien conjugué $\varphi$ à un automorphisme linéaire. □

Nous abordons maintenant la preuve du théorème 3.2. Pour cela, nous utiliserons la notion de partition de Markov.

Si $\varepsilon > 0$, nous noterons $W^s_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(x)$ les intervalles de longueur $2\varepsilon$ et centrés en $x$ dans les feuilles de $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ passant par le point $x$ de $T^2$. (Nous utilisons toujours une métrique riemannienne auxiliaire sur le tore.) Si $\varepsilon$ est assez petit, il existe $\eta > 0$ tel que si deux points $x$ et $y$ sont distants de moins de $\eta$, $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ contient exactement un point, noté $[x,y]$. Un *rectangle* R de $T^2$ est un ensemble du type :

$$R = \{[x,y] \mid x \in I^u, y \in I^s\} = [I^u, I^s]$$

où $I^s$ et $I^u$ sont deux intervalles compacts contenus dans une feuille de $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ respectivement et dont la réunion est de diamètre inférieur à $\eta$. *Orientons les feuilletages* $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$. L'intervalle $I^s$ (resp. $I^u$) a une extrémité gauche, notée $a^s_g$ (resp. $a^u_g$) et une extrémité droite, notée $a^s_d$ (resp. $a^u_d$). La frontière $\partial R$ est alors la réunion de quatre parties, qualifiées de stables et instables, gauches et droites (voir la fig. 1) :

$$\partial^s_g R = \{[a^u_g, y], y \in I^s\}$$

$$\partial^s_d R = \{[a^u_d, y], y \in I^s\}$$

$$\partial^u_g R = \{[x, a^s_g], x \in I^u\}$$

$$\partial^u_d R = \{[x, a^s_d], x \in I^u\}$$

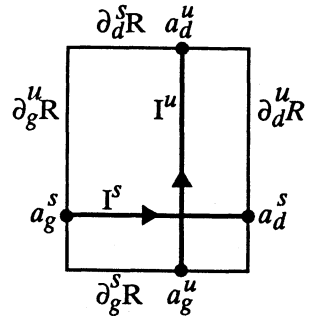


FIG. 1

*Définition* **3.4.** — *Une partition de Markov est une collection finie de rectangles* $R_i = [I^u_i, I^s_i]$ $(i = 1, \ldots, p)$ *telle que* :

(i) *les* $R_i$ *recouvrent le tore et leurs intérieurs sont disjoints deux à deux,*

(ii) *si* $\varphi(R_i)$ *rencontre l'intérieur de* $R_j$, *alors* $\varphi(R_i) \cap R_j$ *est un rectangle du type* $[I^u_j, I']$, *où* $I'$ *est un sous-intervalle de* $I^s_i$. *De même, si* $\varphi^{-1}(R_i)$ *rencontre l'intérieur de* $R_j$, *alors* $\varphi^{-1}(R_i) \cap R_j$ *est un rectangle du type* $[I', I^s_j]$, *où* $I'$ *est un sous-intervalle de* $I^u_j$.

De telles partitions de Markov existent pour tout difféomorphisme d'Anosov du tore $T^2$. La démonstration de ce fait est d'ailleurs facile (voir, par exemple, [Ar-Av]).

Soit $\mathscr{I}$ la réunion des bords instables gauches des $R_i$. Commençons par définir une fonction $\hat{\varphi} : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$. Soit $S_i$ la partie finie de $\partial^u_g R_j$ formée des points $x$ tels que l'image par $\varphi$ de $[x, I^s_i]$ soit contenue dans plusieurs rectangles. Pour chaque $i$, $\partial^u_g R_i - S_i$ est une réunion finie d'intervalles d'intérieurs disjoints de telle sorte que si $x$ est un point de l'intérieur de l'un de ces intervalles, l'image par $\varphi$ de $[x, I^s_i]$ est contenue dans

un *unique* rectangle $R_j$ et s'écrit $[\hat{\varphi}(x), I']$ où $\hat{\varphi}(x)$ est un point bien défini de $\partial_g^u R_j$ et $I'$ est un sous-intervalle de l'un des $I_j^s$ (voir fig. 2). On obtient ainsi une application $\hat{\varphi}$ définie en dehors de la réunion S des $S_i$ et à valeurs dans $\mathscr{I}$. Nous ne chercherons pas à définir $\hat{\varphi}$ sur cet ensemble fini bien qu'il serait facile de choisir une convention. Notons que la restriction de $\hat{\varphi}$ à chaque composante de $\mathscr{I} - S$ est un difféomorphisme sur l'intérieur de l'un des $\partial_g^u R_j$. D'autre part, pour chaque $j$, il existe un nombre fini de difféomorphismes définis sur l'intérieur de $\partial_g^u R_j$ et à valeurs dans des intervalles de $\mathscr{I}$ qui sont les « branches de l'inverse de $\hat{\varphi}$ définies sur $\partial_g^u R_j$ ».

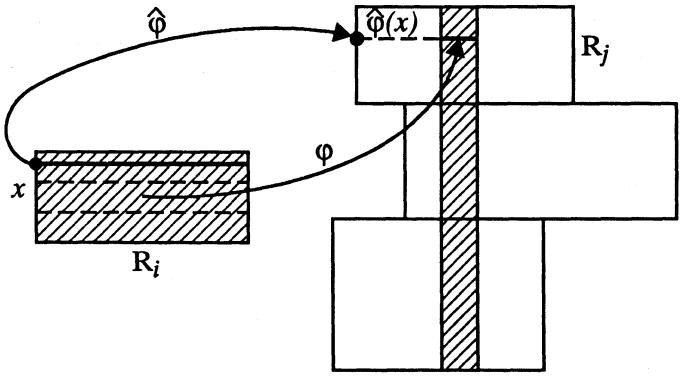


FIG. 2

Il est clair que $\hat{\varphi}$ est aussi régulier que le feuilletage stable $\mathscr{F}^s$. *Si l'on se place sous les hypothèses du théorème*, l'application $\hat{\varphi}$ est donc de classe $C^{1,1}$. D'autre part, le fait que $\varphi$ soit un difféomorphisme d'Anosov implique que $\hat{\varphi}$ est dilatante, c'est-à-dire que la dérivée première d'un itéré assez grand de $\hat{\varphi}$ est supérieure à une constante strictement supérieure à 1 sur tout son domaine de définition. Enfin, puisque le difféomorphisme $\varphi$ a des orbites denses, il en est de même pour $\hat{\varphi}$. En d'autres termes, $\hat{\varphi}$ est topologiquement transitif.

Pour chaque $i$, les bords instables $\partial_g^u R_i$ et $\partial_d^u R_i$ sont deux intervalles munis de structures affines et l'on dispose d'un difféomorphisme $\pi_i : \partial_g^u R_i \to \partial_d^u R_i$ de classe $C^{1,1}$ défini par $\pi_i(x) = [x, a_{d,i}^s]$ (où, bien sûr, $a_{d,i}^s$ est l'extrémité droite de $I_i^s$). On peut donc considérer la forme différentielle $n(\pi_i)$ sur $\partial_g^u R_i$ définie au § 2. Ainsi, la réunion $\mathscr{I}$ des $\partial_g^u R_i$ est munie d'une forme $n$ (mesurable bornée). On peut aussi considérer $n$ comme une mesure finie $\nu$ (éventuellement avec signe) sur $\mathscr{I}$ définie par l'intégration de $n$. Nous nous proposons de montrer que $n$ est identiquement nulle. Il en résultera que les difféomorphismes $\pi_i$ sont affines, ce qui est l'essentiel du contenu du théorème 3.2.

*Lemme* **3.5.** — *La mesure* $\nu$ *définie par la forme* $n$ *est invariante par* $\hat{\varphi}$.

*Preuve.* — Soit $(\alpha, \beta)$ un intervalle contenu dans $\partial_g^u R_i$. Il s'agit de montrer que $\nu((\alpha, \beta)) = \nu(\hat{\varphi}^{-1}(\alpha, \beta))$. Considérons le recouvrement du rectangle $R_i$ par les $\varphi(R_j)$. Pour simplifier les notations, nous supposerons en fait que $R_i$ est recouvert par $\varphi(R_1)$ et $\varphi(R_2)$ mais le cas général serait analogue.

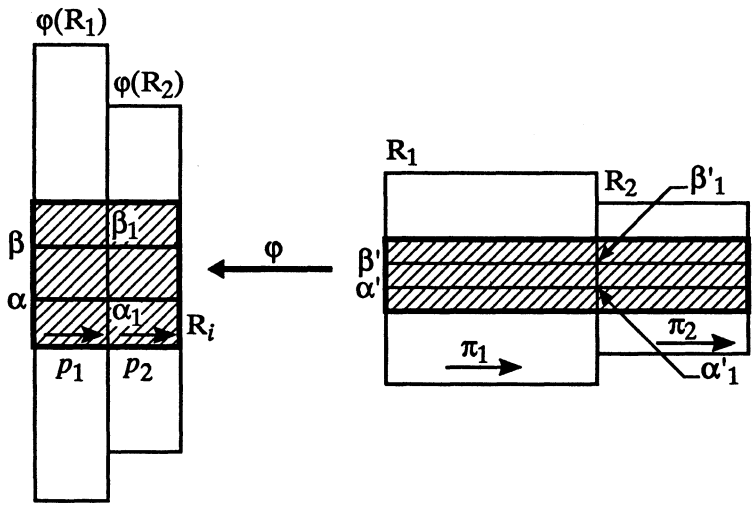


FIG. 3

Le difféomorphisme $\pi_i$ s'écrit comme une composition $p_2 \circ p_1$ où $p_1$ et $p_2$ sont conjugués par $\varphi$ à $\pi_1$ et $\pi_2$ (voir fig. 3). On a donc

$$n(\pi_i) = n(p_1) + p_1^* n(p_2),$$

où $n(p_1)$ et $n(p_2)$ doivent bien sûr être calculés par rapport aux structures affines dont nous disposons sur les feuilles instables. Puisque $\varphi$ opère affinement sur les feuilles instables, on a

$$n(p_1) = (\varphi^{-1})^* n(\pi_1) \quad \text{et} \quad n(p_2) = (\varphi^{-1})^* n(\pi_2).$$

Posons

$$\alpha_1 = p_1(\alpha), \qquad \beta_1 = p_1(\beta),$$
$$\alpha' = \varphi^{-1}(\alpha), \qquad \beta' = \varphi^{-1}(\beta),$$
$$\alpha'_1 = \varphi^{-1}(\alpha_1), \qquad \beta'_1 = \varphi^{-1}(\beta_1).$$

Par définition de $\hat{\varphi}$, l'image inverse $\hat{\varphi}^{-1}((\alpha, \beta))$ est la réunion des intervalles $(\alpha', \beta')$ et $(\alpha'_1, \beta'_1)$. On a donc

$$\begin{aligned} \nu((\alpha, \beta)) &= \int_{(\alpha, \beta)} n(\pi_i) = \int_{(\alpha, \beta)} n(p_1) + p_1^* n(p_2) \\ &= \int_{(\alpha, \beta)} n(p_1) + \int_{(\alpha_1, \beta_1)} n(p_2) = \int_{(\alpha', \beta')} n(\pi_1) + \int_{(\alpha'_1, \beta'_1)} n(\pi_2) \\ &= \nu(\hat{\varphi}^{-1}((\alpha, \beta))) \quad \square \end{aligned}$$

*Corollaire* **3.6.** — *La mesure* $\nu$ *est de signe constant.*

*Preuve.* — Soit $\nu = \nu_+ - \nu_-$ la décomposition de Lebesgue de $\nu$. On a alors $\hat{\varphi}_* \nu = \hat{\varphi}_* \nu_+ - \hat{\varphi}_* \nu_-$ et, par conséquent, $\hat{\varphi}_* \nu_+ \geqslant \nu_+$ et $\hat{\varphi}_* \nu_- \geqslant \nu_-$. S'il existait un borélien A tel que $\nu_+(A) < \nu_+(\hat{\varphi}^{-1}(A))$, on aurait

$$\nu_+(\mathscr{S}) = \nu_+(A) + \nu_+(\mathscr{S} - A) < \nu_+(\hat{\varphi}^{-1}(A)) + \nu_+(\hat{\varphi}^{-1}(\mathscr{S} - A)) = \nu_+(\mathscr{S}).$$

Ainsi $\nu_+$ et $\nu_-$ sont invariantes par $\hat{\varphi}$. Notons que $\nu_+$ et $\nu_-$ sont évidemment absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Rappelons d'autre part qu'une application dilatante de classe $C^{1,1}$ et topologiquement transitive préserve une unique mesure de probabilité $\lambda$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (voir par exemple [Man]). Par conséquent, $\nu_+$ et $\nu_-$ sont des multiples constants de $\lambda$. Il en est de même pour $\nu$ qui est donc de signe constant. □

La preuve que $n$ est identiquement nulle se ramène donc au lemme suivant.

*Lemme* **3.7.** — *La masse totale de* $\nu$ *est nulle.*

*Preuve.* — Les rectangles $R_i$ « pavent » le tore $T^2$. On peut décomposer le bord de chacun d'eux en une réunion finie d'intervalles de façon à obtenir une décomposition polygonale du tore. Choisissons un champ de vecteurs $\xi$ non singulier tangent à $\mathscr{F}^u$.

Soit $\gamma^s$ un chemin contenu dans une feuille de $\mathscr{F}^s$ et reliant deux points $x$ et $y$. L'holonomie de $\mathscr{F}^s$ le long de $\gamma^s$ peut être considérée comme un germe de difféomorphisme entre les feuilles de $\mathscr{F}^u$ passant par $x$ et $y$, aux voisinages de $x$ et $y$. La différentielle de cette holonomie envoie le vecteur $\xi(x)$ sur un vecteur du type $\mu.\xi(y)$ avec $\mu > 0$. Posons $c(\gamma^s) = -\operatorname{Log}\mu$. Il est clair que $c$ est additif, c'est-à-dire que si $\gamma^s$ obtient en composant deux chemins $\gamma_1^s$ et $\gamma_2^s$ d'une même feuille de $\mathscr{F}^s$, on a $c(\gamma) = c(\gamma_1^s) + c(\gamma_2^s)$.

Soit maintenant $\gamma^u$ un chemin contenu dans une feuille de $\mathscr{F}^u$ et joignant deux points $x$ et $y$. Les vecteurs $\xi(x)$ et $\xi(y)$ sont deux vecteurs tangents non nuls sur une même variété affine simplement connexe de dimension 1. Sur une telle variété, les espaces tangents aux divers points sont naturellement identifiés, de sorte que l'on peut écrire $\xi(y) = \mu.\xi(x)$ avec $\mu > 0$. Nous poserons $c(\gamma^u) = -\operatorname{Log}\mu$ et il est clair que $c$ est additif.

Les arêtes de la décomposition polygonale de $T^2$ sont des chemins tangents à $\mathscr{F}^s$ ou $\mathscr{F}^u$ et les constructions précédentes permettent donc de définir une 1-cochaîne $c$ sur cette décomposition polygonale. Nous affirmons que le cobord $dc$ de $c$, évalué sur la 2-face $R_i$, prend la valeur $\nu(\partial_g^u R_i)$. Soit $f_0 : (0, 1) \to \partial_g^u R_i$ et $f_1 : (0, 1) \to \partial_d^u R_i$ les uniques isomorphismes affines directs entre $(0, 1)$ et $\partial_g^u R_i$, $\partial_d^u R_i$. Introduisons des nombres réels positifs définis par

$$df_0(0)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \mu_{0,0}.\xi(f_0(0)), \qquad df_0(1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \mu_{0,1}.\xi(f_0(1)),$$

$$df_1(0)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \mu_{1,0}.\xi(f_1(0)), \qquad df_1(1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \mu_{1,1}.\xi(f_1(1)),$$

$$d\pi_i(f_0(0))\ (\xi(f_0(0)) = \lambda_0.\xi(f_1(0)),$$

$$d\pi_i(f_0(1))\ (\xi(f_0(1)) = \lambda_1.\xi(f_1(1))$$

(voir la fig. 4).

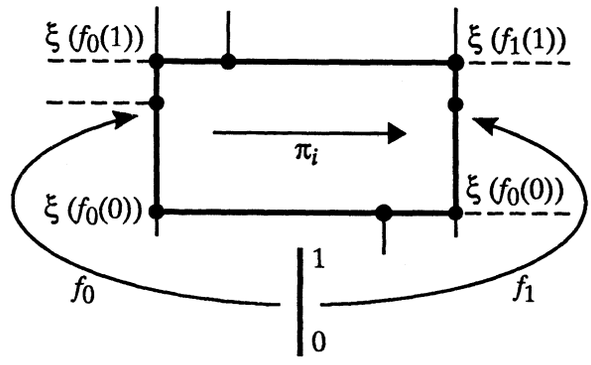


FIG. 4

Par définition de $\nu$, on a

$$\begin{aligned}\nu(\partial_g^u R_i) &= \int_{\partial_g^u R_i} n(\pi_i) = \int_{(0,1)} n(f_1^{-1} \circ \pi_i \circ f_0) = \int_0^1 (\mathrm{Log}(f_1^{-1} \circ \pi_i \circ f_0)')'\, dt \\ &= \mathrm{Log}(f_1^{-1} \circ \pi_i \circ f_0)'(1) - \mathrm{Log}(f_1^{-1} \circ \pi_i \circ f_0)'(0) \\ &= \mathrm{Log}\,\mu_{0,1}.\lambda_1/\mu_{1,1} - \mathrm{Log}\,\mu_{0,0}.\lambda_0/\mu_{1,0} \\ &= (\mathrm{Log}\,\mu_{0,1} - \mathrm{Log}\,\mu_{0,0}) + (\mathrm{Log}\,\mu_{1,0} - \mathrm{Log}\,\mu_{1,1}) \\ &\quad + \mathrm{Log}\,\lambda_1 - \mathrm{Log}\,\lambda_0.\end{aligned}$$

On reconnaît dans cette somme de quatre termes la somme des valeurs de $c$ sur les quatre côtés du rectangle $R_i$. En se souvenant du caractère additif de $c$, on a bien

$$\nu(\partial_g^u R_i) = c(\partial R_i) = dc(R_i).$$

Le lemme est maintenant clair car la masse totale de $\nu$ est la somme des $\nu(\partial_g^u R_i)$, c'est-à-dire l'évaluation du 2-cocycle exact $dc$ sur le 2-cycle $\Sigma R_i$ qui représente la classe fondamentale du tore. Cette évaluation est donc bien nulle. □

Il est facile de compléter la preuve du théorème 3.2. Les $\partial_g^u R_i$ constituent un système complet de transversales affines pour $\mathscr{F}^s$ et le pseudogroupe d'holonomie correspondant est formé d'applications affines. Autrement dit, $\mathscr{F}^s$ est transversalement affine. D'autre part, il est possible de construire des partitions de Markov dont les rectangles sont de diamètres arbitrairement petits. Le fait que les $\pi_i : \partial_g^u R_i \to \partial_d^u R_i$ sont affines pour tous ces rectangles permet donc de conclure que l'holonomie d'un chemin quelconque contenu dans une feuille de $\mathscr{F}^s$ préserve les structures affines des feuilles de $\mathscr{F}^u$.

## 4. Flots d'Anosov sur les variétés de dimension 3

Soit $\varphi^t$ un flot de classe $C^r$ ($r \geqslant 2$) sur une variété fermée V de dimension 3 et X le champ de vecteurs qui lui est associé. Rappelons que l'on dit que $\varphi^t$ est un *flot d'Anosov* s'il existe des sous-fibrés de rang 1 du fibré tangent TV, notés $E^{ss}$ et $E^{uu}$, et appelés *stable et instable forts*, tels que :

(i) $E^{ss}$, $E^{uu}$ et $\mathbf{R}.X$ sont en somme directe,

(ii) la différentielle de $\varphi^t$ préserve $E^{ss}$ et $E^{uu}$;

(iii) si $||\ ||$ désigne une métrique riemannienne quelconque sur V, il existe des constantes $C > 0$, $\lambda > 0$ telles que, pour tous $v_{ss} \in E^{ss}$, $v_{uu} \in E^{uu}$ et $t \in \mathbf{R}^+$, on ait

$$||\ d\varphi^t(v_{ss})\ || \leqslant C \exp(-\lambda t)\ ||\ v_{ss}\ ||,$$
$$||\ d\varphi^t(v_{uu})\ || \geqslant C \exp(\lambda t)\ ||\ v_{uu}\ ||.$$

Dans une telle situation, $E^{ss}$ et $E^{uu}$ sont uniquement intégrables et définissent deux feuilletages $\mathscr{F}^{ss}$ et $\mathscr{F}^{uu}$ appelés respectivement stable et instable forts. De même, les champs de plans $E^s = E^{ss} \oplus \mathbf{R}X$ et $E^u = E^{uu} \oplus \mathbf{R}X$ définissent deux feuilletages $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ de codimension 1 appelés respectivement *stable et instable faibles* (voir [An]).

Dans des exemples classiques, V est un espace homogène du type $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ où $\Gamma$ est un sous-groupe discret cocompact et $\varphi^t$ est obtenu par translations à gauche par les matrices diagonales. Dans ce cas, $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ correspondent aux orbites des actions à gauche des sous-groupes des matrices triangulaires inférieures et supérieures; ils sont donc transversalement projectifs.

*Théorème* **4.1.** — *Soit $\varphi^t$ un flot d'Anosov de classe $C^r$ $(r \geqslant 2)$ sur une variété fermée* V *de dimension 3. Si le feuilletage stable faible $\mathscr{F}^s$ est transversalement de classe $C^{1,1}$, alors il est transversalement projectif.*

Insistons sur le fait que dans ce théorème, on ne suppose pas que $\varphi^t$ préserve un volume ou une connexion. On disposerait alors de preuves plus simples fondées sur la rigidité locale de la structure géométrique considérée ([B-F-L], [B-L], [Gh5], [Kan]...).

La preuve est dans le même esprit que celle du théorème 3.2. Nous commençons par une proposition qui était claire dans le cas d'un difféomorphisme du tore $T^2$ car nous connaissons ces difféomorphismes à conjugaison topologique près (ce qui n'est pas le cas pour les flots d'Asonov en dimension 3).

*Proposition* **4.2.** — *Sous l'hypothèse du théorème* 4.1, *le flot $\varphi^t$ est topologiquement transitif*, i.e. *$\varphi^t$ possède une orbite dense.*

*Preuve.* — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de classe $C^2$ et de codimension 1 sur une variété fermée V. On suppose que $\mathscr{F}$ n'a pas de feuille compacte et que l'une de ses feuilles n'est pas dense. Alors, un théorème de G. Duminy, malheureusement non publié, affirme que l'une des feuilles de $\mathscr{F}$ possède une infinité de bouts. On trouvera une preuve dans [C-C] et une esquisse de preuve pour le cas particulier qui nous intéresse dans [Gh3]. On pourra s'assurer que la même preuve s'adapte lorsque $\mathscr{F}$ est de classe $C^{1,1}$.

Les feuilles du feuilletage stable faible $\mathscr{F}^s$ sont homéomorphes à un plan ou un cylindre (lorsqu'elles contiennent une orbite périodique du flot). Elles sont donc non compactes et n'ont qu'un nombre fini de bouts. Il résulte donc du théorème de G. Duminy

que si $\mathscr{F}^s$ est de classe $C^{1,1}$ toutes ses feuilles sont denses. Il est bien connu que ceci entraîne que $\varphi^t$ est topologiquement transitif. □

La proposition suivante est analogue à 3.1.

*Proposition* **4.3.** — *Il existe une unique structure affine sur les feuilles de $\mathscr{F}^{ss}$ (resp. $\mathscr{F}^{uu}$) qui est de classe $C^r$ sur chaque feuille, qui dépend continûment du point et qui est invariante par $\varphi^t$. Pour cette structure, chaque feuille de $\mathscr{F}^{ss}$ (resp. $\mathscr{F}^{uu}$) est affinement isomorphe à la droite* $\mathbf{R}$.

*Preuve.* — Identique à celle de 3.1. □

Nous utiliserons aussi des partitions de Markov pour les flots d'Asonov. Notre définition sera moins rectrictive que d'ordinaire.

Soit $\rho : (0, 1) \times (0, 1) \to V$ un plongement transverse à X. On dit que $\rho$ est un *rectangle* si, pour tout $u$ de (0, 1), la courbe $s \mapsto \rho(s, u)$ est une courbe de classe $C^r$ contenue dans une feuille de $\mathscr{F}^u$ et si, de manière analogue, pour tout $s$ de (0, 1), la courbe $u \mapsto \rho(s, u)$ est une courbe de classe $C^r$ contenue dans une feuille de $\mathscr{F}^s$.

Si $\tau : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbf{R}^+$ est une fonction continue positive et si $\rho$ est un rectangle, on appelle *parallélépipède de base* $\rho$ *et de hauteur* $\tau$ l'ensemble

$$P_{\rho,\tau} = \{ \varphi^t(\rho(s, u), (s, u)) \in (0, 1) \times (0, 1), 0 \leqslant t \leqslant \tau(s, u)\}.$$

On supposera toujours que $\tau$ est assez petite pour que l'application $(s, u, t) \mapsto \varphi^t(\rho(s, u))$ soit un plongement de $\{(s, u, t), 0 \leqslant t \leqslant \tau(s, u)\}$ dans V.

Une famille finie de parallélépipèdes $P_1, \ldots, P_n$ forme une partition de V s'ils recouvrent V et ne s'intersectent que le long de leur bord. Si $\rho_i$ désigne la base de $P_i$, on note $R_i$ l'ensemble $\rho_i((0, 1) \times (0, 1))$ et $\mathscr{R}$ la réunion disjointe des $R_i$. Si $x \in \mathscr{R}$, on note $\bar{\varphi}(x)$ le premier point de l'orbite positive de $x$ par $\varphi^t$ qui est dans $\mathscr{R}$. Bien sûr, chaque $R_i$ est muni de deux feuilletages $f^s$ et $f^u$ tracés par $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$. Pour simplifier, nous supposons toujours $\mathscr{F}^{ss}$ et $\mathscr{F}^{uu}$ orientés (mais il serait facile de se ramener à ce cas). On peut alors introduire les mêmes notations qu'au § 3 pour définir le crochet $[x, y]$ de deux points $x$ et $y$ d'un même $R_i$ comme l'intersection de la feuille de $f^s$ qui passe par $x$ et de celle de $f^u$ qui passe par $y$. On définit de même les bords stables et instables, gauches et droits. On dit alors que les $P_i$ forment une partition de Markov si les $R_i$ vérifient la propriété (ii) de la définition 3.4 pour $\bar{\varphi} : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$.

Il existe des partitions de Markov pour tout flot d'Asonov et on peut même supposer que les diamètres des parallélépipèdes sont arbitrairement petits [Ra].

Toute feuille de $f^u$ est une courbe contenue dans une feuille de $\mathscr{F}^u$ et transverse au champ X. Si l'on projette cette courbe le long de X sur une feuille de $\mathscr{F}^{uu}$, on obtient une structure affine sur chaque feuille de $f^u$ qui est indépendante de la feuille de $\mathscr{F}^{uu}$ utilisée car $\varphi^t$ préserve les structures affines des feuilles de $\mathscr{F}^{uu}$.

Nous sommes donc exactement dans la même situation qu'au § 3. Les bords instables, gauche et droit, de $R_i$ sont des courbes de classe $C^r$, équipées de structures affines, et le difféomorphisme $\pi_i : \partial_g^u R_i \to \partial_d^u R_i$ est un difféomorphisme d'holonomie de $\mathscr{F}^s$.

Si $\mathscr{I}$ désigne la réunion des $\partial_g^u R_i$, on peut donc introduire, *en faisant l'hypothèse que* $\mathscr{F}^s$ *est de classe* $C^{1,1}$,

(i) une fonction $\hat{\varphi} : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ dilatante et topologiquement transitive, définie en dehors d'une partie finie et de classe $C^{1,1}$,

(ii) une forme différentielle mesurable bornée $n$ sur $\mathscr{I}$.

La preuve du corollaire 3.6 s'adapte et montre que $n$ est de signe constant et coïncide avec un multiple de l'unique mesure de probabilité sur $\mathscr{I}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par l'application dilatante $\hat{\varphi}$ de classe $C^{1,1}$. Il en résulte en particulier que $n$ est localement lipschitzienne (on constatera que la preuve du théorème 1.2, p. 168, de [Man] est aussi valable lorsque la constante $\gamma$ est égale à 1). En d'autres termes, les difféomorphismes $\pi_i$ sont de classe $C^{2,1}$; leurs dérivées secondes sont localement lipschitziennes.

Cependant, la preuve du lemme 3.7 ne s'adapte pas car la somme des $R_i$ n'est plus un 2-cycle; les bords des $R_i$ ne s'annulent plus deux à deux. D'ailleurs, la forme $n$ peut ne pas être nulle car le feuilletage $\mathscr{F}^s$ peut ne pas être transversalement affine comme c'est le cas dans les exemples homogènes sur $PSL(2, \mathbf{R})/\Gamma$.

Pour montrer que $\mathscr{F}^s$ est transversalement projectif, nous allons montrer que les dérivées schwarziennes $s(\pi_i)$ (définies d'après la remarque précédente) sont nulles. Considérons la différentielle quadratique $\sigma$ sur $\mathscr{I}$ qui coïncide avec $s(\pi_i)$ sur $\partial_g^u R_i$.

*Lemme* **4.4.** — *La différentielle quadratique* $\sigma$ *sur* $\mathscr{I}$ *est invariante par* $\hat{\varphi}$ *dans le sens suivant. Soient* $\hat{\varphi}_1^{-1}, \ldots, \hat{\varphi}_{l(i)}^{-1}$ *les* $l(i)$ *branches de l'inverse de* $\hat{\varphi}$ *définies et continues sur l'intérieur de* $\partial_g^u R_i$. *Alors, sur* $\partial_g^u R_i$, *on a*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{l(i)} \hat{\varphi}_k^{-1*} \sigma.$$

*Preuve.* — C'est la même que celle du lemme 3.5 où l'on n'a utilisé que les propriétés d'additivité et de cocycle pour $n$ qui sont aussi valables pour $s$ (proposition 2.1 et 2.2). □

De même qu'au § 2, la preuve du théorème 4.1 sera achevée avec le lemme suivant.

*Lemme* **4.5.** — *La différentielle quadratique* $\sigma$ *est nulle.*

*Preuve.* — Une différentielle quadratique $\sigma = \sigma(x)\, dx^2$ sur une variété de dimension 1 détermine une mesure positive $\nu = \sqrt{|\sigma(x)|}.dx$. Soit K un intervalle contenu dans $\partial_g^u R_i$. On a, avec les notations précédentes, pour presque tout $x$ de $\mathscr{I}$,

$$\sigma(x)\, dx^2 = \sum_{k=1}^{l(i)} \sigma \circ \hat{\varphi}_k^{-1}(x) . (\hat{\varphi}_k^{-1})'^2 (x)\, dx^2.$$

Par conséquent,

$$(**) \qquad \sqrt{|\sigma(x)|}\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{l(i)} \sqrt{\sigma \circ \hat{\varphi}_k^{-1}(x) . (\hat{\varphi}_k^{-1})'^2 (x)}\, dx.$$

Autrement dit,

$$\nu(K) \leqslant \nu(\hat{\varphi}^{-1}(K)) = \hat{\varphi}_* \nu(K).$$

Comme les masses totales de $\nu$ et $\hat{\varphi}_* \nu$ sont les mêmes, l'inégalité $\nu \leqslant \hat{\varphi}_* \nu$ entraîne en fait l'égalité $\nu = \hat{\varphi}_* \nu$. L'inégalité (**) est donc une égalité et, pour presque tout $x$ tel que $\sigma(x) \neq 0$, il existe donc exactement un indice $k$ tel que $\sigma(\hat{\varphi}_k^{-1}(x)) \neq 0$. Supposons que l'ouvert $U = \{ x \in \mathscr{I} \mid \sigma(x) \neq 0 \}$ soit non vide et soit K un intervalle contenu dans U et dans le domaine de définition de $\hat{\varphi}$ (qui, rappelons-le, est le complémentaire d'un ensemble fini). L'*égalité* (**) montre alors que $\nu(K) = \nu(\hat{\varphi}(K))$. En particulier, si un point de U est fixe par un itéré $\hat{\varphi}^l$ ($l > 0$), tous les points voisins de $x$ sont aussi fixes par $\hat{\varphi}^l$, ce qui est évidemment en contradiction avec le caractère dilatant de $\hat{\varphi}$. Par conséquent, U ne peut contenir de point périodique de $\hat{\varphi}$. Or nous savons que $\varphi^t$ est topologiquement transitif et il est bien connu que ceci entraîne que la réunion des orbites périodiques de $\varphi^t$ est dense dans V (voir par exemple [Fr]) et donc que la réunion des orbites périodiques de $\hat{\varphi}$ est dense dans $\mathscr{I}$. L'ouvert U est donc vide et la différentielle quadratique $\sigma$ est nulle.

Pour un usage ultérieur, remarquons que cette même preuve est valide si $\hat{\varphi}$ n'est plus supposé dilatant mais seulement topologiquement conjugué à une application dilatante.

Ceci achève la preuve du lemme 4.5 et donc du théorème 4.1. □

Pour terminer ce paragraphe, nous signalons deux corollaires. Le premier répond positivement à une question posée dans [Gh5].

*Théorème* **4.6.** — *Soit $\varphi^t$ un flot d'Asanov de classe $C^r$ ($r \geqslant 2$) sur une variété fermée de dimension 3 tel que les feuilletages stable et instable faibles soient de classe $C^{1,1}$. Alors, $\varphi^t$ est $C^r$-équivalent à un flot quasi-fuschien au sens défini dans* [Gh5] *ou à une suspension d'un difféomorphisme du tore $T^2$.*

*Preuve.* — La démonstration des pages 238-242 de [Gh5] s'adapte puisque nous savons que les feuilletages stable et instable faibles sont transversalement projectifs. □

Dans [Ba], T. Barbot classe les flots d'Asonov sur les variétés fermées de dimension 3 dont le feuilletage stable faible est transversalement projectif. Il montre que ces flots sont topologiquement équivalents à une suspension ou à un flot homogène sur $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ (où $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ désigne le revêtement universel de $SL(2, \mathbf{R})$). Par équivalence topologique entre deux flots, nous entendons ici un homéomorphisme envoyant les orbites de l'un sur celles de l'autre. En combinant ce résultat avec notre théorème 4.1, on obtient :

*Théorème* **4.7.** — *Soit $\varphi^t$ un flot d'Anosov de classe $C^r$ $(r \geqslant 2)$ sur une variété fermée de dimension 3 tel que le feuilletage stable faible soit de classe $C^{1,1}$. Alors, $\varphi^t$ est topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme du tore $T^2$ ou bien, à revêtements finis près, $\varphi^t$ est topologiquement équivalent au flot géodésique d'une surface compacte à courbure négative.* □

Par exemple, les flots d'Anosov construits par M. Handel et W. Thurston dans [H-T] ne peuvent avoir un feuilletage stable faible de classe $C^{1,1}$.

## 5. Démonstration du théorème principal

Soit $\Phi : \Gamma_g \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $(r \geqslant 3)$ une représentation dont le nombre d'Euler est $2g - 2$. D'après le théorème de S. Matsumoto déjà cité, il existe un homéomorphisme du cercle $h$ tel que le conjugué de $\Phi$ par $h$, que nous noterons $h^{-1} \circ \Phi \circ h$, soit un isomorphisme de $\Gamma_g$ sur un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Nous allons utiliser $h$ pour construire un flot de classe $C^r$, topologiquement équivalent au flot géodésique d'une métrique à courbure $-1$ sur la surface fermée orientée de genre $g$.

Sur la variété $V = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma_g$, on dispose

(i) d'un flot $\varphi^t$ agissant par translations à gauche par $\pm \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}$,

(ii) de deux feuilletages $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ de classe $C^\infty$, orbites des groupes de matrices triangulaires inférieures et supérieures.

Choisissons un feuilletage $\mathscr{L}$ de codimension 1 transverse à $\varphi^t$, par exemple l'image de $\mathscr{F}^s$ par la translation à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois feuilletages $\mathscr{F}^s$, $\mathscr{F}^u$ et $\mathscr{L}$ définissent un « parallélisme intégrable » du fibré tangent à V. En exploitant les structures transverses projectives de $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$, on peut trouver un atlas de V formé de cartes $f_i : U_i \to P^1 \times P^1 \times \mathbf{R}$ (où $P^1$ désigne la droite projective réelle) telles que les changements de cartes $f_j \circ f_i^{-1}$ soient à « variables séparées », c'est-à-dire du type

$$f_j \circ f_i^{-1}(x, y, z) = (A_{ij}(x), B_{ij}(y), C_{ij}(z)),$$

où les $A_{ij}$ et $B_{ij}$ sont des transformations projectives que l'on peut même supposer dans $h \circ \Phi \circ h^{-1}(\Gamma_g) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Dans ces cartes, $\mathscr{F}^s$ est défini par $x = C^{ste}$, $\mathscr{F}^u$ par $y = C^{ste}$ et $\mathscr{L}$ par $z = C^{ste}$.

Définissons de nouvelles cartes $f_i' : U_i \to P^1 \times P^1 \times \mathbf{R}$ par $f_i' = f_i \circ H$ où H est l'homéomorphisme défini par

$$H(x, y, z) = (h(x), y, z).$$

Les nouveaux changements de cartes sont

$$f_j' \circ f_i'^{-1}(x, y, z) = (h \circ A_{ij} \circ h^{-1}(x), B_{ij}(y), C_{ij}(z)).$$

Par hypothèse, tous les homéomorphismes $h \circ A_{ij} \circ h^{-1}$ sont dans $h \circ \Gamma_g \circ h^{-1} = \Phi(\Gamma_g)$. Ce sont donc des difféomorphismes de classe $C^r$. Ce nouvel atlas définit par conséquent une autre structure de variété V' de classe $C^r$ sous-jacente à la même variété topologique. Dans V', les feuilletages $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$, que nous noterons $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$, sont de classe $C^r$ et l'holonomie de $\mathscr{G}^s$ est modelée sur $\Phi(\Gamma_g)$. L'intersection de $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$ est un feuilletage orienté de dimension 1 que l'on peut paramétrer par un flot positif $\psi^t$, de classe $C^r$.

En résumé, nous avons construit un flot $\psi^t$ de classe $C^r$ sur une variété V', préservant deux feuilletages $\mathscr{G}^s$, $\mathscr{G}^u$, de classe $C^r$ et de codimension 1. Ces flots et ces feuilletages sont topologiquement équivalents à $\varphi^t$, $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ (par l'identité qui n'est qu'un homéomorphisme entre V et V'...).

*Supposons dans un premier temps que le flot $\psi^t$ soit un flot d'Anosov.* Il est alors clair que $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$ sont les feuilletages stable et instable faibles de $\psi^t$ et ceux-ci sont donc de classe $C^r$. On peut donc appliquer le théorème 4.1 pour conclure que $\mathscr{G}^s$ est transversalement projectif. Autrement dit, il existe une structure projective de classe $C^r$ sur le cercle qui est invariante par $\Phi(\Gamma_g)$. L'essentiel du théorème principal est alors montré puisque le groupe $\Phi(\Gamma_g)$ est un groupe de transformations projectives. Il nous faut encore utiliser le lemme suivant, extrait de [Gh5], dont nous reprenons rapidement la preuve pour la commodité du lecteur.

*Lemme* **5.1.** — *La structure projective obtenue sur le cercle est isomorphe à la structure canonique de* $P^1 \approx S^1$.

*Preuve.* — Soit $\mathscr{S}$ une structure projective quelconque sur le cercle $S^1$. Soit $\mathscr{D}$ l'application développante du revêtement universel $\tilde{S}^1$ de $S^1$ vers $\tilde{P}_1$, revêtement universel de $P^1$. Soit $\mathrm{Aut}^+(S^1, \mathscr{S})$ le groupe des automorphismes de $\mathscr{S}$ respectant l'orientation et $\widetilde{\mathrm{Aut}}^+(S^1, \mathscr{S})$ le groupe des relevés des éléments de $\mathrm{Aut}^+(S^1, \mathscr{S})$ à $\tilde{S}^1$. On a bien sûr une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \widetilde{\mathrm{Aut}}^+(S^1, \mathscr{S}) \to \mathrm{Aut}^+(S^1, \mathscr{S}) \to 1$$

et un morphisme injectif

$$\mathscr{H} : \widetilde{\mathrm{Aut}}^+(S^1, \mathscr{S}) \to \widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$$

dont l'image est formée d'éléments préservant $\mathscr{D}(\tilde{S}^1)$. Puisque le centralisateur d'un élément non central de $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$ est abélien deux cas sont possibles :

(i) ou bien $\widetilde{\mathrm{Aut}}^+(S^1, \mathscr{S})$ est abélien,

(ii) ou bien $\mathscr{H}(i(1))$ est dans le centre de $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$, c'est-à-dire qu'il est un automorphisme du revêtement $\tilde{P}^1 \to P^1$. Dans ce cas $\mathscr{D}$ est un difféomorphisme sur $\tilde{P}_1$ tout entier, $(S^1, \mathscr{S})$ est isomorphe à un revêtement fini à $n$ feuillets de $P^1$ et $\mathrm{Aut}^+(S^1, \mathscr{S})$ contient alors un sous-groupe central $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ qui opère librement sur $S^1$.

La structure projective que nous avons construite grâce à $\Phi$ sur le cercle ne peut être du type (i) car son groupe d'automorphismes, contenant $\Phi(\Gamma_g)$, est certainement non abélien. D'autre part, nous savons que si $\gamma \neq 1$ est un élément de $\Gamma_g$, le difféomorphisme $\Phi(\gamma)$ a exactement deux points fixes, l'un répulsif et l'autre attractif et ne peut donc commuter avec un difféomorphisme d'ordre $n$ que si $n = 1$. Ceci montre que la structure étudiée est isomorphe à la structure canonique de $P^1$. □

Ainsi, à $C^r$-conjugaison près, le groupe $\Phi(\Gamma_g)$ est contenu dans le groupe des automorphismes directs de $P^1$, c'est-à-dire $PSL(2, \mathbf{R})$. Le sous-groupe de $PSL(2, \mathbf{R})$ obtenu est discret car il ne contient pas d'éléments elliptiques non triviaux. Enfin, on observe que, pour des raisons cohomologiques, un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbf{R})$ isomorphe à $\Gamma_g$ est nécessairement cocompact.

Le théorème principal est donc démontré si $\psi^t$ est un flot d'Anosov. La fin de la preuve consiste à remarquer que la démonstration du théorème 4.1 n'utilisait pas toutes les propriétés des flots d'Anosov.

*Lemme* **5.2.** — *Le flot $\psi^t$ possède au moins une orbite périodique hyperbolique.*

*Preuve.* — Supposons par l'absurde qu'aucune orbite périodique ne soit hyperbolique. Choisissons deux 1-formes non singulières $\omega_s$ et $\omega_u$ sur $V'$ qui définissent respectivement $\mathscr{G}^s$ et $\mathscr{G}^u$ et introduisons les coefficients $\lambda_t^s(x)$ et $\lambda_t^u(x)$ définis par

$$(\psi^t)^* \omega_s(x) = \exp(\lambda_t^u(x))\, \omega_s(x)$$

et

$$(\psi^t)^* \omega_u(x) = \exp(-\lambda_t^s(x))\, \omega_u(x).$$

Posons aussi

$$\lambda^s(x) = \frac{\partial}{\partial t} \lambda_t^s(x)\big|_{t=0} \quad \text{et} \quad \lambda^u(x) = \frac{\partial}{\partial t} \lambda_t^u(x)\big|_{t=0}$$

de sorte que

$$\lambda_t^s(x) = \int_0^t \lambda^s(\varphi^\tau(x))\, d\tau \quad \text{et} \quad \lambda_t^u(x) = \int_0^t \lambda^u(\varphi^\tau(x))\, d\tau.$$

Nous savons que l'application identique de V dans $V'$ est différentiable en restriction à chaque feuille de $\mathscr{F}^s$. Le fait que $\varphi^t$ soit de type Anosov entraîne donc que $\psi^t$ contracte lui aussi exponentiellement les vecteurs tangents à $\mathscr{G}^s$. Autrement dit, pour $t$ assez grand, on a une inégalité du type

$$\lambda_t^s(x) > C.t \quad \text{avec } C > 0.$$

Soit $x$ un point de $V'$ fixe pour $\psi^{t_0}$ (avec $t_0 > 0$). Comme l'orbite périodique correspondante n'est pas hyperbolique, on a $\lambda_{t_0}^u(x) = 0$. Si $\mu$ est la mesure de probabilité invariante par $\psi^t$ supportée par cette orbite périodique, on a

$$\int \lambda^u(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Pour un flot d'Anosov transitif, l'enveloppe convexe des mesures de probabilité invariantes et concentrées sur les orbites périodiques est dense dans le compact des mesures de probabilités invariantes [Bo]. La même propriété est donc satisfaite pour $\psi^t$ qui est topologiquement équivalent au flot d'Anosov transitif $\varphi^t$. Par conséquent, pour toute mesure de probabilité $\mu$ invariante par $\psi^t$, on a

$$\int \lambda^u(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Nous affirmons que cette dernière propriété entraîne que $(1/t)\,\lambda^u_t(x)$ tend uniformément vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$. En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver $\varepsilon > 0$ et des suites de points $x_n$ et de nombres réels $t_n$ tendant vers $+\infty$ tels que

$$\left|\frac{1}{t_n}\lambda^u_{t_n}(x_n)\right| = \left|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \lambda^u(\varphi^\tau(x_n))\, d\tau\right| \geqslant \varepsilon.$$

Pour chaque $n$, soit $\mu_n$ la mesure de probabilité sur $V'$ uniformément distribuée sur le morceau d'orbite joignant $x_n$ à $\psi^{t_n}(x_n)$. Si $\mu$ est une limite faible d'une sous-suite de $\mu_n$, il est clair que $\mu$ est invariante par $\psi^t$ et que

$$\left|\int \lambda^u(x)\, d\mu(x)\right| \geqslant \varepsilon,$$

ce qui est une contradiction.

Soit $\Omega$ la forme de volume sur $V'$ dont le produit intérieur avec le champ défini par $\psi^t$ est $\omega_s \wedge \omega_u$. Le Jacobien de $\psi^t$ calculé par rapport à $\Omega$ est bien sûr

$$J(t) = \exp(\lambda^u_t(x) - \lambda^s_t(x)).$$

Nous avons vu que $\lambda^s_t(x) > C.t$ avec $C > 0$ pour $t$ assez grand et que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lambda^u_t(x) < \varepsilon.t$ pour $t$ assez grand (dépendant de $\varepsilon$). Par conséquent, $J(t)$ tend uniformément vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Mais ceci est impossible car

$$\int J(t)\,\Omega = \int (\psi^t)^*\,\Omega = \int \Omega$$

ne dépend pas de $t$. Cette dernière contradiction achève la preuve du lemme. □

Soit $x$ un point périodique hyperbolique de période $t_0$ pour le flot $\psi^t$. La variété instable forte au point $x$ est une courbe $W^u_{x_0}$ de classe $C^r$, immergée dans $V'$, invariante par $\psi^{t_0}$. Le difféomorphisme $\psi^{t_0} : W^u_{x_0} \to W^u_{x_0}$ est $C^r$-conjugué à une application linéaire. C'est le théorème de linéarisation de Sternberg mais on pourrait le démontrer exactement comme en 3.1, où nous avons trouvé une structure affine invariante. Ainsi, on peut naturellement munir chaque variété stable forte de point périodique hyperbolique de $\psi^t$ d'une structure affine invariante par la transformation de Poincaré correspondante.

Dans [Ra], il est montré qu'il est possible de construire une partition de Markov pour un flot d'Anosov transitif (en dimension 3) telle que les bords des parallélépipèdes sont contenus dans les variétés stable et instable faibles d'une orbite périodique fixée *a priori*.

Une partition de Markov pour $\varphi^t$ est aussi une partition de Markov pour $\psi^t$ dans un sens évident. Si l'on désire que les bases des parallélépipèdes soient plongées de manière $C^r$ dans V et V', il suffit de s'assurer que chacune de ces bases est contenue dans une feuille du feuilletage $\mathscr{L}$ transverse à $\mathscr{F}^s$ et $\mathscr{F}^u$ et qui est de classe $C^r$ aussi bien dans V que dans V'.

Si l'on fait cette construction en partant d'une orbite périodique $x_0$ qui est aussi hyperbolique pour $\psi^t$, la réunion $\mathscr{I}$ des bords instables $\partial^u_g R_i$ est contenue dans la feuille de $\mathscr{G}^u$ passant par $x_0$. On peut donc équiper $\mathscr{I}$ d'une structure affine naturelle. On vérifiera que la preuve du théorème 4.1 se généralise dans ce cas : il suffit s'utiliser le fait que $\psi^t$ est topologiquement équivalent à un flot d'Anosov transitif (voir la remarque à la fin de la preuve de 4.5). A vrai dire, nous avons utilisé le caractère strictement hyperbolique de $\hat{\varphi}$ pour montrer que si $\mathscr{F}^s$ est de classe $C^{1,1}$, $n(\pi_i)$ est nécessairement lipschitzienne et il est donc possible de définir sa dérivée schwarzienne $s(\pi_i)$. Cet argument ne s'applique pas à $\psi^t$ mais nous avons précisément fait l'hypothèse que $\Phi(\Gamma_g)$ est constitué de difféomorphismes de classe $C^3$ de sorte que la définition de la dérivée schwarzienne des $\pi_i$ ne pose pas de problème. Le théorème principal est d'ailleurs probablement vrai lorsque $r = 2$ mais nous n'avons pas cherché à le démontrer.

En revanche, le théorème principal est certainement faux lorsque $r = 1$. On sait en effet que le bord à l'infini du revêtement universel d'une surface fermée à courbure négative variable est un cercle de classe $C^1$ sur lequel le groupe fondamental opère par $C^1$-difféomorphismes. Toutes les représentations ainsi obtenues de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ sont topologiquement conjuguées mais ne sont $C^1$-conjuguées à une représentation à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ que si la courbure est constante (ceci résulte par exemple de [Ot]).

Remarquons encore que le théorème principal est aussi valable pour les représentations à valeurs dans le groupe $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$ des difféomorphismes analytiques réels du cercle qui respectent l'orientation. Il ne serait pas difficile d'adapter la démonstration à ce cas. On peut aussi appliquer le résultat de [G-T] qui implique en particulier que si un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ $(2 \leqslant r \leqslant \omega)$ est conjugué à un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ par un difféomorphisme de classe $C^1$, ce difféomorphisme est en fait de classe $C^r$.

Pour terminer ce paragraphe, nous mentionnons une autre forme du théorème principal.

*Théorème* **5.3.** — *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1, sans feuille compacte, de classe $C^r$ $(3 \leqslant r \leqslant \omega)$, du fibré unitaire tangent d'une surface fermée orientée de genre $g \geqslant 2$. Alors $\mathscr{F}$ est $C^r$-conjugué au feuilletage stable faible du flot géodésique d'une métrique à courbure $-1$ sur cette surface.*

*Preuve.* — Selon [Th], après une isotopie, on peut toujours supposer que $\mathscr{F}$ est transverse à la fibration en cercles. Le feuilletage $\mathscr{F}$ est alors défini par la suspension d'une représentation $\Phi : \Gamma_g \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ dont le nombre d'Euler est bien sûr maximal puisque la variété ambiante est le fibré unitaire tangent de la surface. Le théorème principal permet donc de conclure car la suspension d'un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ n'est autre que le feuilletage stable faible de la métrique hyperbolique correspondante. □

## 6. Une application : déformations holomorphes des groupes fuchsiens

Considérons maintenant $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ comme le groupe des bijections holomorphes de $\mathbf{CP}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui préservent le disque unité $D^2 = \{ z \mid |z| \leqslant 1 \}$. Choisissons un plongement $\Phi : \Gamma_g \to \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ dont l'image est un sous-groupe discret cocompact et notons $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ les images par $\Phi$ des générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ de $\Gamma_g$. Nous nous proposons de montrer que les déformations de $\Phi$ dans le « pseudogroupe des difféomorphismes holomorphes locaux de $\mathbf{CP}^1$ » sont en fait conjuguées à des déformations de $\Phi$ dans le groupe des difféomorphismes holomorphes globaux de $\mathbf{CP}^1$, c'est-à-dire $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$. Pour préciser cette assertion, nous introduisons quelques notations.

Fixons $\delta > 0$ et considérons l'anneau $R_\delta = \{ z \mid 1 - \delta \leqslant |z| \leqslant 1 + \delta \}$. Soient $A'_1, B'_1, \ldots, A'_g, B'_g$ des applications holomorphes $R_\delta \to \mathbf{CP}^1$ qui sont des difféomorphismes sur leurs images et qui sont tels que, pour tout $z$ de $R_\delta$ et pour $i = 1, \ldots, g$,

$$|A'_i(z) - A_i(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |B'_i(z) - B_i(z)| \leqslant \varepsilon.$$

On suppose que $\varepsilon$ est assez petit pour que le produit de commutateurs

$$A'_1 \circ B'_1 \circ A'^{-1}_1 \circ B'^{-1}_1 \circ \ldots \circ A'_g \circ B'_g \circ A'^{-1}_g \circ B'^{-1}_g$$

soit défini au voisinage du cercle unité $S^1$. On suppose par ailleurs que ce produit de commutateurs coïncide avec l'identité au voisinage de $S^1$.

*Théorème* **6.1.** — *Avec les notations précédentes, si $\varepsilon$ est assez petit, il existe une courbe de Jordan $\gamma$, contenue dans $R_\delta$, invariante par $A'_1, B'_1, \ldots, A'_g, B'_g$, et un difféomorphisme holomorphe $f$ d'un voisinage de $\gamma$ sur un ouvert de $\mathbf{CP}^1$ tels que les conjugués $f \circ A'_1 \circ f^{-1}, f \circ B'_1 \circ f^{-1}, \ldots, f \circ A'_g \circ f^{-1}, f \circ B'_g \circ f^{-1}$ soient les restrictions de transformations de Möbius (de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$) à leurs domaines de définition.*

*Preuve.* — La preuve de la stabilité structurelle de $\Phi$, donnée par D. Sullivan dans [Su2] s'adapte immédiatement à notre situation. On en déduit l'existence d'un plongement continu $h : S^1 \to \mathbf{CP}^1$, proche de l'identité, tel que, pour tout $z$ de $S^1$ et $i = 1, \ldots, g$,

$$h(A_i(z)) = A'_i(h(z)) \quad \text{et} \quad h(B_i(z)) = B'_i(h(z)).$$

L'image $\gamma$ de $h$ est la courbe de Jordan annoncée, invariante par $A'_i, B'_i$.

Soient $U_1$ et $U_2$ les deux domaines simplement connexes de $\mathbf{CP}^1$ bordés par $\gamma$. Soit $\rho_j : U_j \to D^2$ $(j = 1, 2)$ une représentation conforme sur le disque unité. Il est bien connu que $\rho_j$ se prolonge en un homéomorphisme, encore noté $\rho_j$, entre les adhérences $\overline{U}_j$ et $\overline{D}^2$. Les conjugués $\rho_j \circ A'_i \circ \rho_j^{-1}$, $\rho_j \circ B'_i \circ \rho_j^{-1}$ $(j = 1, 2$ et $i = 1, \ldots, g)$ sont définis dans un voisinage de $S^1$ dans $\overline{D}^2$, holomorphes à l'intérieur et continus au bord. Il résulte du principe de réflexion de Schwarz que les restrictions de ces conjugués à $S^1$ sont des difféomorphismes analytiques réels du cercle. D'après l'hypothèse, ces difféomorphismes définissent alors une représentation $\Phi_j : \Gamma_g \to \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$, évidemment topologiquement conjuguée à $\Phi$ (par $\rho_j|_{S^1} \circ h$) (voir la fig. 5).

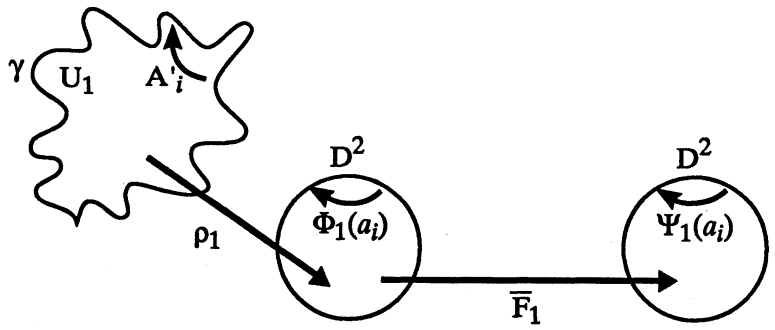


FIG. 5

D'après le théorème principal (dans le cas analytique réel), $\Phi_j$ est analytiquement conjuguée à un plongement à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. En d'autres termes, il existe un difféomorphisme holomorphe $F_j$ défini sur un voisinage de $S^1$, préservant $S^1$, et tel que les éléments de $F_j \circ \Phi_j(\Gamma_g) \circ F_j^{-1}$ soient les restrictions d'éléments de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ à leurs domaines de définition. Notons $\Psi_j$ la représentation de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ ainsi obtenue.

Notons $\overline{F}_j$ un difféomorphisme global de $\overline{D}^2$ (non holomorphe) qui coïncide avec $F_j$ au voisinage de $S^1$. Soit $\mu_j$ la différentielle de Beltrami sur $U_j$ qui est l'image réciproque de la différentielle de Beltrami triviale sur $D^2$ par le composé $\overline{F}_j \circ \rho_j$. Bien sûr $\mu_j$ est triviale au voisinage de $\gamma$ dans $\overline{U}_j$ car $\rho_j$ est holomorphe et $\overline{F}_j$ l'est aussi au voisinage de $S^1$. Soit $\mu$ la différentielle de Beltrami sur $\mathbf{CP}^1$ égale à $\mu_j$ sur $U_j (j = 1, 2)$ et nulle sur $\gamma$. Considérons encore les difféomorphismes globaux de $\mathbf{CP}^1$, notés $\overline{A}'_i$ et $\overline{B}'_i$ $(i = 1, \ldots, g)$, qui coïncident avec $(\overline{F}_j \circ \rho_j)^{-1} \circ \Psi_j(a_i) \circ (\overline{F}_j \circ \rho_j)$ et $(\overline{F}_j \circ \rho_j)^{-1} \circ \Psi_j(b_i) \circ (\overline{F}_j \circ \rho_j)$ sur $\overline{U}_j$ $(j = 1, 2)$. Il est clair que :

(i) $\overline{A}'_i$ et $\overline{B}'_i$ sont égaux à $A'_i$ et $B'_i$ au voisinage de $\gamma$;

(ii) le produit de commutateurs $\overline{A}'_1 \circ \overline{B}'_1 \circ \overline{A}'^{-1}_1 \circ \overline{B}'^{-1}_1 \circ \ldots \circ \overline{A}'_g \circ \overline{B}'_g \circ \overline{A}'^{-1}_g \circ \overline{B}'^{-1}_g$ est l'identité;

(iii) $\overline{A}'_i$ et $\overline{B}'_i$ préservent la différentielle de Beltrami $\mu$.

Soit enfin F un difféomorphisme de $\mathbf{CP}^1$ uniformisant $\mu$, c'est-à-dire envoyant $\mu$ sur la différentielle triviale de $\mathbf{CP}^1$. Ce difféomorphisme F est holomorphe au voisinage de $\gamma$ car $\mu$ est triviale dans ce voisinage. Les conjugués $F \circ \bar{A}_i' \circ F^{-1}$ et $F \circ \bar{A}_i' \circ F^{-1}$ préservent la différentielle triviale, c'est-à-dire sont holomorphes; ce sont des transformations de Möbius de PSL(2, **C**).

Ainsi, la restriction de F à un voisinage de $\gamma$ est un difféomorphisme holomorphe qui conjugue les difféomorphismes locaux $A_i'$ et $B_i'$ ($i = 1, \ldots, g$) à des transformations de Möbius de PSL(2, **C**). Ceci établit le théorème. □

## BIBLIOGRAPHIE


[An] ANOSOV, D. V., Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature, *Proc. Steklov Math. Inst., A.M.S. Translations* (1969).

[A-A] ARNOLD, V., AVEZ, A., *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.

[Av] AVEZ, A., Anosov diffeomorphisms, *Proc. Inter. Symp. topological dynamics*, Benjamin (1968), 17-51.

[Ba] BARBOT, T., *Flots d'Anosov sur les variétés de dimension 3*, en préparation.

[B-F-L] BENOIST, Y., FOULON, F., LABOURIE, F., Flots d'Anosov à distribution stable et instable différentiable, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1992), 33-74.

[B-L] BENOIST, Y., LABOURIE, F., *Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables*, prépublication, 1992.

[Bo] BOWEN, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, III, *Springer lecture notes in math.*, **470** (1975).

[C-C] CANTWELL, J., CONLON, L., *Endsets of exceptional leaves : a theorem of Duminy*, unpublished notes, Saint Louis University.

[Fr] FRANKS, J., Anosov diffeomorphisms, *Proc. Symp. Pure Maths.*, vol. **14** (1970), 61-93.

[Gh1] GHYS, E., Actions localement libres du groupe affine, *Invent. Math.*, **82** (1985), 479-526.

[Gh2] GHYS, E., Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Scient. Ec. Norm Sup.*, **20** (1987), 251-270.

[Gh3] GHYS, E., Classe d'Euler et minimal exceptionnel, *Topology*, **26** (1987), 93-105.

[Gh4] GHYS, E., Le cercle à l'infini des surfaces à courbure négative, *Proc. ICM Kyoto 1990*, Springer, Vol. I, 501-509.

[Gh5] GHYS, E., Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens, *Ann. Inst. Fourier*, **42** (1992), 209-247.

[G-T] GHYS, E., TSUBOI, T., Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1, *Ann. Inst. Fourier*, **38** (1988), 215-244.

[Gr] GROMOV, M., *Three remarks on geodesics dynamics and fundamental group*, texte non publié, SUNY, vers 1977.

[H-T] HANDEL, M., THURSTON, W., Anosov flows on new 3-manifolds, *Invent. Math.*, **59** (1980), 95-103.

[Kan] KANAI, M., Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, **8** (1988), 215-239.

[Man] MAÑÉ, R., *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer Verlag (1987).

[Mat] MATSUMOTO, S., Some remarks on foliated $S^1$-bundles, *Invent. Math.*, **90** (1987), 343-358.

[Mi] MILNOR, J., On the existence of a connection with curvature zero, *Comment. Math. Helv.*, **32** (1958), 215-223.

[Ot] OTAL J.-P., Le spectre marqué des surfaces à courbure négative, *Annals of Math.*, **131** (1990), 151-162.

[Ra] RATNER, M., Markov splittings for U-flows in three-dimensional manifolds, *Mat. Zametki*, **6** (1969), 693-704.

[Su1] SULLIVAN, D., Discrete conformal groups and measurable dynamics, *Bull. A.M.S.*, **6** (1982), 53-73.

[Su2] SULLIVAN, D., Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, *Acta Math.*, **155** (1985), 243-260.

[Su3] SULLIVAN, D., Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures, *Mathematics into the 21st century*, vol. 2, AMS Centennial publications, Providence, R.I., 1991.

[Th] THURSTON, W., *Foliations on 3-manifolds which are circle bundles*, Ph.D. Thesis, Berkeley (1972).

[Wo] WOOD J., Bundles with totally disconnected structure group, *Comment. Math. Helv.*, **46** (1971), 257-273.

Ecole normale supérieure de Lyon
Unité de mathématiques pures et appliquées
UMR 128 CNRS
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon cedex 07

*Manuscrit reçu le 31 août 1992.*