PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS BRUHAT
JACQUES TITS

Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 60 (1984), p. 5-184
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1984__60__5_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GROUPES RÉDUCTIFS SUR UN CORPS LOCAL

par F. BRUHAT *et* J. TITS

CHAPITRE II

SCHÉMAS EN GROUPES
EXISTENCE D'UNE DONNÉE RADICIELLE VALUÉE

INTRODUCTION 7

1. **Notations et rappels** 13
   1.1. Groupes algébriques 13
   1.2. Schémas 16
   1.3. Distributions 21
   1.4. Représentations linéaires 23
   1.5. Restriction des scalaires 26
   1.6. Extensions admissibles et étales 32
   1.7. Schémas étoffés 37

2. **Décomposition d'un groupe linéaire** 40
   2.1. Décomposition du groupe linéaire général 40
   2.2. Décomposition d'un groupe linéaire 44

3. **Données radicielles schématiques** 50
   3.1. Données radicielles schématiques 50
   3.2. Un exemple : le cas déployé 52
   3.3. Construction de $\mathfrak{U}_\Psi$ et de $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$ 61
   3.4. L'algèbre des distributions associée à une donnée radicielle schématique 63
   3.5. $\mathscr{D}$-modules : lemmes préliminaires 64
   3.6. Construction d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{U}_a$ 67
   3.7. Construction d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{Z}$ 70
   3.8. Récolte 71
   3.9. Compléments 73

4. **Groupes quasi-déployés sur un corps valué** 77
4.1. Généralités. Structure des U_a 77
4.2. Valuations 88
4.3. Les schémas $\mathfrak{U}_a$ 100
4.4. Le schéma $\mathfrak{T}$ 107
4.5. Fonctions quasi-concaves et données radicielles schématiques 115
4.6. Les schémas $\mathfrak{G}_f$ 123
5. **Descente étale** 145
5.1. Descente de l'immeuble 145
5.2. Sous-groupes parahoriques 162
ANNEXE. — **Relations de commutation** 169
ERRATA ET ADDENDA AU CHAPITRE I 173
INDEX DES NOTATIONS 178
INDEX TERMINOLOGIQUE 181
BIBLIOGRAPHIE 183

A la mémoire de Claude Chevalley

INTRODUCTION

Dans un premier chapitre de ce travail (noté I, voir bibliographie) nous avons introduit et étudié du point de vue des groupes « abstraits » la notion de « donnée radicielle valuée ». L'un des résultats de ce second chapitre — résultat qui motive *a posteriori* cette étude — est que, sous des conditions assez générales sur lesquelles nous reviendrons dans un instant, le groupe G(K) des points rationnels d'un groupe réductif connexe G sur un corps valué hensélien K possède une donnée radicielle valuée « compatible avec la valuation de K » (5.1.20, 5.1.23); cette donnée est unique à conjugaison et équipollence près (I, 6.2.5). Ainsi, tout ce qui a été dit dans I s'applique à G(K) : description et classification des sous-groupes bornés maximaux, décompositions d'Iwasawa, de Cartan et de Bruhat, existence et propriétés des sous-groupes U_f et autres sous-groupes apparentés (I, § 6), existence et propriétés de l'*immeuble* du groupe, etc.

Les schémas en groupes dont il est question dans le titre sont tout à la fois un outil essentiel pour atteindre ce résultat et l'objet d'étude principal du chapitre. Il s'agit de schémas en groupes sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de K, de fibre générique G, le plus souvent lisses et affines. Supposons par exemple, pour éviter d'entrer d'emblée dans les complications techniques, que G soit semi-simple et la valuation de K discrète; alors nous associons à toute partie bornée Ω d'un appartement de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G un tel schéma en groupes $\mathfrak{G}$ (noté $\mathfrak{G}^{\dagger}_{\Omega}$ en 5.1.9) dont le groupe des points entiers $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ est le stabilisateur de Ω dans G(K) (qui opère sur $\mathscr{I}$, rappelons-le). Si de plus Ω est une facette de l'immeuble $\mathscr{I}$ (I, 2.1.1), l'ensemble des facettes dont l'adhérence contient Ω s'identifie avec l'immeuble « sphérique » de la composante neutre de la fibre fermée de $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire du groupe algébrique $\mathfrak{G}_{\overline{k}}$ obtenu à partir de $\mathfrak{G}$ par réduction modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$ (5.1.32); lorsque $\overline{k}$ est parfait, l'immeuble sphérique en question est l'immeuble des $\overline{k}$-sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{G}_{\overline{k}}$ ([37], § 5). Ainsi, la réduction mod $\mathfrak{m}$ correspond géométriquement à une « localisation » dans l'immeuble, et l'étude des fibres fermées des schémas associés aux facettes fournit des renseignements de nature combinatoire sur l'immeuble. Les stabilisateurs de parties bornées d'appartements ne sont que certains des sous-groupes introduits et étudiés aux §§ 6 et 7 de I (groupes U_f, P_f, $P_f^{\dagger}$, etc.) et dont beaucoup s'interprètent aussi comme groupes de points entiers de schémas lisses de fibre générique G (4.6.2, 4.6.21, 4.6.28).

La preuve de l'existence de la donnée radicielle valuée (donc de l'immeuble) de G(K) est obtenue par la succession de deux processus de descente, une *descente quasi-*

déployée, passage d'un corps sur lequel G se déploie à un sous-corps sur lequel il est quasi-déployé, et une *descente étale*, passage d'un corps de « quasi-déploiement » à un sous-corps dont il est extension étale (dans le cas hensélien, où nous nous plaçons pour l'instant, une extension algébrique est dite *étale* si elle est non ramifiée et si l'extension résiduelle est séparable). La descente quasi-déployée est la plus facile. Elle pourrait se faire par des calculs explicites (4.2.11), mais à cette méthode « terre à terre », nous en préférons une autre, plus géométrique (elle fait usage de l'immeuble); un peu moins élémentaire que la première, elle ne nécessite par contre aucune distinction de cas et a surtout, pour nous, l'avantage d'avoir été préparée au chapitre I par un théorème de descente (I, 9.2.10) dont la descente quasi-déployée est une application immédiate (4.2.3). Rappelons incidemment que les groupes quasi-déployés avaient été étudiés (au moins sur un corps p-adique) par H. Hijikata [18], après que N. Iwahori et H. Matsumoto eurent étudié le cas déployé dans un mémoire fondamental [21] qui est à l'origine de nos recherches.

Le même théorème 9.2.10 de I s'applique également mais moins directement à la descente étale. La difficulté consiste à montrer que les conditions d'utilisation du théorème sont remplies. Le lemme clé est ici l'existence (toujours sous certaines conditions : voir plus loin) d'un tore de G défini sur le corps de base et qui devient déployé maximal sur une extension étale sur laquelle G est quasi-déployé. C'est pour prouver ce lemme que nous avons besoin des schémas en groupes dont il a été question plus haut. Dans un premier état de notre travail (esquissé dans [8], [11], [13], [40]) nous ne disposions de ces schémas que dans le cas déployé. Pour effectuer la descente étale, et notamment pour démontrer le lemme en question, nous devions nous contenter de doter les stabilisateurs de facettes — pour un groupe quasi-déployé — de structures proalgébriques, déduites par descente (quasi-déployée et totalement ramifiée) de structures analogues dans le cas déployé, lesquelles étaient obtenues à partir des schémas à l'aide du foncteur de Greenberg. La méthode que nous utilisons ici a plusieurs avantages : elle donne des résultats plus précis (un schéma sur $\mathcal{O}$ a « plus de structure » que le groupe proalgébrique correspondant), elle est plus générale (nous ne devons plus supposer la valuation discrète ni le corps résiduel parfait), et les schémas sont un outil plus puissant et plus commode que les groupes proalgébriques (ainsi, des processus encombrants d'approximations successives sont remplacés par de simples applications du lemme de Hensel). Par contre, les schémas dont nous avons besoin pour les groupes quasi-déployés ne sont plus obtenus par descente à partir du cas déployé, et doivent être construits directement; cela nécessite la machinerie mise en place aux §§ 2 et 3, dont nous reparlerons plus en détail dans la partie analytique de cette introduction.

Signalons au passage que depuis la publication de [11], [13], l'existence de données radicielles valuées et d'immeubles pour des groupes non quasi-déployés a aussi été obtenue par d'autres méthodes. Rappelons tout d'abord que le cas des groupes classiques est traité au § 10 de I. Dans [20], H. Hijikata (qui avait déjà étudié précédemment [19] certains groupes classiques particuliers) montre par des calculs directs l'existence d'un

système de Tits de type affine (donc d'un immeuble) pour tout groupe semi-simple sur un corps localement compact; toutefois, il a besoin pour cela de connaître la nullité de H^1 pour les groupes simplement connexes (un résultat de M. Kneser [22] et de Bruhat-Tits [13]). Une méthode géométrique de descente qui devrait pouvoir s'appliquer à la descente *modérément ramifiée* a été développée par G. Rousseau [27], mais celui-ci nous a signalé l'inexactitude d'un lemme, crucial pour le cas des valuations denses. Enfin, utilisant la classification [34], l'un de nous [38] a vérifié, cas par cas, par un procédé de réduction au rang un, l'existence d'une donnée radicielle valuée pour « la plupart » des groupes de rang relatif $\geqq 2$ sur un corps valué hensélien quelconque.

Cela nous amène à reparler des conditions où nous nous plaçons dans ce travail. Notre théorème d'existence de la donnée radicielle valuée (5.1.20) est prouvé sous les hypothèses suivantes : K est hensélien, G est quasi-déployé sur l'hensélisé strict (extension étale maximale) $\hat{K}$ de K et lorsque la valuation est dense le corps de déploiement de G au-dessus de $\hat{K}$ est non ramifié (extension « admissible » : cf. 1.6.1) et G satisfait à une condition (5.1.5 (DE)) qui est peut-être toujours vraie et l'est en tout cas dès que le complété de K est maximalement complet. Ces hypothèses sont satisfaites pour tout groupe réductif G sur un corps de valuation discrète hensélien à corps résiduel parfait puisque, dans ce cas, un résultat bien connu de R. Steinberg (cf. [32], [6] et aussi [29], II, § 3) implique que G est quasi-déployé sur $\hat{K}$.

Lorsque la valuation est dense, la méthode des schémas que nous utilisons ne peut très probablement pas s'étendre au cas où le groupe G ne se déploie sur aucune extension non ramifiée : le fait que l'anneau des entiers d'une extension ramifiée ne soit pas un module de type fini sur l'anneau des entiers du corps de base semble un obstacle insurmontable. D'autre part, plusieurs résultats intermédiaires sont établis sous des conditions plus générales. Ainsi, le traitement des groupes quasi-déployés (donnée radicielle valuée, immeuble, schémas associés aux parties d'appartements, etc.) ne nécessite pas que K soit hensélien, et certaines des constructions plus générales des §§ 2 et 3 sont valables pour n'importe quel anneau prüférien, voire pour des anneaux intègres quelconques.

Passons maintenant en revue le contenu des divers paragraphes.

Des rappels et généralités sur les groupes algébriques et les schémas en groupes ont été rassemblés dans le § 1. Il s'agit le plus souvent de concepts et de résultats connus mais pour lesquels nous n'avons pas toujours trouvé de référence adéquate. Il nous a même parfois paru utile de développer ces généralités un peu plus qu'il n'était strictement nécessaire à nos besoins. C'est notamment le cas pour ce qui concerne les distributions (1.3) et la restriction des scalaires (1.5).

Soient G un groupe réductif sur un corps quelconque K, S un K-tore déployé de G, Z le centralisateur de S, X le groupe des caractères de S et Φ l'ensemble des *rayons radiciels*, c'est-à-dire des demi-droites ouvertes de $X \otimes \mathbf{R}$ qui contiennent au moins un poids de S dans l'algèbre de Lie de G. Pour $a \in \Phi$, il existe un plus grand sous-groupe U_a de G normalisé par S et tel que les poids de S dans U_a appartiennent à a.

On sait que si les éléments de Φ sont rangés dans un ordre convenable, l'application produit de $\prod U_a \times Z$ dans G est une immersion ouverte dont l'image C porte traditionnellement le nom de *grosse cellule*. Soit maintenant A un sous-anneau de K ayant K pour corps des quotients, supposons que G soit un groupe linéaire, $G \subset GL(V)$, et donnons-nous dans l'espace vectoriel V un A-module projectif de type fini M tel que $M \otimes K = V$ et que M soit somme directe de ses intersections avec les composantes isotypiques du S-module V. La donnée de M dote G, Z et les U_a de structures de A-schémas $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}_a$ (adhérences schématiques de G, Z, U_a dans le schéma en groupes $\mathfrak{GL}(M)$). Au § 2, nous nous intéressons surtout au cas où $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}_a$ sont plats (il en est ainsi, par exemple si A est un anneau de valuation ou un anneau de Dedekind), donc sont des schémas en groupes. Nous montrons notamment que l'application produit définit un isomorphisme de $\prod \mathfrak{U}_a \times \mathfrak{Z}$ (pour le même ordre sur Φ que ci-dessus) sur un ouvert $\mathfrak{C}$ (« grosse cellule ») de $\mathfrak{G}$; on en déduit que $\mathfrak{G}$ (supposé plat) est lisse dès que $\mathfrak{Z}$ et les $\mathfrak{U}_a$ le sont.

Le problème étudié au § 3 est en quelque sorte inverse. Ici, nous nous donnons A, comme ci-dessus, et des schémas en groupes plats $\mathfrak{U}_a$ ($a \in \Phi$), $\mathfrak{Z}$ « prolongeant les U_a et Z » (c'est-à-dire ayant les U_a et Z pour fibres génériques), d'où une grosse cellule $\mathfrak{C} = \prod \mathfrak{U}_a \times \mathfrak{Z}$, que nous nous proposons de plonger comme ouvert dans un schéma en groupes plats $\mathfrak{G}$ prolongeant G. La méthode que nous employons consiste à nous ramener à la situation du § 2, c'est-à-dire à chercher une représentation linéaire $\rho : G \to GL(V)$ et un sous-A-module M de V possédant les propriétés énoncées plus haut et tel que les $\mathfrak{U}_a$ et $\mathfrak{Z}$ « soient » les adhérences schématiques des U_a et de Z dans $\mathfrak{GL}(M)$. C'est *grosso modo* la voie suivie par C. Chevalley pour montrer l'existence des schémas qui portent son nom [16]. En 3.1.1, nous énonçons quatre conditions (sur les $\mathfrak{U}_a$ et $\mathfrak{Z}$) manifestement nécessaires pour l'existence de ρ et M. Il s'agit, pour l'essentiel, de conditions exprimant que certains morphismes impliquant les U_a et Z et exprimant des relations de commutation ou de conjugaison se prolongent en des morphismes de schémas faisant cette fois intervenir les $\mathfrak{U}_a$ et $\mathfrak{Z}$; lorsque ces conditions, notées (DRS 0) à (DRS 3), sont satisfaites, nous disons que le système $((\mathfrak{U}_a)_{a \in \Phi}, \mathfrak{Z})$ est une *donnée radicielle schématique*. Le principal résultat du § 3 est que, dans le cas qui nous intéresse le plus, celui d'un groupe G quasi-déployé et d'un anneau A de valuation (ou, plus généralement, d'un anneau prüférien), les conditions nécessaires (DRS 0) à (DRS 3) sont aussi suffisantes pour l'existence de ρ et M, donc du schéma en groupes $\mathfrak{G}$. Certains résultats intermédiaires s'appliquent d'ailleurs à des groupes non quasi-déployés ou à des anneaux non prüfériens.

Une autre méthode pour construire $\mathfrak{G}$ à partir de $\mathfrak{C}$, méthode utilisée par M. Demazure dans le cas des schémas de Chevalley, consisterait à doter $\mathfrak{C}$ d'une structure de « noyau de groupe », dont l'existence découle à nouveau des propriétés (DRS 0) à (DRS 3), puis à « intégrer » ce noyau à l'aide du théorème de Weil-Artin ([SGAD], exposé XVIII). Bien que ce procédé conduise peut-être à des résultats plus généraux que les nôtres, nous lui avons préféré la méthode des représentations linéaires en raison

de son caractère plus « concret » — elle fournit d'ailleurs des renseignements plus précis sur les schémas obtenus — et surtout pour éviter d'avoir à aligner des sorites pesants sur la notion peu attrayante de noyaux de groupes schématiques (cf. 3.1.7).

Le § 4 est consacré à l'étude des groupes quasi-déployés sur un corps K valué. Ici, S désigne un tore K-déployé maximal du groupe G envisagé et son centralisateur Z est donc un tore maximal T de G. Nous commençons (n° 4.2) par montrer l'existence d'une donnée radicielle valuée dans G(K). Rappelons qu'une fonction à valeurs réelles $f: \Phi \to \mathbf{R}$ sur l'ensemble Φ des racines de G par rapport à S est dite concave si, pour $a, b \in \Phi$ et $p, q \in \mathbf{Z}$ tels que $pa + qb \in \Phi$, on a $f(pa + qb) \leqq pf(a) + qf(b)$. Au n° 4.5, nous associons à toute fonction concave (ou même quasi-concave : cf. I, 6.4.8 et le n° 4.5.3 ci-dessous) f satisfaisant, dans le cas de valuations denses, à une condition technique supplémentaire (condition (Sch) du n° 4.5.1), une donnée radicielle schématique $((\mathfrak{U}_{a,f}), \mathfrak{T})$: les $\mathfrak{U}_{a,f}$ sont sélectionnés parmi des schémas en groupes de fibre générique U_a construits en 4.3, et les choix possibles du schéma $\mathfrak{T}$, de fibre générique T, sont discutés au n° 4.4. Ainsi, toute fonction f ayant les propriétés indiquées donne lieu à une grosse cellule $\mathfrak{C}_f = \prod \mathfrak{U}_{a,f} \times \mathfrak{T}$, possédant, d'après le § 3, une immersion ouverte dans un schéma en groupes de fibre générique G. Ce schéma en groupes n'est pas unique mais il en existe un « plus petit », que nous notons $\mathfrak{G}_f$, et par passage à la composante neutre et recollement de translatés on en obtient d'autres (schémas $Y\mathfrak{G}_f^\circ$ du n° 4.6.21), également utiles : ainsi, les schémas attachés aux parties bornées d'appartements, dont il a été question au début de cette introduction, sont cas particuliers de ces $Y\mathfrak{G}_f^\circ$. Au n° 4.6, nous établissons l'existence de $\mathfrak{G}_f$ et des $Y\mathfrak{G}_f^\circ$ (le problème, pour ceux-ci, étant de montrer qu'ils sont séparés et affines) et nous décrivons brièvement la structure (groupe des composantes, radical unipotent déployé, système de racines...) *des fibres fermées* des $Y\mathfrak{G}_f$, c'est-à-dire des groupes algébriques sur le corps résiduel déduits de ceux-ci par réduction mod $\mathfrak{m}$. Dans le cas d'une valuation discrète, ces derniers résultats nous permettent d'établir l'isomorphisme mentionné plus haut entre l'étoile d'une facette de l'immeuble de G et l'immeuble sphérique du groupe algébrique $\overline{\mathfrak{G}}_F$ déduit par réduction mod $\mathfrak{m}$ du schéma $\mathfrak{G}_F$ attaché à F (4.6.33). Lorsque la valuation est dense, une facette F est non plus un ensemble mais un germe d'ensemble; on ne peut plus lui attacher naturellement un schéma en groupes mais nous montrons (4.6.41) qu'on peut encore lui attacher canoniquement un groupe algébrique $\overline{\mathfrak{G}}_F$ sur le corps résiduel, dont l'immeuble sphérique s'identifie à l'étoile de F.

Enfin le § 5 est consacré à la *descente étale*. Conservons les notations précédentes, mais supposons que K soit strictement hensélien (*i.e.* hensélien à corps résiduel séparablement clos) et que le groupe G soit défini sur un sous-corps $K^\natural$ de K dont K soit une extension étale. Les principaux résultats du n° 5.1 sont l'existence d'une donnée radicielle valuée dans $G(K^\natural)$ (sous réserve de (DE) dans le cas d'une valuation dense), donc l'existence d'un immeuble de G sur $K^\natural$, et l'identification de cet immeuble avec l'ensemble des points fixes de $\mathrm{Gal}(K/K^\natural)$ dans l'immeuble de G sur K. Ces résultats

se déduisent facilement du théorème de descente de I, 9.2.10, une fois établie, à l'aide du n° 4.6, l'existence d'un K^h-tore qui devient déployé maximal sur K (5.1.12).

La fin du § 5 est consacrée à la généralisation par descente des autres résultats du § 4 et à une étude plus poussée du cas de valuation discrète (définition des sous-groupes parahoriques et d'Iwahori, système de Tits, conjugaison des sous-groupes parahoriques).

Enfin, nous donnons en Annexe une description des « relations de commutation » dans les groupes quasi-déployés qui peut être utile et qui permet notamment de démontrer l'existence d'une donnée radicielle valuée dans un groupe quasi-déployé sans utiliser le théorème de descente du Chapitre I (cf. 4.2.11).

Nous ne voudrions pas terminer cette introduction sans remercier Guy Rousseau qui a bien voulu lire attentivement notre manuscrit, et dont les remarques et corrections nous ont été précieuses, ni sans signaler que le lecteur trouvera dans ce Chapitre la démonstration de tous les résultats énoncés dans [8], [13] et [40], à l'exception de ceux ayant trait aux « diagrammes de Dynkin » et questions annexes (indices, classification), aux applications à la cohomologie et à certains exemples explicites. Nous espérons revenir un jour sur ces questions.

§ 1. NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout ce travail, la lettre K désigne un corps commutatif infini. Dans les §§ 1, 2 et 3, la lettre A désigne un sous-anneau de K, ayant K comme corps des fractions. A partir du n° 4.2, le corps K sera supposé muni d'une valuation non impropre (par valuation d'un corps, nous entendons valuation *à valeurs dans* $\mathbf{R}$; par contre, nous ne faisons aucune hypothèse restrictive sur les anneaux de valuation considérés aux §§ 2 et 3), et on prendra pour A l'anneau $\mathcal{O}$ de cette valuation. Sauf mention expresse du contraire, les A-algèbres considérées sont supposées commutatives et possédant un élément unité.

Le mot *schéma* signifie, sauf mention expresse du contraire, *schéma affine*.

1.1. Groupes algébriques.

En ce qui concerne les groupes algébriques (qui sont toujours supposés *affines*), on prend les définitions et notations de [2], [4] et [7], à ceci près que notre corps K est désigné par la lettre k dans ces références auxquelles nous renvoyons pour les résultats énoncés dans le présent numéro.

1.1.1. — Dans tout ce travail, la lettre G désigne un groupe algébrique (affine) défini sur K et connexe. La lettre S désigne un tore de G, défini et déployé sur K. On note $Z = Z(S)$ le centralisateur et $N = N(S)$ le normalisateur de S dans G. On sait que Z et N sont définis sur K et que Z est la composante neutre de N.

1.1.2. — Les *racines* de G suivant S sont les poids non nuls de S dans la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie Lie G. Elles forment un sous-ensemble fini du groupe des caractères $X^*(S)$ de S, groupe que l'on identifie avec son image canonique dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R} \otimes X^*(S)$. Un *rayon radiciel* de G suivant S est une demi-droite ouverte d'origine o dans E contenant au moins une racine; l'ensemble des rayons radiciels de G suivant S est noté $\Phi(S, G)$ ou simplement Φ.

1.1.3. — Pour toute demi-droite ouverte a d'origine o de E, il existe un plus grand sous-groupe fermé connexe U_a de G, normalisé par S et tel que les caractères de S intervenant dans la représentation adjointe de S dans Lie U_a appartiennent à a; il est défini sur K, unipotent déployé sur K et on l'appelle le *sous-groupe radiciel* de G associé à a. On a $U_a \neq \{1\}$ si et seulement si $a \in \Phi$.

1.1.4. — Si a et b sont deux demi-droites ouvertes d'origine o de E, l'ensemble des demi-droites ouvertes contenues dans le cône $a + b$ est encore noté $a + b$. On dit qu'une partie Ψ de Φ est *close* si pour tous $a, b \in \Psi$, on a $(a + b) \cap \Phi \subset \Psi$. Si de plus la réunion des $a \in \Psi$ est contenue dans un demi-espace ouvert de E, on dit que Ψ est *positivement close.*

1.1.5. — On dit qu'une partie Φ^+ de Φ est un système de rayons radiciels positifs s'il existe un hyperplan H de E ne rencontrant aucun élément de Φ tel que Φ^+ soit l'ensemble des éléments de Φ contenus dans l'un des deux demi-espaces ouverts de bord H. On pose alors $\Phi^- = \Phi - \Phi^+$ et les éléments de Φ^- sont dits négatifs. Il est clair que Φ^+ et Φ^- sont positivement closes et que réciproquement, toute partie positivement close est contenue dans un système de rayons radiciels positifs convenable.

Si G est *réductif*, on a $\Phi = -\Phi$ et $\Phi^- = -\Phi^+$.

1.1.6. — Pour $\Psi \subset \Phi$, on note U_Ψ le sous-groupe fermé engendré par les U_a pour $a \in \Psi$. C'est un sous-groupe connexe de G, défini sur K et normalisé par Z. On note G_Ψ le sous-groupe fermé engendré par Z et U_Ψ; il est défini sur K.

On dit que Ψ est *quasi-close* si tout poids de S dans Lie U_Ψ est élément d'un $a \in \Psi$ et *positivement quasi-close* si de plus Ψ est contenue dans un demi-espace ouvert. Si Ψ est close (resp. positivement close), alors Ψ est quasi close (resp. positivement quasi-close).

1.1.7. — Si Ψ est *positivement quasi close*, alors U_Ψ est *unipotent* et l'application produit $\prod_{a \in \Psi} U_a \to U_\Psi$ est un *isomorphisme* de K-variétés, quel que soit l'ordre mis sur Ψ. L'application produit est aussi un isomorphisme de K-variétés de $Z \times U_\Psi$ sur G_Ψ, qui est produit semi-direct de Z par U_Ψ.

1.1.8. — Soient $a, b \in \Phi$ avec $b \neq -a$; alors $(a + b) \cap \Phi$ est positivement close et l'application commutateur est un morphisme de K-variétés de $U_a \times U_b$ dans $U_{(a+b)\cap\Phi}$, d'où, vu 1.1.7, un morphisme de K-variétés

$$\gamma_{a,b} : U_a \times U_b \to \prod_{c \in (a+b)\cap\Phi} U_c$$

(quel que soit l'ordre mis sur $(a + b) \cap \Phi$; bien entendu, $\gamma_{a,b}$ dépend de cet ordre!).

1.1.9. — Soit Ψ une partie close de Φ et soit Φ^+ un système de rayons radiciels positifs. Alors $\Psi^\pm = \Psi \cap \Phi^\pm$ est positivement close et l'application produit $U_{\Psi^-} \times Z \times U_{\Psi^+} \to G_\Psi$ est une immersion ouverte. En particulier $U_{\Phi^-} \times Z \times U_{\Phi^+}$ s'identifie par l'application produit à un voisinage ouvert de l'élément neutre dans G, qui est G tout entier lorsque G est résoluble.

1.1.10. — Soit $a \in \Phi$ tel que $-a \in \Phi$ (ce qui est toujours vrai si G est réductif). Soit W_a l'image réciproque de l'ouvert $U_{-a}ZU_a$ par l'application produit de $U_a \times U_{-a}$ dans $G_{\{a,-a\}}$ (notons que $\{a, -a\}$ est évidemment close!). Alors, W_a est

un voisinage ouvert de l'élément neutre de $U_a \times U_{-a}$ et le composé de l'application produit $W_a \to U_{-a}ZU_a$ et de l'inverse de l'application produit $U_{-a}ZU_a \to U_{-a} \times Z \times U_a$ est un morphisme de K-variétés

$$\beta_a : W_a \to U_{-a} \times Z \times U_a$$

tel que $\text{prod} = \text{prod} \circ \beta_a : W_a \to G$.

1.1.11. — Le *radical unipotent déployé* $R_{ud}(G)$ est le plus grand sous-groupe unipotent défini et déployé sur K contenu dans le radical de G. Si K est parfait, R_{ud} n'est autre que le radical unipotent de G et les résultats qui vont suivre sont démontrés dans [4]; dans le cas général, on en trouvera une esquisse de preuve dans [7] en attendant mieux. Le sous-groupe $R_{ud}(G)$ est un sous-groupe distingué de G, stable par extension *séparable* de K, et l'application produit

$$\prod_{a \in \Phi^+} (R_{ud}(G) \cap U_a) \times R_{ud}(Z) \times \prod_{a \in \Phi^-} (R_{ud}(G) \cap U_a) \to R_{ud}(G)$$

est un isomorphisme de K-variétés. Les sous-groupes $R_{ud}(G) \cap U_a$ sont unipotents déployés sur K. Si Ψ est une partie close de Φ telle que $(-\Psi) \cap \Phi \subset \Psi$, alors $R_{ud}(G_\Psi) = R_{ud}(G) \cap G_\Psi$.

1.1.12. — On dit que G est *quasi-réductif* (sur K) si $R_{ud}(G) = \{1\}$. Dans le cas général, on posera ${}^qG = G/R_{ud}(G)$ et l'on notera q l'application canonique de G sur ${}^qG$; le groupe ${}^qG$ est quasi-réductif. On sait ([2], p. 363) que si H est un sous-groupe unipotent distingué de G, défini et *déployé* sur K, alors l'application canonique de G(K) dans (G/H)(K) est surjective; en particulier $q(G(K)) = {}^qG(K)$.

1.1.13. — *Supposons jusqu'à la fin de* 1.1 *que* S *soit un tore* K*-déployé maximal.* Alors, l'image $q(S)$ de S est un tore K-déployé maximal de ${}^qG$ et $q : S \to q(S)$ est un isomorphisme, ce qui nous permet d'identifier désormais $X^*(S)$ et $X^*(q(S))$. L'image $q(Z)$ (resp. $q(N)$) est le centralisateur (resp. normalisateur) de $q(S)$ dans ${}^qG$. Pour tout $a \in \Phi$, la restriction de q à U_a définit un isomorphisme de $U_a/(R_{ud}(G) \cap U_a)$ sur le sous-groupe radiciel U'_a de ${}^qG$ associé à a.

L'ensemble R des racines de $q(S)$ dans ${}^qG$ est un système de racines dont le groupe de Weyl s'identifie naturellement aux groupes $N(K)/Z(K)$ et $q(N)(K)/q(Z)(K)$ opérant canoniquement sur $X^*(S) = X^*(q(S))$. Il existe une donnée radicielle génératrice $(q(Z)(K), (V_\alpha)_{\alpha \in R})$ dans ${}^qG(K)$, de type R (au sens de I, 6.1.1), telle que $U'_a(K)$ soit égal à V_α ou à $V_\alpha . V_{2\alpha}$ suivant que le rayon radiciel $a \in \Phi(q(S), {}^qG)$ contient une seule racine α ou deux racines α et 2α.

1.1.14. — L'ensemble R^+ des éléments de R appartenant aux éléments de Φ^+ est un système de racines positives de R. Soit B la base correspondante de R; pour toute

partie J de B, notons Ψ_J^+ l'ensemble des rayons radiciels contenant soit une racine positive, soit une combinaison linéaire des éléments de J : c'est une partie close de $\Phi(q(S), {}^qG)$. On pose

$$P_J = q^{-1}(({}^qG)_{\Psi_J^+})$$

et l'on dit que P_J est le K-*sous-groupe pseudo-parabolique standard* associé à S, R^+ et J. Plus généralement, les K-sous-groupes pseudo-paraboliques de G sont par définition les conjugués des P_J par les éléments de G(K). Leurs groupes de points rationnels sur K sont exactement les sous-groupes paraboliques du système de Tits image réciproque dans G(K) du système de Tits de ${}^qG(K)$ associé à la donnée radicielle de 1.1.13 (cf. I, 6.1.12 et 1.2.10).

Si K est *parfait* ou si G est *réductif*, les K-sous-groupes pseudo-paraboliques ne sont autres que les K-sous-groupes paraboliques de G au sens de [4].

Pour les propriétés des K-sous-groupes pseudo-paraboliques (qui sont en gros les mêmes que celles des K-sous-groupes paraboliques du cas réductif), voir [7]. Signalons-en quelques-unes :

— deux K-sous-groupes pseudo-paraboliques sont égaux (resp. conjugués dans G) si et seulement si leurs groupes de points rationnels sont égaux (resp. conjugués dans G(K));
— deux K-sous-groupes pseudo-paraboliques minimaux sont conjugués par un élément de G(K);
— tout K-sous-groupe pseudo-parabolique est son propre normalisateur;
— si K′ est une extension *séparable* de K, les K-sous-groupes pseudo-paraboliques sont les K′-sous-groupes pseudo-paraboliques K-fermés.

1.1.15. — Toute classe latérale de N suivant Z contient un élément rationnel sur K. En effet, soit $n \in N$; la restriction à $q(S)$ de l'automorphisme intérieur de ${}^qG$ défini par $q(n)$ fournit un automorphisme du système de racines R. Comme N(K) induit sur R son groupe de Weyl tout entier (1.1.13), il existe $n' \in n.N(K)$ conservant R^+, donc normalisant le K-sous-groupe pseudo-parabolique minimal $P_\varnothing$ de G, donc appartenant à $P_\varnothing$ (1.1.14). Mais comme S est contenu dans le radical de $P_\varnothing$, son normalisateur dans $P_\varnothing$ coïncide avec son centralisateur Z. Ainsi $n' \in Z$ et $n \in Z.N(K)$.

1.2. Schémas.

1.2.1. — Rappelons que le mot *schéma* signifie sauf mention expresse du contraire *schéma affine*.

Si $\mathfrak{X}$ est un A-schéma, on note $A[\mathfrak{X}]$ son algèbre affine, $\mathfrak{X}_K$ sa fibre générique, c'est-à-dire le K-schéma $\operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} A} \mathfrak{X}$, d'algèbre affine $K[\mathfrak{X}] = K[\mathfrak{X}_K] = K \otimes_A A[\mathfrak{X}]$ et on identifie $\mathfrak{X}_K$ et son image canonique dans $\mathfrak{X}$ (par la deuxième projection).

Si $u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de A-schémas, on note u^* l'homomorphisme corres-

pondant de A-algèbres de $A[\mathfrak{Y}]$ dans $A[\mathfrak{X}]$ (défini par $f \mapsto f \circ u$), et $u_K : \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{Y}_K$ la restriction de u à $\mathfrak{X}_K$; on a $u_K^* = \mathrm{id} \otimes u^* : K \otimes A[\mathfrak{Y}] \to K \otimes A[\mathfrak{X}]$.

1.2.2. — A un groupe algébrique linéaire G défini sur K correspond canoniquement un K-schéma en groupes (affine) lisse, dont l'algèbre affine est l'algèbre affine de G, et réciproquement. On se permettra de noter l'un et l'autre par la même lettre G. Le produit (resp. l'inverse) dans le groupe algébrique G ou dans le K-schéma en groupes G est donné par le même homomorphisme de K[G] dans $K[G] \otimes K[G]$ (resp. K[G]). Les parties K-fermées (resp. fermées et définies sur K) du groupe algébrique G correspondent bijectivement aux sous-schémas fermés réduits (resp. géométriquement réduits) du K-schéma G : les unes et les autres correspondent bijectivement aux idéaux I de K[G] tels que K[G]/I soit réduit, *i.e.* sans éléments nilpotents $\neq 0$ (resp. tels que $\tilde{K} \otimes K[G]/I$ soit réduit pour toute clôture algébrique $\tilde{K}$ de K) (cf. [2], p. 45). A un sous-groupe fermé de G défini sur K correspond ainsi un sous-schéma en groupes lisse et réciproquement (cf. [DG], p. 238).

1.2.3. — Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma. Pour que la fibre générique $\mathfrak{X}_K$ soit *dense* dans $\mathfrak{X}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{X}$ soit « sans torsion », c'est-à-dire que le A-module $A[\mathfrak{X}]$ soit sans torsion : chacune de ces conditions signifie que l'application canonique $j_{\mathfrak{X}} : A[\mathfrak{X}] \to K[\mathfrak{X}]$ est *injective*. On identifiera alors $A[\mathfrak{X}]$ et son image dans $K[\mathfrak{X}]$. Ceci s'applique en particulier si $\mathfrak{X}$ est *plat*, c'est-à-dire si le A-module $A[\mathfrak{X}]$ est plat.

1.2.4. — Soit X un K-schéma. Un *prolongement* de X est un couple $(\mathfrak{X}, i)$ formé d'un A-schéma $\mathfrak{X}$ et d'un isomorphisme i de K-schémas de $\mathfrak{X}_K$ sur X. On identifiera alors X et $\mathfrak{X}_K$ et on dira que $\mathfrak{X}$ *prolonge* X.

De façon analogue, si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des A-schémas et u un morphisme de K-schémas de $\mathfrak{X}_K$ dans $\mathfrak{Y}_K$, un *prolongement* de u est un morphisme $\tilde{u}$ de A-schémas de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tel que $\tilde{u}_K = u$. Si $\mathfrak{X}$ est *sans torsion* (par ex. plat), alors u se prolonge à $\mathfrak{X}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u^* \circ j_{\mathfrak{Y}}) \subset A[\mathfrak{X}]$ et dans ce cas le prolongement $\tilde{u}$ est *unique* et défini par $\tilde{u}^* = u^* \circ j_{\mathfrak{Y}} : A[\mathfrak{Y}] \to A[\mathfrak{X}]$. Autrement dit si u et v sont deux morphismes de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tels que $u_K = v_K$, alors $u = v$: on dira que l'égalité $u = v$ s'obtient à partir de $u_K = v_K$ par *prolongement par continuité.*

1.2.5. — Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de A-schémas et soit $\mathfrak{Z}$ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$. Disons que f envoie $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Z}$ si f se factorise en $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Z} \xrightarrow{i} \mathfrak{Y}$, où i est l'immersion canonique de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{Y}$. Si $\mathfrak{X}$ est *sans torsion* et si f_K envoie $\mathfrak{X}_K$ dans $\mathfrak{Z}_K$, alors f envoie $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Z}$: en effet, si z appartient à l'idéal définissant $\mathfrak{Z}$, on a $j_{\mathfrak{X}} \circ f^*(z) = f_K^* \circ j_{\mathfrak{Y}}(z) = 0$, d'où $f^*(z) = 0$ puisque $j_{\mathfrak{X}}$ est injective.

1.2.6. — Soit $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de A-schémas. L'*image fermée* de f (ou par abus de langage de $\mathfrak{Y}$) dans $\mathfrak{X}$ est le plus petit sous-schéma fermé $\mathfrak{Y}'$ de $\mathfrak{X}$ tel que f envoie $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{Y}'$. Son idéal est le noyau de f^* et son support est l'adhérence de

l'image $f(\mathfrak{Y})$ (cf. [EGA] I, pp. 176-177). Si f est l'immersion canonique d'un sous-schéma (affine) $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$, on dit aussi que $\mathfrak{Y}'$ est l'*adhérence schématique* de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$. Le schéma $\mathfrak{Y}$ est alors un sous-schéma *ouvert* de son adhérence schématique $\mathfrak{Y}'$ (*loc. cit.*, 9.5.10).

Soit de plus B une A-algèbre intègre *plate* sur A. Alors, l'image fermée de $f_B : \mathfrak{X}_B \to \mathfrak{Y}_B$ s'identifie à $\mathfrak{Y}'_B$ ([DG], p. 56).

Supposons $\mathfrak{X}$ *sans torsion*. Soit Y un sous-K-schéma *fermé* de $\mathfrak{X}_K$ et soit f le composé de l'immersion de Y dans $\mathfrak{X}_K$ et de l'injection canonique de $\mathfrak{X}_K$ dans $\mathfrak{X}$. Soit $\mathfrak{Y}$ l'image fermée de f (qu'on appellera encore *adhérence schématique* de Y dans $\mathfrak{X}$) et soit $I(\mathfrak{Y})$ (resp. I(Y)) l'idéal de $A[\mathfrak{X}]$ (resp. $K[\mathfrak{X}]$) définissant $\mathfrak{Y}$ (resp. Y). On a

$$I(\mathfrak{Y}) = j_{\mathfrak{X}}^{-1}(I(Y)), \tag{1}$$

d'où résulte aussitôt que $\mathfrak{Y}$ est *sans torsion* et si Y est réduit (resp. réduit et irréductible) (c'est-à-dire si I(Y) est égal à sa racine (resp. est premier)), alors il en est de même de $\mathfrak{Y}$. D'autre part, de la suite exacte $I(\mathfrak{Y}) \to A[\mathfrak{X}] \to A[\mathfrak{Y}] \to 0$ on tire la suite exacte $K \otimes I(\mathfrak{Y}) \to K[\mathfrak{X}] \to K[\mathfrak{Y}] \to 0$, d'où $I(\mathfrak{Y}_K) = Kj_{\mathfrak{X}}(I(\mathfrak{Y})) = I(Y)$, et

$$\mathfrak{Y}_K = Y. \tag{2}$$

Inversement, si $\mathfrak{Y}'$ est un sous-A-schéma fermé sans torsion de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{Y}'_K = Y$, alors $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$: en effet, d'une part l'injection de Y dans $\mathfrak{X}$ se factorise à travers $\mathfrak{Y}'$ et d'autre part on a $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$ d'après (2) et 1.2.5. L'opération d'adhérence schématique établit donc une *bijection entre l'ensemble des sous-*K*-schémas fermés de* $\mathfrak{X}_K$ *et l'ensemble des sous-*A*-schémas fermés sans torsion de* $\mathfrak{X}$.

1.2.7. — Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma en groupes, soit $p : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ [1] le morphisme produit et $s : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ le morphisme de passages à l'inverse de $\mathfrak{X}$ (que nous appellerons *inversion*). Si $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma fermé *plat* de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{Y}_K$ soit un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{X}_K$, alors $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{X}$. En effet, $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}$ est plat (on notera que par contre $\mathfrak{Y}$ sans torsion n'implique pas $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}$ sans torsion !) et p_K (resp. s_K) envoie $\mathfrak{Y}_K \times \mathfrak{Y}_K = (\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y})_K$ (resp. $\mathfrak{Y}_K$) dans $\mathfrak{Y}_K$. Par suite p (resp. s) envoie $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) dans $\mathfrak{Y}$ d'après 1.2.5.

En particulier, *si* Y *est un sous-*K*-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{X}_K$ *et si l'adhérence schématique* $\mathfrak{Y}$ *de* Y *est un* A*-schéma* plat, *alors* $\mathfrak{Y}$ *est un sous-*A*-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{X}$.

1.2.8. — Soient $\mathfrak{X}$ un A-schéma, $p : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $e : \operatorname{Spec} A \to \mathfrak{X}$ et $s : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ des morphismes. Supposons que $\mathfrak{X}$ soit *plat* et que p_K soit une loi de groupe sur le K-schéma $\mathfrak{X}_K$, de section unité e_K et d'inversion s_K. Alors, p est une loi de groupe sur $\mathfrak{X}$, de section unité e et d'inversion s. En effet, cette assertion se traduit par un certain nombre d'égalités $u_i = v_i$ de morphismes de schémas de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ ou de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$, exprimant l'associativité, etc. (cf. [DG], p. 140). L'hypothèse entraîne $(u_i)_K = (v_i)_K$, d'où $u_i = v_i$ par prolongement par continuité (1.2.4).

---

[1] Bien entendu, la notation $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ (resp. $\mathfrak{X}_K \times \mathfrak{Y}_K$) désigne le *produit fibré* des A-schémas $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ au-dessus de Spec A (resp. des K-schémas $\mathfrak{X}_K$ et $\mathfrak{Y}_K$ au-dessus de Spec K).

De même, soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux A-schémas en groupes et soit $u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de A-schémas; si $\mathfrak{X}$ est plat et si u_K est un morphisme de K-schémas en groupes, alors u est un morphisme de A-schémas en groupes.

1.2.9. — Un A-schéma $\mathfrak{X}$ est *lisse* ([EGA] IV, § 17, notamment 17.5.1) s'il est plat, de présentation finie (*i.e.* $A[\mathfrak{X}]$ est une A-algèbre de présentation finie) et si ses fibres sont lisses, c'est-à-dire « sont » (cf. 1.2.2) des variétés dont tous les points géométriques sont simples (cf. [2], p. 72). Supposons $\mathfrak{X}$ lisse et soit $s : \operatorname{Spec} A \to \mathfrak{X}$ une section de $\mathfrak{X}$; il lui correspond un homomorphisme $s^* : A[\mathfrak{X}] \to A$. Soit I l'idéal noyau de s^*, de sorte que $A/I = A$. Le A-module I/I^2 est projectif de type fini et l'homomorphisme canonique évident de l'algèbre symétrique $\operatorname{Sym}(I/I^2)$ dans la A-algèbre graduée $\operatorname{Gr} A[X] = \coprod I^n/I^{n+1}$ est bijectif (voir [EGA] IV, § 17 et 0_{IV}, § 19). En particulier, A/I^n est un A-module projectif de type fini pour tout entier n.

1.2.10. — On note $\mathfrak{Add}$ (resp. $\mathfrak{Mult}$) le A-schéma en groupes lisse qui à toute A-algèbre R fait correspondre le groupe additif de R (resp. le groupe multiplicatif des éléments inversibles de R) (cf. [DG], pp. 148 et 149, où ces schémas sont notés α_A et μ^A respectivement). On a $A[\mathfrak{Add}] = A[T]$ (resp. $A[\mathfrak{Mult}] = A[T, T^{-1}]$), où T est la fonction identique, qui est algébriquement libre sur A, et $\mathfrak{Mult}$ est un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{Add}$.

Remarquons que $\mathfrak{Add}$ peut être considéré comme un A-schéma en *modules*, en munissant chaque $\mathfrak{Add}(R) = R$ de sa structure canonique de R-module. Nous le noterons alors $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{D}_A$. Une *droite* sur A est un A-schéma en modules isomorphe à $\mathfrak{D}_A$.

1.2.11. — Soit S un tore défini et déployé sur K. Les caractères de S forment une base du K-module K[S] et la K-algèbre K[S] n'est autre que l'algèbre du groupe $X^*(S)$ des caractères de S à coefficients dans K. Si $p : S \times S \to S$ est la loi de groupe de S, on a

$$p^*(\alpha) = \alpha \otimes \alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in X^*(S). \tag{1}$$

Considérons alors l'algèbre du groupe $X^*(S)$ à coefficients dans A : c'est l'algèbre affine d'un A-schéma $\mathfrak{S}$ sans torsion, de fibre générique S et il est immédiat que p se prolonge en une loi de groupe sur $\mathfrak{S}$, donnée toujours par (1). On dit que $\mathfrak{S}$ est le A-schéma en groupes *canonique* associé à S. Un K-isomorphisme de S sur $(\mathfrak{Mult}_K)^n$ correspond au choix d'une base de $X^*(S)$ et se prolonge d'une manière et d'une seule en un isomorphisme de A-schémas en groupes de $\mathfrak{S}$ sur $(\mathfrak{Mult})^n$. En particulier, $\mathfrak{S}$ est lisse.

1.2.12. — Soit $\mathfrak{G}$ un A-schéma en groupes. Nous dirons que $\mathfrak{G}$ est *connexe* si, pour tout $p \in \operatorname{Spec} A$, sa fibre $\mathfrak{G}_p$ au-dessus de p est connexe. Pour toute A-algèbre B, le B-schéma en groupes $\mathfrak{G}_B$ est alors connexe ([SGAD], Exp. VI_A, 2.1.1).

Supposons que $\mathfrak{G}$ soit *lisse* aux points de sa section unité. Alors, la réunion $\mathfrak{G}^0$

des composantes neutres $\mathfrak{G}_p^0$ des fibres $\mathfrak{G}_p$ pour $p \in \operatorname{Spec} A$ est un sous-A-schéma en groupes ouvert lisse de $\mathfrak{G}$, connexe, distingué et même caractéristique dans $\mathfrak{G}$ ([SGAD], Exp. VI_B, th. 3.10), qu'on appelle *composante neutre* de $\mathfrak{G}$, et $\mathfrak{G}$ est connexe si et seulement si $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0$.

1.2.13. — Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ deux schémas en groupes, $j_K : \mathfrak{G}_K \to \mathfrak{H}_K$ un morphisme de K-schémas en groupes. Supposons que $\mathfrak{G}$ est lisse et connexe et qu'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de la section unité de $\mathfrak{G}$ tel que la restriction de j_K à $\mathfrak{U}_K$ se prolonge en un morphisme j de A-schémas de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{H}$. Alors, j_K se prolonge (d'une manière et d'une seule) en un morphisme de A-schémas en groupes de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{H}$. En effet, il suffit de montrer que j_K se prolonge à $\mathfrak{G}$ (1.2.8), ou encore que pour tout $x \in \mathfrak{G}$, de projection $p \in \operatorname{Spec} A$, d'anneau local $\mathcal{O}_x$, et tout $f \in A[\mathfrak{H}]$, on a $j_K^*(f) \in \mathcal{O}_x$. Pour cela, on peut remplacer A par A_p et supposer A local d'idéal maximal p. Soit alors A' l'hensélisé strict de A : c'est une A-algèbre locale, d'idéal maximal p', de corps résiduel k' séparablement clos, fidèlement plate sur A ([EGA] IV, 18.8.8). Le morphisme canonique $\mathfrak{G}_{A'} \to \mathfrak{G}_A$ est fidèlement plat ([DG], p. 42, prop. 2.5) donc surjectif. Soit $x' \in \mathfrak{G}_{p'}$ d'image x. Comme $\mathfrak{G}_p$ est connexe, on a $\mathfrak{G}_{p'} = \mathfrak{U}(k').\mathfrak{U}_{p'}$. Comme $\mathfrak{G}$ est lisse et A' hensélien, il passe une section de $\mathfrak{U}$ au-dessus de A' par tout point de $\mathfrak{U}(k')$; il existe donc $y \in \mathfrak{U}(A')$ tel que $x' \in y.\mathfrak{U}_{A'}$ et le morphisme $y.u \mapsto j_{A'}(y).j_{A'}(u)$ de l'ouvert $y.\mathfrak{U}_{A'}$ dans $\mathfrak{H}_{A'}$ prolonge $j_{K\otimes A'}$. Il en résulte que $j_{K\otimes A'}^*(f)$ appartient à l'anneau local $\mathcal{O}'_{x'}$ de x' pour tout $f \in A'[\mathfrak{H}] \subset K \otimes A'[\mathfrak{H}]$ et que si $f \in A[\mathfrak{H}]$, on a $j_K^*(f) \in \mathcal{O}'_{x'} \cap (K \otimes \mathcal{O}_x)$. Or $\mathcal{O}'_{x'} \cap (K \otimes \mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_x$ puisque $\mathcal{O}'_{x'}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_x$ ([NB] AC I, § 3, prop. 10 (ii)), cqfd.

Plus généralement, remplaçons l'hypothèse $\mathfrak{G}$ connexe par celle de l'existence d'un sous-schéma en groupes lisse $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{G}$ tel que la restriction de j_K à $\mathfrak{Z}_K$ se prolonge en un morphisme j_3 de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{H}$ et que $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(A).\mathfrak{Z}.\mathfrak{G}^0$. Alors, j_K se prolonge à $\mathfrak{G}$: il suffit pour le voir de remplacer dans la démonstration ci-dessus la relation $\mathfrak{G}_{p'} = \mathfrak{U}(k').\mathfrak{U}_{p'}$ par $\mathfrak{G}_{p'} = \mathfrak{G}(A).\mathfrak{Z}(k').\mathfrak{U}(k').\mathfrak{U}_{p'}$ et le morphisme $yu \mapsto j(y)j(u)$ par le morphisme $yu \mapsto j_K(x)j_3(z)j(v)j(u)$ de $y.\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{H}$, pour $y = xzv$ avec $x \in \mathfrak{G}(A)$, $z \in \mathfrak{Z}(A')$ et $v \in \mathfrak{U}(A')$.

1.2.14. — Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ deux A-schémas en groupes lisses et soit $j : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ un morphisme. Supposons que $j_K : \mathfrak{G}_K \to \mathfrak{H}_K$ soit un isomorphisme et qu'il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{V}$) de la section unité de $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{H}$) tel que $j(\mathfrak{U}) = \mathfrak{V}$ et que la restriction de j à $\mathfrak{U}$ soit un isomorphisme de schémas de $\mathfrak{U}$ sur $\mathfrak{V}$. Alors j est un isomorphisme de $\mathfrak{G}$ sur un sous-schéma en groupes ouvert de $\mathfrak{H}$. En effet, j est de présentation finie ([DG], p. 69). Pour tout $p \in \operatorname{Spec} A$, le morphisme $j_p : \mathfrak{G}_p \to \mathfrak{H}_p$ est lisse en e, donc est lisse ([SGAD], Exp. VI_B, prop. 1.3) et donc plat. Par suite j est plat ([DG], p. 327, Lemme 2.2) donc lisse. Il en résulte que $j(\mathfrak{G})$ est ouvert ([DG], p. 79, cor. 3.11) et que $\operatorname{Ker} j$ est un schéma en groupes plat ([DG], p. 42, prop. 2.5). Comme $(\operatorname{Ker} j)_K = \{1\}$, $\operatorname{Ker} j = \{1\}$, d'où le résultat.

Notons que s'il existe une partie Y de $\mathfrak{G}$ ou de $\mathfrak{G}(A)$ telle que $\mathfrak{H} = j(Y).\mathfrak{H}^0$, alors j est surjectif et est donc un *isomorphisme*.

1.3. Distributions.

1.3.1. — Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma, soit $s : \operatorname{Spec} A \to \mathfrak{X}$ une section de $\mathfrak{X}$ et soit $I = I(s) = \operatorname{Ker} s^*$ l'idéal de $A[\mathfrak{X}]$ associé à s (cf. 1.2.9). Une *distribution d'ordre* $\leqq m$ *sur* X *le long de* s est une forme linéaire δ sur $A[\mathfrak{X}]$ nulle sur I^m, autrement dit un élément du dual ${}^t(A[\mathfrak{X}]/I^m)$. On dit que δ est sans terme constant si $\delta(a) = 0$ pour tout $a \in A$. On notera ${}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$ (resp. ${}^s\mathrm{Dist}_m^+ \mathfrak{X}$) le A-module des distributions d'ordre $\leqq m$ le long de s (resp. et sans terme constant) et l'on pose ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X} = \bigcup_{m \geqq 0} {}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$, ${}^s\mathrm{Dist}^+ \mathfrak{X} = \bigcup_{m \geqq 0} {}^s\mathrm{Dist}_m^+ \mathfrak{X}$. Comme $A[\mathfrak{X}]$ est somme directe de A et de I, le A-module ${}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$ est somme directe de As^* et de ${}^s\mathrm{Dist}_m^+ \mathfrak{X} = {}^t(I/I^m)$; en particulier, ${}^s\mathrm{Dist}_1^+ \mathfrak{X}$ est le dual de I/I^2, c'est-à-dire est l'espace tangent à $\mathfrak{X}$ le long de s.

1.3.2. — Si $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de A-schémas et s une section de $\mathfrak{X}$, l'application ${}^t f^*$ envoie ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ dans ${}^{f(s)}\mathrm{Dist}\, \mathfrak{Y}$: on pose $f(\delta) = {}^t f^*(\delta)$ pour $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$. Si f est une immersion (resp. une immersion ouverte), l'application $\delta \to f(\delta)$ est injective (resp. bijective).

1.3.3. — Soit B une A-algèbre. Soit $\mathfrak{X}'$ le B-schéma déduit de $\mathfrak{X}$ par le changement de base $A \to B$ et soit s' la section de $\mathfrak{X}'$ déduite de s. L'idéal $I(s')^m$ est l'image canonique de $B \otimes I(s)^m$ dans $B[\mathfrak{X}']$ et $B[\mathfrak{X}']/I(s')^m$ s'identifie à $B \otimes A[\mathfrak{X}]/I(s)^m$. Par dualité, on en déduit une application B-linéaire dite *canonique* de $B \otimes {}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$ dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}'$, puis de $B \otimes {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}'$.

Prenons $B = K$. L'application canonique de ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ dans $K \otimes {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ et celle de $K \otimes {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}_K$ sont alors injectives ([NB] A II, p. 117, cor. 1, et p. 197, exer. 29) et permettent d'identifier ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ à son image dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}_K$. Si de plus $\mathfrak{X}$ est de type fini (ce qui entraîne que $A[\mathfrak{X}]/I(s)^m$ est un A-module de type fini), l'application canonique de $K \otimes {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$ dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}_K$ est bijective *(loc. cit.)*.

1.3.4. — Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux A-schémas, s (resp. t) une section de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$); alors (s, t) est une section de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ et $I(s, t)$ est somme des images canoniques de $I(s) \otimes A[\mathfrak{Y}]$ et de $A[\mathfrak{X}] \otimes I(t)$ dans $A[\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}] = A[\mathfrak{X}] \otimes A[\mathfrak{Y}]$. Par suite, $I(s, t)^m$ est somme des images canoniques des $I(s)^p \otimes I(t)^q$ pour $p + q = m$ et la forme linéaire $\delta \otimes \delta'$ sur $A[\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}]$ appartient à ${}^{(s,t)}\mathrm{Dist}_{p+q}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ dès que $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}_p \mathfrak{X}$ et $\delta' \in {}^t\mathrm{Dist}_q \mathfrak{Y}$. D'où une application linéaire dite canonique π de ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X} \otimes {}^t\mathrm{Dist}\, \mathfrak{Y}$ dans ${}^{(s,t)}\mathrm{Dist}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$.

1.3.5. — Supposons $\mathfrak{X}$ *lisse*. Alors les A-modules $A[\mathfrak{X}]/I^m$, I^m/I^{m+1} et ${}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$ sont projectifs de type fini et le A-module gradué $\mathrm{Gr}\, {}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X} = \coprod {}^s\mathrm{Dist}_{m+1} \mathfrak{X}/{}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$

s'identifie au dual gradué de $\mathrm{Gr}\,A[\mathfrak{X}] = \coprod I^m/I^{m+1}$ (cf. 1.2.9), ou encore au dual gradué de l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(I/I^2)$ (« algèbre des puissances divisées » $\Gamma({}^t(I/I^2))$).

Reprenons les notations de 1.3.3 : l'application canonique de $B \otimes {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ dans ${}^{s'}\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}'$ est alors *bijective* : on a en effet ${}^t(B \otimes (A[\mathfrak{X}]/I^m)) = B \otimes {}^t(A[\mathfrak{X}]/I^m)$ puisque $A[\mathfrak{X}]/I^m$ est projectif de type fini. Si de plus $A \subset B$, alors l'application canonique ${}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \to {}^{s'}\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}'$ est *injective* puisque ${}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ est plat sur A.

De même, reprenons les notations de 1.3.4 en supposant que $\mathfrak{X}$ est *lisse*. Pour tout $m \geqq 1$, on a les inclusions

$$I(s)^{2m} \otimes A[\mathfrak{Y}] + A[\mathfrak{X}] \otimes I(t)^{2m} \subset I(s, t)^{2m}$$
$$\subset I(s)^m \otimes A[\mathfrak{Y}] + A[\mathfrak{X}] \otimes I(t)^m \subset I(s, t)^m,$$

d'où, par passage aux quotients de $A[\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}] = A[\mathfrak{X}] \otimes A[\mathfrak{Y}]$ par les termes de cette suite, des *surjections*

$$A[\mathfrak{X}]/I(s)^{2m} \otimes A[\mathfrak{Y}]/I(t)^{2m} \xrightarrow{\alpha} A[\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}]/I(s, t)^{2m}$$
$$\xrightarrow{\beta} A[\mathfrak{X}]/I(s)^m \otimes A[\mathfrak{Y}]/I(t)^m \xrightarrow{\gamma} A[\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}]/I(s, t)^m,$$

où $\beta \circ \alpha$ (resp. $\gamma \circ \beta$) est la projection canonique. Par dualité, compte tenu de ce que les $A[\mathfrak{X}]/I(s)^m$ sont projectifs de type fini, on en déduit des injections

$${}^{(s,t)}\mathrm{Dist}_m(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \xrightarrow{{}^t\gamma} {}^s\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X} \otimes {}^t\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{Y}$$
$$\xrightarrow{{}^t\beta} {}^{(s,t)}\mathrm{Dist}_{2m}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \xrightarrow{{}^t\alpha} {}^s\mathrm{Dist}_{2m}\,\mathfrak{X} \otimes {}^t\mathrm{Dist}_{2m}\,\mathfrak{Y},$$

où ${}^t\alpha \circ {}^t\beta$ (resp. ${}^t\beta \circ {}^t\gamma$) est l'injection canonique (rappelons que ${}^s\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$ est projectif de type fini) et où ${}^t\beta$ est la restriction de l'application canonique

$$\pi : {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \otimes {}^t\mathrm{Dist}\,\mathfrak{Y} \to {}^{(s,t)}\mathrm{Dist}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}).$$

En passant à la limite inductive sur m, on voit que π *est bijective.*

Prenons $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$ et considérons l'application diagonale $d : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$. L'application $c = \pi^{-1} \circ {}^t d^* : {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \to {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \otimes {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ munit ${}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ d'une structure de cogèbre associative et commutative, de counité l'application $\delta \mapsto \delta(1)$. Pour $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, $c(\delta) = \Sigma \delta_i \otimes \delta'_i$ et $f, g \in A[\mathfrak{X}]$, on a

$$\langle \delta, fg \rangle = \Sigma \langle \delta_i, f \rangle . \langle \delta'_i, g \rangle. \tag{1}$$

1.3.6. — Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma en groupes et soit e la section unité de $\mathfrak{X}$; on pose $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} = {}^e\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, etc. Vu 1.3.2 et 1.3.4, le morphisme produit $\pi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ définit une application linéaire de $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \otimes \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ dans $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ et l'on vérifie aussitôt que $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ est ainsi muni d'une structure de A-algèbre associative, non nécessairement commutative, admettant e^* comme élément unité, compatible avec la filtration de $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ par les $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$. Pour $\delta, \delta' \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, on a

$$\delta\delta' = (\delta \otimes \delta') \circ \pi^*.$$

On pose $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{X} = \mathrm{Dist}_1^+\,\mathfrak{X}$: on sait que $[\delta, \delta'] = \delta\delta' - \delta'\delta \in \mathrm{Lie}\,\mathfrak{X}$ quels que soient $\delta, \delta' \in \mathrm{Lie}\,\mathfrak{X}$ et que $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{X}$ est ainsi muni d'une structure de A-algèbre de Lie ([DG], prop. 6.9, p. 230).

Si $\mathfrak{X}$ est *lisse*, l'application canonique de $\Gamma(\mathrm{Lie}\,\mathfrak{X})$ dans $\mathrm{Gr}\,\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ (1.3.5) est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, si $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{X}$ est un A-module libre et si $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ en est une base, il existe une base $(\delta_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ telle que les δ_α pour $|\alpha| = m$ forment une base de $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$ modulo $\mathrm{Dist}_{m-1}\,\mathfrak{X}$ et que $\delta_\alpha\delta_\beta \equiv (\alpha, \beta)\,\delta_{\alpha+\beta}$ modulo $\mathrm{Dist}_{|\alpha|+|\beta|-1}\,\mathfrak{X}$ (avec $(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)!/\alpha!\,\beta!$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ (cf. [NB] A III, p. 155)). Si de plus A est « de caractéristique zéro », c'est-à-dire est une $\mathbf{Q}$-algèbre, on peut prendre $\delta_\alpha = (1/\alpha!)\,\delta_1^{\alpha_1} \ldots \delta_n^{\alpha_n}$ et $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ s'identifie à l'algèbre enveloppante de $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{X}$.

1.3.7. — Supposons que la fibre générique $\mathfrak{X}_K$ de $\mathfrak{X}$ est *connexe*, *réduite* et *de type fini*. Notons I_K l'idéal de $K[\mathfrak{X}]$ définissant l'élément neutre de $\mathfrak{X}_K$, *i.e.* l'image canonique de $K \otimes I(e)$ dans $K[\mathfrak{X}]$. Comme $K[\mathfrak{X}]$ est noetherien et intègre on a alors $\bigcap_{n \geqq 0} I_K^n = \{0\}$ ([NB] AC III, cor. au th. de Krull, p. 65). Il en résulte aussitôt que *si* $f \in K[\mathfrak{X}]$ *est tel que* $\delta(f) = 0$ *pour tout* $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}_K$, *alors* $f = 0$.

Si de plus $\mathfrak{X}$ est *lisse*, alors $A[\mathfrak{X}] \subset K[\mathfrak{X}]$ et $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}_K = K \otimes \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$. Par suite, si $f \in A[\mathfrak{X}]$ est tel que $\delta(f) = 0$ pour tout $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, alors $f = 0$.

1.4. Représentations linéaires.

Dans ce numéro, on note $\mathfrak{X}$ un A-schéma en groupes de produit π et de section unité e et l'on note M un A-module projectif de type fini.

1.4.1. — Le foncteur qui à une A-algèbre R fait correspondre le groupe additif $R \otimes M$ est représentable par un A-schéma en groupes *lisse* $\mathfrak{M}$, dont l'algèbre affine s'identifie (avec sa structure de bigèbre) à l'algèbre symétrique du dual de M ([DG], p. 148). Si N est un sous-A-module projectif de type fini de M, alors $\mathfrak{N}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{M}$ si et seulement si l'application canonique ${}^tM \to {}^tN$ est surjective, c'est-à-dire si et seulement si N est facteur direct dans M.

En particulier, à un idéal fractionnaire inversible α de A (*i.e.* un sous-A-module projectif de type fini de K) correspond ainsi un A-schéma en groupes lisse noté $\mathfrak{Add}_\alpha$, de fibre générique le groupe additif $\mathfrak{Add}_K$.

1.4.2. — Soit N un second A-module projectif de type fini. Le foncteur qui à une A-algèbre R fait correspondre le groupe additif $\mathrm{Hom}_R(R \otimes M, R \otimes N)$ est représentable par un A-schéma en groupes lisse $\mathfrak{L}(M, N)$ dont l'algèbre affine s'identifie (avec sa structure de bigèbre) à l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}({}^tN \otimes M)$ ([DG], p. 150). Si $N = M$, alors $\mathfrak{L}(M, M) = \mathfrak{L}(M)$ est un A-schéma en algèbres.

Le *groupe linéaire* $\mathfrak{GL}(M)$ est le sous-schéma ouvert de $\mathfrak{L}(M)$ induit sur l'ouvert

spécial $\mathfrak{L}(M)_{det}$ des points de $\mathfrak{L}(M)$ où la fonction régulière $det : g \to \det g$ sur $\mathfrak{L}(M)$ ne s'annule pas : si R est une A-algèbre, on a $\mathfrak{GL}(M)(R) = GL(R \otimes M)$ ([DG], p. 150). C'est un sous-A-schéma en groupes lisse du A-schéma en monoïdes (pour la multiplication) $\mathfrak{L}(M)$. La transposition est un isomorphisme de schémas de $\mathfrak{GL}(M)$ sur $\mathfrak{GL}({}^tM)$ qui est un antiisomorphisme de groupes.

Il est clair que $\mathfrak{L}(M)$ opère sur $\mathfrak{M}$ par le morphisme φ de $\mathfrak{L}(M) \times \mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ défini par $\varphi(u, m) = u(m)$ pour $u \in \mathrm{End}(R \otimes M)$ et $m \in R \otimes M$. On écrira aussi $\varphi(u, m) = u.m$. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les propriétés d'associativité et de bilinéarité de cette opération ($u.(v.m) = (uv).m$, $u.(m + m') = u.m + u.m'$, etc.). Par restriction, on obtient la loi d'opération de $\mathfrak{GL}(M)$ dans $\mathfrak{M}$.

1.4.3. — Une *représentation linéaire* ρ de $\mathfrak{X}$ dans M est un homomorphisme de A-schémas en groupes de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ (cf. [DG], p. 169). Il lui correspond une « action de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{M}$ », c'est-à-dire un morphisme de schémas $\tilde{\rho} : (x, m) \to \rho(x).m$ de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ tel que les deux morphismes $\tilde{\rho} \circ (\pi \times \mathrm{id})$ et $\tilde{\rho} \circ (\mathrm{id} \times \tilde{\rho})$ de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ soient égaux : on a $\rho(xy).m = \rho(x).(\rho(y).m)$.

Pour tout $m \in M = \mathfrak{M}(A)$, l'application $x \to \rho(x).m$ est alors un morphisme de A-schémas de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{M}$ et si $m' \in {}^tM \subset A[\mathfrak{M}]$, l'application $x \mapsto \langle m', \rho(x).m \rangle$ appartient à $A[\mathfrak{X}]$: nous la noterons $c^\rho_{m',m}$ et nous dirons que c'est le *coefficient* d'indices (m', m) de la représentation ρ. Il est clair que l'application $(m', m) \mapsto c^\rho_{m',m}$ de ${}^tM \times M$ dans $A[\mathfrak{X}]$ est *bilinéaire*. Il lui correspond donc une application linéaire $c^\rho : M \to M \otimes A[\mathfrak{X}] = \mathrm{Hom}({}^tM, A[\mathfrak{X}])$ donnée par

$$(1) \qquad (m' \otimes \mathrm{id})(c^\rho(m)) = c^\rho_{m',m} = \langle m', \rho.m \rangle \quad (m' \in {}^tM,\ m \in M)$$

(et aussi une application linéaire ${}^tc^\rho : {}^tM \to {}^tM \otimes A[\mathfrak{X}]$ donnée par

$$(m \otimes \mathrm{id})({}^tc^\rho(m')) = c^\rho_{m',m}).$$

On dit que c^ρ (resp. ${}^tc^\rho$) est la *coaction* de $\mathfrak{X}$ sur M (resp. ${}^tM$). On vérifie aussitôt que c^ρ (resp. ${}^tc^\rho$) munit M (resp. ${}^tM$) d'une structure de *comodule* sur la cogèbre $A[\mathfrak{X}]$ (cf. [30] ou [DG], p. 173 sq.). Réciproquement si $\gamma : M \to M \otimes A[\mathfrak{X}]$ est une structure de comodule, il existe une représentation linéaire ρ de $\mathfrak{X}$ dans M et une seule telle que $\gamma = c^\rho$ ([DG], p. 173 sq.).

On note $\det \rho$ l'image $\rho^*(\det)$ de l'élément $\det \in A[\mathfrak{GL}(M)]$; c'est un élément inversible de $A[\mathfrak{X}]$.

1.4.4. — Soit ρ une représentation linéaire de $\mathfrak{X}$ dans M et soit N un sous-module facteur direct de M. On dit que N est *invariant* par ρ si pour tout $n \in N$, le morphisme $x \mapsto \rho(x).n$ de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{M}$ se factorise en un morphisme de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{N}$ suivi de l'injection canonique de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$. On vérifie aisément que N est invariant par ρ si et seulement si N est un *sous-comodule* de M, c'est-à-dire si et seulement si $c^\rho(N) \subset N \otimes A[\mathfrak{X}]$ (notons que $N \otimes A[\mathfrak{X}] \subset M \otimes A[\mathfrak{X}]$ puisque N est facteur direct dans M), ou encore si et seulement si $c^\rho_{m',n} = 0$ quels que soient $n \in N$ et m' appartenant à l'orthogonal de N

dans ${}^tM$. La *restriction* de ρ à N est alors la représentation de $\mathfrak{X}$ dans N correspondant à la coaction $c^\rho : N \to N \otimes A[\mathfrak{X}]$.

1.4.5. — On dit qu'une représentation ρ de $\mathfrak{X}$ dans M est *fidèle* si le morphisme $\rho : \mathfrak{X} \to \mathfrak{GL}(M)$ est une *immersion fermée*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les coefficients $c^\rho_{m',m}$ et $(\det \rho)^{-1}$ *engendrent* la A-algèbre $A[\mathfrak{X}]$. En effet, les $m' \otimes m$ et $\det^{-1}$ engendrent la A-algèbre $A[\mathfrak{GL}(M)]$ et la condition signifie que $\rho^* : A[\mathfrak{GL}(M)] \to A[\mathfrak{X}]$ est surjective.

Si A *est un anneau de Dedekind, tout* A*-schéma en groupes (affine!) plat de type fini possède une représentation linéaire fidèle.* Soit en effet $\mathfrak{X}$ un tel schéma, de produit π et de section unité e. Il existe alors un sous-module M de type fini de $A[\mathfrak{X}]$ (donc sans torsion, donc projectif) engendrant la A-algèbre $A[\mathfrak{X}]$ et tel que $\pi^*(M) \subset M \otimes A[\mathfrak{X}]$ ([30], § 1, prop. 2). La restriction de π^* à M définit une structure de $A[\mathfrak{X}]$-comodule sur M, donc une représentation linéaire ρ de $\mathfrak{X}$ dans M. Comme $(e^* \otimes \mathrm{id}) \circ \pi^* = \mathrm{id}$ sur $A[\mathfrak{X}]$, on a, pour tout $m \in M$,

$$m = (e^* \otimes \mathrm{id}) \circ \pi^*(m) = (e^* \otimes \mathrm{id}) \circ c^\rho(m) = c^\rho_{e^*,m}$$

(en notant encore e^* la restriction de e^* à M). Par suite, les coefficients de ρ engendrent $A[\mathfrak{X}]$ et ρ est fidèle.

1.4.6. — Soit B une A-algèbre. D'une représentation ρ de $\mathfrak{X}$ dans M, on déduit par changement de base une représentation ρ_B de $\mathfrak{X}_B$ dans $B \otimes M$: on dira que ρ_B *provient* de ρ ou « se descend sur A » en ρ.

En particulier, prenons $B = K$ et soit $\tilde{\rho}$ une représentation de $\mathfrak{X}_K$ dans un K-espace vectoriel de dimension finie V. Soit M un sous-A-module projectif de V (automatiquement de type fini). Nous dirons que $\mathfrak{X}$ *opère* (resp. *opère fidèlement*) *sur* M *par* $\tilde{\rho}$ si le sous-espace vectoriel $W = KM$ de V est invariant par $\tilde{\rho}$ (1.4.4) et si la restriction $\tilde{\rho}_W$ de $\tilde{\rho}$ à W provient d'une représentation (resp. d'une représentation fidèle) ρ de $\mathfrak{X}$ dans M.

Supposons que le schéma $\mathfrak{X}$ soit *plat*. Alors $M \otimes A[\mathfrak{X}]$ s'identifie à un sous-A-module de $W \otimes K[\mathfrak{X}]$ et on voit aussitôt que $\mathfrak{X}$ opère sur M si et seulement si

$$c^{\tilde{\rho}}(M) \subset M \otimes A[\mathfrak{X}]. \tag{1}$$

La représentation ρ de $\mathfrak{X}$ dans M dont provient $\tilde{\rho}_W$ est alors *unique* et sa coaction c^ρ est la restriction de $c^{\tilde{\rho}}$ à M.

La condition (1) peut se traduire en termes de coefficients : appelons polaire de M dans le dual ${}^tV$ de l'espace vectoriel V et notons M^0 l'ensemble des $m' \in {}^tV$ tels que $\langle m', m \rangle \in A$ pour tout $m \in M$ (notons que si M engendre V, alors M^0 s'identifie au dual ${}^tM$ de M); alors M est le polaire de M^0 dans ${}^t({}^tV) = V$ et la condition (1) est équivalente à

$$c^{\tilde{\rho}}_{m',m} \in A[\mathfrak{X}] \subset K[\mathfrak{X}] \quad \text{pour tous } m \in M \text{ et } m' \in M^0. \tag{2}$$

1.4.7. — Soit ρ une représentation de $\mathfrak{X}$ dans M. Pour $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, on note $\rho(\delta)$ l'endomorphisme de M défini par

(1) $\qquad \langle m', \rho(\delta).m\rangle = \langle \delta, c^{\rho}_{m',m}\rangle \quad$ pour $m \in \mathrm{M}$ et $m' \in {}^{t}\mathrm{M}$.

On a aussi

(2) $\qquad \langle m', \rho(\delta).m\rangle = \langle m' \otimes \delta, c^{\rho}(m)\rangle = \langle m \otimes \delta, {}^{t}c^{\rho}(m')\rangle,$

ou encore

(3) $\qquad \rho(\delta) = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ c^{\rho}.$

L'application ρ est alors un *homomorphisme de* A*-algèbres* de $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ dans $\mathrm{End}\,\mathrm{M}$.

1.4.8. — Soit ρ une représentation de $\mathfrak{X}$ dans M; posons $\mathrm{V} = \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}$ et supposons que la fibre générique $\mathfrak{X}_{\mathrm{K}}$ est *connexe réduite, de type fini.* Pour qu'un sous-espace vectoriel W de V soit invariant par ρ_{K} (1.4.4), il faut et il suffit que $\rho_{\mathrm{K}}(\delta).w \in \mathrm{W}$ pour tout $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}_{\mathrm{K}}$ et tout $w \in \mathrm{W}$: la condition est trivialement nécessaire et sa suffisance résulte aussitôt de 1.3.7 et 1.4.4. Nous verrons plus loin (3.5) des généralisations de ce résultat.

1.4.9. — Un automorphisme du A-schéma en groupes $\mathfrak{X}$ définit évidemment un automorphisme de l'algèbre $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ (resp. du A-module $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$ pour $m \geqq 0$). Par exemple, si $\mathfrak{Z}$ est un A-schéma en groupes et $(z, x) \mapsto z.x$ une opération de $\mathfrak{Z}$ sur $\mathfrak{X}$ respectant la structure de groupe de $\mathfrak{X}$ (cf. [DG], pp. 160 sq.), alors le groupe $\mathfrak{Z}(\mathrm{A})$ des points de $\mathfrak{Z}$ à valeurs dans A opère par automorphismes sur $\mathfrak{X}$, donc sur l'algèbre $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ et sur chacun des A-modules $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$. Si de plus $\mathfrak{X}$ est *lisse*, alors pour toute A-algèbre R on a $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}_{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \otimes \mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$ (1.3.5) et ce qui précède fournit un homomorphisme fonctoriel de $\mathfrak{Z}(\mathrm{R})$ dans $\mathrm{GL}(\mathrm{R} \otimes \mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X})$, c'est-à-dire une représentation linéaire de $\mathfrak{Z}$ dans le A-module (projectif de type fini) $\mathrm{Dist}_m\,\mathfrak{X}$.

1.5. Restriction des scalaires.

1.5.1. — Soit B une A-algèbre, projective de type fini en tant que A-module [1]. On sait que A s'identifie par l'application $a \mapsto a1$ à un sous-module libre facteur direct dans B (cf. [NB] AC II, § 5, exer. 4, p. 176). On peut donc choisir des éléments $e_1, \ldots, e_d \in \mathrm{B}$ et $e_1^*, \ldots, e_d^* \in {}^{t}\mathrm{B}$ tels que $e_1 = 1$, $e_j^*(e_1) = e_1^*(e_j) = 0$ pour $j > 1$ et $\Sigma e_i \otimes e_i^* = \mathrm{id}$ dans $\mathrm{B} \otimes {}^{t}\mathrm{B}$ identifié à $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}$. Si M est un A-module, on a alors

(1) $\qquad x = \Sigma e_i \otimes (e_i^* \otimes \mathrm{id})(x) \quad$ pour tout $x \in \mathrm{B} \otimes \mathrm{M}$.

1.5.2. — Soit $\mathfrak{X}$ un B-schéma (affine). On sait qu'il existe un A-schéma $\mathfrak{X}^{\sharp}$ et un seul à isomorphisme unique près tel que les foncteurs $\mathrm{R} \mapsto \mathfrak{X}^{\sharp}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{R} \mapsto \mathfrak{X}(\mathrm{B} \otimes \mathrm{R})$

(1) Dans ce qui suit jusqu'au 1er alinéa de 1.5.12 compris, il n'est pas nécessaire de supposer A intègre.

sur la catégorie des A-algèbres soient isomorphes (ou encore tel que les foncteurs $Y \mapsto \mathrm{Mor}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}^\sharp)$ et $\mathfrak{Y} \mapsto \mathrm{Mor}(\mathfrak{Y}_B, \mathfrak{X})$ sur la catégorie des A-schémas soient isomorphes) : on l'appelle le A-schéma obtenu à partir de $\mathfrak{X}$ par *restriction des scalaires* de B à A et on le note $\Pi_{B/A}\mathfrak{X}$ (ou encore $\mathfrak{X}^\sharp$ lorsque A et B sont évidents) ([DG], I, § 1, n° 6.6, p. 30 sq.). L'unicité de $\mathfrak{X}^\sharp$ est évidente; on en donnera plus loin une construction explicite (1.5.7).

1.5.3. — Soit A' une A-algèbre et posons $B' = A' \otimes B$. Si $\mathfrak{X}$ est un B-schéma, *le* A'*-schéma* $\Pi_{B'/A'}\mathfrak{X}_{B'}$ *s'identifie canoniquement à* $(\Pi_{B/A}\mathfrak{X})_{A'}$.

Si C est une B-algèbre projective de type fini et $\mathfrak{X}$ un C-schéma, on a

$$\Pi_{C/A}\mathfrak{X} = \Pi_{B/A}(\Pi_{C/B}\mathfrak{X}).$$

1.5.4. — Il est clair que la correspondance $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^\sharp$ est fonctorielle et commute avec le produit de schémas. Si $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de B-schémas, on note $\Pi_{B/A}f$ ou $f^\sharp$ le morphisme correspondant de $\mathfrak{X}^\sharp$ dans $\mathfrak{Y}^\sharp$. Si $\mathfrak{X}$ est un B-schéma en groupes, alors $\mathfrak{X}^\sharp$ est un A-schéma en groupes, etc.

Soient $f, g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de B-schémas. *Si* $f^\sharp = g^\sharp$, *alors* $f = g$. Soit en effet R une B-algèbre; comme B/A est projectif, donc plat, l'application canonique de R dans $B \otimes_A R$ est injective ([NB] AC I, § 2, prop. 4). L'hypothèse $f^\sharp = g^\sharp$ entraîne $\xi \circ f^* = \xi \circ g^*$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}(B \otimes_A R)$, donc *a fortiori* pour tout $\xi \in \mathfrak{X}(R)$, d'où $f^* = g^*$ en prenant $R = B[\mathfrak{X}]$ et $\xi = \mathrm{id}$.

1.5.5. — Soit N un B-module projectif de type fini et soit $N_{[A]}$ le A-module sous-jacent (qui est lui aussi projectif de type fini). Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ est le B-schéma en groupes canoniquement associé à N (1.4.1), alors $\mathfrak{X}^\sharp$ est le A-schéma en groupes $\mathfrak{N}_{[A]}$ canoniquement associé à $N_{[A]}$.

On sait que $B[\mathfrak{X}] = \mathrm{Sym}_B(\mathrm{Hom}_B(N, B))$ et $A[\mathfrak{X}^\sharp] = \mathrm{Sym}_A {}^tN$ (où ${}^tN$ désigne le dual de N *en tant que* A*-module*) (1.4.1). En particulier, si $N = B \otimes M$, où M est un A-module projectif de type fini, on a $\mathrm{Hom}_B(N, B) = B \otimes {}^tM$ et ${}^tN = {}^tB \otimes {}^tM$, d'où

$$B[\mathfrak{X}] = \mathrm{Sym}_B(B \otimes {}^tM) = B \otimes \mathrm{Sym}_A {}^tM,$$

$$A[\mathfrak{X}^\sharp] = \mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes {}^tM).$$

1.5.6. — Plus généralement, soit E un A-module (quelconque). Soit $\mathfrak{S}$ le B-schéma $\mathrm{Spec}(B \otimes \mathrm{Sym}_A E)$ et soit $\mathfrak{S}'$ le A-schéma $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$. On a alors $\mathfrak{S}^\sharp = \mathfrak{S}'$ ([DG], *loc. cit.*). En effet, si R est une A-algèbre,

$$\mathfrak{S}(B \otimes R) = \mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(\mathrm{Sym}_B(B \otimes E), B \otimes R)$$

s'identifie à $\mathrm{Hom}_B(B \otimes E, B \otimes R)$ et $\mathfrak{S}'(R) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E), R)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_A({}^tB \otimes E, R)$. Comme B est un A-module projectif de type fini, ces deux

A-modules sont fonctoriellement isomorphes par l'application qui à $\varphi \in \mathrm{Hom}_A({}^tB \otimes E, R)$ fait correspondre l'élément $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_B(B \otimes E, B \otimes R)$ donné par

$$\tilde{\varphi}(b \otimes x) = \Sigma b e_i \otimes \varphi(e_i^* \otimes x) \quad (b \in B, x \in E) \tag{1}$$

(cf. [NB] A II, p. 77 (12) (1)).

On peut encore dire ceci : notons

$$j : \mathrm{Sym}_B(B \otimes E) \to B \otimes \mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$$

l'unique homomorphisme de B-algèbres qui prolonge l'application linéaire de $B \otimes E$ dans $B \otimes {}^tB \otimes E$ donnée par

$$j(b \otimes x) = \Sigma b e_i \otimes e_i^* \otimes x \quad (b \in B, x \in E).$$

Alors *la bijection* $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ *de* $\mathfrak{S}^\sharp(R) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E), R)$ *dans*

$$\mathfrak{S}(B \otimes R) = \mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(\mathrm{Sym}_B(B \otimes E), B \otimes R)$$

est donnée par

$$\tilde{\varphi} = (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ j, \tag{2}$$

car les deux membres de (2) coïncident sur $B \otimes E$, vu (1).

1.5.7. — Soit $\mathfrak{X}$ un B-schéma. On peut toujours écrire $B[\mathfrak{X}]$ comme quotient d'une algèbre commutative libre, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{Sym}_B(B \otimes E)$ où E est un A-module libre, par un idéal I. Alors, *l'algèbre* $A[\mathfrak{X}^\sharp]$ *s'identifie au quotient de* $\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$ *par l'idéal* $I^\sharp$ *engendré par les éléments* $(u \otimes \mathrm{id}) \circ j(x)$ *pour* $u \in {}^tB$ *et* $x \in I$ (ce qui démontre d'ailleurs l'existence de $\mathfrak{X}^\sharp$). Vu 1.5.6, dont nous reprenons les notations, il suffit de montrer que si $\varphi \in \mathfrak{S}'(R)$, alors $\tilde{\varphi}$ est nul sur I si et seulement si φ est nul sur $I^\sharp$. Or $\tilde{\varphi}$ nul sur I équivaut à $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes \varphi) = B \otimes \mathrm{Ker}\,\varphi \supset j(I)$ et il résulte alors de 1.5.1 (1) que $I^\sharp$ est le plus petit idéal de $\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$ tel que $B \otimes I^\sharp \supset j(I)$, d'où notre assertion.

1.5.8. — Si $\mathfrak{X}$ est de type fini (resp. de présentation finie), on peut prendre E libre de type fini (resp. et I de type fini), ce qui montre aussitôt que $\mathfrak{X}^\sharp$ est de type fini (resp. de présentation finie).

Par contre, on notera que $\mathfrak{X}$ *plat* n'entraîne pas nécessairement $\mathfrak{X}^\sharp$ plat, même si A est un anneau de valuation discrète complet. Cependant, on sait que $\mathfrak{X}$ *lisse* entraîne $\mathfrak{X}^\sharp$ *lisse* ([DG], I, § 4, cor. 4.8, p. 112).

1.5.9. — L'application $I \mapsto I^\sharp$ de 1.5.7 est évidemment croissante. Il en résulte que *si* $\mathfrak{Y}$ *est un sous-*B*-schéma fermé de* $\mathfrak{X}$, *alors* $\mathfrak{Y}^\sharp$ *s'identifie à un sous-*A*-schéma fermé de* $\mathfrak{X}^\sharp$.

(1) N. Bourbaki ne traite à cet endroit que du cas des modules libres de type fini; l'extension au cas projectif est immédiate. La même remarque s'applique aux références au livre d'algèbre de N. Bourbaki données plus loin.

1.5.10. — Supposons par exemple que B soit un A-module libre de base (e_i) $((e_i^*)$ en est alors la base duale) et que $B[\mathfrak{X}] = B[X_1, \ldots, X_n]/I$, où I est l'idéal engendré par les polynômes $P_1, \ldots, P_q$. Prenons pour E le A-module libre de base $X_1, \ldots, X_n$: on a $\mathrm{Sym}_B(B \otimes E) = B[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$ est l'algèbre des polynômes en les indéterminées $Y_{i,j} = e_i^* \otimes X_j$ pour $1 \leqq i \leqq d$ et $1 \leqq j \leqq n$. On vérifie immédiatement que si $P \in B[X_1, \ldots, X_n]$, alors $j(P)$ *est le polynôme obtenu en substituant* $\sum_i e_i Y_{i,j}$ *à* X_j *dans* P *pour* $1 \leqq j \leqq n$ et s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_k e_k j_k(P)$, avec $j_k(P) \in A[(Y_{i,j})]$. Il est alors clair que *l'idéal* $I^\sharp$ *est engendré par les polynômes* $j_k(P_\ell)$ *pour* $1 \leqq k \leqq d$ *et* $1 \leqq \ell \leqq q$:

$$A[\mathfrak{X}^\sharp] = A[(Y_{i,j})]/((j_k(P_\ell))).$$

1.5.11. — Soit $\mathfrak{Y}$ un A-schéma. L'application identique de $\mathfrak{Y}_B$ donne un morphisme i dit *canonique* de $\mathfrak{Y}$ dans $(\mathfrak{Y}_B)^\sharp$ (cf. 1.5.2); montrons que c'est une *immersion fermée*. Prenons d'abord le cas $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}_A E$ (avec les notations de 1.5.6). Soit ε l'homomorphisme de A-algèbres de $\mathrm{Sym}_A({}^tB \otimes E)$ dans $\mathrm{Sym}_A E$ défini par $\varepsilon(u \otimes x) = u(1)x$ pour $u \in {}^tB$ et $x \in E$; il est *surjectif* puisque $e_1^*(1) = 1$. Il suffit donc de montrer que $i = \mathrm{Spec}\,\varepsilon$, ou encore que $\tilde{\varepsilon} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ j$ est l'identité de $B \otimes \mathrm{Sym}_A E$, ce qui est immédiat :

$$\tilde{\varepsilon}(b \otimes x) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Sigma b e_i \otimes e_i^* \otimes x) = \Sigma b e_i \otimes e_i^*(1)\, x = b \otimes x.$$

Dans le cas général, on peut écrire $\mathfrak{Y}$ comme sous-schéma fermé d'un A-schéma $\mathfrak{Z}$ de la forme $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}_A E$ et notre assertion résulte aussitôt du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{Y}_B)^\sharp & \longrightarrow & (\mathfrak{Z}_B)^\sharp \end{array}$$

Soit par exemple M un A-module projectif de type fini et prenons $\mathfrak{Y} = \mathfrak{M}$: on a vu en 1.5.5 que $(\mathfrak{Y}_B)^\sharp$ s'identifie au A-schéma associé au A-module $B \otimes M$ et il est immédiat que i est le morphisme associé à l'injection canonique $m \to 1 \otimes m$ de M dans $B \otimes M$.

1.5.12. — Si $\mathfrak{U}$ est un sous-schéma *ouvert* de $\mathfrak{X}$, alors $\mathfrak{U}^\sharp$ s'identifie à un sous-schéma *ouvert* de $\mathfrak{X}^\sharp$: si I est un idéal de $B[\mathfrak{X}]$ définissant $\mathfrak{U}$ (*i.e.* tel que $\mathfrak{U}$ soit l'ensemble des points de $\mathfrak{X}$ où un élément $f \in I$ au moins ne s'annule pas), alors $\mathfrak{U}^\sharp$ est l'ouvert de $\mathfrak{X}^\sharp$ défini par l'idéal J formé des $a \in A[\mathfrak{X}^\sharp]$ tels que $1 \otimes a$ appartienne à l'idéal de $B \otimes A[\mathfrak{X}^\sharp]$ engendré par $j(I)$ ([DG], pp. 31-32). On notera que $J \subset I^\sharp$, mais les sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}^\sharp$ définis par J et $I^\sharp$ sont en général distincts et n'ont même pas le même espace sous-jacent.

Supposons I *principal* : autrement dit, $\mathfrak{U}$ est l'ouvert spécial de $\mathfrak{X}$ défini par une

fonction $f \in B[\mathfrak{X}]$. Soit $\varphi \in \mathfrak{X}^\sharp(R)$ et soit $\tilde{\varphi}$ l'élément de $\mathfrak{X}(B \otimes R)$ correspondant; alors φ provient d'un point de $\mathfrak{U}^\sharp(R)$ si et seulement si $\tilde{\varphi}(f)$ est un élément inversible de $B \otimes R$, ou encore si $\mathrm{Norme}_{B \otimes R/R} \tilde{\varphi}(f)$ [1] est inversible dans R. Il s'ensuit que $\mathfrak{U}^\sharp$ *est l'ouvert spécial de* $\mathfrak{X}^\sharp$ *défini par la norme dans* $A[\mathfrak{X}^\sharp]$ *de l'élément* $j(f) \in B \otimes A[\mathfrak{X}^\sharp]$.

1.5.13. — Exemples : 1) Soient $\mathfrak{X} = \mathfrak{Add}$ et $\mathfrak{U} = \mathfrak{Mult}$; prenant pour f la fonction identique, on voit que

$$A[\mathfrak{Mult}^\sharp] = (\mathrm{Sym}_A {}^tB)[1/\mathrm{Norme}_{B/A}].$$

Soit $i : \mathfrak{Mult}_A \to \prod_{B/A} \mathfrak{Mult}_B$ l'immersion fermée canonique (1.5.11). C'est un morphisme de schémas en groupes et l'on vérifie aussitôt (p. ex. en considérant $\mathfrak{Mult}$ comme un ouvert de $\mathfrak{Add}$ et en appliquant les dernières lignes de 1.5.11) que pour toute A-algèbre R, l'homomorphisme $i(R)$ n'est autre que l'injection canonique de $R^\times$ dans $(B \otimes R)^\times$.

2) Soit N un B-module projectif de rang r. Prenons $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}(N)$ (1.4.2) : vu 1.5.5, $\mathfrak{X}^\sharp$ est le A-schéma canoniquement associé au A-module $\mathrm{End}_B N$. Or ce dernier est un sous-module *facteur direct* dans $\mathrm{End}_A N$ [2]. Par suite, $\mathfrak{L}(N)^\sharp$ *s'identifie à un sous-schéma fermé en groupes (et même en algèbres)* de $\mathfrak{L}(N_{[A]})$.

Prenons maintenant $\mathfrak{U} = \mathfrak{GL}(N)$: c'est l'ouvert spécial de $\mathfrak{L}(N)$ défini par la fonction $\det \in B[\mathfrak{X}]$. Par suite, $\mathfrak{U}^\sharp$ est l'ouvert spécial de $\mathfrak{L}(N)^\sharp$ défini par la fonction Norme(det), qui n'est autre que la restriction à $\mathfrak{L}(N)^\sharp$ de la fonction det sur $\mathfrak{L}(N_{[A]})$ (cf. [NB] A III, p. 112). Autrement dit, $\mathfrak{GL}(N)^\sharp = \mathfrak{L}(N)^\sharp \cap \mathfrak{GL}(N_{[A]})$ *et* $\mathfrak{GL}(N)^\sharp$ *s'identifie à un sous-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{GL}(N_{[A]})$.

En particulier, si $\mathfrak{G}$ est un B-schéma en groupes et si ρ est une représentation linéaire de $\mathfrak{G}$ dans N, alors $\rho^\sharp$ est une représentation linéaire de $\mathfrak{G}^\sharp$ dans $N_{[A]}$; si ρ est fidèle, il en est de même de $\rho^\sharp$.

1.5.14. — Soit L une extension de degré fini d du corps K. Tout ce qui précède s'applique bien entendu à la restriction des scalaires de L à K d'un L-schéma.

Supposons L *séparable* sur K et soit K′ une extension de K. On sait ([NB] A VIII, § 7, cor. 1 au th. 1, p. 86) que $L' = K' \otimes_K L$ est un produit $\prod_{i \in I} L_i$, où les L_i forment un système de représentants des classes d'isomorphismes des extensions composées de L et K′. Si Ω est une extension algébriquement close de K, de degré de transcendance

---

(1) Puisque A est *intègre*, B possède un *rang* r ([NB] AC II, p. 141) et $B \otimes R$ est un R-module projectif de rang r. On peut donc considérer le *déterminant* d'un R-endomorphisme de $B \otimes R$ ([NB] AC II, § 5, exerc. 9, p. 177) et la norme $\mathrm{Norme}_{B \otimes R/R} x$ d'un élément $x \in B \otimes R$ est le déterminant de la multiplication par x. Elle est donnée par la valeur en x de l'application de $B \otimes R$ dans R définie par un élément $\mathrm{Norme}_{B \otimes R/R}$ homogène de degré r de $\mathrm{Sym}_R(R \otimes {}^tB) = R \otimes \mathrm{Sym}_A {}^tB$, dépendant fonctoriellement de R : on a $\mathrm{Norme}_{B \otimes R/R} = 1 \otimes \mathrm{Norme}_{B/A}$.

(2) $\mathrm{End}_A N/\mathrm{End}_B N$ est un A-module de présentation finie comme quotient d'un module de présentation finie par un sous-module de type fini. Compte tenu de ([NB] AC II, § 3, cor. 1 à la prop. 12, p. 114), on peut donc supposer que A est *local*. Alors B est semi-local ([NB] AC V, § 2, prop. 3, p. 40) et N ayant un rang est un B-module libre ([NB] AC II, § 5, prop. 5, p. 143). Si (n_k) est une base de N sur B, l'ensemble des A-endomorphismes de N nuls sur les n_k est un supplémentaire de $\mathrm{End}_B N$ dans $\mathrm{End}_A N$.

supérieur à celui de K′, les L_i correspondent bijectivement aux couples de K-isomorphismes de L et K′ dans Ω pris à un K-automorphisme de Ω près. Si l'on choisit un tel couple et si l'on identifie L et K′ à leurs images dans Ω par ce couple, on voit facilement que l'on peut prendre pour I l'ensemble des doubles classes $\mathrm{Gal}(\Omega/K')\backslash\mathrm{Gal}(\Omega/K)/\mathrm{Gal}(\Omega/L)$ et prendre $L_i = K'(\sigma_i(L))$, où σ_i est un élément de la double classe i. L'isomorphisme $j : K' \otimes L \to \prod L_i$ est alors donné par

$$j(x \otimes y) = (x\sigma_i(y))_{i \in I} \quad (x \in K',\ y \in L).$$

Si K′ est une extension quasi-galoisienne (on dit aussi « normale ») de K contenant L, alors $L_i = K'$ pour tout $i \in I$ et $I = \mathrm{Gal}(\Omega/K)/\mathrm{Gal}(\Omega/L)$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(K'/K)/\mathrm{Gal}(K'/L)$, d'où $\mathrm{Card}\, I = d$ et j est un isomorphisme de $K' \otimes L$ sur K'^d. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K'/K)$ opère sur $K' \otimes L$ par $(\gamma, x \otimes y) \mapsto \gamma(x) \otimes y$ et si l'on transporte cette opération à K'^d par j, on vérifie aisément que

$$\gamma \cdot (\xi_i)_{i \in I} = (\eta_i)_{i \in I} \quad \text{avec } \eta_i = \gamma(\xi_{\gamma^{-1}i}). \tag{1}$$

1.5.15. — Soit maintenant $\mathfrak{X}$ un L-schéma et $\mathfrak{X}^\sharp = \Pi_{L/K}\mathfrak{X}$. On a

$$(\Pi_{L/K}\mathfrak{X})_{K'} = \prod_{i \in I} (\Pi_{L_i/K'}\mathfrak{X}_{L_i}),$$

où, bien entendu, L_i est considérée comme extension de L grâce à $\sigma_i : L \to L_i$.

Si K′ est quasi-galoisienne et contient L, on a $L_i = K'$ et $\Pi_{L_i/K'}\mathfrak{X}_{L_i} = \mathfrak{X}_L{}^i$ pour tout $i \in I$. Tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(K'/K)$ fournit un isomorphisme de $\mathfrak{X}_{L_i}$ sur $\mathfrak{X}_{L_{\gamma \cdot i}}$, noté encore γ, et l'opération naturelle de γ sur $(\Pi_{L/K}\mathfrak{X})_{K'}$ transportée à $\prod_{i \in I} (\Pi_{L_i/K'}\mathfrak{X}_{L_i})$ est encore donnée par 1.5.14 (1).

1.5.16. — Réciproquement, soit $\mathfrak{Y}$ un K-schéma et soit K′ une extension galoisienne de K telle que $\mathfrak{Y}_{K'}$ se décompose en un produit $\mathfrak{Y}_0 \dots \mathfrak{Y}_{d-1}$ de K′-schémas permutés transitivement par l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(K'/K)$. Soit L le corps des invariants du stabilisateur de $\mathfrak{Y}_0$ dans $\mathrm{Gal}(K'/K)$. On voit par descente galoisienne que $\mathfrak{Y}_0$ provient par extension de la base de L à K′ d'un L-schéma $\mathfrak{X}$ et l'on vérifie aisément que $\mathfrak{Y}_{K'}$ muni de l'action de $\mathrm{Gal}(K'/K)$ s'identifie à $(\Pi_{L/K}\mathfrak{X})_{K'}$ et par suite que $\mathfrak{Y}$ est isomorphe à $\Pi_{L/K}\mathfrak{X}$.

1.5.17. — Prenons pour $\mathfrak{X}$ le L-schéma en groupes $\mathfrak{Mult}$ et posons $T = \Pi_{L/K}\mathfrak{Mult}$. Si K′ est une extension galoisienne de K contenant L, alors 1.5.15 montre que $T_{K'}$ est isomorphe à $\mathfrak{Mult}^d$, donc que T est un tore, qui se déploie sur K′. Le groupe X(T) des caractères de T est isomorphe à $\mathbf{Z}^d$ et admet une base (χ_i), indexée par $I = \mathrm{Gal}(K'/K)/\mathrm{Gal}(K'/L)$, stable par l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(K'/K)$ dans X(T) et telle que $\gamma \cdot \chi_i = \chi_{\gamma \cdot i}$. On voit que L_i est le corps de définition du caractère χ_i, que la plus petite extension de K déployant T est l'extension galoisienne de K engendrée par L et que T est déployé sur K si et seulement si $L = K$. Enfin, les caractères de T rationnels sur K sont les multiples entiers du caractère $\Sigma\chi_i$, qui n'est autre que la fonc-

tion $N = \mathrm{Norme}_{L/K}$ sur T (cf. 1.5.13) : en effet, si R′ est une K′-algèbre, et si $x = (x_i) \in T(R') = \prod_{i \in I} (L_i \otimes_{K'} R')^\times$, on a

$$N(x) = \mathrm{Norme}_{L \otimes_K R'/R'} x = \prod_{i \in I} \mathrm{Norme}_{L_i \otimes_K R'/R'} x_i = \prod_{i \in I} x_i = (\Sigma \chi_i)(x).$$

Il en résulte que le sous-tore S déployé sur K maximal de T est de dimension 1 et coïncide donc avec l'image canonique de $\mathfrak{Mult}$ (1.5.11).

Réciproquement, si T est un tore défini sur K tel que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$ permute transitivement une base $\chi_0, \ldots, \chi_{d-1}$ du groupe des caractères X(T) de T, et si L est le corps de définition de χ_0, alors T est K-isomorphe à $\Pi_{L/K}\mathfrak{Mult}$: cela résulte de 1.5.16 ou de ce que les groupes de caractères $X^*(T)$ et $X^*(\Pi_{L/K}\mathfrak{Mult})$ sont des $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$-modules isomorphes.

Plus généralement, nous dirons qu'un tore T défini sur K est un *tore induit* s'il existe une base Ξ du groupe des caractères X(T) qui est stable par l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$. Alors X(T) se décompose en produit direct des sous-groupes engendrés par les différentes orbites de $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$ dans Ξ et T est isomorphe à un produit direct de tores de la forme $\Pi_{L/K}\mathfrak{Mult}$ pour des extensions séparables de degré fini de K. La réciproque est évidente.

1.6. Extensions admissibles et étales.

Toutes les valuations considérées dans la suite sont à valeurs réelles. Si L est un corps muni d'une valuation non impropre, on note $\mathcal{O}_L$ l'anneau de cette valuation, $\mathfrak{m}_L$ son idéal maximal et $\bar{L}$ son corps résiduel. Dans ce n° 1.6 on suppose K muni d'une valuation non impropre ω et on pose $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_K$.

Si L est une extension de K, et si ω_L est une valuation de L prolongeant ω, on note $f = f(\omega_L/\omega)$ le degré résiduel de ω_L, *i.e.* le degré de $\bar{L}$ sur $\bar{K}$, et $e = e(\omega_L/\omega)$ l'indice de ramification de ω_L, *i.e.* l'indice du sous-groupe $\omega(K^\times)$ dans $\omega_L(L^\times)$. On a toujours $ef \leqq [L : K]$. Si $e = 1$, on dit que ω_L (ou L) est *non ramifiée.*

1.6.1. Définition. — *Soit* L *une extension de* K. *On dit que* L *est* univalente *s'il existe une seule valuation* ω_L *de* L *prolongeant* ω. *On dit que* L *est* admissible *si elle est séparable de degré fini, univalente et si l'anneau* $\mathcal{O}_L$ *de* ω_L *est un* $\mathcal{O}$*-module libre de rang* $[L : K]$.

Supposons L séparable de degré n; les faits suivants sont des conséquences faciles de théorème bien connus (cf. [NB] AC VI, § 8, *passim*, notamment cor. 1 à la prop. 1, th. 2 et ses cor., exer. 6) :

a) L est univalente si et seulement si la fermeture intégrale de $\mathcal{O}$ dans L est un anneau local, égal alors à $\mathcal{O}_L$. Si K est *hensélien*, en particulier si K est *complet*, alors toute extension algébrique de K est univalente.

b) Supposons L univalente; alors L est admissible si et seulement si $\mathcal{O}_L$ est un $\mathcal{O}$-module libre (resp. de type fini). Si ω est *discrète*, toute extension séparable de degré fini univalente est admissible.

c) Si ω est discrète, L est univalente, donc admissible, si et seulement si $ef = n$; si L est galoisienne et ω_L invariante par Gal(L/K), alors L est admissible.

Si ω n'est pas discrète, alors L est admissible si et seulement si $f = n$, ce qui entraîne $e = 1$.

d) Supposons L admissible. Soit π une uniformisante de L si ω est discrète, et $\pi = 1$ si ω n'est pas discrète. Soient $(x_i)_{1 \leqq i \leqq f}$ des éléments de $\mathcal{O}_L$ tels que leurs images $\bar{x}_i$ forment une base de $\bar{L}$ sur $\bar{K}$. Alors les éléments $x_i\pi^j$ pour $1 \leqq i \leqq f$ et $0 \leqq j < e$ forment une base de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}$.

e) Soit $x \in L$ tel que $L = K(x)$; si le polynôme minimal de x sur K est à coefficients dans $\mathcal{O}$ et si son image dans $\bar{K}[X]$ reste irréductible, alors L est admissible non ramifiée : en effet $f \geqq n$ pour toute valuation ω_L prolongeant ω.

f) Si ω est *discrète* et K *hensélien*, toute extension séparable de degré fini de K est admissible.

1.6.2. Définition. — *Une extension* K′ *de degré fini de* K *est dite* étale *si elle est admissible, non ramifiée et si son corps résiduel* $\bar{K}'$ *est une extension séparable de* $\bar{K}$. *Une extension quelconque de* K *est dite étale si elle est réunion d'extensions de degré fini étales.*

Une extension étale est séparable, univalente, non ramifiée, de corps résiduel séparable sur $\bar{K}$. Si K′ est une extension étale galoisienne de K, alors $\bar{K}'$ est galoisienne et l'application évidente est un isomorphisme de Gal(K′/K) sur Gal($\bar{K}'/\bar{K}$). Par contre, $\bar{K}'$ peut être galoisienne sans que K′ le soit (voir cependant 1.6.7 *a)*).

1.6.3. — Soit L une extension de degré fini de K et soit L′ une sous-extension de L. Pour que L soit univalente (resp. univalente non ramifiée, resp. admissible, resp. étale), il faut et il suffit que L′ le soit et que L soit une extension univalente (resp. ...) de L′ (muni de l'unique valuation prolongeant ω).

1.6.4. Proposition. — *Une extension* K′ *de degré fini n de* K *est étale si et seulement s'il existe* $x \in K'$ *tel que* $K' = K(x)$, *que le polynôme minimal de x sur* K *soit à coefficients dans* $\mathcal{O}$ *et que l'image de ce polynôme dans* $\bar{K}[X]$ *soit irréductible et séparable.*

Que la condition soit suffisante résulte aussitôt de 1.6.1 *e)*. Réciproquement, si K′ est étale, on peut choisir $x \in \mathcal{O}_L$ dont l'image canonique $\bar{x}$ dans $\bar{K}'$ engendre $\bar{K}'$ sur $\bar{K}$. Soit P le polynôme minimal de x sur K : on a $\deg P \leqq n$, $P \in \mathcal{O}[X]$ puisque x est entier sur $\mathcal{O}$, $\bar{P}(\bar{x}) = 0$ d'où $\deg \bar{P} \geqq n$. Par suite $\deg P = n$, $K' = K(x)$ et P est séparable car $\bar{P}$ est le polynôme minimal de $\bar{x}$ sur $\bar{K}$ et est donc séparable.

1.6.5. Corollaire. — *Soit k′ une extension algébrique séparable de* $\bar{K}$. *Il existe une extension étale* K′ *de* K *dont l'extension résiduelle est isomorphe à k′.*

On se ramène aussitôt au cas où k' est de degré fini (1.6.3). Il suffit alors de prendre $K' = K[X]/(P)$, où P est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{O}$ dont l'image dans $\overline{K}[X]$ est le polynôme minimal d'un générateur de k' sur $\overline{K}'$.

1.6.6. Corollaire. — *Toute extension étale est contenue dans une extension étale maximale. Le corps résiduel d'une extension étale maximale est une clôture séparable de* $\overline{K}$.

1.6.7. — Supposons K *hensélien.* Alors toute extension algébrique de K est univalente et hensélienne.

a) Soit L une extension *étale* de K : on sait que l'application canonique du groupe des K-automorphismes de L dans le groupe des $\overline{K}$-automorphismes de $\overline{L}$ est bijective. En particulier, L est galoisienne si et seulement si $\overline{L}$ est galoisienne et l'on a alors $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(\overline{L}/\overline{K})$.

b) Soit L une extension admissible de K et soit $\overline{L}_0$ la fermeture séparable de $\overline{K}$ dans $\overline{L}$. Il existe une plus grande sous-extension *étale* $L_{ét}$ de L et son corps résiduel est $\overline{L}_0$: on l'obtient par exemple en considérant un générateur $\bar{x}$ de $\overline{L}_0$ sur $\overline{K}$, son polynôme minimal $\overline{P}$, et en choisissant un polynôme unitaire $P \in \mathcal{O}[X]$ d'image canonique $\overline{P}$ dans $\overline{K}[X]$. Puisque $\overline{P}$ est séparable, P a une racine x dans $\mathcal{O}_L$ d'image $\bar{x}$ et l'on a $L_{ét} = K(x)$.

Si L est galoisienne, alors $L_{ét}$ l'est aussi, $\overline{L}_0$ est galoisienne, $\overline{L}$ est quasi-galoisienne et l'application canonique de $\mathrm{Gal}(L/K)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{L}/\overline{K}) = \mathrm{Gal}(\overline{L}_0/\overline{K})$ est surjective.

1.6.8. Proposition. — *Soit* Ω *une extension algébriquement close de* K, *soit* L *une sous-extension* admissible *et soit* K′ *une sous-extension munie d'une valuation* ω' *prolongeant* ω, non ramifiée.

(i) *On suppose que* L *est galoisienne, que* $L \cap K'$ *est une extension galoisienne étale de* K *et que les corps résiduels* $\overline{L}$ *et* $\overline{K}'$ *sont des extensions linéairement disjointes de* $\overline{L \cap K'}$ (1). *Soit* $I = \mathrm{Gal}(L \cap K'/K)$ *et, pour tout* $i \in I$, *soit* $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(L/K)$ *un prolongement de i. Alors*

$$K' \otimes_K L = \prod_{i \in I} L'_i$$

où $L'_i = L' = K'(L)$ *et où la projection* $p_i : K' \otimes L \to L'_i$ *est donnée par* $p_i(x \otimes y) = x\sigma_i(y)$ *pour* $x \in K'$ *et* $y \in L$. *De plus,* L′ *est une extension admissible de* K′ *et* $p = (p_i)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{O}_{L'_i}.$$

(ii) *Supposons* $\overline{L}$ *et* $\overline{K}'$ *linéairement disjointes sur* $\overline{K}$. *Alors* L *et* K′ *sont linéairement disjointes sur* K, $L' = K' \otimes_K L$ *est une extension admissible de* K′, *on a* $\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L$ *et* $\omega(L') = \omega(L)$.

---

(1) Nous disons que deux extensions M et N d'un corps E *dont l'une au moins est de degré fini* sont linéairement disjointes sur E si $M \otimes_E N$ est un *corps*. Ceci équivaut à dire que $u(M)$ et $v(N)$ sont des sous-extensions linéairement disjointes de F (au sens classique) pour tout triple ou, ce qui revient au même, pour au moins un triple (F, u, v), où F est une extension de E et $u : M \to F$ et $v : N \to F$ des isomorphismes sur des sous-extensions de F (cf. [NB] A V, § 2, n° 5).

Démontrons (i). L'assertion relative à la décomposition de $K' \otimes L$ a déjà été vue (1.5.14), compte tenu de ce que L' est une extension galoisienne de K' et que

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(\Omega/L)\backslash\mathrm{Gal}(\Omega/K)/\mathrm{Gal}(\Omega/K') &= \mathrm{Gal}(\Omega/K)/(\mathrm{Gal}(\Omega/L).\mathrm{Gal}(\Omega/K')) \\ &= \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/L\cap K') = \mathrm{Gal}(L\cap K'/K) = I\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résultant de ce que l'image de $\mathrm{Gal}(\Omega/K')$ dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ est égale à $\mathrm{Gal}(L/L\cap K')$ (cf. [NB] A V, p. 68)). On a

$$\mathrm{Card}\ I = [L\cap K' : K]. \tag{1}$$

Choisissons une valuation ω'' de $L' = K'(L)$ prolongeant ω'. La restriction de ω'' à L est ω_L. Par suite, le corps résiduel de L' contient $\bar{L}$ et $\bar{K}'$ et l'hypothèse de disjonction linéaire entraîne

$$f(\omega''/\omega') \geqq [\bar{L} : \overline{L\cap K'}]. \tag{2}$$

Comme K' est non ramifiée, on a aussi

$$e(\omega''/\omega') \geqq e(\omega_L/\omega) = e(\omega_L/\omega_{L\cap K'}). \tag{3}$$

D'autre part, L est une extension admissible de $L\cap K'$, lui-même extension admissible de K (d'où $\omega' = \omega_L$ sur $L\cap K'$) (1.6.3), donc

$$[L : L\cap K'] = [\bar{L} : \overline{L\cap K'}]e(\omega_L/\omega). \tag{4}$$

Enfin, on a

$$[L' : K'] \geqq e(\omega''/\omega')f(\omega''/\omega'). \tag{5}$$

Utilisant toutes ces inégalités, on en déduit :

$$\begin{aligned}[K'\otimes L : K'] = \sum_{i\in I}[L'_i : K'] &\geqq (\mathrm{Card}\ I)e(\omega''/\omega')f(\omega''/\omega') \\ &\geqq [L\cap K' : K]e(\omega_L/\omega)[\bar{L} : \overline{L\cap K'}] \\ &\geqq [L\cap K' : K][L : L\cap K'] = [L : K] = [K'\otimes L : K'].\end{aligned} \tag{6}$$

Par suite, les inégalités (2), (3), (5), (6) sont des égalités, et il résulte alors de l'*égalité* (5) que L' *est une extension admissible*, compte tenu de ce que si ω n'est pas discrète, l'*égalité* (3) entraîne que $e(\omega''/\omega') = e(\omega_L/\omega) = 1$. De plus, l'*égalité* (2) montre que $[\bar{L}' : \bar{K}'] = [\bar{L} : \overline{L\cap K'}]$, d'où

$$\bar{L}' = \bar{K}' \otimes_{\overline{L\cap K'}} \bar{L}. \tag{7}$$

Enfin, soient $(x_j)_{j\in I}$ (resp. $(y_k)_{1\leqq k\leqq f'}$) des éléments de $\mathcal{O}_{L\cap K'}$ (resp. $\mathcal{O}_L$) dont les images forment une base de $\overline{L\cap K'}$ sur $\bar{K}$ (resp. de $\bar{L}$ sur $\overline{L\cap K'}$), notons π une uniformisante de L si ω est discrète et prenons $\pi = 1$ si ω n'est pas discrète. Les $x_j y_k \pi^\ell$ pour $j\in I$, $1\leqq k\leqq f'$ et $0\leqq \ell < e = e(\omega_L/\omega)$ forment une base de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$ et, vu (7), les $\sigma_i(y_k\pi^\ell)$ pour $1\leqq k\leqq f'$ et $0\leqq \ell < e$ forment, pour tout $i\in I$, une base

de $\mathcal{O}_{L'}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$ (cf. 1.6.1 *d)*). Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ dans $\prod \mathcal{O}_{L_i'}$; il existe des $u_{i,k,\ell} \in \mathcal{O}_{K'}$ uniques tels que

$$u_i = \sum_{k,\ell} u_{i,k,\ell}\, \sigma_i(y_k \pi^\ell) \quad \text{pour } i \in I.$$

Mais un élément v de $\mathcal{O}_{K'} \otimes \mathcal{O}_L$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{j,k,\ell} v_{j,k,\ell} x_j y_k \pi^\ell$ avec $v_{j,k,\ell} \in \mathcal{O}_{K'}$ et la relation $u = p(v)$ se traduit par le système d'équations

$$u_{i,k,\ell} = \sum_{j \in I} v_{j,k,\ell}\, \sigma_i(x_j) \tag{8}$$

pour $i \in I$, $1 \leqq k \leqq f'$ et $0 \leqq \ell < e$. Or, puisque $L \cap K'$ est galoisienne étale, on a $\det(\sigma_i(x_j)) \in \mathcal{O}_{L \cap K'}^\times \subset \mathcal{O}_{K'}^\times$ et le système (8) a, pour tout u donné, une solution et une seule, ce qui montre bien que $p : \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L \to \prod \mathcal{O}_{L_i'}$ est bijective.

La démonstration de (ii) est analogue en plus simple : soit E une extension composée de L et de K′ et soit ω'' une valuation de E prolongeant ω'. On a

$$f(\omega''/\omega') \geqq f(\omega_L/\omega), \tag{2 *bis*}$$

$$e(\omega''/\omega') \geqq e(\omega_L/\omega), \tag{3 *bis*}$$

d'où

$$[E : K'] \geqq e(\omega''/\omega')f(\omega''/\omega') \geqq e(\omega_L/\omega)f(\omega_L/\omega) \geqq [L : K) \geqq [E : K'], \tag{6 *bis*}$$

et ces inégalités sont toutes des égalités. La dernière égalité de (6 *bis*) donne la disjonction linéaire de L et de K′, la première égalité de (6 *bis*) montre que E est une extension admissible de K′, compte tenu de ce que, si ω n'est pas discrète, l'égalité (3 *bis*) donne $e(\omega''/\omega') = 1$. Enfin, la dernière assertion résulte aussitôt de 1.6.1 *d)*, compte tenu de l'égalité (2 *bis*).

Remarque. — Dans la démonstration de (i), l'hypothèse que L est galoisienne a servi uniquement à montrer que l'opération de restriction définit une bijection de $\mathrm{Gal}(\Omega/L)\backslash\mathrm{Gal}(\Omega/K)/\mathrm{Gal}(\Omega/K')$ sur $\mathrm{Gal}(L \cap K'/K)$. Elle peut être remplacée par toute autre condition entraînant cette conclusion, par exemple que K′ est galoisienne.

1.6.9. — Nous utilisons surtout 1.6.8 dans les cas suivants :

a) Le corps résiduel de K est *fini*. Soit L une extension admissible de K; posons $q = \mathrm{Card}\,\bar{K}$ et $q^f = \mathrm{Card}\,\bar{L}$. Il existe alors une extension étale K′ de K telle que $\bar{K}'$ soit *infini* et linéairement disjoint de $\bar{L}$ sur $\bar{K}$, ce qui permet d'appliquer 1.6.8 (ii). Il suffit d'utiliser 1.6.5 en prenant pour extension k' de $\bar{K}$ la réunion des corps des racines de l'unité d'ordre $q^{p^n} - 1$, où p est un nombre premier ne divisant pas f et où n décrit l'ensemble des entiers $\geqq 1$.

b) On prend pour K′ l'*hensélisé* ${}^hK$ de K (*i.e.* le corps des fractions de l'hensélisé ${}^h\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}$, muni de la valuation d'anneau ${}^h\mathcal{O}$; pour la notion d'hensélisation, voir [EGA] IV, § 18 ou [NB] AC VI, § 8, exer. 14, p. 193), ou le *complété* $\hat{K}$ de K : c'est une extension

non ramifiée de K (pour sa valuation canonique), de corps résiduel $\overline{K}$ et, pour toute extension admissible L de K, on a $L \cap K' = K$, puisque $L \cap K'$ est une extension admissible de K de degré résiduel et d'indice de ramification égaux à 1. Les conditions de 1.6.8 (ii) sont satisfaites.

c) Supposons K *hensélien* (on peut s'y ramener grâce à *b)*). Soit L une extension galoisienne admissible de K et $L_{ét}$ la sous-extension étale maximale (1.6.7 *b)*). Prenons pour K' un *hensélisé strict* ${}^{hs}K$ de K contenant $L_{ét}$, *i.e.* une extension étale maximale de $L_{ét}$, extension qui est unique à isomorphisme près. On a alors $K' \cap L = L_{ét}$, le corps résiduel de K' est une clôture séparable de $\overline{L}_{ét}$ et est donc linéairement disjoint de $\overline{L}$ sur $\overline{L \cap K'}$, puisque $\overline{L}$ est radiciel sur $\overline{L}_{ét}$. On peut donc appliquer 1.6.8 (i).

1.7. Schémas étoffés.

On garde les notations de 1.6. De plus, si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma, on note $\overline{\mathfrak{X}}$ sa fibre fermée $\mathfrak{X}_{\overline{K}}$.

1.7.1. Définition. — *Un $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{X}$ est dit* étoffé *s'il est plat et si, pour tout $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{Y}$, tout K-morphisme u de $\mathfrak{X}_K$ dans $\mathfrak{Y}_K$ tel que $u(\mathfrak{X}(\mathcal{O})) \subset \mathfrak{Y}(\mathcal{O})$ se prolonge en un $\mathcal{O}$-morphisme de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$.*

Rappelons que ce prolongement est alors unique puisque $\mathfrak{X}$ est plat (1.2.4) et qu'il existe si et seulement si $u^*(\mathcal{O}[Y]) \subset \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$. Par suite, $\mathfrak{X}$ est étoffé si et seulement si il satisfait à la condition suivante :

(ET) $$\mathcal{O}[\mathfrak{X}] = \{f \in K[\mathfrak{X}] \mid f(\mathfrak{X}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}\}.$$

1.7.2. — En pratique, les deux conditions suivantes seront réalisées :

(ET 1) *Pour tout $f \in K[\mathfrak{X}]$, $f \notin \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$, il existe $a \in \mathcal{O}$ tel que $af \in \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ et que $bf \notin \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ pour tout $b \in K$ avec $\omega(b) < \omega(a)$*
(autrement dit $\inf\{t \in \omega(K^\times) \mid af \in \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ pour $\omega(a) = t\} \in \omega(K^\times)$).

(ET 2) *L'image canonique de $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{X}(\overline{K})$ est dense dans $\overline{\mathfrak{X}}$* [1].

Montrons que *les conditions* (ET 1) *et* (ET 2) *entraînent* (ET). Soit $f \in K[\mathfrak{X}]$ telle que $f(\mathfrak{X}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}$ et supposons que $f \notin \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$. Pour $a \in \mathcal{O}$ comme dans (ET 1) on a $a \in \mathfrak{m}$, $af(\mathfrak{X}(\mathcal{O})) \subset \mathfrak{m}$ mais $af \notin \mathfrak{m}\mathcal{O}[\mathfrak{X}]$; par suite, l'image canonique de af dans $\overline{K}[\overline{\mathfrak{X}}]$ n'est pas nulle, mais s'annule sur l'image canonique de $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{X}(\overline{K})$, ce qui contredit (ET 2).

1.7.3. — *a)* (ET 1) est satisfaite dans chacun des cas suivants :

a_1) *ω est discrète*;

a_2) $\mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ est un $\mathcal{O}$-module libre;

---

[1] Au sens schématique : $\overline{\mathfrak{X}}$ est le plus petit sous-schéma fermé de $\overline{\mathfrak{X}}$ dont l'espace sous-jacent contient l'image de $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$; cela implique que $\overline{\mathfrak{X}}$ est réduit.

a_3) il existe un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines $\mathfrak{X}_i$ satisfaisant à (ET 1). En effet, si $f \in K[\mathfrak{X}]$, on a

$$\inf\{k \in \omega(K^\times) \mid af \in \mathcal{O}[\mathfrak{X}] \text{ pour } \omega(a) = k\}$$
$$= \inf_i \inf\{k \in \omega(K^\times) \mid af \in \mathcal{O}[\mathfrak{X}_i] \text{ pour } \omega(a) = k\}.$$

b) On sait que (ET 2) est satisfaite si $\mathfrak{X}$ est *lisse* et $\mathcal{O}$ *strictement hensélien* (*i.e.* hensélien à corps résiduel séparablement clos).

c) Par suite, *si* ω *est discrète et* K *strictement hensélien, tout* $\mathcal{O}$*-schéma lisse est étoffé.*

d) Si $\mathfrak{X}$ est réunion d'ouverts affines étoffés, alors $\mathfrak{X}$ est étoffé.

e) Supposons $\overline{K}$ *infini* et soit M un $\mathcal{O}$-module libre de type fini. *Tout ouvert* $\mathfrak{X}$ *du* $\mathcal{O}$*-schéma* $\mathfrak{M}$ *associé à* M *est un* $\mathcal{O}$*-schéma étoffé.* Vu *d)*, il suffit de montrer que tout ouvert spécial $\mathfrak{X}$ satisfait à (ET 1) et (ET 2). Or, on a $\mathcal{O}[\mathfrak{X}] = \mathcal{O}[X_1, \ldots, X_n][d^{-1}]$, où les X_i sont des indéterminées et où $d \in \mathcal{O}[X_1, \ldots, X_n]$. Si $d \in \mathfrak{m}[X_1, \ldots, X_n]$, on a $\mathcal{O}[\mathfrak{X}] = K[\mathfrak{X}]$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons $d \notin \mathfrak{m}[X_1, \ldots, X_n]$. L'image canonique $\bar{d}$ de d dans $\overline{K}[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas nulle et

$$\overline{K}[\overline{\mathfrak{X}}] = \overline{K}[X_1, \ldots, X_n][\bar{d}^{-1}].$$

Pour $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ et $k \in \mathbf{N}$, la relation $af/d^k \in \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ équivaut à

$$af \in \mathcal{O}[X_1, \ldots, X_n];$$

en effet, si $\tilde{\omega}$ est la valuation de $K(X_1, \ldots, X_n)$ prolongeant ω et telle que $\tilde{\omega}(X_i) = 0$ pour tout i (cf. [NB] AC VI, § 10, prop. 2, p. 161), on a $\tilde{\omega}(d) = 0$ et chacune des deux relations précédentes équivaut à $\tilde{\omega}(af) \geqq 0$. La condition (ET 1) en résulte aussitôt (même si $\overline{K}$ est fini, d'ailleurs).

D'autre part, $\overline{\mathfrak{X}}$ est l'ouvert spécial de $\overline{K}^n$ défini par $\bar{d}$. Comme $\overline{K}$ est infini, $\overline{\mathfrak{X}}(\overline{K})$ est dense dans $\overline{\mathfrak{X}}$; mais l'application canonique $\mathfrak{X}(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{X}}(\overline{K})$ est surjective, d'où (ET 2).

f) Soit X un K-schéma et soit P une partie de X(K), « bornée » en ce sens que, pour toute $f \in K[X]$, on a $\inf_{x \in P} \omega(f(x)) > -\infty$. Posons $\mathscr{A}^P = \{f \in K[X] \mid f(P) \subset \mathcal{O}\}$ et $\mathfrak{X}^P = \operatorname{Spec} \mathscr{A}^P$. Alors $P \subset \mathfrak{X}^P(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{X}^P$ est un $\mathcal{O}$-schéma étoffé de fibre générique X.

Réciproquement, si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma étoffé de fibre générique X, alors $P = \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ est bornée et on a $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^P$.

1.7.4. — Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{O}$-schéma plat satisfaisant à (ET 1) et soit $\mathfrak{U}$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ tel que $\overline{\mathfrak{U}}$ soit dense dans $\overline{\mathfrak{X}}$ (p. ex. un voisinage ouvert affine de la section unité lorsque $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes connexe). Alors

$$\mathcal{O}[\mathfrak{X}] = K[\mathfrak{X}] \cap \mathcal{O}[\mathfrak{U}].$$

Soit en effet $f \in K[\mathfrak{X}]$, $f \notin \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ et $f \in \mathcal{O}[\mathfrak{U}]$ (autrement dit, la restriction de f à $\mathfrak{U}_K$ se prolonge à $\mathfrak{U}$), et soit $a \in \mathcal{O}$ satisfaisant à (ET 1). Alors $\omega(a) > 0$, af est nulle sur $\overline{\mathfrak{U}}$ donc sur $\overline{\mathfrak{X}}$; par suite $af \in \mathfrak{m}\mathcal{O}[\mathfrak{X}]$, ce qui contredit la minimalité de $\omega(a)$.

1.7.5. — Soit K′ une extension de K, munie d'une valuation prolongeant ω, non ramifiée. Si $\mathfrak{X}'$ est un $\mathcal{O}'$-schéma plat satisfaisant à (ET 1) pour K′, alors $\mathfrak{X}'$ considéré comme $\mathcal{O}$-schéma satisfait aussi à (ET 1). Si de plus K′ est *étale* (1.6.2) et si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma plat satisfaisant à (ET 1), alors $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}'}$ satisfait à (ET 1) pour K′ : il suffit pour le voir de remarquer qu'il existe une famille (e_i) d'éléments de $\mathcal{O}'$ formant une base de $\mathcal{O}'$ sur $\mathcal{O}$ et de K′ sur K, et dont les images canoniques forment une base de $\overline{\mathrm{K}}'$ sur $\overline{\mathrm{K}}$.

1.7.6. Proposition. — *Soit* ${}^{\mathrm{hs}}\mathcal{O}$ *un hensélisé strict de* $\mathcal{O}$ *et soit* $\mathfrak{X}$ *un* $\mathcal{O}$*-schéma lisse satisfaisant à* (ET 1). *Alors*

$$\mathcal{O}[\mathfrak{X}] = \{f \in \mathrm{K}[\mathfrak{X}] \mid f(\mathfrak{X}({}^{\mathrm{hs}}\mathcal{O})) \subset {}^{\mathrm{hs}}\mathcal{O}\}.$$

Si $\mathfrak{Y}$ *est un* $\mathcal{O}$*-schéma et* u *un* K*-morphisme de* $\mathfrak{X}_{\mathrm{K}}$ *dans* $\mathfrak{Y}_{\mathrm{K}}$, *alors* u *se prolonge en un* $\mathcal{O}$*-morphisme de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\mathfrak{Y}$ *si et seulement si* $u(\mathfrak{X}({}^{\mathrm{hs}}\mathcal{O})) \subset \mathfrak{Y}({}^{\mathrm{hs}}\mathcal{O})$.

On raisonne comme en 1.7.2.

§ 2. DÉCOMPOSITION D'UN GROUPE LINÉAIRE

2.1. Décomposition du groupe linéaire général.

2.1.1. — Soient $(M_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ des A-modules projectifs de type fini et soit M la somme directe des M_i. On pose $\mathfrak{L}_{ij} = \mathfrak{L}(M_j, M_i)$ (pour $1 \leqq i, j \leqq n$) : c'est un A-schéma en groupes lisse, d'algèbre affine $\mathrm{Sym}({}^tM_i \otimes M_j)$. Le schéma en algèbres $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(M, M)$ s'identifie de manière évidente à $\prod_{i,j} \mathfrak{L}_{ij}$, le produit dans $\mathfrak{L}$ se traduisant par le produit « matriciel » $(g_{ij}).(h_{ij}) = (\sum_k g_{ik} h_{kj})$. Par cette identification, le schéma en groupes $\prod \mathfrak{GL}(M_i) \subset \prod \mathfrak{L}_{ii}$ s'identifie à un sous-schéma en groupes fermé $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{GL}(M)$ (« groupe des matrices diagonales »).

2.1.2. — Posons $\Theta = \{(i, j) \mid 1 \leqq i \neq j \leqq n\}$, $\Theta^+ = \{(i, j) \in \Theta \mid i < j\}$ et $\Theta^- = \{(i, j) \in \Theta \mid i > j\}$. Une partie Ψ de Θ est dite *close* si $(i, j) \in \Psi$ et $(j, k) \in \Psi$ impliquent $(i, k) \in \Psi$.

Il est immédiat que le morphisme $x \mapsto 1 + x$ est un automorphisme de schéma de $\mathfrak{L}$ et que sa restriction à $\mathfrak{L}_{ij}$ (pour $(i, j) \in \Theta$) est un isomorphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{L}_{ij}$ sur un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{GL}(M)$, que nous noterons $\mathfrak{V}_{ij}$.

2.1.3. Proposition. — *Soit Ψ une partie close de Θ^+ (resp. Θ^-).*

(i) *L'image de $\prod_{(i,j) \in \Psi} \mathfrak{L}_{ij}$ par l'automorphisme $x \mapsto 1 + x$ de $\mathfrak{L}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{GL}(M)$, que l'on notera $\mathfrak{V}_\Psi$.*

(ii) *Le morphisme produit de $\mathfrak{GL}(M)$ définit une immersion fermée de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{V}_\Psi$ sur un sous-schéma en groupes fermé (noté $\mathfrak{D}\mathfrak{V}_\Psi$) de $\mathfrak{GL}(M)$, produit semi-direct de $\mathfrak{D}$ par $\mathfrak{V}_\Psi$.*

(iii) *Soit $(i, j) \in \Theta^+$ (resp. Θ^-) tel que $(i, j) \notin \Psi$ et que $(j, k) \in \Psi$ implique $(i, k) \in \Psi$. Alors $\Psi' = \Psi \cup \{(i, j)\}$ est close et $\mathfrak{V}_{\Psi'}$ est produit semi-direct de $\mathfrak{V}_{ij}$ par $\mathfrak{V}_\Psi$.*

(iv) *Le morphisme produit $\prod_{(i,j) \in \Psi} \mathfrak{V}_{ij} \to \mathfrak{V}_\Psi$ est un isomorphisme de schémas quelque soit l'ordre mis sur Ψ.*

Démontrons (i) : il suffit de vérifier que pour toute A-algèbre R, $\mathfrak{V}_\Psi(R)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(R \otimes M)$, ce qui résulte d'un calcul matriciel immédiat. De même, soit $\mathfrak{X}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{GL}(M)$ intersection de $\mathfrak{GL}(M)$ avec le fermé $\prod_{(i,j) \in \Psi} \mathfrak{L}_{ij} \times \prod_i \mathfrak{L}_{ii}$ de $\mathfrak{L}$; un calcul matriciel simple montre que $\mathfrak{X}(R)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(R \otimes M)$ produit semi-direct de $\mathfrak{D}(R)$ par $\mathfrak{V}_\Psi(R)$, d'où (ii). Sous les hypothèses de (iii), on vérifie aussitôt que Ψ' est close et (iii) résulte là encore d'un calcul matriciel simple dans $\mathrm{GL}(R \otimes M)$.

Enfin, démontrons (iv) : il suffit de montrer que pour toute A-algèbre R, l'application produit $\prod \mathfrak{V}_{ij}(R) \to \mathfrak{V}_\Psi(R)$ est bijective quel que soit l'ordre des facteurs. Commençons par ordonner Ψ en numérotant ses éléments $a_1 = (i_1, j_1), \ldots, a_m = (i_m, j_m)$ de telle sorte que l'application $k \mapsto j_k - i_k$ (resp. $i_k - j_k$) soit croissante. Pour $0 \leqq r \leqq m$, posons $\Psi_r = \{a_{r+1}, \ldots, a_m\}$; on vérifie aussitôt que c'est une partie close. Posons alors $H_r = \mathfrak{V}_{a_r}(R)$ $(1 \leqq r \leqq m)$ et $K_r = \mathfrak{V}_{\Psi_r}(R)$ $(0 \leqq r \leqq m)$. Des calculs matriciels que nous laissons au lecteur montrent que

1) Le groupe des commutateurs (H_r, H_s) est contenu dans K_r pour $1 \leqq r, s \leqq m$;
2) $H_r \cap K_r = \{1\}$ pour $1 \leqq r \leqq m$;
3) $K_r = H_{r+1}.K_{r+1}$ pour $0 \leqq r \leqq m - 1$.

L'assertion (iv) résulte alors du lemme suivant :

2.1.4. Lemme. — *Soit K_0 un groupe et soient H_r et K_r des sous-groupes de K_0 (pour $1 \leqq r \leqq m$). On suppose que $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_m = \{1\}$ et que les conditions 1), 2) et 3) ci-dessus sont satisfaites. Alors, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, m\}$, l'application produit $H_{\sigma(1)} \times \ldots \times H_{\sigma(m)} \to K_0$ est bijective.*

Procédons par induction sur m, le lemme étant évident pour $m = 1$. Vu 3), on a $K_0 = H_1 \ldots H_m$ et il résulte alors de 1) que H_m est central. Soit p la projection canonique de K_0 sur $K_0' = K_0/H_m$. Posons $K_r' = p(K_r)$ et $H_r' = p(H_r)$ pour $1 \leqq r \leqq m - 1$. On constate aussitôt que toutes les conditions du lemme restent satisfaites avec m, K_r et H_r remplacés par $m - 1$, K_r' et H_r'. Soit alors $k \in K_0$. Vu l'hypothèse de récurrence et compte tenu de ce que, d'après 2) et 3), p est une bijection de H_r sur H_r', il existe, pour $1 \leqq j \leqq m$ et $\sigma(j) \neq m$, un unique élément $v_j \in H_{\sigma(j)}$ tel que $p(k) = p(w)$ avec $w = \prod_{\substack{1 \leqq j \leqq m \\ \sigma(j) \neq m}} v_j$. Posons alors $v_{\sigma^{-1}(m)} = kw^{-1}$: c'est l'unique élément de H_m tel que $k = v_{\sigma^{-1}(m)} w$. Mais comme H_m est central, on a aussi

$$k = \prod_{1 \leqq j \leqq m} v_j \quad \text{avec } v_j \in H_{\sigma(j)}.$$

Réciproquement, cette relation entraîne $p(k) = p(\prod_{\substack{1 \leqq j \leqq m \\ \sigma(j) \neq m}} v_j)$, d'où l'unicité des v_j.

2.1.5. Proposition. — *Posons $\mathfrak{V}^\pm = \mathfrak{V}_{\Theta^\pm}$. Il existe un élément d dans l'algèbre affine de $\mathfrak{GL}(M)$ tel que $d(1) = 1$ et que le morphisme produit définisse un isomorphisme de schémas de $\mathfrak{V}^- \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{V}^+$ sur l'ouvert $\mathfrak{GL}(M)_d$ formé des points de $\mathfrak{GL}(M)$ où d est inversible.*

Pour $1 \leqq r \leqq n$, posons $M^{(r)} = \sum_{1 \leqq i \leqq r} M_i$ et soit p_r la projection de M sur $M^{(r)}$ parallèlement à $\sum_{i > r} M_i$. Si R est une A-algèbre et si $g \in \mathrm{End}(R \otimes M)$, on note $g^{(r)}$ la restriction à $M^{(r)}$ de $(1 \otimes p_r) \circ g$: matriciellement, si $g = (g_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq n}$ avec $g_{ij} \in \mathfrak{L}_{ij}(R)$, on a $g^{(r)} = (g_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq r}$. Posons $d_r(g) = \det g^{(r)} \in R$. Faisant varier R,

on obtient ainsi un élément de l'algèbre affine de $\mathfrak{GL}(M)$ noté d_r et nous allons démontrer la proposition en prenant

$$d = \prod_{1 \leqq r \leqq n} d_r.$$

On a bien $d(1) = 1$. Il s'agit donc de montrer que, quelle que soit R, l'application produit est une bijection de $\mathfrak{B}^-(R) \times \mathfrak{D}(R) \times \mathfrak{B}^+(R)$ sur l'ensemble des $g \in \mathrm{End}(R \otimes M)$ tels que $d(g)$ soit inversible dans R. Autrement dit, il s'agit de montrer que, si l'on considère des matrices $g = (g_{ij})$, $u = (u_{ij})$, $z = (z_{ij})$ et $v = (v_{ij})$, avec $g_{ij}, u_{ij}, z_{ij}, v_{ij} \in \mathrm{Hom}(R \otimes M_j, R \otimes M_i)$, et si l'on considère les conditions

(1) $u_{ij} = 0$ *pour* $i < j$, $v_{ij} = 0$ *pour* $i > j$, $u_{ii} = v_{ii} = 1$,
$z_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$ *et* z_{ii} *est inversible*;

(2) $d_r(g)$ *est inversible.*

Alors les assertions suivantes sont vraies :

a) Si (1) *est satisfaite pour* $1 \leqq i, j \leqq n$ *et si* $g = uzv$, *alors* (2) *est satisfaite pour* $1 \leqq r \leqq n$.

b) Si (2) *est satisfaite pour* $1 \leqq r \leqq n$, *alors il existe un triple et un seul de matrices* (u, z, v) *satisfaisant à* (1) *pour* $1 \leqq i, j \leqq n$ *et tel que* $g = uzv$.

Si (1) est satisfaite pour $1 \leqq i, j \leqq n$, on voit aussitôt que, posant $g = uzv$, on a

(3) $$g^{(r)} = u^{(r)} z^{(r)} v^{(r)} \quad \text{pour } 1 \leqq r \leqq n,$$

d'où $d_r(g) = \det z^{(r)} = \prod_{1 \leqq i \leqq r} \det z_{ii}$, ce qui démontre *a)*.

Démontrons *b)* par récurrence sur n, les cas $n = 0$ ou 1 étant évidents. Si (2) est vraie, il existe par hypothèse de récurrence un triple unique de matrices $u' = (u'_{ij})$, $z' = (z'_{ij})$ et $v' = (v'_{ij})$ satisfaisant à (1) pour $1 \leqq i, j \leqq n - 1$ et telles que $g^{(n-1)} = u' z' v'$. Soient u'', z'', v'' les endomorphismes de $R \otimes M$ égaux respectivement à u', z', v' sur $R \otimes M^{(n-1)}$ et à l'identité sur $R \otimes M_n$. Quitte à remplacer g par $u''^{-1} g v''^{-1} z''^{-1}$, on voit qu'on peut, compte tenu de (3), supposer que $g^{(n-1)}$ est l'identité sur $R \otimes M^{(n-1)}$. Il existe alors $u \in \mathrm{Hom}(R \otimes M^{(n-1)}, R \otimes M_n)$, $v \in \mathrm{Hom}(R \otimes M_n, R \otimes M^{(n-1)})$ et $z \in \mathrm{Hom}(R \otimes M_n, R \otimes M_n)$ tels que

$$g = \begin{pmatrix} I & v \\ u & z \end{pmatrix}$$

et la relation

$$\begin{pmatrix} I & v \\ u & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & z - uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

entraîne l'existence et l'unicité des matrices cherchées, compte tenu de ce qu'elle implique $\det(z - uv) = \det g = d_n(g)$.

2.1.6. — Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K et soit S un tore défini et *déployé* sur K du groupe algébrique GL(V). Soit M un sous-A-module projectif de V (automatiquement de type fini) tel que l'application canonique de $K \otimes M$ dans V soit un isomorphisme. On suppose que le A-schéma en groupes canonique $\mathfrak{S}$ prolongeant S (1.2.11) *opère sur* M (cf. 1.4.6). On choisit un ordre total compatible avec l'addition sur le groupe des caractères $X^*(S)$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les poids de S dans V, rangés par ordre croissant, et soit V_i le sous-espace de V de poids α_i sous S. Alors M *est somme directe des* $M_i = M \cap V_i$ ([DG], p. 177) et l'on peut appliquer les résultats précédents. Notons que $V_i = KM_i$.

Comme les caractères $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ engendrent $X^*(S)$, ils engendrent avec leurs inverses l'algèbre affine de $\mathfrak{S}$ et l'opération de $\mathfrak{S}$ dans M est fidèle : elle permet d'identifier $\mathfrak{S}$ à un sous-schéma en groupes fermé lisse de $\mathfrak{GL}(M)$ (1.4.5).

On sait que Lie GL(V) s'identifie à $\operatorname{End} V \simeq \prod_{i,j} \operatorname{Hom}(V_j, V_i)$, la représentation adjointe étant donnée par $\operatorname{ad} g.x = gxg^{-1}$. Les racines de GL(V) suivant S sont donc les caractères $\alpha_i - \alpha_j$ pour $i \neq j$. Soit φ le système de rayons radiciels de GL(V) suivant S (1.1.2) (rappelons que c'est l'ensemble des demi-droites ouvertes de $X^*(S) \otimes \mathbf{R}$ qui contiennent une racine), et soit φ^+ (resp. φ^-) l'ensemble des rayons radiciels positifs (resp. négatifs) pour l'ordre choisi.

Pour $a \in \varphi$, l'ensemble Θ_a des couples (i,j) tels que $\alpha_j - \alpha_i \in a$ est évidemment clos et contenu soit dans Θ^+ soit dans Θ^-. On peut donc considérer le sous-A-schéma en groupes fermé $\mathfrak{V}_a = \mathfrak{V}_{\Theta_a}$ de $\mathfrak{GL}(M)$ (2.1.3). Plus généralement, pour toute partie close $\Psi \subset \varphi^{\pm}$, l'ensemble Θ_Ψ réunion des Θ_a pour $a \in \Psi$ est clos et contenu dans $\Theta^{\pm}$; on posera $\mathfrak{V}_\Psi = \mathfrak{V}_{\Theta_\Psi}$. On a vu (2.1.3) que l'application produit est un isomorphisme de schémas de $\prod_{a \in \Psi} \mathfrak{V}_a$ sur $\mathfrak{V}_\Psi$ quel que soit l'ordre des facteurs.

D'autre part, il est immédiat que le sous-groupe radiciel V_a de GL(V) associé à $a \in \varphi$ (1.1.3) est formé des « matrices » (g_{ij}) telles que $g_{ii} = 1$ pour $1 \leqq i \leqq n$ et $g_{ij} = 0$ si $\alpha_j - \alpha_i \notin a$. Il en résulte (vu 2.1.3) que pour tout $a \in \varphi$ et plus généralement pour toute partie close $\Psi \subset \varphi^{\pm}$, on a

$$V_a = (\mathfrak{V}_a)_K, \qquad V_\Psi = (\mathfrak{V}_\Psi)_K.$$

Enfin, le *centralisateur* de S dans GL(V) est le groupe des « matrices diagonales » $D = \{(g_{ij}) \in GL(V) \mid g_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j\}$.

D'une manière générale, si H est une partie fermée de GL(V), nous noterons $\mathfrak{H}$ son adhérence schématique dans $\mathfrak{GL}(M)$ (1.2.6) : c'est un sous-A-schéma fermé de $\mathfrak{GL}(M)$ (donc automatiquement de type fini) et sa fibre générique $\mathfrak{H}_K$ s'identifie à H. Si H est un sous-groupe fermé, défini sur K, et *si* $\mathfrak{H}$ *est plat*, alors $\mathfrak{H}$ est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{GL}(M)$ (1.2.7). Inversement, si $\mathfrak{H}'$ est un sous-schéma fermé *plat* (ou simplement sans torsion) de $\mathfrak{GL}(M)$ tel que $\mathfrak{H}'_K = H$, alors $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ (1.2.6). Les notations $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{V}_\Psi$, $\mathfrak{D}$ sont conformes à cette convention générale puisqu'elles désignent des sous-schémas plats de $\mathfrak{GL}(M)$ de fibre générique S, V_a, etc. respectivement.

2.2. Décomposition d'un groupe linéaire.

2.2.1. — On conserve les hypothèses et notations de 2.1.5 et l'on donne de plus un sous-groupe fermé connexe G de GL(V) défini sur K, contenant le tore déployé S. On note Φ le système de rayons radiciels de G suivant S (1.1.2), Φ^+ (resp. Φ^-) l'ensemble des rayons radiciels positifs (resp. négatifs) pour l'ordre choisi sur $X^*(S)$. D'une manière générale, on reprend les notations de 1.1, notamment Z, U_a, U_Ψ, etc.

2.2.2. — *Dans toute la suite du* § 2, *nous supposons que les adhérences schématiques* $\mathfrak{Z}$ *et* $\mathfrak{U}_a$ *de* Z *et des* U_a (*pour* $a \in \Phi$) *sont des sous-schémas* plats *de* $\mathfrak{GL}(M)$ *et sont donc des sous-schémas en groupes.* Notons qu'il revient au même de dire qu'il existe des A-schémas en groupes plats $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{U}_a$ (pour $a \in \Phi$) tels que $\mathfrak{Z}_K = Z$ et $(\mathfrak{U}_a)_K = U_a$ et tels que l'injection de Z (resp. U_a) se prolonge en une immersion fermée de $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{U}_a$) dans $\mathfrak{GL}(M)$. Cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque l'anneau A est *prüférien*, les adhérences schématiques étant sans torsion (1.2.6). Pour les différentes définitions équivalentes d'un anneau prüférien, voir ([NB] AC VII, § 2, exer. 12, p. 93); une de ces définitions est que pour tout idéal premier p de A, l'anneau local A_p est un anneau de valuation; une autre, que tout A-module sans torsion de type fini est projectif, condition qui entraîne immédiatement qu'un A-*module sans torsion est plat.* Tout anneau de valuation est prüférien. Un anneau est un anneau de Dedekind si et seulement si il est prüférien et noethérien.

Remarquons que $\mathfrak{S}$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Z}$ puisque $Z \supset S$.

2.2.3. Théorème. — (i) *Soit* $\Psi \subset \Phi^+$ *une partie close. L'adhérence schématique* $\mathfrak{U}_\Psi$ *de* U_Ψ *dans* $\mathfrak{GL}(M)$ *est un sous-schéma en groupes fermé plat de* $\mathfrak{GL}(M)$ *et le morphisme produit* $\prod_{a \in \Psi} \mathfrak{U}_a \to \mathfrak{U}_\Psi$ *est un isomorphisme de* A-*schémas quel que soit l'ordre mis sur* Ψ.

(ii) *Soit* Ψ *comme dans* (i); *l'adhérence schématique* $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$ *de* ZU_Ψ *dans* $\mathfrak{GL}(M)$ *est un sous-schéma en groupes fermé plat de* $\mathfrak{GL}(M)$, *produit semi-direct de* $\mathfrak{Z}$ *par* $\mathfrak{U}_\Psi$.

(iii) *Le morphisme produit définit un isomorphisme de* A-*schémas de* $\mathfrak{U}_{\Phi^-} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_{\Phi^+}$ *sur un ouvert* $\mathfrak{C}$ *de l'adhérence schématique* $\mathfrak{G}$ *de* G, *dense dans* $\mathfrak{G}$, *et il existe* $d \in A[\mathfrak{G}]$ *non nul tel que* $\mathfrak{C}$ *soit l'ouvert spécial* $\mathfrak{G}_d$. *De plus,* $\mathfrak{G}$ *est l'adhérence schématique de* $\mathfrak{C}$.

Comme Lie G est une sous-algèbre de Lie de Lie GL(V), les racines de G suivant S sont des racines de GL(V) suivant S et $\Phi \subset \varphi$, d'où $\Psi \subset \varphi^+$. Par suite $\prod_{a \in \Psi} \mathfrak{U}_a$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{V}^+ = \prod_{a \in \varphi^+} \mathfrak{V}_a$ (2.1.3 (i)), plat puisque les $\mathfrak{U}_a$ le sont. Mais $(\prod_{a \in \Psi} \mathfrak{U}_a)_K = \prod_{a \in \Psi} U_a = U_\Psi$ est un sous-groupe fermé, défini sur K, de G donc de GL(V), et (i) résulte de 1.2.6 et 1.2.7.

De même, le morphisme produit identifie $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_\Psi$ à un sous-schéma fermé plat $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$ de $\mathfrak{D}\mathfrak{V}^+$ et $(\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi)_K = ZU_\Psi$ est un sous-groupe fermé de GL(V), défini sur K, d'où (ii) compte tenu d'une part de 2.1.3 (ii), d'autre part de 1.2.6 et 1.2.7.

Enfin soit $d \in A[\mathfrak{GL}(M)]$ satisfaisant à 2.1.5. Posons $\mathfrak{U}^{\pm} = \mathfrak{U}_{\Phi^{\pm}}$. Vu (i), $\mathfrak{U}^{-} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}^{+}$ est un sous-schéma fermé plat de $\mathfrak{V}^{-} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{V}^{+}$, le morphisme produit définit un isomorphisme de schémas de $\mathfrak{U}^{-} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}^{+}$ sur un sous-schéma fermé plat $\mathfrak{C}$ de l'ouvert $\mathfrak{GL}(M)_d$ et $\mathfrak{C}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{GL}(M)$. Soit $\mathfrak{G}'$ l'adhérence schématique de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{GL}(M)$: nous allons montrer que $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$. En effet, comme $\mathfrak{C}$ est plat et que $\mathfrak{C}_K \subset G = \mathfrak{G}_K$, on a $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$ (1.2.5) (1), d'où $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$. Inversement, $\mathfrak{C}_K = U^{-} Z U^{+}$ est un ouvert dense de G (1.1.9), d'où $\mathfrak{G}'_K \supset G$ et $\mathfrak{G}' \supset \mathfrak{G}$. Par suite, $\mathfrak{C}$ est un sous-schéma *ouvert* de $\mathfrak{G}$, dense dans $\mathfrak{G}$ (1.2.6). On a donc $|\mathfrak{C}| = |\overline{\mathfrak{C}}| \cap \mathfrak{GL}(M)_d = |\mathfrak{G}| \cap \mathfrak{GL}(M)_d$ et $\mathfrak{C}$ est le sous-schéma ouvert $\mathfrak{G}_d$ de $\mathfrak{G}$, en notant encore d l'image canonique de d dans $A[\mathfrak{G}]$, qui n'est pas nulle puisque $d(1) = 1$. Ceci achève la démonstration.

2.2.4. Scholie. — *Supposons que* $\mathfrak{G}$ *soit* plat. *Alors* $\mathfrak{G}$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{GL}(M)$, *de type fini, de fibre générique* G, *contenant* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_a$ *comme sous-schémas en groupes fermés et possédant un voisinage ouvert* $\mathfrak{C}$ *de la section unité isomorphe par le morphisme produit à* $\prod_{a \in \Phi^{-}} \mathfrak{U}_a \times \mathfrak{Z} \times \prod_{a \in \Phi^{+}} \mathfrak{U}_a$.

Que $\mathfrak{G}$ soit un sous-schéma en groupes résulte de 1.2.7 et que $\mathfrak{G}$ soit de type fini est évident puisque $\mathfrak{GL}(M)$ l'est.

Notons que, puisque $\mathfrak{G}$ est sans torsion, il est automatiquement plat dès que l'anneau A est prüférien.

2.2.5. Corollaire. — *Supposons que* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_a$ *soient lisses et que* $\mathfrak{G}$ *soit* plat. *Alors*

(i) *les schémas* $\mathfrak{U}_\Psi$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$ (*pour* $\Psi \subset \Phi^{\pm}$ *close*) *et* $\mathfrak{G}$ *sont lisses*;

(ii) *la composante neutre* $\mathfrak{G}^0$ *du schéma en groupes* $\mathfrak{G}$ *est un sous-schéma en groupes ouvert lisse de* $\mathfrak{G}$;

(iii) *si* A *est un anneau de valuation de hauteur* 1 *ou un anneau de Dedekind, alors* $\mathfrak{G}^0$ *est affine.*

Il est clair que $\mathfrak{U}_\Psi$ et $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$ sont lisses. Par suite $\mathfrak{G}$ est lisse au voisinage de la section unité et ses fibres sont lisses ([DG], p. 238). De plus $\mathfrak{G}$ est plat de type fini, donc de présentation finie ([26], cor. 3.4.7), donc lisse. D'où (i) et (ii) ([SGAD], Exp. VI_B, th. 3.10).

Démontrons (iii). Compte tenu de ce que la fibre générique G de $\mathfrak{G}$ est connexe, le schéma $\mathfrak{G}^0$ s'obtient à partir de $\mathfrak{G}$ en lui retirant des parties ouvertes et fermées de fibres fermées de $\mathfrak{G}$, en nombre fini : c'est évident si A est un anneau de valuation de hauteur 1; si A est un anneau de Dedekind, donc noethérien, alors $\mathfrak{G}$ est de présentation finie, l'ensemble des $s \in \operatorname{Spec} A$ tels que la fibre $\mathfrak{G}_s$ soit connexe est un voisinage du point générique de Spec A ([EGA] IV, prop. 9.7.8), dont le complémentaire se compose d'un nombre fini de points fermés. L'assertion (iii) résulte donc du lemme suivant :

(1) La relation $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ entre sous-schémas d'un schéma $\mathfrak{Z}$ signifie que l'injection canonique $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ se factorise à travers $\mathfrak{Y}$. Plus loin, la notation $|\mathfrak{X}|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}$.

2.2.6. Lemme. — *Faisons l'une des deux hypothèses suivantes :*

a) A *est un anneau de valuation de hauteur* 1 ;

b) A *est un anneau de Dedekind.*

Soit $\mathfrak{X}$ *un* A*-schéma affine plat. Soit* s *un point fermé de* Spec A *et soit* Y *une partie ouverte et fermée de la fibre* $\mathfrak{X}_s = X$. *Le sous-schéma ouvert* $\mathfrak{X} - Y$ *est affine.*

Notons ω la valuation de A dans le cas *a)*, celle de A_s dans le cas *b)*, et soit k le corps résiduel de A_s. Posons $\mathscr{A} = A[\mathfrak{X}]$, et, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, notons v_x l'application canonique de $\mathscr{A}$ dans l'anneau local $\mathscr{A}_x$ et aussi son extension canonique $1 \otimes v_x : K \otimes \mathscr{A} \to K \otimes \mathscr{A}_x$ (rappelons que $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}_x$) est plat sur A et s'identifie à son image canonique dans $K \otimes \mathscr{A}$ (resp. $K \otimes \mathscr{A}_x$)). Comme $k[X] = k \otimes \mathscr{A}$ est le produit direct de $k[Y]$ et de $k[X - Y]$, il existe $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in X - Y$ et $f(y) = 1$ si $y \in Y$. En considérant un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines contenus soit dans l'ouvert $\mathfrak{X} - Y$, soit dans l'ouvert $\mathfrak{X} - (X - Y)$, on voit qu'il existe des ouverts affines $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ de $\mathfrak{X}$ tels que $X - Y = (\mathfrak{U}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{U}_n) \cap X$. Puisque $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{U}_j \cap X = (\mathfrak{U}_j)_s$, l'image canonique de f dans $A[\mathfrak{U}_j]$ appartient à $sA[\mathfrak{U}_j]$ et il existe $\alpha_j \in K$ tel que $\omega(\alpha_j) < 0$ et que $v_x(\alpha_j f) \in \mathscr{A}_x$ pour tout $x \in (\mathfrak{U}_j)_s$. Prenons $\alpha \in K$ tel que $\omega(\alpha) = \sup \omega(\alpha_j)$ et que $\alpha \in A_t$ pour tout $t \in \text{Spec A}$, $t \neq s$: l'existence d'un tel α est évidente dans le cas *a)* et résulte de [NB] AC VII, § 2, prop. 2 dans le cas *b)*. On a alors $\omega(\alpha) < 0$ et $v_x(\alpha f) \in \mathscr{A}_x$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $x \in \mathfrak{U}_j$.

Posons $\mathscr{B} = \mathscr{A}[\alpha f] \subset K \otimes \mathscr{A}$ et montrons que $\mathfrak{X} - Y = \text{Spec } \mathscr{B}$, ou plus précisément que le morphisme $i : \text{Spec } \mathscr{B} \to \mathfrak{X}$ défini par l'inclusion $i^* : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une immersion ouverte d'image $\mathfrak{X} - Y$. Comme $A_t \otimes \mathscr{A} = A_t \otimes \mathscr{B}$ pour tout $t \in \text{Spec A}$, $t \neq s$, il est clair que la restriction de i à l'ouvert image réciproque de Spec A $- \{s\}$ est un isomorphisme sur $\mathfrak{X} - X$. Reste à montrer que la restriction de i à $(\text{Spec } \mathscr{B})_s$ est un isomorphisme sur $X - Y$. Soit tout d'abord $x' \in (\text{Spec } \mathscr{B})_s$. Posons $x = i(x') = x' \cap \mathscr{A} \in X$. On a $\mathscr{A}_x \subset \mathscr{B}_{x'} \subset K \otimes \mathscr{A}_x$ et $x\mathscr{A}_x = x'\mathscr{B}_{x'} \cap \mathscr{A}$. Par suite x n'appartient pas à Y car $v_y(f) \notin y\mathscr{A}_y$ pour tout $y \in Y$ (puisque $f(y) = 1$), alors que $v_x(f) = \alpha^{-1} v_x(\alpha f) \in x'\mathscr{B}_{x'}$. On a donc montré que $i((\text{Spec } \mathscr{B})_s) \subset X - Y$.

Inversement, soit $x \in X - Y$. Il existe j tel que $x \in \mathfrak{U}_j$, d'où $v_x(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}_x$. Soit x' l'image réciproque de $x\mathscr{A}_x$ par l'homomorphisme $v_x : \mathscr{B} \to \mathscr{A}_x$. Alors $x' \in (\text{Spec } \mathscr{B})_s$, on a $x = x' \cap \mathscr{A} = i(x')$ et v_x se factorise par un isomorphisme de $\mathscr{B}_{x'}$ sur $\mathscr{A}_x$, ce qui prouve à la fois que le morphisme $i : (\text{Spec } \mathscr{B})_s \to X - Y$ est surjectif et est un isomorphisme, et achève donc la démonstration du lemme.

2.2.7. Remarque. — Il ne faudrait pas croire que $\mathfrak{G}$ est toujours plat, ni que c'est un schéma en groupes, même si l'on suppose que $\mathfrak{Z}$ et les $\mathfrak{U}_a$ sont lisses et que A est noethérien (pour un contre-exemple, voir plus loin 3.2.14).

Il n'est pas vrai non plus que la composante neutre $\mathfrak{G}^0$ est nécessairement affine, même si l'on suppose que $\mathfrak{Z}$, les $\mathfrak{U}_a$ et $\mathfrak{G}$ sont lisses et que l'anneau A est noethérien.

2.2.8. Corollaire. — *Gardons les hypothèses de* 2.2.5 *et supposons de plus que les* $\mathfrak{U}_a$ *sont connexes. Alors* $\mathfrak{C}^0 = \mathfrak{U}^- \mathfrak{Z}^0 \mathfrak{U}^+$ *est un sous-schéma ouvert de* $\mathfrak{G}^0$.

En effet, $\mathfrak{C}^0$ est contenu dans $\mathfrak{G}^0$, et est ouvert dans $\mathfrak{C}$, donc dans $\mathfrak{G}$.

2.2.9. Corollaire. — *Gardons les hypothèses de* 2.2.8 *et supposons de plus que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

a) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(A).\mathfrak{Z}^0$;

b) A *est un anneau de valuation de hauteur* 1 *ou un anneau de Dedekind.*

Alors l'image $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{Z}.\mathfrak{G}^0$ *de* $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{G}^0$ *par le morphisme produit est un sous-schéma en groupes ouvert lisse de* $\mathfrak{G}$, *contenant* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_a$ *comme sous-schémas en groupes fermés et* $\mathfrak{C}$ *comme sous-schéma ouvert. Si b) est satisfaite,* $\mathfrak{G}^1$ *est affine.*

La dernière assertion résulte des autres et du lemme 2.2.6. Si *a)* est satisfaite, on a $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{Z}(A).\mathfrak{G}^0$ et le corollaire est évident. Supposons *b)* satisfaite. Comme la fibre générique de $\mathfrak{Z}$ est connexe, on voit comme plus haut qu'il existe un nombre fini de points fermés $s_1, \ldots, s_k$ de Spec A tels que $\mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Z}_s^0$ pour $s \in \operatorname{Spec} A$ distinct des s_i, d'où

$$\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}^0 \cup \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} \mathfrak{Z}_{s_i}.\mathfrak{G}^0_{s_i},$$

et pour montrer que $\mathfrak{G}^1$ est un sous-schéma en groupes ouvert dans $\mathfrak{G}$ il suffit de remarquer que $\mathfrak{Z}_{s_i}.\mathfrak{G}^0_{s_i}$ est, pour $1 \leqq i \leqq k$, un $k(s_i)$-sous-groupe algébrique ouvert dans $\mathfrak{G}_{s_i}$. Les autres assertions du corollaire sont évidentes.

2.2.10. Proposition (1). — *On suppose que* A *est noethérien et que les* $\mathfrak{U}_a$ *pour* $a \in \Phi$ *sont lisses et connexes. Soit* $\mathfrak{H}$ *l'image de* $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ *dans* $\mathfrak{GL}(M)$ *par le morphisme produit* π *de* $\mathfrak{GL}(M)$. *Alors* $\mathfrak{H}$ *est ouvert dans* $\mathfrak{G}$ *et est un sous-schéma en groupes de* $\mathfrak{GL}(M)$, *de fibre générique* G, *plat, de présentation finie,* non nécessairement affine, *contenant* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_a$ *comme sous-schémas en groupes fermés et contenant* $\mathfrak{C}$ *comme ouvert.*

Comme $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ est plat et que $\pi(\mathfrak{C}_K \times \mathfrak{C}_K) \subset G = \mathfrak{G}_K$, on a $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ (1.2.5). L'image réciproque Γ de $\mathfrak{C}$ par $\pi : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{G}$ est donc un ouvert de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ et il est immédiat, puisque $\mathfrak{U}^- \mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}^+$ sont des groupes, que

$$\Gamma \supset ((\mathfrak{U}^- \times \mathfrak{Z} \times \{1\}) \times (\mathfrak{U}^- \times \mathfrak{Z} \times \{1\})) \cup ((\{1\} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}^+) \times (\{1\} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}^+)). \tag{1}$$

Soit $p \in \operatorname{Spec} A$ et soit k le corps résiduel de l'anneau local A_p. Comme en 1.2.2, on se permettra de jouer le double jeu et de considérer les fibres en p de A-schémas en groupes lisses comme des groupes algébriques définis sur k. En particulier la fibre $\mathfrak{GL}(M)_p$ s'identifie au groupe algébrique $\mathrm{GL}(k \otimes M)$.

(1) Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite de ce travail, sauf en 3.9.4.

La fibre Γ_p de Γ au-dessus de p est un ouvert de $\mathfrak{C}_p \times \mathfrak{C}_p$, *dense dans* $\mathfrak{C}_p \times \mathfrak{C}_p$: en effet, quels que soient $u, u' \in \mathfrak{U}_p^-$ et $z, z' \in \mathfrak{Z}_p$, l'ensemble V des $(v, v') \in \mathfrak{U}_p^+ \times \mathfrak{U}_p^+$ tels que $((u, z, v), (u', z', v')) \in \Gamma_p$ est un ouvert de $\mathfrak{U}_p^+ \times \mathfrak{U}_p^+$, non vide puisque $(1, 1) \in V$ d'après (1), donc dense dans $\mathfrak{U}_p^+ \times \mathfrak{U}_p^+$ puisque $\mathfrak{U}_p^+$ est connexe.

Soit H_p l'adhérence de $\mathfrak{C}_p$ dans $GL(k \otimes M)$. Comme $\mathfrak{C}_p$ est ouvert dans $\mathfrak{G}_p$, *a fortiori* $\mathfrak{C}_p$ est ouvert dans H_p. D'autre part Γ_p est dense dans $H_p \times H_p$ et $\pi(H_p \times H_p) \subset H_p$ puisque par définition $\pi(\Gamma_p) \subset \mathfrak{C}_p$. Autrement dit, H_p *est un sous-groupe fermé de* $GL(k \otimes M)$. Comme $\mathfrak{C}_p$ en est un ouvert dense, on a $H_p = \mathfrak{C}_p . \mathfrak{C}_p$ (cf. [2], prop. 1.3, p. 87), d'où

$$H_p = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{GL}(M)_p. \tag{2}$$

On a aussi $H_p = \mathfrak{C}_p^{-1}\mathfrak{C}_p = \mathfrak{U}_p^+ \mathfrak{Z}_p \mathfrak{U}_p^- \mathfrak{U}_p^- \mathfrak{Z}_p \mathfrak{U}_p^+ = \mathfrak{U}_p^+ \mathfrak{C}_p$ et il en résulte, puisque $\mathfrak{U}_p^+$ est défini sur k, que, si k_s est une clôture séparable de k, on a

$$H_p \textit{ est la réunion des } a.\mathfrak{C}_p \textit{ pour } a \in \mathfrak{U}_p^+(k_s). \tag{3}$$

Montrons maintenant que $\mathfrak{H}$ *est ouvert dans* $\mathfrak{G}$ *et est plat.* Pour cela, nous allons faire voir que, quitte à localiser et à changer de base, on peut recouvrir $\mathfrak{H}$ par des translatés de $\mathfrak{C}$ par des sections de $\mathfrak{C}$. Comme A est noethérien, $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{G}$ sont de présentation finie (c'est-à-dire des A-schémas algébriques au sens de [DG]) et il s'ensuit que $\mathfrak{H}$ est une partie *constructible* de $\mathfrak{G}$ ([DG], cor. 3.9, p. 78). Pour montrer que $\mathfrak{H}$ est un ouvert dans $\mathfrak{G}$, il suffit donc, toujours parce que A est noethérien, de montrer que si $x \in \mathfrak{H}$ et $y \in \mathfrak{G}$ sont tels que $x \in \overline{\{y\}}$, alors $y \in \mathfrak{H}$ ([DG], cor. 3.4, p. 76).

Soit p la projection de x dans Spec A. Comme l'anneau local A_p est plat sur A, les adhérences schématiques de G et de $\mathfrak{C} \times_A \operatorname{Spec} A_p$ dans $GL(A_p \otimes M)$ coïncident l'une et l'autre avec l'image réciproque de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{GL}(A_p \otimes M)$ ([DG], p. 56). Faisant le changement de base $A \to A_p$, on se ramène au cas où A est un *anneau local d'idéal maximal* p.

Soit alors $\mathcal{O}_x$ l'anneau local de x dans $\mathfrak{GL}(M)$ et soit $\tilde{A}$ l'henselisé strict de $\mathcal{O}_x$ (cf. [EGA] IV, § 18.8). Soit x' le point fermé de Spec $\tilde{A}$ et soit α le morphisme canonique Spec $\tilde{A} \to$ Spec $\mathcal{O}_x$: on a $\alpha(x') = x$. Le corps résiduel $\tilde{k}$ de $\tilde{A}$ est une extension séparablement close du corps résiduel k de A, donc contient une clôture séparable k_s de k. Vu (3), il existe $a \in \mathfrak{U}_p^+(k_s)$ tel que $x \in a\mathfrak{C}_p$; puisque $\mathfrak{U}^+$ est lisse, le « lemme de Hensel » entraîne l'existence d'une section $\hat{a} \in \mathfrak{U}^+(\tilde{A})$ de $\mathfrak{U}^+$ au-dessus de Spec $\tilde{A}$ telle que $\hat{a}(x') = a$.

Faisons alors le changement de base $A \to \tilde{A}$. Si $\mathfrak{X}$ (resp. X) est un A-schéma (resp. un K-schéma), posons $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} \tilde{A}$ (resp. $\tilde{X} = X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} \tilde{K}$ avec $\tilde{K} = K \otimes \tilde{A}$) et si $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de A-schémas, posons $\tilde{f} = f \times \mathrm{id} : \tilde{\mathfrak{X}} \to \tilde{\mathfrak{Y}}$. Enfin, soit $\beta : \mathfrak{GL}(M) \to \mathfrak{GL}(M)$ la première projection. Comme $\tilde{A}$ est plat sur $\mathcal{O}_x$ et que $\mathcal{O}_x$ est plat sur A (puisque $\mathfrak{GL}(M)$ est plat), $\tilde{A}$ est plat sur A et on voit comme plus haut que $\tilde{\mathfrak{G}}$ est l'adhérence schématique à la fois de $\tilde{\mathfrak{C}}$ et de $\tilde{G}$ dans

$\mathfrak{GL}(M)$. D'autre part, la translation à gauche par la section $\hat{a}$ est un automorphisme du schéma $\mathfrak{GL}(M)$ et la restriction $\hat{a}_K$ de $\hat{a}$ à Spec $\tilde{K}$ appartient à $\mathfrak{U}_K^+(\tilde{K}) \subset G(\tilde{K})$; on a donc $\hat{a}.\tilde{G} = \hat{a}_K.\tilde{G} = \tilde{G}$ et $\hat{a}.\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}$. Comme $\tilde{\mathfrak{C}}$ est ouvert dans $\tilde{\mathfrak{G}}$, il en résulte que $\hat{a}.\tilde{\mathfrak{C}}$ *est ouvert dans* $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Comme $\tilde{A}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_x$, le morphisme α est surjectif. On a $x \in \overline{\{y\}}$, donc $y \in$ Spec $\mathcal{O}_x$ et il existe $y' \in$ Spec $\tilde{A}$ tel que $\alpha(y') = y$; de plus, $x' \in \overline{\{y'\}}$ puisque le point fermé de Spec $\tilde{A}$ appartient à l'adhérence de n'importe quel point de Spec A. Posons $x'' = (\alpha \times \mathrm{id})(x') = (x, x')$ et $y'' = (\alpha \times \mathrm{id})(y') = (y, y')$; alors $x'' \in \hat{a}.\tilde{\mathfrak{C}}$, $y'' \in \tilde{\mathfrak{G}}$ et $x'' \in \overline{\{y''\}}$. Comme $\hat{a}.\tilde{\mathfrak{C}}$ est ouvert dans $\tilde{\mathfrak{G}}$, il en résulte que

$$y'' \in \hat{a}.\tilde{\mathfrak{C}} = \tilde{\pi} \circ (\hat{a} \times \mathrm{id})(\mathrm{Spec}\ \tilde{A} \times_{\tilde{A}} \tilde{\mathfrak{C}}) \subset \tilde{\pi}(\tilde{\mathfrak{C}} \times_{\tilde{A}} \tilde{\mathfrak{C}}).$$

On en déduit que

$$y = \beta(y'') \in \beta \circ \tilde{\pi}(\tilde{\mathfrak{C}} \times_{\tilde{A}} \tilde{\mathfrak{C}}) = \pi \circ (\beta \times \beta)(\tilde{\mathfrak{C}} \times_{\tilde{A}} \tilde{\mathfrak{C}}) \subset \pi(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{H},$$

donc que $\mathfrak{H}$ *est ouvert dans* $\mathfrak{G}$.

De plus, $\hat{a}.\tilde{\mathfrak{C}}$ est plat sur Spec $\tilde{A}$. Comme c'est un voisinage de x dans $\mathfrak{H}_{\tilde{A}}$, il en résulte que l'anneau local de x dans $\mathfrak{H}_{\tilde{A}}$ est plat sur $\tilde{A}$ et par descente fidèlement plate, que l'anneau local de x dans $\mathfrak{H}$ est plat sur A. Donc $\mathfrak{H}$ *est plat.*

Par suite, $\mathfrak{H}$, comme ouvert du sous-schéma $\mathfrak{G}$, est un sous-schéma de $\mathfrak{GL}(M)$, qui n'a aucune raison d'être affine. C'est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{GL}(M)$. En effet, la restriction à $\mathfrak{H}$ de l'application produit π de $\mathfrak{GL}(M)$ envoie $H_K \times H_K$ dans G, donc, puisque $\mathfrak{H}$ est plat, se factorise par un morphisme $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ (1.2.5). Mais on a ensemblistement $\pi(\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$ puisque les fibres de $\mathfrak{H}$ sont des sous-groupes (cf. (3)). Comme $\mathfrak{H}$ est ouvert dans $\mathfrak{G}$, il en résulte que $\pi : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ se factorise à travers $\mathfrak{H}$, et $\mathfrak{H}$ est bien un sous-schéma en groupe. Il est de présentation finie, puisque ouvert dans $\mathfrak{G}$ qui est de présentation finie et noethérien. Enfin, les autres assertions de la proposition sont évidentes.

2.2.11. Remarque. — Si aux hypothèses de 2.2.10 on ajoute celle que $\mathfrak{Z}$ est lisse, alors $\mathfrak{H}$ *est lisse*; si on ajoute celles de 2.2.9, on a $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^1$.

§ 3. DONNÉES RADICIELLES SCHÉMATIQUES

On suppose désormais que le groupe algébrique connexe G est *réductif*.

3.1. Données radicielles schématiques.

3.1.1. Définition. — *Une* donnée radicielle schématique *sur* G *relativement à* S *est la donnée de* A-*schémas en groupes* plats de type fini $\mathfrak{Z}$ *prolongeant* Z *et* $\mathfrak{U}_a$ *prolongeant* U_a (*pour* $a \in \Phi$), *satisfaisant aux conditions suivantes* :

(DRS 0) *l'injection de* S *dans* Z *se prolonge en un isomorphisme de* $\mathfrak{S}$ *sur un sous-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{Z}$;

(DRS 1) *soient* $a, b \in \Phi$, $b \neq -a$; *pour tout ordre grignotant* (*voir* 3.1.2) *sur* $\Phi \cap (a+b)$, *l'application commutateur* $\gamma_{a,b} : U_a \times U_b \to \prod_{c \in \Phi \cap (a+b)} U_c$ (1.1.8) *se prolonge en un morphisme de* $\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_b$ *dans* $\prod_{c \in \Phi \cap (a+b)} \mathfrak{U}_c$, *noté encore* $\gamma_{a,b}$;

(DRS 2) *soit* $a \in \Phi$; *l'application* $(z, u) \mapsto zuz^{-1}$ *de* $Z \times U_a$ *dans* U_a *se prolonge en un morphisme de* $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_a$ *dans* $\mathfrak{U}_a$;

(DRS 3) *soit* $a \in \Phi$; *il existe un voisinage ouvert* $\mathfrak{W}_a$ *de la section unité dans* $\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{-a}$ *et un morphisme* β_a *de* $\mathfrak{W}_a$ *dans* $\mathfrak{U}_{-a} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_a$ *tels que le composé de* $(\beta_a)_K$ *avec l'application produit de* $U_{-a} \times Z \times U_a$ *dans* G *coïncide avec la restriction à* $(\mathfrak{W}_a)_K$ *de l'application produit de* $U_a \times U_{-a}$ *dans* G (*autrement dit*, $(\mathfrak{W}_a)_K \subset W_a$ *et* $(\beta_a)_K$ *est la restriction de l'application notée* $\beta_a : W_a \to U_{-a} \times Z \times U_a$ *en* 1.1.10).

On dit qu'une donnée radicielle schématique $(\mathfrak{Z}, (\mathfrak{U}_a))$ en *domine* une autre $(\mathfrak{Z}', (\mathfrak{U}'_a))$ si les applications identiques se prolongent en des morphismes $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}'$ et $\mathfrak{U}_a \to \mathfrak{U}'_a$ $(a \in \Phi)$.

Dans toute la suite du § 3, *on note* $\mathscr{D} = (\mathfrak{Z}, (\mathfrak{U}_a)_{a \in \Phi})$ *une donnée radicielle schématique sur* G *relativement à* S.

3.1.2. — Rappelons que si ψ est une partie positivement close de Φ, un *ordre grignotant* sur ψ est un ordre total sur ψ tel que chaque élément de ψ soit extrémal dans l'ensemble des éléments de ψ plus grands que lui, c'est-à-dire soit une génératrice extrémale du cône convexe engendré par les éléments plus grands que lui (I, 1.3.15). Si a est extrémal dans ψ, alors $\psi - \{a\}$ est positivement close. Si $(a_1, \ldots, a_r)$ est un ordre grignotant sur ψ, alors $(a_i, \ldots, a_r)$ est positivement close pour tout i.

3.1.3. — Le but de ce paragraphe est de montrer que, moyennant un bon nombre d'hypothèses supplémentaires qui seront progressivement introduites, une donnée radicielle schématique permet de définir *un* A-*schéma en groupes* $\mathfrak{G}$ *prolongeant* G, *contenant* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_a$ *comme sous-schémas en groupes fermés et tel que, quel que soit le système de rayons radiciels positifs* Φ^+ *et quels que soient les ordres choisis sur* $\Phi^{\pm}$, *l'application produit soit un isomorphisme de schémas de* $(\prod_{a\in\Phi^-}\mathfrak{U}_a)\times\mathfrak{Z}\times(\prod_{a\in\Phi^+}\mathfrak{U}_a)$ *sur un ouvert dense de* $\mathfrak{G}$ (« grosse cellule »). Disons tout de suite que ce schéma en groupes, lorsqu'il existe, n'est généralement pas unique à isomorphisme près (cf. 3.2).

3.1.4. — Pour cela, nous chercherons à nous ramener à la situation du théorème 2.2.3. Appelons $\mathscr{D}$-*module* le couple formé d'un A-module M projectif de type fini et d'une représentation ρ de G dans $V = K\otimes M$ tel que $\mathfrak{Z}$ et les $\mathfrak{U}_a$ opèrent sur M par ρ. Disons que le $\mathscr{D}$-module (M, ρ) est *fidèle pour* $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{U}_a$) si de plus le morphisme correspondant de $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{U}_a$) dans $\mathfrak{GL}(M)$ est une immersion fermée, et que (M, ρ) est *fidèle* s'il est fidèle pour $\mathfrak{Z}$ et pour chacun des $\mathfrak{U}_a$ $(a\in\Phi)$.

Si (M, ρ) est un $\mathscr{D}$-module fidèle, alors ρ est un isomorphisme de G sur un sous-groupe défini sur K de GL(V). En effet, $\operatorname{Ker} d\rho$ est stable par S, donc est somme de ses intersections avec Lie Z et les Lie U_a. Or $d\rho$ est injective sur Lie Z et les Lie U_a, d'où $\operatorname{Ker} d\rho = \{0\}$. Par suite, ρ est séparable et $\operatorname{Ker}\rho$ est un sous-groupe fini de G, contenu dans le centre de G et *a fortiori* dans Z. Comme la restriction de ρ à Z est une immersion, on a $\operatorname{Ker}\rho = \{1\}$ et ρ est une immersion.

Par suite, si nous arrivons à construire un $\mathscr{D}$-module (M, ρ) fidèle, nous nous trouverons exactement dans les hypothèses du théorème 2.2.3 (après identification de G et de $\rho(G)$), et ce dernier fournira, au moins si A est prüférien, le A-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ cherché. Des choix différents de (M, ρ) peuvent d'ailleurs donner des schémas $\mathfrak{G}$ non isomorphes (3.2).

3.1.5. — Remarquons qu'inversement si on se place *a priori* dans la situation du théorème 2.2.3 (avec G réductif), alors les schémas $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{U}_a$ de ce théorème forment une donnée radicielle schématique : (DRS 0) est immédiate, (DRS 1) (resp. (DRS 2)) se déduit facilement de 1.1.8 et 2.2.3 (i) (resp. 1.1.7 et 2.2.3 (ii)) et (DRS 3) s'obtient à partir de 1.1.10 et 2.2.3 (iii) en prenant pour $\mathfrak{W}_a$ l'image réciproque de $\mathfrak{C}$ par l'application produit de $\mathfrak{U}_a\times\mathfrak{U}_{-a}$ dans $\mathfrak{G}$.

3.1.6. — En combinant 3.1.4 et 3.1.5, on voit que si (M, ρ) est un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{Z}$, si ρ est une immersion fermée permettant d'identifier G et $\rho(G)$ et si les adhérences schématiques $\mathfrak{U}'_a$ des U_a dans $\mathfrak{GL}(M)$ sont plates, alors $(\mathfrak{Z}, (\mathfrak{U}'_a))$ est une donnée radicielle schématique dominée par $\mathscr{D}$.

3.1.7. — Une autre méthode pour construire le schéma $\mathfrak{G}$ cherché est de construire une structure de « noyau de groupe » sur la « grosse cellule » $(\prod_{a\in\Phi^+}\mathfrak{U}_a)\times\mathfrak{Z}\times(\prod_{a\in\Phi^-}\mathfrak{U}_a)$

et d'utiliser le théorème d'Artin-Weil ([SGAD], Exp. XVIII) de plongement d'un tel noyau dans un schéma en groupes. Cette méthode permettrait peut-être d'obtenir le résultat sous des hypothèses plus larges (ce qui d'ailleurs ne nous intéresse que modérément), mais d'une part nécessite des contorsions techniques assez complexes, ne serait-ce que dans la définition même d'un « noyau de groupe », d'autre part repose sur un théorème dont les rédactions existantes ne nous ont pas entièrement convaincus que nous pouvions l'appliquer.

3.2. Un exemple : le cas déployé.

Jusqu'à la fin du n° 3.2, G est supposé *déployé* sur K et S est un tore déployé maximal de G, d'où $Z = S$. On note Φ le système de racines de G suivant S, W le groupe de Weyl de G et K_0 le corps premier de K. Quitte à remplacer G par un groupe K-isomorphe, on peut supposer, ce que nous ferons désormais, que G et S sont définis et déployés sur K_0.

Dans le cas qui nous intéresse vraiment en vue de la suite, celui d'un anneau A de valuation (et, plus généralement, pour un anneau prüférien), les résultats que nous allons établir seront retrouvés plus loin, par une autre méthode, pour un groupe quasi-déployé quelconque (n° 3.8). Nous pourrions donc, en principe, faire l'économie de ce paragraphe, mais il ne nous paraît pas superflu de traiter séparément le cas déployé en raison du caractère plus « élémentaire » de la méthode, et, accessoirement, du fait que certains résultats sont aisément prouvés pour des anneaux plus généraux. Toutefois, nous serons parfois assez brefs quant aux démonstrations et les calculs de routine seront laissés au lecteur.

3.2.1. — Chaque U_a ($a \in \Phi$) est muni d'une structure de *droite* sur K_0 (1.2.10) satisfaisant à la condition suivante (qui la caractérise) : pour toute extension L de K_0 et tout tore S' défini et déployé sur L maximal normalisant U_a, il existe une racine a' de G_L suivant S' et une seule telle que U_a soit le sous-groupe radiciel correspondant et, avec ces notations, on a $sus^{-1} = a'(s)\,u$ pour tout $u \in U_a(L)$ et tout $s \in S'(L)$.

Soit K_1 un sous-corps de K. Nous appelons K_1-*épinglage* de U_a un K_1-isomorphisme $\mathfrak{D}_{K_1} \to U_a$ (cf. 1.2.10). Pour tout K_1-épinglage x_a de U_a, il existe un K_1-épinglage x_{-a} et un seul de U_{-a}, dit *associé* à x_a, caractérisé par l'une quelconque des propriétés équivalentes suivantes :

(i) $m_a = x_a(1)\,x_{-a}(1)\,x_a(1)$ *appartient à* N;
(ii) $m_{-a} = x_{-a}(1)\,x_a(1)\,x_{-a}(1)$ *appartient à* N;
(iii) *il existe un* K_1*-homomorphisme* ζ_a *de* SL_2 *dans* G *tel que* $x_a(u) = \zeta_a\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $x_{-a}(u) = \zeta_a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$.

L'homomorphisme ζ_a est alors unique et l'on a

$$m_a = m_{-a} = \zeta_a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'image de m_a dans le groupe de Weyl W de G est la réflexion r_a définie par la racine a. Il est clair que x_a est le K_1-épinglage associé à x_{-a}.

On note $\tilde{a}$ le K_1-homomorphisme $t \mapsto \zeta_a\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{Mult}_{K_1}$ dans G. On sait que $\operatorname{Im}\tilde{a} \subset S$ et que, pour tout caractère χ de S, le composé $\chi \circ \tilde{a}$ est le caractère $t \mapsto t^{\langle a^\vee, \chi\rangle}$ de $\mathfrak{Mult}_{K_1}$, où $a^\vee$ est l'élément associé à a dans le système de racines $\Phi^\vee$ inverse de Φ (rappelons que $\Phi^\vee \subset \operatorname{Hom}(X^*(S), \mathbf{Z})$). En particulier, $\tilde{a}$ ne dépend pas du choix de l'épinglage x_a. Il est clair que $\tilde{a}$ se prolonge d'une manière et d'une seule en un A-homomorphisme noté encore $\tilde{a}$, de $\mathfrak{Mult}$ dans $\mathfrak{S}$.

3.2.2. — Un K_1-*épinglage de* G (relativement à S) est la donnée d'une base B de Φ et pour chaque $a \in B$, d'un K_1-épinglage x_a de U_a. Un K_1-*système de Chevalley* dans G (relativement à S), est une famille $(x_a)_{a\in\Phi}$ de K_1-épinglages des U_a possédant les deux propriétés suivantes :

(Ch 1) *pour tout* $a \in \Phi$, *les* K_1-*épinglages* x_a *et* x_{-a} *sont associés*;

(Ch 2) *pour* $a, b \in \Phi$, *de sorte que* $r_a(b) \in \Phi$, *il existe* $\varepsilon = \pm 1$ *tel que* $x_{r_a(b)}(u) = m_a x_b(\varepsilon u) m_a^{-1}$ *pour tout* $u \in \mathfrak{D}_{K_1}$.

On sait que pour tout K_1-épinglage de G, il existe un K_1-système de Chevalley le prolongeant, qui est déterminé « au signe près », c'est-à-dire au remplacement éventuel, pour certaines racines a, de x_a par $u \mapsto x_a(-u)$.

3.2.3. — Dans ce qui suit, nous prendrons $K_1 = K_0$ et supprimerons le préfixe K_0 devant « épinglage » ou « système de Chevalley ». On se donne désormais un système de Chevalley $(x_a)_{a\in\Phi}$. On sait qu'il existe des *entiers* $C_{a,b;i,j}$ pour $a, b \in \Phi$, $b \neq -a$, $i, j \in \mathbf{N}^*$, $ia + jb \in \Phi$ tels que le commutateur de $x_a(u)$ et de $x_b(v)$ soit donné par

$$(1) \qquad (x_a(u), x_b(v)) = \prod_{i,j\in\mathbf{N}^*,\ ia+jb\in\Phi} x_{ia+jb}(C_{a,b;i,j}\, u^i v^j)$$

(les racines $ia + jb$ étant rangées dans un ordre donné arbitraire). On pose $M_{a,b,i} = C_{a,b;i,1}$ et $M_{a,b,0} = 1$. Si $a - b \notin \Phi$, on a $M_{a,b,i} = \pm 1$.

3.2.4. — Considérons le groupe adjoint Ad G de G. On sait que $T = \mathrm{Ad}_G S$ est un tore maximal déployé de Ad G. Le système de racines de Ad G par rapport à T s'identifie à Φ. Le groupe $X^*(T)$ des caractères de T est le groupe Q engendré par Φ. La représentation adjointe définit un isomorphisme entre les sous-groupes radiciels associés à $a \in \Phi$ de G et Ad G et permet de les identifier; le système de Chevalley (x_a) « est » alors aussi un système de Chevalley pour Ad G.

Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Ad G et $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de T. On sait que $\mathfrak{h}$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(Q, K)$ et que Q s'identifie donc à un sous-groupe additif du dual ${}^t\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{T}$ le A-schéma en tores déployés prolongement canonique de T. La restriction à S de la représentation adjointe de G se prolonge en un morphisme surjectif de $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{T}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_A$ de $\mathfrak{T}$ s'identifie au sous-A-module libre $\mathrm{Hom}(Q, A)$ de $\mathfrak{h}$. Pour $a \in \Phi$, posons

(1) $$e_a = (\mathrm{Lie}\, x_a)(1) \in \mathrm{Lie}_{K_0} U_a \subset \mathrm{Lie}_K U_a,$$

(2) $$h_a = -[e_a, e_{-a}],$$

éléments que nous considérons comme appartenant tantôt à Lie G, tantôt à $\mathfrak{g}$. Pour $a, b \in \Phi$, on a

(3) $$[e_a, e_b] = \begin{cases} N_{a,b} e_{a+b} & \text{avec } N_{a,b} = M_{a,b,1} \in \mathbf{Z} \quad \text{si } a + b \in \Phi, \\ 0 \quad \text{si } a + b \notin \Phi \cup \{0\}. \end{cases}$$

Enfin, l'identification de $\mathfrak{h}$ avec $\mathrm{Hom}(Q, K)$ envoie h_a sur l'image canonique de $a^\vee$ et

(4) $$[h_a, e_b] = b(h_a)\, e_b = \langle a^\vee, b \rangle e_b \quad \text{pour } a, b \in \Phi.$$

3.2.5. — Les formules suivantes sont conséquences de 3.2.3 (1) et de 3.2.4 (2) et (4) :

(1) $$\mathrm{Ad}\, x_a(u).e_b = \Sigma M_{a,b,j} u^j e_{b+ja} \quad (a, b \in \Phi;\ b \neq -a),$$

la sommation étant étendue aux entiers $j \geqq 0$ tels que $b + ja \in \Phi$;

(2) $$\mathrm{Ad}\, x_a(u).e_{-a} = e_{-a} - u h_a + u^2 e_a;$$

(3) $$\mathrm{Ad}\, x_a(u).h = h - a(h)\, u e_a \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

3.2.6. — Donnons-nous pour chaque $a \in \Phi$ un *idéal fractionnaire inversible* $f(a)$ de A, c'est-à-dire un sous-A-module projectif de type fini de K. On a vu (1.4.1) que $f(a)$ définit un A-schéma en groupes $\mathfrak{Add}_{f(a)}$, lisse, de fibre générique Add_K. Par transport de structure grâce à x_a, on en déduit un A-schéma en groupes lisse $\mathfrak{U}_a$ prolongeant U_a.

3.2.7. Proposition. — *Avec les notations de* 3.2.6, *le système* $\mathscr{D} = (\mathfrak{S}, (\mathfrak{U}_a)_{a \in \Phi})$ *est une donnée radicielle schématique de* G *relativement à* S *si et seulement si les idéaux inversibles* $f(a)$ *satisfont aux deux relations suivantes* :

(1) $$f(b + ia) \supset M_{a,b,i} f(a)^i f(b) \quad (b, a, b + ia \in \Phi,\ b \neq -a,\ i \in \mathbf{N}^*);$$

(2) $$f(a) f(-a) \subset A \quad \textit{pour tout } a \in \Phi.$$

La condition (DRS 0) est tautologiquement satisfaite.

Vu 3.2.3 (1), (DRS 1) est remplie si et seulement si, pour tout $\lambda \in {}^t f(ia + jb)$, on a $\lambda C_{a,b;i,j} \in {}^t f(a)^i . {}^t f(b)^j$, c'est-à-dire si

(1′) $$f(ia + jb) \supset C_{a,b;i,j} f(a)^i f(b)^j$$

pour $a, b, ia + jb \in \Phi$, $b \neq -a$, $i, j \in \mathbf{N}^*$. En particulier (1) doit être satisfaite. Mais, réciproquement (1) entraîne (1′). En effet, l'examen des systèmes de racines de rang

deux montre que le seul cas de (1′) qui ne soit pas couvert par (1) est celui où a et b forment une base d'un facteur direct de type G_2 de Φ, les racines de la forme $ia + jb$ étant alors, après échange éventuel de a et b, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $2a + 3b$; si (1) est satisfaite, on a $f(a + 3b) \supset f(a)f(b)^3$ (car $M_{a,b,3} = \pm 1$), $f(2a + 3b) \supset f(a)f(a + 3b)$ (car $M_{a,a+3b,1} = \pm 1$), d'où $f(2a + 3b) \supset f(a)^2 f(b)^3$ et, finalement, (1′). Nous avons ainsi établi que (DRS 1) est équivalente à (1).

La condition (DRS 2) est toujours remplie : l'opération de S dans U_a se prolonge en l'opération composée du caractère $a : \mathfrak{S} \to \mathfrak{Mult}$ et de l'opération canonique de $\mathfrak{Mult}$ dans $\mathfrak{Add}_{f(a)}$.

Pour l'étude de (DRS 3), identifions U_a et U_{-a} à Add par x_a et x_{-a}, et notons u et v les coordonnées correspondantes. Un calcul simple et classique dans SL_2, transporté à G par ζ_a, montre que W_a est l'ouvert $(U_a \times U_{-a})_{(1-uv)}$ de $U_a \times U_{-a}$, et que l'application β_a du n° 1.1.10 est donnée par

$$\beta_a(u, v) = \left(\frac{v}{1 - uv},\ \tilde{a}(1 - uv),\ \frac{u}{1 - uv}\right). \tag{3}$$

Or, l'anneau local R de la section neutre (0, 0) de $\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{-a}$ est l'ensemble des fractions rationnelles $P(u, v)Q(u, v)^{-1}$ avec $Q(0, 0) \in A^\times$. Comme l'algèbre affine de $\mathfrak{U}_b$ est l'algèbre symétrique de ${}^t f(b)$, le coefficient de $u^n v^m$ dans le développement en série entière de tout élément de R appartient à ${}^t f(a)^n . {}^t f(-a)^m$. Pour que β_a se prolonge à un voisinage de (0, 0), il faut que pour tout $\varphi \in A[\mathfrak{U}_a]$, on ait $\varphi\left(\frac{u}{1 - uv}\right) \in R$. En particulier, on doit avoir $\lambda u(1 - uv)^{-1} \in R$ pour tout $\lambda \in {}^t f(a)$. Considérant le coefficient de $u^2 v$ dans le développement de $\lambda u(1 - uv)^{-1}$, on voit qu'il faut que ${}^t f(a) \subset {}^t f(a)^2 . {}^t f(-a)$, d'où (2). Inversement, supposons (2) satisfaite; alors $1 \in {}^t f(a) . {}^t f(-a)$, $1 - uv \in A[\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{-a}]$, et (DRS 3) est satisfaite en prenant pour $\mathfrak{W}_a$ le voisinage ouvert de la section neutre (0, 0) où $1 - uv$ est inversible et en définissant le morphisme β_a par (3).

3.2.8. — Les relations (1) et (2) de 3.2.7 sont satisfaites si l'on prend $f(a) = A$ pour tout a. La donnée radicielle schématique correspondante est appelée *donnée radicielle schématique de Chevalley* associée au système de Chevalley (x_a).

3.2.9. — Jusqu'à la fin du n° 3.2, nous supposons remplies les conditions (1) et (2) de 3.2.7. Ainsi, $\mathscr{D}$ est une donnée radicielle schématique et notre but est à présent de construire un $\mathscr{D}$-module fidèle. Pour $a \in \Phi$, Lie $\mathfrak{U}_a$ s'identifie au sous-A-module $f(a)e_a$ de $\mathfrak{g} = \text{Lie Ad G}$. Posons

$$L_f = \mathfrak{h}_A + \sum_{a \in \Phi} \text{Lie } \mathfrak{U}_a = \mathfrak{h}_A + \sum_{a \in \Phi} f(a)e_a \subset \mathfrak{g} \tag{1}$$

(cf. 3.2.4). C'est un sous-A-module projectif de type fini de $\mathfrak{g}$ et aussi, vu 3.2.4 (3) et le fait que $a(\mathfrak{h}_A) \subset A$, une sous-A-algèbre de Lie.

Proposition. — *Le module* L_f *esi* (*pour la représentation adjointe de* G *dans* $\mathfrak{g}$) *un* $\mathscr{D}$*-module fidèle pour les* $\mathfrak{U}_a$. *Il est fidèle pour* $\mathfrak{S}$ *si et seulement si le groupe* G *est adjoint.*

Il est clair que $\mathfrak{S}$ opère sur L_f et que cette représentation est fidèle si et seulement si $G = \mathrm{Ad}\, G$.

Montrer que $\mathfrak{U}_a$ opère sur L_f équivaut à faire voir que, pour $m \in L_f$ et $m' \in {}^tL_f$, le coefficient $c_{m',m}$ de la restriction à U_a de la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$ appartient à $A[\mathfrak{U}_a]$, c'est-à-dire, est un polynôme en u dont le coefficient de u^n appartient à ${}^tf(a)^n$ pour tout $n \geqq 0$. Par bilinéarité, il suffit de vérifier cela pour $m \in \mathfrak{h}_A \cup \bigcup f(b)e_b$ et $m' \in {}^t\mathfrak{h}_A \cup \bigcup {}^tf(b)e_{b'}$ où (e'_b) désigne la base duale de (e_a) dans l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans ${}^t\mathfrak{g}$. Les calculs sont faciles et sans surprise; nous les laissons au lecteur.

Comme $\mathfrak{h}_A = \mathrm{Hom}(Q, A)$ et que toute racine a fait partie d'une base du $\mathbf{Z}$-module Q, il existe $m \in \mathfrak{h}_A$ tel que $a(m) = -1$. Il résulte alors de 3.2.5 (3) que, pour $\mu \in {}^tf(a)$ et $m' = \mu e'_a$, on a $c_{m',m} = \mu u$, ce qui implique que les $c_{m',m}$ engendrent $A[\mathfrak{U}_a]$, donc que $\mathfrak{U}_a$ opère fidèlement sur L_f. La proposition est démontrée.

3.2.10. — Nous avons ainsi construit un $\mathscr{D}$-module fidèle dans le cas d'un groupe G *adjoint.* Passons au cas général et rappelons d'abord ([NB] Lie VIII, § 7, n° 3) qu'un poids dominant ω de G (on suppose choisi un système de racines positives Φ^+) est dit *minuscule* si $\langle \omega, a^\vee \rangle \in \{0, 1\}$ quelle que soit $a \in \Phi^+$. On sait *(loc. cit.)* que le groupe des caractères de S est engendré par les racines et un nombre fini de poids dominants minuscules.

Soit ω un poids dominant minuscule et soit ρ la K_0-représentation irréductible de G de poids dominant ω, dans un K_0-espace vectoriel V_0. Soient Π l'ensemble des poids de ρ et V_0^λ le sous-espace de V_0 correspondant au poids $\lambda \in \Pi$. On sait *(loc. cit.)* que $\dim V_0^\lambda = 1$, que les éléments de Π sont les transformés de ω par le groupe de Weyl de G et que $\rho(e_a)^2 = 0$ pour tout $a \in \Phi$, d'où

$$\rho(x_a(u)) = I + u\rho(e_a). \tag{1}$$

Posons $L'_f = \mathrm{Lie}\,\mathfrak{S} + \sum_{a \in \Phi} f(a)e_a \subset \mathrm{Lie}\, G$. C'est une sous-A-algèbre de Lie de Lie G.

Posons $V = K \otimes V_0$ et soient $v \in V_0^\omega - \{0\}$ et M_f le sous-L'_f-module de V engendré par v (l'algèbre de Lie L'_f opérant sur V par $d\rho$). Comme $\rho(e_a)v = 0$ si $a \in \Phi^+$, que $\rho(h)v = \omega(h)v$ si $h \in \mathrm{Lie}\,\mathfrak{S}$ et que $\rho(e_a)^2 = 0$, on a, par des calculs standard,

$$M_f = \sum_{I \subset \Phi^-} \Big(\prod_{a \in I} f(a)\Big)\Big(\prod_{a \in I} \rho(e_a)\Big)v, \tag{2}$$

les facteurs du second produit étant rangés dans un ordre compatible avec l'addition, choisi une fois pour toute dans Φ^-. On voit donc que M_f est un A-*module de type fini*, somme directe de ses intersections avec les $V^\lambda = K \otimes V_0^\lambda$.

Appliquant ce résultat en y remplaçant K par K_0 et A par $A_0 = \mathbf{Z}.1 \subset K_0$, et faisant $f(a) = A_0$ pour tout $a \in \Phi$, on voit (et c'est d'ailleurs bien connu) qu'il existe des $v_\lambda \in V_0^\lambda - \{0\}$ pour $\lambda \in \Pi$, tels que le sous-A-module libre engendré par les v_λ

soit stable par les $\rho(e_a)$ pour $a \in \Phi$. De plus, si $a \in \Phi$ et $\lambda, \lambda + a \in \Pi$, on a $\langle \lambda, a^\vee \rangle = -1$ et $\lambda - a \notin \Pi$, d'où

$$\rho(e_{-a})\rho(e_a)v_\lambda = \rho(h_a)v_\lambda = \langle \lambda, a^\vee \rangle v_\lambda = -v_\lambda,$$

et par conséquent,

$$\rho(e_a)v_\lambda = \varepsilon v_{\lambda+a}, \tag{3}$$

où ε est un élément *inversible* de A_0 (on peut en fait choisir les v_λ de telle sorte que $\varepsilon = \pm 1$.)

Pour $\lambda \in \Pi$, soit $g(\lambda)$ l'image réciproque de M_f dans K par l'application $t \mapsto tv_\lambda$. Vu (2), c'est un idéal fractionnaire de *type fini* de A et la stabilité de M_f par les $\rho(f(a)e_a)$, jointe à (3), montre que

$$g(\lambda + a) \supset f(a)g(\lambda) \quad \text{pour } a \in \Phi \text{ et } \lambda, \lambda + a \in \Pi. \tag{4}$$

En général, les idéaux $g(\lambda)$ n'ont pas de raison d'être inversibles, et, par suite, M_f n'est pas nécessairement projectif. Nous disons que la famille $f = (f(a))$ est *bonne pour* ω s'il existe une famille $(\hat{g}(\lambda))_{\lambda \in \Pi}$ d'idéaux fractionnaires *inversibles* de A tels que

$$\hat{g}(\lambda + a) \supset f(a)\hat{g}(\lambda) \quad \text{pour } a \in \Phi \text{ et } \lambda, \lambda + a \in \Pi. \tag{$\hat{4}$}$$

Alors, $M_\omega = \sum_{\lambda \in \Pi} \hat{g}(\lambda)v_\lambda$ est un A-module projectif de type fini, stable par les $\rho(f(a)e_a)$, et il résulte immédiatement de (1) que M_ω *est un* $\mathfrak{D}$*-module.*

3.2.11. — Donnons quelques conditions *suffisantes* pour que la famille f soit bonne pour ω. Une condition évidente est que $g(\lambda)$ soit inversible pour tout λ. Ou que $f(a) \subset A$ pour tout a (prendre $\hat{g}(\lambda) = A$ pour tout λ). Ou encore, que tout élément de Π soit de la forme $\omega - a$ avec $a \in \Phi$ (prendre $\hat{g}(\omega) = A$ et $\hat{g}(\lambda) = f(\lambda - \omega)$ pour $\lambda \neq \omega$), condition satisfaite, par exemple, pour les représentations « standard » de SL_n et Sp_{2n}.

Plus intéressant est le cas où l'anneau A possède la propriété

(FI) *Tout idéal fractionnaire de type fini* $\mathfrak{a}$ *de* A *est contenu dans un plus petit idéal inversible* $\hat{\mathfrak{a}}$.

Il suffit alors, en effet, de prendre $\hat{g}(\lambda) = \widehat{g(\lambda)}$. Notons que la condition (FI) est satisfaite si A est prüférien (tout idéal de type fini est alors inversible), ou si tout idéal divisoriel de A est inversible (comme tout idéal inversible est divisoriel, $\hat{\mathfrak{a}}$ est alors le plus petit idéal divisoriel contenant $\mathfrak{a}$, lequel existe toujours), notamment si A est *factoriel* ou est un anneau noethérien intégralement clos tel que l'anneau $A_\mathfrak{m}$ soit factoriel pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A ([NB] AC VII, § 3, prop. 1, p. 34), cas d'un anneau *régulier* par exemple.

3.2.12. — Supposons maintenant que la famille f soit bonne pour un ensemble de poids dominants minuscules $\omega_1, \ldots, \omega_n$ engendrant avec les racines le groupe des caractères de S. Faisant alors la somme directe M de L_f (3.2.9) et de modules M_{ω_i} construits comme en 3.2.10 pour $1 \leqq i \leqq n$, *on obtient un* $\mathfrak{D}$*-module fidèle* : il est fidèle pour les $\mathfrak{U}_a$ puisque L_f l'est (3.2.9), et il est fidèle pour $\mathfrak{S}$ parce que les poids de $\mathfrak{S}$ dans M engendrent le groupe des caractères de $\mathfrak{S}$.

3.2.13. — Si A est un anneau de Dedekind ou, plus généralement, un anneau prüférien, les résultats précédents combinés avec la scholie 2.2.4 fournissent des A-schémas en groupes lisses. Si l'on prend $f(a) = A$ pour tout $a \in \Phi$, on retrouve les « schémas de Chevalley » de C. Chevalley [16] et M. Demazure [17]. Remarquons que notre construction est plus élémentaire que celles de [16] et [17] en cela qu'elle ne fait pas intervenir les puissances réduites des e_a.

Nous terminons ce numéro par deux « contre-exemples ».

3.2.14. — *Non-unicité de* $\mathfrak{G}$.

Prenons pour A un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π et de corps résiduel k, soient G le groupe SL_2, S le tore $\{\mathrm{diag}(t, t^{-1})\}$ et a la racine $(t, t^{-1}) \mapsto t^2$. Choisissons comme système de Chevalley celui pour lequel ζ_a est l'application identique et prenons $f(a) = f(-a) = \pi A$.

Nous allons construire deux $\mathscr{D}$-modules fidèles conduisant par application du théorème 2.2.3 à deux A-schémas en groupes lisses satisfaisant tous les deux aux conditions de 3.1.3, mais *non isomorphes*.

1re solution. — Prenons $V = K^2 \times \mathfrak{g}$, $\rho = \mathrm{Id} \times \mathrm{Ad}$ et $M = A^2 \times L_f$. On vérifie immédiatement grâce à 3.2.9 et 3.2.12 que M est un $\mathscr{D}$-module fidèle. Rapportant A^2 à sa base canonique et L_f à la base $(\pi e_{-a}, h, \pi e_a)$ où h est l'élément de $\mathfrak{h}_A$ tel que $a(h) = 1$, on voit que

$$\rho\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & -\pi^{-1}zt & z^2 \\ -2\pi yt & xt+yz & -2\pi xz \\ y^2 & -\pi^{-1}xy & x^2 \end{pmatrix}\right). \tag{1}$$

Il en résulte que l'algèbre affine $A[\mathfrak{G}]$ de l'adhérence schématique $\mathfrak{G}$ de $\rho(G)$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ s'identifie à la sous-A-algèbre de $K[G] = K[x, y, z, t]/(xt - yz - 1)$ engendrée par $x, y, z, t, \pi^{-1}zt$ et $\pi^{-1}xy$ et est isomorphe à

$$A[X, Y, Z, T, U, V]/(XT - YZ - 1, XY - \pi U, ZT - \pi V).$$

On en tire que $\mathfrak{G}$ est un A-schéma en groupes *lisse*. Sa fibre fermée $\mathfrak{G}_k$ a pour algèbre affine $k[X, Y, Z, T, U, V]/(XT - YZ - 1, XY, ZT)$ et n'est pas connexe; sa composante neutre $\mathfrak{G}_k^0$ est définie dans $\mathfrak{G}_k$ par les équations $Y = Z = 0$ et « est » le sous-groupe de $GL(k \otimes M)$ formé des matrices de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{-2} & -v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -u & x^2 \end{pmatrix}\right). \tag{2}$$

C'est un groupe résoluble, extension de $\mathfrak{Mult}$ par $(\mathfrak{Add})^2$. Mais $\mathfrak{G}_k$ a une autre composante connexe, définie par les équations $X = T = 0$, et l'élément $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

du groupe de Weyl de G « est » une section de $\mathfrak{G}$ (ou si l'on préfère un élément de $\mathfrak{G}(A)$), mais n'est pas une section de la composante neutre $\mathfrak{G}^0$. Le schéma $\mathfrak{G}$ est réunion de $\mathfrak{G}^0$ et de $w\mathfrak{G}^0$.

2e solution. — Prenons $V = K^2 \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $\rho = \mathrm{id} \times \mathrm{Ad} \times \mathrm{Ad}$ et prenons pour M le A-module engendré par la base canonique de K^2, la base $(\pi e_{-a}, h, e_a)$ du premier exemplaire de $\mathfrak{g}$ et la base $(e_{-a}, h, \pi e_a)$ du second exemplaire de $\mathfrak{g}$. On trouve

$$\rho\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & -\pi^{-1}zt & \pi^{-1}z^2 \\ -2\pi yt & xt+yz & -2xz \\ \pi y^2 & -xy & x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & -zt & \pi z^2 \\ -2yt & xt+yz & -2\pi xz \\ \pi^{-1}y^2 & -\pi^{-1}xy & x^2 \end{pmatrix}\right)$$

et l'on vérifie sans peine que M est un $\mathscr{D}$-module fidèle et que l'algèbre affine de l'adhérence schématique $\mathfrak{G}'$ de $\rho(G)$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ est engendrée par x, y, z, t, $\pi^{-1}y$ et $\pi^{-1}z$ (compte tenu de ce que p. ex. $\pi^{-1}z = \pi^{-1}z^2x - \pi^{-1}zty$) et est isomorphe à $A[X, T, U, V]/(XT - \pi^2UV - 1)$. Sa fibre fermée est *connexe* et l'on voit facilement que l'application identique de G se prolonge en un isomorphisme de $\mathfrak{G}'$ sur la composante neutre $\mathfrak{G}^0$ du schéma $\mathfrak{G}$ de la première solution.

3.2.15. — *Un exemple où $\mathfrak{G}$ n'est pas plat et n'est pas un schéma en groupes.*

Prenons pour A l'anneau (non prüférien) des polynômes $k[\xi, \eta]$ à deux indéterminées sur un corps algébriquement clos k et prenons G, S, a et le système de Chevalley comme en 3.2.14. Prenons $f(a) = \xi A$, $f(-a) = \eta A$, $V = K^2 \times \mathfrak{g}$, $\rho = \mathrm{id} \times \mathrm{Ad}$ et choisissons pour M le A-module libre engendré par la base canonique de K^2 et les éléments ηe_{-a}, h et ξe_a de $\mathfrak{g}$. On voit comme plus haut que c'est un $\mathscr{D}$-module fidèle et que

$$\rho\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & -\eta^{-1}zt & \xi\eta^{-1}z^2 \\ -2\eta yt & xt+yz & -2\xi xz \\ \eta\xi^{-1}y^2 & -\xi^{-1}xy & x^2 \end{pmatrix}\right). \tag{1}$$

Notons $(x_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq 3}$ les coordonnées sur End $\mathfrak{g}$ associées à la base choisie; on voit que $\rho(G)$ est défini dans K^{13} par les équations

$$x_{11} = t^2, \quad x_{21} = -2\eta yt, \quad x_{22} = xt + yz, \quad x_{23} = -2\xi xz, \quad x_{33} = x^2, \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned} &xt - yz - 1 = 0, \quad \eta x_{12} + zt = 0, \quad \eta x_{13} - \xi z^2 = 0, \\ &\xi x_{31} - \eta y^2 = 0, \quad \xi x_{32} + xy = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

qui engendrent l'idéal de $\rho(G)$ dans $K[x, y, z, t, (x_{ij})]$. Les équations (2) permettent de se débarrasser des cinq coordonnées x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23} et x_{33} et de considérer $\rho(G)$ comme une sous-variété irréductible de dimension 3 de K^8, dont l'idéal I est engendré par les premiers membres des équations (3). Mais ceux-ci n'engen-

drent pas l'idéal $I_A = I \cap A[x, y, z, t, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{32}]$: on peut montrer que I_A est engendré par les premiers membres de (3) et ceux de

$$tx_{13} + \xi z x_{12} = 0, \quad x x_{31} + \eta y x_{32} = 0, \quad x_{13} x_{31} - y^2 z^2 = 0. \tag{4}$$

Considérons alors l'adhérence schématique $\mathfrak{G}$ de $\rho(G)$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ et sa fibre $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_{(\alpha,\beta)}$ au-dessus d'un point fermé $p = (\alpha, \beta)$ de Spec A. Si $\alpha, \beta \in k^\times$, on a $\mathfrak{G}_p \simeq \mathrm{SL}_2$. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, on voit aisément que $\mathfrak{G}_p$ « est » le groupe des matrices de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{-2} & \beta^{-1} z x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & x^2 \end{pmatrix} \right) \tag{5}$$

et est isomorphe au produit semi-direct du groupe triangulaire $\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x^{-1} \end{pmatrix} \right\}$ par $\mathfrak{Add}$. Enfin, si $\alpha = \beta = 0$, alors $\mathfrak{G}_{(0,0)}$ possède deux composantes connexes, définies respectivement par les équations

$$y = z = 0, \quad xt = 1, \quad x_{13} = x_{31} = 0 \tag{6}$$

et

$$x = t = 0, \quad yz = -1, \quad x_{13} x_{31} = 1. \tag{7}$$

La première composante connexe, définie par (6), est le groupe de dimension 3 déjà rencontré en 3.2.14 (2). Mais la deuxième est la variété $\mathfrak{G}^1_{(0,0)}$ *de dimension* 4 des matrices de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & y \\ -y^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & -1 & 0 \\ v^{-1} & w & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{8}$$

Ces deux composantes connexes étant de dimensions différentes, la fibre $\mathfrak{G}_{(0,0)}$ ne peut être un groupe et le schéma $\mathfrak{G}$ n'est pas plat (d'ailleurs $\dim \mathfrak{G}_{(0,0)} > \dim G$). Par contre, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}^1_{(0,0)}$ est ouvert dans $\mathfrak{G}$ et est un schéma en groupes, comme le dit 2.2.10, mais n'est probablement pas affine.

Remarquons que pour montrer que la variété (8) de dimension 4 est contenue dans $\mathfrak{G}_{(0,0)}$, donc que $\mathfrak{G}$ n'est pas plat, il n'est pas nécessaire de déterminer complètement l'idéal I_A (ce que nous avons en fait laissé au lecteur). Il suffit, en termes heuristiques, de considérer le point $\rho\left(\begin{pmatrix} \xi x' & y \\ z & \eta t' \end{pmatrix} \right)$ avec $\xi\eta x' t' - yz = 1$, de « faire tendre ξ et η vers 0 » en conservant à $\zeta = \xi\eta^{-1}$ une valeur fixe non nulle et de poser enfin $u = -zt'$, $v = \zeta z^2$ et $w = -x'y$.

3.3. Construction de $\mathfrak{U}_\Psi$ et de $\mathfrak{BU}_\Psi$.

3.3.1. Lemme. — *Soient* Y *un* K*-schéma en groupes,* X_i *(pour* $i = 1, 2$*) un sous-*K*-schéma en groupes fermé de* Y, $\mathfrak{Y}$ *un* A*-schéma plat prolongeant le* K*-schéma* Y, $\mathfrak{X}_i$ *un* A*-schéma en groupes plat prolongeant le* K*-schéma en groupes* X_i. *On suppose que les applications produit* $X_1 \times X_2 \to Y$ *et* $X_2 \times X_1 \to Y$ *se prolongent en des isomorphismes de* A*-schémas* $\alpha : \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{Y}$ *et* $\beta : \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{Y}$. *Alors, la loi de groupe de* Y *se prolonge en une loi de groupe sur* $\mathfrak{Y}$.

Le produit, la section unité et l'inverse de $\mathfrak{Y}$ s'obtiennent respectivement comme suit :

$$\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y} \xrightarrow{\alpha^{-1} \times \alpha^{-1}} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\mathrm{id} \times (\alpha^{-1} \circ \beta) \times \mathrm{id}} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\mathrm{prod} \times \mathrm{prod}} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{Y},$$

$$\mathrm{Spec}\, A \xrightarrow{e \times e} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{Y},$$

$$\mathfrak{Y} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\mathrm{inv} \times \mathrm{inv}} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_1} \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_1 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{Y}.$$

Il est clair que les morphismes ainsi définis prolongent respectivement le produit, l'élément neutre et l'inverse de Y et vérifient donc par continuité les axiomes des lois de groupe (1.2.8).

3.3.2. Proposition. — *Soit* Ψ *une partie positivement close de* Φ. *Il existe un* A*-schéma* $\mathfrak{U}_\Psi$ *et un seul à isomorphisme unique près, prolongeant* U_Ψ *et tel que, pour tout ordre grignotant* (3.1.2) *ou inverse d'un ordre grignotant sur* Ψ, *l'isomorphisme de* K*-schémas de* $\prod_{a \in \Psi} U_a$ *sur* U_Ψ *donné par l'application produit* (1.1.7) *se prolonge en un isomorphisme de* A*-schémas*

$$(1) \qquad \prod_{a \in \Psi} \mathfrak{U}_a \to \mathfrak{U}_\Psi.$$

Le schéma $\mathfrak{U}_\Psi$ *est plat, la loi de groupe de* U_Ψ *se prolonge en une loi de groupe sur* $\mathfrak{U}_\Psi$ *et* (1) *est l'application produit. Pour toute partie* Ψ' *positivement close de* Ψ, *l'injection de* $U_{\Psi'}$ *dans* U_Ψ *se prolonge en un isomorphisme de* A*-schémas en groupes de* $\mathfrak{U}_{\Psi'}$ *sur un sous-*A*-schéma en groupes fermé de* $\mathfrak{U}_\Psi$.

On fera la démonstration par induction sur Card Ψ, le cas Card $\Psi = 1$ étant inclus dans les hypothèses. L'unicité et la platitude de $\mathfrak{U}_\Psi$ sont évidentes. Pour montrer son existence, il suffit de faire voir que, si a et b sont deux éléments extrémaux de Ψ, le K-isomorphisme composé

$$(2) \qquad U_a \times U_{\Psi - \{a\}} \xrightarrow{\mathrm{prod}} U_\Psi \xrightarrow{\mathrm{prod}^{-1}} U_{\Psi - \{b\}} \times U_b$$

se prolonge en un isomorphisme $\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{\Psi - \{a\}} \to \mathfrak{U}_{\Psi - \{b\}} \times \mathfrak{U}_b$. Si $a \neq b$, c'est évident grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{\Psi - \{a\}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{\Psi - \{a,b\}} \times \mathfrak{U}_b \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_{\Psi - \{b\}} \times \mathfrak{U}_b.$$

Supposons donc $a = b$. Il suffit de montrer l'existence d'un morphisme

$$\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Psi - \{a\}} \to \mathcal{U}_{\Psi - \{a\}} \times \mathcal{U}_a$$

prolongeant (2) : on prouve de même l'existence d'un morphisme

$$\mathcal{U}_{\Psi - \{a\}} \times \mathcal{U}_a \to \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Psi - \{a\}}$$

prolongeant l'inverse de (2), et le composé de ces deux morphismes prolonge l'identité, donc est l'identité. Soit alors b' un élément extrémal de Ψ distinct de a et posons $\Psi_1 = \Psi \cap (a + b') \subset \Psi - \{a, b'\}$. D'après (DRS 1), l'application $(x, y) \to (xyx^{-1}y^{-1}, y, x)$ de $U_a \times U_{b'}$ dans $U_{\Psi_1} \times U_{b'} \times U_a$ se prolonge en un morphisme

$$\alpha : \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{b'} \to \mathcal{U}_{\Psi_1} \times \mathcal{U}_{b'} \times \mathcal{U}_a.$$

Le morphisme cherché s'obtient alors comme composé

$$\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Psi - \{a\}} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \mathrm{prod}^{-1}} \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{\Psi - \{a, b'\}} \times \mathcal{U}_{b'} \xrightarrow{\mathrm{prod} \times \mathrm{id}} \mathcal{U}_{\Psi - \{b} \times \mathcal{U}_{b'}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{prod}^{-1} \times \mathrm{id}} \mathcal{U}_{\Psi - \{a, b'\}} \times \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_{b'} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \alpha} \mathcal{U}_{\Psi - \{a, b'\}} \times \mathcal{U}_{\Psi_1} \times \mathcal{U}_{b'} \times \mathcal{U}_a$$
$$\xrightarrow{\mathrm{prod} \times \mathrm{id}} \mathcal{U}_{\Psi - \{a\}} \times \mathcal{U}_a.$$

On a bien entendu appliqué plusieurs fois l'hypothèse de récurrence.

L'existence de la loi de groupe sur $\mathcal{U}_\Psi$ résulte alors du lemme 3.3.1 et il est clair, par continuité, que (1) est l'application produit. Enfin, la dernière assertion résulte aussitôt du lemme suivant :

3.3.3. Lemme. — *Soient $\Psi' \subset \Psi$ deux parties positivement closes de Φ. Tout ordre grignotant sur Ψ' est induit par un ordre grignotant sur Ψ.*

Démontrons-le par induction sur Card Ψ. Soit a le premier élément de Ψ'. Si a est extrémal dans Ψ, on le prend comme premier élément de Ψ et l'on applique l'hypothèse de récurrence aux parties positivement closes $\Psi - \{a\}$ et $\Psi' - \{a\}$. Si a n'est pas extrémal dans Ψ, on choisit comme premier élément de Ψ un élément extrémal $b \notin \Psi'$ et l'on applique l'hypothèse de récurrence à $\Psi - \{b\}$ et Ψ'.

3.3.4. — Le composé avec l'application produit de l'application $\gamma_{a,b}$ donnée par (DRS 1) n'est autre que l'application commutateur de $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_b$ dans $\mathcal{U}_\Psi$ (pour $a, b \in \Psi$). puisqu'elle prolonge l'application commutateur de $U_a \times U_b$ dans U_Ψ. Il en résulte que si $\Psi' \subset \Psi$ est telle que $a \in \Psi$, $b \in \Psi'$ entraînent $\Phi \cap (a + b) \subset \Psi'$, alors $\mathcal{U}_{\Psi'}$ est un sous-schéma en groupes *distingué* de $\mathcal{U}_\Psi$. Notamment, si a est un élément extrémal de Ψ, alors $\mathcal{U}_\Psi$ *est produit semi-direct de* $\mathcal{U}_a$ *par* $\mathcal{U}_{\Psi - \{a\}}$.

D'autre part, dans les « bons cas » (cf. 2.2 et 3.8), l'application produit $\prod_{a \in \Psi} \mathcal{U}_a \to \mathcal{U}_\Psi$ est un isomorphisme de schémas quel que soit l'ordre mis sur Ψ.

3.3.5. Proposition. — *L'action de* Z *sur* U_Ψ *se prolonge en une action de* $\mathfrak{Z}$ *sur* $\mathcal{U}_\Psi$, *respectant la structure de groupe de* $\mathcal{U}_\Psi$.

L'action de $\mathfrak{Z}$ sur $\mathfrak{U}_\Psi$ s'obtient en écrivant $\mathfrak{U}_\Psi$ comme produit $\prod_{a\in\Psi} \mathfrak{U}_a$ (3.3.2) et en faisant le produit des actions de $\mathfrak{Z}$ sur les $\mathfrak{U}_a$ données par (DRS 2). Qu'on obtienne bien ainsi une action de $\mathfrak{Z}$ sur $\mathfrak{U}_\Psi$ et qu'elle respecte la structure de groupe de $\mathfrak{U}_\Psi$ résulte par continuité des propriétés de l'action de Z sur U_Ψ.

3.3.6. — On peut donc considérer sur $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_\Psi$ la structure correspondante de *produit semi-direct* de $\mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{U}_\Psi$ (cf. [DG], p. 166) : on obtient ainsi un A-schéma en groupes, noté $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$, prolongeant ZU_Ψ et contenant $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{U}_\Psi$) comme sous-schéma en groupes fermé (resp. fermé et distingué).

3.3.7. Remarque. — En plus de la platitude des schémas $\mathfrak{U}_a$ (resp. $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{U}_a$), la démonstration de 3.3.2 (resp. 3.3.5) n'utilise que (DRS 1) (resp. (DRS 1) et (DRS 2)).

3.4. L'algèbre des distributions associée à une donnée radicielle schématique.

Désormais, on suppose que les A*-schémas* $\mathfrak{U}_a$ *pour* $a \in \Phi$, *sont* lisses.

3.4.1. — On identifie l'algèbre des distributions Dist $\mathfrak{Z}$ (1.3.1) (resp. Dist $\mathfrak{U}_a$, Dist $\mathfrak{U}_\Psi$) à une sous-A-algèbre de la K-algèbre Dist Z (resp. Dist U_a, Dist U_Ψ), qui s'identifie elle-même à une sous-K-algèbre de Dist G (1.3.3). On note Dist $\mathscr{D}$ la sous-A-algèbre de Dist G engendrée par Dist $\mathfrak{Z}$ et les Dist $\mathfrak{U}_a$ pour $a \in \Phi$.

3.4.2. Proposition. — *Soit* Ψ *une partie positivement close de* Φ.

(i) *L'application produit* $\bigotimes_{a\in\Psi}$ Dist $\mathfrak{U}_a \to$ Dist $\mathfrak{U}_\Psi$ *est bijective quel que soit l'ordre grignotant ou inverse d'un ordre grignotant mis sur* Ψ.

(ii) *L'application produit*

$$\text{Dist } \mathfrak{Z} \otimes \text{Dist } \mathfrak{U}_\Psi \to \text{Dist } \mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi \quad (\text{resp. Dist } \mathfrak{U}_\Psi \otimes \text{Dist } \mathfrak{Z} \to \text{Dist } \mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi)$$

est bijective.

Vu 3.3.2 et 3.3.6, cela résulte de 1.3.5, puisque les $\mathfrak{U}_a$, et donc $\mathfrak{U}_\Psi$, sont lisses.

3.4.3. Lemme. — *Soit* $a \in \Phi$. *Dans l'algèbre* Dist G, *on a*

$$\text{Dist } \mathfrak{U}_a . \text{Dist } \mathfrak{Z} . \text{Dist } \mathfrak{U}_{-a} = \text{Dist } \mathfrak{U}_{-a} . \text{Dist } \mathfrak{Z} . \text{Dist } \mathfrak{U}_a .$$

Reprenons les notations de (DRS 3) et soit $\delta \in \text{Dist } \mathfrak{U}_a$, $\delta' \in \text{Dist } \mathfrak{U}_{-a}$. Comme $\mathfrak{W}_a$ est un voisinage ouvert de la section unité e dans $\mathfrak{U}_a \times \mathfrak{U}_{-a}$, le A-module ${}^e\text{Dist } \mathfrak{W}_a$ s'identifie à Dist $\mathfrak{U}_a \otimes$ Dist $\mathfrak{U}_{-a}$ (1.3.2 et 1.3.5). Par suite,

$$\delta \otimes \delta' \in {}^e\text{Dist } \mathfrak{W}_a, \quad \beta_a(\delta \otimes \delta') \in \text{Dist } \mathfrak{U}_{-a} \otimes \text{Dist } \mathfrak{Z} \otimes \text{Dist } \mathfrak{U}_a \quad (1.3.5)$$

et

$$(\text{prod} \circ \beta_a)(\delta \otimes \delta') \in \text{Dist } \mathfrak{U}_{-a} . \text{Dist } \mathfrak{Z} . \text{Dist } \mathfrak{U}_a .$$

Mais, d'après (DRS 3), $(\mathrm{prod} \circ \beta_a)_K$ est la restriction de l'application produit $U_a \times U_{-a} \to G$, ce qui entraîne que $(\mathrm{prod} \circ \beta_a)(\delta \otimes \delta') = \delta\delta'$. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_a . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{-a} \subset \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{-a} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_a,$$

d'où le lemme, compte tenu de 3.4.2 (ii).

3.4.4. Proposition. — *Soit* Φ^+ *un système de rayons radiciels positifs. Posons* $\Phi^- = -\Phi^+$. *L'application produit de* $\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi^-} \otimes \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} \otimes \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi^+}$ *dans* $\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}$ *est bijective.*

L'injectivité résulte de celle de l'application produit de $U_{\Phi^-} \times Z \times U_{\Phi^+}$ dans G. Pour établir la surjectivité, il suffit de montrer que l'image Δ ne dépend pas du choix de Φ^+ : ceci entraînera $\Delta = \mathrm{Dist}\, \mathscr{D}$ car, d'une part, $\Delta . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} = \Delta$ vu 3.4.2 (ii), d'autre part $\Delta . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_a = \Delta$ pour tout $a \in \Phi$, comme on le voit en choisissant Φ^+ contenant a, donc $\Delta . \mathrm{Dist}\, \mathscr{D} = \Delta$ et $\Delta \supset \mathrm{Dist}\, \mathscr{D}$.

Soit donc Φ_1^+ un autre système de rayons radiciels positifs. On veut montrer que sa substitution à Φ^+ ne change pas Δ. Raisonnons par induction sur $\mathrm{Card}(\Phi_1^+ \cap \Phi^-)$. Si ce cardinal est nul, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe un élément a extrémal dans Φ_1^+ appartenant à Φ^-. Posons $\Psi^+ = \Phi_1^+ - \{a\}$ et $\Psi^- = \Phi_1^- - \{-a\}$. Alors $\Phi_2^+ = \Psi^+ \cup \{-a\}$ est un système de rayons radiciels positifs (cf. [NB] Lie VI, p. 157) et, vu 3.4.2 (i) et 3.4.3, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi_1^-} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi_1^+} &= \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Psi^-} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{-a} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_a . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Psi^+} \\ &= \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Psi^-} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_a . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{-a} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Psi^+} \\ &= \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi_2^-} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{Z} . \mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_{\Phi_2^+}, \end{aligned}$$

d'où notre assertion par induction.

3.4.5. Corollaire. — *L'application canonique* $K \otimes \mathrm{Dist}\, \mathscr{D} \to \mathrm{Dist}\, G$ *est bijective.*

Cela résulte de 3.4.4, 1.1.9 et 1.3.4.

3.5. $\mathscr{D}$-modules : lemmes préliminaires.

Dans ce numéro, on désigne par $\mathfrak{X}$ un A-schéma en groupes lisse de fibre générique $\mathfrak{X}_K$ *connexe*, et par ρ une représentation de $\mathfrak{X}_K$ dans un espace vectoriel V de dimension finie sur K.

3.5.1. Lemme. — *Faisons l'hypothèse suivante* :

(C) *Si* $f \in K[\mathfrak{X}]$ *est telle que* $\langle \delta, f \rangle \in A$ *pour tout* $\delta \in \mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$, *alors* $f \in A[\mathfrak{X}]$.

Soit M *un sous-*A*-module projectif de type fini de* V *tel que* $\rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X})\, M = M$; *alors* $\mathfrak{X}$ *opère sur* M *par* ρ.

On a $\rho(\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}_K).KM = KM$. D'après 1.4.8, le sous-espace vectoriel KM de V est donc invariant par ρ et l'on peut supposer $V = KM$. Le dual ${}^tM$ de M s'identifie alors à un sous-A-module projectif de type fini du dual de V. Si $m \in M$, $m' \in {}^tM$ et $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, on a

$$\langle \delta, c^{\rho}_{m',m} \rangle = \langle m', \rho(\delta)\, m \rangle \in A$$

(cf. 1.4.7), et la condition (C) entraîne $c^{\rho}_{m',m} \in A[\mathfrak{X}]$, cqfd.

3.5.2. Lemme. — *Faisons l'hypothèse suivante* :

(C′) $A[\mathfrak{X}]$ *est réunion d'une suite croissante de sous-*A*-modules* M_n *projectifs de type fini telle que, pour tout* n, *l'application de restriction* r_n *de* $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ *dans* ${}^tM_n$ *soit surjective.*

Alors, la condition (C) *de* 3.5.1 *est satisfaite et il existe un entier* N *et une application* A*-linéaire* $q : \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X} \to \mathrm{Dist}_N\,\mathfrak{X}$ *telle que* $\rho(\delta) = \rho(q(\delta))$ *pour tout* $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$.

Pour tout entier n, on peut choisir une application A-linéaire $u_n : {}^tM_n \to \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ telle que $r_n \circ u_n = \mathrm{id}$ et $\langle u_n \circ r_n(\delta), m \rangle$ pour $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ et $m \in M_n$.

Soit alors $f \in K[\mathfrak{X}]$ telle que $\langle \delta, f \rangle \in A$ pour tout $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$. Il existe un entier n tel que $f \in K \otimes M_n$ et pour tout $\lambda \in {}^tM_n$, on a

$$\langle \lambda, f \rangle = \langle r_n \circ u_n(\lambda), f \rangle = \langle u_n(\lambda), f \rangle \in A,$$

d'où $f \in M_n$, ce qui démontre (C).

D'autre part, soit M le A-module engendré par une base de V. Son image par la coaction $c^{\rho} : V \to K[\mathfrak{X}] \otimes_K V = A[\mathfrak{X}] \otimes_A V$ est contenue dans $M_n \otimes_A V$ pour un entier n assez grand. Pour $u \in {}^tV$, $m \in M$ et $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, on a

$$\langle u, \rho(\delta)\, m \rangle = \langle \delta \otimes u, c^{\rho}(m) \rangle = \langle u_n \circ r_n(\delta) \otimes u, c^{\rho}(m) \rangle,$$

d'où la deuxième assertion en prenant $q = u_n \circ r_n$ et N assez grand pour que $\mathrm{Dist}_N\,\mathfrak{X}$ contienne le sous-A-module de type fini image de q.

3.5.3. Remarques. — 1) On peut montrer que si A est un anneau de Dedekind, alors la condition (C) est satisfaite si et seulement si $\mathfrak{X}$ est connexe (1.2.12).

2) On peut exprimer les conditions (C) et (C′) pour un A-schéma lisse $\mathfrak{X}$ à fibre générique connexe quelconque, muni d'une section s, en y remplaçant $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ par ${}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$. Soit $d \in A[\mathfrak{X}]$ inversible sur s. Si $\mathfrak{X}$ muni de s satisfait à (C), alors l'ouvert spécial $\mathfrak{X}_d$ muni de s satisfait aussi à (C). On a en effet ${}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}_d = {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ et si $g \in K[\mathfrak{X}]$ est telle que $\langle \delta, d^{-n} g \rangle \in A$ pour tout $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, alors $\langle \delta, g \rangle = \Sigma \langle \delta_i, d^n \rangle . \langle \delta'_i, d^{-n} g \rangle \in A$ pour tout $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$ (1.3.5 (1)), d'où $g \in A[\mathfrak{X}]$.

De même, si $\mathfrak{X}$ muni de s satisfait à (C′), alors $\mathfrak{X}_d$ aussi. En effet, quitte à remplacer (M_n) par une suite partielle, on peut supposer $dM_n \subset M_{n+1}$. Posons $M'_n = d^{-n} M_n$; alors $A[\mathfrak{X}_d]$ est réunion de la suite croissante des M'_n, qui sont projectifs de type fini, et une forme linéaire sur M'_n est de la forme $f \mapsto \langle \delta, d^n f \rangle$ avec $\delta \in {}^s\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$. Il suffit alors d'appliquer 1.3.5 (1).

Par ailleurs, il est immédiat que le A-schéma $\mathfrak{X}$ associé à un A-module projectif de type fini M, muni d'une section s quelconque, satisfait à (C') : on peut supposer que s est la section nulle et il suffit de prendre pour M_n le sous-A-module de $A[\mathfrak{X}] = \mathrm{Sym}\,{}^tM$ engendré par les éléments homogènes de degré $\leqq n$.

En particulier, on voit que *tout* A*-schéma en groupes* $\mathfrak{X}$ *dont le schéma sous-jacent est un ouvert spécial d'un schéma associé à un* A*-module projectif de type fini, satisfait à* (C') *donc à* (C). Ceci s'applique en particulier à $\mathfrak{Mult}$.

3) On peut montrer que la condition (C') est équivalente à

(C'') Il existe une suite de sous-A-modules projectifs de type fini $(P_n)_{n\geqq 0}$ de $A[\mathfrak{X}]$ telle que P_n soit supplémentaire de $I(s)^{n+1}$ dans $I(s)^n$ et que $A[\mathfrak{X}]$ soit somme directe des P_n.

3.5.4. Lemme. — *Supposons donnée une opération de* $\mathfrak{Mult}$ *sur le schéma* $\mathfrak{X}$, *fixant l'élément neutre de* $\mathfrak{X}$ *et telle que les caractères de* $\mathfrak{Mult}_K$ *intervenant dans la représentation associée de* $\mathfrak{Mult}_K$ *dans l'espace tangent à* $\mathfrak{X}_K$ *en l'élément neutre soient strictement positifs. Alors, la condition* (C') *est satisfaite.*

L'opération de $\mathfrak{Mult}$ sur $\mathfrak{X}$ se traduit par l'existence d'une graduation $(R_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de la A-algèbre $A[\mathfrak{X}]$ telle que la coaction

$$A[\mathfrak{X}] \to A[\mathfrak{Mult}] \otimes A[\mathfrak{X}] = A[T, T^{-1}] \otimes A[\mathfrak{X}]$$

soit donnée par $\Sigma r_j \mapsto \Sigma T^j \otimes r_j$ (pour $r_j \in R_j$). Autrement dit, $\mathfrak{Mult}$ opère sur R_j par le caractère $-j$: $t \mapsto t^{-j}$. Comme $\mathfrak{Mult}$ fixe l'élément neutre, l'idéal d'augmentation $I = I(e)$ est gradué. Par hypothèse, les caractères de $\mathfrak{Mult}_K$ intervenant dans KI/KI^2 sont strictement négatifs, ce qui entraîne que les caractères de $\mathfrak{Mult}_K$ intervenant dans KI^n/KI^{n+1} sont $\leqq -n$. Comme $\cap I^n = \{0\}$ (1.3.7), il en résulte que $R_j = \{0\}$ pour $j < 0$ et que

$$I^n \subset \sum_{j\geqq n} R_j. \tag{1}$$

Posons alors $M_n = \sum_{0\leqq j\leqq n-1} R_j$. Alors $A[\mathfrak{X}]$ est la réunion des M_n. De plus, (1) montre que le A-module projectif de type fini $A[\mathfrak{X}]/I^n$ s'identifie à la somme directe de M_n et de $\sum_{j\geqq n} R_j/I^n$. Par suite, M_n est projectif de type fini et si $u \in {}^tM_n$, la forme linéaire sur $A[\mathfrak{X}]$ égale à u sur M_n et à 0 sur $\sum_{j\geqq n} R_j$ est nulle sur I^n d'après (1), donc appartient à $\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, ce qui achève la démonstration.

3.5.5. Proposition. — *Soit* Ψ *une partie positivement close de* $\mathbf{\Phi}$. *Le schéma en groupes* $\mathfrak{U}_\Psi$ *satisfait à la condition* (C') *de* 3.5.2, *donc à la condition* (C) *de* 3.5.1.

On peut en effet choisir un isomorphisme j de $\mathfrak{Mult}$ sur un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{S}$ tel que, pour tout $a \in \Psi$ et toute racine α de G suivant S appartenant à a, le caractère $\alpha \circ j$ de $\mathfrak{Mult}$ soit strictement positif. Le composé de j avec l'action de $\mathfrak{Z}$ sur $\mathfrak{U}_\Psi$ (3.3.5) fournit une action de $\mathfrak{Mult}$ sur $\mathfrak{U}_\Psi$ satisfaisant à la condition de 3.5.4.

3.5.6. Lemme. — *Soit* $v \in V$ *et posons* $M = \rho(\mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}).v$. *On suppose que* M *est projectif de type fini, que* $\mathfrak{X}$ *opère sur* M *et que* $A[\mathfrak{X}]$ *possède un système générateur formé de coefficients de* ρ *de la forme* $c^{\rho}_{x,v}$ *avec* $x \in {}^tV$. *Alors,* $\mathfrak{X}$ *opère fidèlement sur* M.

Soit $x \in {}^tV$ tel que $c^{\rho}_{x,v} \in A[\mathfrak{X}]$ et soit y la restriction de x à M. Pour $\delta \in \mathrm{Dist}\,\mathfrak{X}$, on a

$$\langle y, \rho(\delta).v\rangle = \langle x, \rho(\delta).v\rangle = \langle \delta, c^{\rho}_{x,v}\rangle \in A,$$

d'où $y \in {}^tM$. On vérifie alors aisément que $c^{\rho}_{x,v}$ est le coefficient $c^{\bar\rho}_{y,v}$ de la représentation $\bar\rho$ de $\mathfrak{X}$ dans M définie par ρ. Par suite $A[\mathfrak{X}]$ est engendrée par les coefficients de $\bar\rho$, cqfd.

3.5.7. Lemme. — *Supposons* $\mathfrak{X}_K$ *unipotent et soit* $v \in V$ *tel que le* K*-schéma en groupes stabilisateur de* v *dans* $\mathfrak{X}_K$ *soit trivial. Pour* N *entier* $\geqq 1$, *notons* $\rho(N)$ *la représentation* $\bigotimes^N \rho$ *de* $\mathfrak{X}_K$ *dans* $V_N = \bigotimes^N V$ *et posons* $v_N = \bigotimes^N v$. *Si* N *est assez grand, l'algèbre* $A[\mathfrak{X}]$ *est engendrée par des coefficients de* $\rho(N)$ *de la forme* $c^{\rho(N)}_{y,v_N}$ *pour* $y \in {}^tV_N$.

On se ramène aussitôt au cas où V est le plus petit sous-espace vectoriel contenant l'orbite $\rho(\mathfrak{X}_K).v$. Puisque $\mathfrak{X}_K$ est unipotent, celle-ci est d'ailleurs fermée ([DG], p. 488) et l'application $x \mapsto \rho(x).v$ est une immersion fermée de $\mathfrak{X}_K$ dans V ([2], prop. 6.7). Par suite, la K-algèbre $K[\mathfrak{X}]$ est engendrée par les coefficients $c^{\rho}_{x,v}$ pour $x \in {}^tV$.

L'ensemble Γ_N des coefficients $c^{\rho(N)}_{y,v_N}$ de $\rho(N)$ est exactement l'ensemble des polynômes homogènes de degré N à coefficients dans K en les coefficients $c^{\rho}_{x,v}$ pour $x \in {}^tV$. D'autre part, puisque $\mathfrak{X}_K$ est unipotent, il possède un point fixe $z \neq 0$ dans ${}^tV$ et le coefficient $c^{\rho}_{z,v}$ est une constante non nulle (sinon on aurait $\mathfrak{X}_K.v \subset \mathrm{Ker}\,z$), qu'on peut supposer égale à 1. Il s'ensuit que Γ_N est l'ensemble de tous les polynômes de degré N, homogènes ou non, en les $c^{\rho}_{x,v}$.

Or, $A[\mathfrak{X}]$ est engendrée par un nombre fini d'éléments $f_1, \ldots, f_r$ de $K[\mathfrak{X}]$ et chaque f_i est un polynôme à coefficients dans K en les $c^{\rho}_{x,v}$. Il suffit alors de prendre l'entier N plus grand que le plus grand des degrés de ces polynômes.

3.6. Construction d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{U}_a$.

Désormais, nous supposons que l'anneau A *est* prüférien (cf. 2.2.2).

3.6.1. Proposition. — *Soit* ρ *une représentation de* G *dans un espace vectoriel* V *de dimension finie sur* K *et soit* M_0 *un sous-*A*-module de type fini de* V. *Soit* Ψ *une partie positivement close de* Φ *et posons* $M = \rho(\mathrm{Dist}\,\mathfrak{U}_\Psi).M_0$. *Alors,*

(i) M *est de type fini (donc projectif) et* $\mathfrak{U}_\Psi$ *opère sur* M;

(ii) *si* $\mathfrak{Z}$ *opère sur* M_0, *alors* $\mathfrak{Z}$ *opère sur* M.

Vu 3.5.5 et 3.5.2, il existe un entier N tel que $M = \rho(\mathrm{Dist}_N \mathfrak{U}_\Psi).M_0$. Par suite, M est de type fini, donc projectif puisque sans torsion, et $\mathfrak{U}_\Psi$ opère sur M d'après 3.5.1.

Supposons maintenant que $\mathfrak{Z}$ opère sur M_0. L'action de $\mathfrak{Z}$ sur $\mathfrak{U}_\Psi$ (3.3.5) définit une opération de $\mathfrak{Z}$ sur le module $\mathrm{Dist}_N \mathfrak{U}_\Psi$ (1.4.9), d'où une opération de $\mathfrak{Z}$ sur $M' = \mathrm{Dist}_N \mathfrak{U}_\Psi \otimes M_0$. L'application $\varphi : M' \to M$ définie par $\varphi(\delta \otimes m) = \rho(\delta).m$ est surjective et $K \otimes \varphi : K \otimes M' \to K \otimes M \subset V$ est compatible avec l'action de Z (pour tout $z \in Z(K)$, on a $(K \otimes \varphi)(z.(\delta \otimes m)) = \rho(z\delta)\rho(z).m = \rho(z)\rho(\delta).m$), c'est-à-dire est un morphisme de K[Z]-comodules, ou encore un morphisme de A[$\mathfrak{Z}$]-comodules (noter que par exemple $K[Z] \otimes_K (K \otimes_A M') = A[\mathfrak{Z}] \otimes_A (K \otimes_A M')$!). On en déduit que $\mathrm{Ker}\, K \otimes \varphi$ et M' sont deux sous-A[$\mathfrak{Z}$]-comodules de $K \otimes M'$, et il en est de même de leur intersection $\mathrm{Ker}\, \varphi$ [30]. Par passage au quotient par $\mathrm{Ker}\, \varphi$, on obtient donc une structure de A[$\mathfrak{Z}$]-comodule sur M, c'est-à-dire une opération de $\mathfrak{Z}$ dans M, qui redonne par tensorisation avec K la représentation ρ de Z dans KM.

3.6.2. Corollaire. — *Soit ρ une représentation de G dans un espace vectoriel V de dimension finie sur K et soit M_0 un sous-A-module de type fini de V tel que $\mathfrak{Z}$ opère sur M_0. Posons $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{D})M_0$. Alors, M est un A-module de type fini, KM est invariant par $\rho(G)$ et le couple (M, ρ_1), où ρ_1 est la restriction de ρ à KM, est un $\mathscr{D}$-module.*

Comme KM est invariant par $\rho(\mathrm{Dist}\, G)$ (3.4.5), il est invariant par ρ (1.4.8) et l'on peut supposer $V = KM$. Choisissons un système de rayons radiciels positifs $\mathbf{\Phi}^+$, posons $\mathfrak{U}^\pm = \mathfrak{U}_{\mathbf{\Phi}^\pm}$ et $M_1 = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}^+)M_0$; vu 3.6.1, M_1 est de type fini et $\mathfrak{Z}$ opère sur M_1. Il en résulte, compte tenu de 3.4.4, que $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}^-)M_1$ et 3.6.1 entraîne que $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{U}^-$ opèrent sur M. Enfin, $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}^+)M$ et, toujours par 3.6.1, $\mathfrak{U}^+$ opère sur M.

3.6.3. Soit $\tilde{G}$ un revêtement simplement connexe du groupe adjoint Ad G de G. On sait qu'il existe un unique tore $\tilde{S}$ déployé sur K de $\tilde{G}$ dont l'image dans Ad G coïncide avec celle de S et le système de rayons radiciels de $\tilde{G}$ suivant $\tilde{S}$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{\Phi}$. Pour $\Psi \subset \mathbf{\Phi}$ positivement close, la projection canonique $\tilde{G} \to G$ définit un isomorphisme du sous-groupe radiciel $\tilde{U}_\Psi$ de $\tilde{G}$ associé à Ψ sur U_Ψ, ce qui permet d'identifier ces deux groupes.

3.6.4. — Soit $\mathbf{\Phi}^+$ un système de rayons radiciels positifs et posons $\mathfrak{U}^\pm = \mathfrak{U}_{\mathbf{\Phi}^\pm}$, etc. Soit L l'algèbre de Lie de G et L^- celle de U^-. Posons $d = \dim U^-$, $V = \overset{d}{\bigwedge} L$ et $W = \overset{d}{\bigwedge} L^-$, de sorte que $W \subset V$ et $\dim W = 1$; soit v un élément non nul de W et soit ρ (resp. $\tilde{\rho}$) la représentation adjointe de G (resp. $\tilde{G}$) dans L. Pour un entier $N \geqq 1$, on note $\rho(N)$ la représentation $\otimes^N \rho$ dans $V_N = \otimes^N V$, on pose $W_N = \otimes^N W \subset V_N$ et $v_N = \otimes^N v$. Enfin, on pose

$$M_N = \rho(N)(\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}).v_N.$$

3.6.4. Proposition. — (i) *Le* A*-module* M_N *est de type fini et* $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}^+$ *et* $\mathfrak{U}^-$ *opèrent sur* M_N *par* $\rho(N)$.

(ii) *Si* N *est assez grand,* $\mathfrak{U}^+$ *opère fidèlement sur* M_N.

Autrement dit, le couple $(M_N, \rho(N))$ *est un* $\mathfrak{D}$*-module, qui est fidèle pour* $\mathfrak{U}^+$ *(donc pour les* $\mathfrak{U}_a$ *pour* $a \in \mathbf{\Phi}^+$*) dès que* N *est assez grand.*

En effet, il est clair que Z laisse invariant W et y opère par un caractère χ. Vu (DRS 2) (ou 3.3.5), $\mathfrak{Z}$ opère sur le sous-module $\sum_{a \in \mathbf{\Phi}^-} \mathrm{Lie}\,\mathfrak{U}_a$ de L^-, ce qui entraîne que χ se prolonge en un homomorphisme (noté encore χ) de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{Mult}$ et $\mathfrak{Z}$ opère par χ^N sur tout sous-module de type fini de W_N, en particulier sur Av_N.

L'assertion (i) résulte alors de 3.6.2 et l'assertion (ii) résulte des lemmes 3.5.6, 3.5.7 et

3.6.5. Lemme. — *Le stabilisateur de* v *dans* U^+ *est trivial.*

Il revient au même de montrer que le stabilisateur de v dans $\tilde{U}^+$ est trivial; autrement dit, on peut supposer que G est *semi-simple et simplement connexe.* Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et soit π l'application $x \mapsto \rho(x).v$ de $U^+(\bar{K})$ dans $\bar{K} \otimes V$. Il nous faut montrer (cf. [2], prop. 6.7) que

$$P = \pi^{-1}(v) = \{e\} \quad \text{et} \quad Q = d\pi_e^{-1}(0) = \{0\}.$$

Soit T un tore maximal défini sur K de G, contenant S, soit $\tilde{\Phi}$ le système de racines de $G_{\bar{K}}$ suivant T et soit Ψ^+ (resp. Ψ^-) l'ensemble des racines $\alpha \in \tilde{\Phi}$ dont la restriction à S appartient à un élément de $\mathbf{\Phi}^+$ (resp. $\mathbf{\Phi}^-$). Les parties Ψ^+ et Ψ^- sont positivement closes, on a $\Psi^- = -\Psi^+$ et le sous-groupe unipotent de $G_{\bar{K}}$ associé à Ψ^+ (resp. Ψ^-) n'est autre que $(U^+)_{\bar{K}}$ (resp. $(U^-)_{\bar{K}}$).

Comme $T \subset Z$, le sous-groupe fermé P de U^+ est normalisé par T et est donc engendré par les sous-groupes radiciels U_α qu'il contient ([4], 3.11). Mais $U_\alpha \subset P$ entraîne $\mathrm{Lie}\,U_\alpha \subset Q$: il nous suffit donc de montrer que $Q = \{0\}$.

Etant normalisée par T, l'algèbre Q est somme des $\mathrm{Lie}\,U_\alpha$ qu'elle contient (avec $\alpha \in \Psi^+$). En définitive, nous devons seulement montrer que si l'on choisit un épinglage de Chevalley $(x_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}}$ de $G_{\bar{K}}$ relativement à T et si l'on pose $e_\alpha = dx_\alpha(1)$, alors $\alpha \in \Psi^+$ *entraîne* $\rho_{\bar{K}}(e_\alpha).v \neq 0$.

Or, on a $\bar{K} \otimes L^- = \sum_{\beta \in \Psi^+} \bar{K} e_{-\beta}$, d'où $v = k \bigwedge_{\beta \in \Psi^+} e_{-\beta}$ avec $k \in \bar{K}^\times$, et

$$\rho_{\bar{K}}(e_\alpha)v = k(\pm [e_\alpha, e_{-\alpha}] \wedge \bigwedge_{\beta \in \Psi^+ - \{\alpha\}} e_{-\beta} + \sum_{\gamma \in \Psi^+ - \{\alpha\}} \pm [e_\alpha, e_{-\gamma}] \wedge \bigwedge_{\beta \in \Psi^+ - \{\gamma\}} e_{-\beta})$$

$$= k(\pm h_\alpha \wedge \bigwedge_{\beta \in \Psi^+ - \{\alpha\}} e_{-\beta} + \sum_{\gamma \in \Psi^+ - \{\alpha\}} \pm N_{\alpha, -\gamma} e_{\alpha - \gamma} \wedge \bigwedge_{\beta \in \Psi^+ - \{\gamma\}} e_{-\beta}).$$

Ceci démontre notre assertion, puisque $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ est un élément non nul de Lie T.

3.7. Construction d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{Z}$.

Désormais, nous supposons que G *est* quasi-déployé *sur* K *et que* S *est un tore déployé sur* K maximal. Il s'ensuit que Z est un tore maximal de G. On suppose de plus que *le* A-*schéma en groupes* $\mathfrak{Z}$ *possède une représentation linéaire fidèle* (condition toujours satisfaite si A est un anneau de Dedekind (1.4.5)).

3.7.1. — Soit K_s une clôture séparable de K. On note $\tilde{\Phi}$ le système de racines de G_{K_s} suivant le tore maximal Z_{K_s} et $\tilde{\Phi}^+$ l'ensemble des $\alpha \in \tilde{\Phi}$ dont la restriction à S appartient à un élément de Φ^+ : c'est un système de racines positives dans $\tilde{\Phi}$ et $(U^+)_{K_s}$ est le sous-groupe unipotent maximal de G_{K_s} associé à $\tilde{\Phi}^+$. Il s'ensuit que le caractère χ de $\mathfrak{Z}$ introduit en 3.6.4, c'est-à-dire la représentation de $\mathfrak{Z}$ dans le module $D = \det \mathrm{Lie}\, \mathfrak{U}^+$, est le produit des racines positives dans le groupe des caractères $X^*(Z)$ noté multiplicativement :

$$\chi = \prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}^+} \alpha.$$

C'est donc un poids dominant de Z, égal au carré du produit des poids dominants fondamentaux ([NB] Lie VI, § 1, prop. 29) et pour tout caractère λ de Z, le caractère $\lambda\chi^n$ est un poids dominant pour n entier assez grand.

3.7.2. — Soit M_0 un A-module projectif de type fini et soit σ une représentation linéaire fidèle de $\mathfrak{Z}$ dans M_0. Posons $V = K \otimes M_0$. Puisque Z est un tore, la représentation σ_K de Z dans V est complètement réductible : soit $V = \sum_{1 \leqq j \leqq r} V_j$ une décomposition de σ_K en K-composantes irréductibles $\sigma_j : Z \to GL(V_j)$. Pour $1 \leqq j \leqq r$, la représentation $(\sigma_j)_{K_s}$ de Z_{K_s} dans $K_s \otimes V_j$ est somme directe de caractères $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_j}$ deux à deux distincts et permutés transitivement par le groupe de Galois Γ de K_s sur K opérant de façon naturelle sur $X^*(Z)$ (notons que, puisque G est quasi-déployé sur K, les deux actions classiques de Γ sur $X^*(Z)$ (cf. [36], 3.1) sont identiques).

Soit n un entier assez grand pour que les caractères $\lambda_{j,k}\chi^n$ soient tous des poids dominants pour $1 \leqq j \leqq r$ et $1 \leqq k \leqq n_j$. La représentation $\sigma' = (\sigma \otimes \chi^n) \oplus \chi$ de $\mathfrak{Z}$ dans $M_0' = (M_0 \otimes (\bigotimes^n D)) \oplus D$ est encore fidèle. L'image par $(\sigma')^*$ de $A[\mathfrak{GL}(M_0')]$ contient en effet d'une part χ et χ^{-1}, d'autre part les produits par χ^n des coefficients de σ et le produit par $\chi^{-n \dim V}$ de l'inverse de $\det \sigma$, donc contient l'image par σ^* de $A[\mathfrak{GL}(M_0)]$, qui est $A[\mathfrak{Z}]$ tout entier.

Par suite, quitte à remplacer σ par σ', on peut supposer que *tous les poids* $\lambda_{j,k}$ *sont des poids dominants.*

3.7.3. — Pour $1 \leqq j \leqq r$, les poids $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_j}$ forment alors une orbite de Γ dans le cône des poids dominants. On sait ([36], 3.3, 7.2 et 7.4) qu'il existe une K-représentation irréductible ρ_j (et une seule à isomorphisme près) de G dans un K-espace vectoriel W_j qui se décompose sur K_s en la somme directe des représentations

irréductibles $\rho_{j,k}$ de G_{K_s} de poids dominants $\lambda_{j,k}$ (pour $1 \leqq k \leqq n_j$). Soit $W_{j,k}$ le sous-espace de $K_s \otimes W_j$ sur lequel $(\rho_j)_{K_s}$ induit $\rho_{j,k}$ et soit $W^0_{j,k}$ la droite des vecteurs dominants de $W_{j,k}$. Pour j donné, les $W_{j,k}$ (resp. $W^0_{j,k}$) sont permutés transitivement par Γ, il existe un et un seul K-sous-espace vectoriel W^0_j de W_j, de dimension n_j, tel que $\sum_{1 \leqq k \leqq n_j} W^0_{j,k} = K_s \otimes W^0_j$ et la K-représentation de Z dans W^0_j est isomorphe à σ_j.

3.7.4. — Faisant la somme directe des ρ_j pour $1 \leqq j \leqq r$, on obtient une K-représentation ρ de G dans $W = \Sigma W_j$ et un K-sous-espace vectoriel $W^0 = \Sigma W^0_j$ de W, invariant par Z, formé de vecteurs dominants, donc fixes par U^+, et tel que la représentation de Z dans W^0 induite par ρ soit isomorphe à σ_K. On peut donc identifier M_0 à un sous-A-module de W^0 et $\mathfrak{Z}$ *opère fidèlement par* ρ *dans* M_0.

3.7.5. — Posons $M = \rho(\mathrm{Dist}\ \mathscr{D})\, M_0$. Le corollaire 3.6.2 entraîne que M est de type fini et que $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}^+$ et $\mathfrak{U}^-$ opèrent sur M, c'est-à-dire que M *est un* $\mathscr{D}$*-module.*

De plus, des considérations élémentaires sur les poids montrent que

(1) $\qquad \rho(\mathrm{Dist}^+ U^+)\, W^0 = \{0\};$

(2) $\qquad W^0 \cap \rho(\mathrm{Dist}^+ U^-)\, W^0 = \{0\}.$

De (1) et de 3.4.4 résulte que $M = \rho(\mathrm{Dist}\ \mathfrak{U}^-)\, M_0$ et de (2) résulte alors que M est somme directe des sous-modules M_0 et $\rho(\mathrm{Dist}^+ \mathfrak{U}^-)\, M_0$, qui sont invariants par $\mathfrak{Z}$. Comme $\mathfrak{Z}$ opère fidèlement sur M_0, on voit que $\mathfrak{Z}$ *opère fidèlement sur* M.

En conclusion, nous avons démontré la proposition suivante :

3.7.6. Proposition. — *Il existe un* $\mathscr{D}$*-module fidèle pour* $\mathfrak{Z}$.

3.7.7. — Faisant alors la somme directe d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{Z}$, d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{U}^+$ et d'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{U}^-$ (3.6.4), on obtient enfin :

3.7.8. Proposition. — *Il existe un* $\mathscr{D}$*-module fidèle.*

3.8. Récolte.

Réunissant l'existence d'un $\mathscr{D}$-module fidèle et les résultats de 2.2, nous obtenons :

3.8.1. Théorème. — *Soient* A *un anneau intègre prüférien,* K *son corps des fractions,* G *un groupe algébrique réductif connexe défini sur* K, *quasi-déployé sur* K, S *un tore déployé sur* K *maximal de* G *et* $(\mathfrak{Z}, (\mathfrak{U}_a)_{a \in \Phi})$ *une donnée radicielle schématique sur* G *relativement à* S. *On suppose que les* A*-schémas en groupes* $\mathfrak{U}_a$ *sont lisses et que* $\mathfrak{Z}$ *possède une représentation linéaire fidèle (cette dernière condition étant conséquence des autres lorsque* A *est un anneau de Dedekind).*

Alors, le K*-schéma en groupes* G *se prolonge en un* A*-schéma en groupes* $\mathfrak{G}$, *plat, de type fini, possédant une représentation linéaire fidèle, et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(S 1) *l'injection de* Z (*resp.* U_a *pour* $a \in \Phi$) *dans* G *se prolonge en un isomorphisme de* $\mathfrak{Z}$ (*resp.* $\mathfrak{U}_a$) *sur un sous-*A*-schéma en groupes fermé de* G;

(S 2) *pour tout système de rayons radiciels positifs* Φ^+ *de* Φ *et pour tout ordre sur* Φ^+ (*resp.* $\Phi^- = -\Phi^+$), *l'application produit est un isomorphisme de schémas de* $\prod_{a\in\Phi^+} \mathfrak{U}_a$ (*resp.* $\prod_{a\in\Phi^-} \mathfrak{U}_a$) *sur un sous-schéma en groupes fermé* $\mathfrak{U}^+$ (*resp.* $\mathfrak{U}^-$) *de* $\mathfrak{G}$;

(S 3) *l'application produit est un isomorphisme de schémas de* $\mathfrak{U}^- \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}^+$ *sur un sous-schéma ouvert* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathfrak{G}$.

Si de plus $\mathfrak{Z}$ *est lisse, alors le schéma* $\mathfrak{G}$ *est lisse.*

3.8.2. — Nous n'avons pas répété dans le théorème précédent toutes les propriétés déjà vues de $\mathfrak{G}$. Rappelons-en sommairement quelques-unes.

a) L'ouvert $\mathfrak{C}$ de (S 3) est un ouvert spécial, défini par un élément $d \in A[\mathfrak{G}]$ tel que $d(1) = 1$.

b) Pour toute partie positivement close Ψ de Φ et pour tout ordre sur Ψ, l'application produit est un isomorphisme de schémas de $\prod_{a\in\Psi} \mathfrak{U}_a$ sur un sous-schéma en groupes fermé $\mathfrak{U}_\Psi$ de $\mathfrak{G}$ (2.2.3 (i) : on comparera avec 3.3.2).

c) $\mathfrak{Z}$ normalise $\mathfrak{U}^+$ et l'application produit est un isomorphisme du produit semi-direct $\mathfrak{Z} \ltimes \mathfrak{U}^+$ sur un sous-schéma en groupes fermé $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}^+$ de $\mathfrak{G}$ (2.2.3 (ii)).

3.8.3. — On a déjà vu que le schéma $\mathfrak{G}$ fourni par le théorème précédent ne dépend pas seulement de la donnée radicielle schématique mais aussi du $\mathscr{D}$-module fidèle M choisi, même si A est anneau de valuation discrète complet (3.2.14). Cependant, lorsque $\mathfrak{Z}$ est lisse, la composante neutre $\mathfrak{G}^0$ de $\mathfrak{G}$ est indépendante du choix de M. Contentons-nous d'énoncer le résultat qui nous sera utile par la suite :

Théorème. — *Gardons les hypothèses de théorème* 3.8.1 *et supposons de plus que* A *est un anneau de valuation de hauteur* 1 *ou un anneau de Dedekind, que* $\mathfrak{Z}$ *est lisse et que les* $\mathfrak{U}_a$ *sont connexes.*

(i) *Le schéma en groupes* $\mathfrak{G}^0$ *est (à isomorphisme unique près) le seul schéma en groupes connexe de fibre générique* G *possédant les trois propriétés* (S^0 1), (S^0 2) *et* (S^0 3) *obtenues en remplaçant* $\mathfrak{Z}$ *par* $\mathfrak{Z}^0$ *dans les conditions* (S 1), (S 2) *et* (S 3) *de* 3.8.1.

(ii) *Le schéma en groupes* $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{Z}.\mathfrak{G}^0$ (cf. 2.2.9) *est (à isomorphisme unique près) le seul schéma en groupes de fibre générique* G *possédant les trois propriétés* (S 1), (S 2) *et* (S 3) *de* 3.8.1 *et tel que* $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{Z}.(\mathfrak{G}^1)^0$.

On peut même dans (i) (*resp.* (ii)) *remplacer la condition* (S^0 2) (*resp.* (S 2)) *par celle obtenue en y remplaçant deux fois les mots* « pour tout » *par* « il existe un ».

Cela résulte immédiatement de 1.2.13 et 1.2.14, compte tenu de ce que les conditions imposées entraînent la lissité des schémas considérés.

3.9. Compléments.

3.9.1. — *Groupes réductifs en caractéristique zéro.*

Dans l'énoncé du théorème 3.8.1, *on peut supprimer les deux hypothèses* G *quasi-déployé sur* K *et* S *maximal parmi les tores* K*-déployés à condition de supposer que* $\mathfrak{Z}$ *possède une représentation linéaire fidèle* σ *telle que la* K*-représentation* σ_K *de* Z *soit complètement réductible* (condition automatiquement satisfaite si car K = 0, puisque Z est réductif).

Comme ce résultat ne sera pas utilisé par la suite, nous nous contenterons d'en esquisser la démonstration. Il s'agit de prouver 3.7.6 et, en reprenant les notations et les arguments de 3.7, on voit qu'il suffit de montrer l'assertion suivante :

a) Il existe une K*-représentation de* G *dans un espace vectoriel* W *et un sous-*A*-module de type fini* M_0 *du sous-espace* W^0 *des vecteurs dominants de* W, *engendrant* W^0, *tel que* $\mathfrak{Z}$ *opère fidèlement dans* M_0.

Soit T un tore maximal de G défini sur K, avec $S \subset T$ d'où $T \subset Z$. Soient $\overline{K}$ une clôture séparable de K et Ψ le système de racines de G suivant T. Le système de racines Ψ_Z de Z suivant T est l'ensemble des $\alpha \in \Psi$ triviales sur S et l'on peut choisir une base B de Ψ telle que $B_Z = B \cap \Psi_Z$ soit une base de Ψ_Z et qu'une racine $\alpha \in \Psi$ dont la restriction à S appartient à un élément de Φ^+ soit positive. On note Λ_G^+ (resp. Λ_Z^+) l'ensemble des poids dominants de G (resp. Z) relativement à B (resp. B_Z) ; on a $\Lambda_G^+ \subset \Lambda_Z^+$.

Le caractère χ de $\mathfrak{Z}$ dans $D = \det \mathrm{Lie}\, \mathfrak{U}^+$ (3.6.4) restreint à T est le produit des racines $\alpha \in \Psi^+ - \Psi_Z^+$, d'où résulte que $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle = 0$ si $\alpha \in B_Z$ et $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geqq 1$ si $\alpha \in B - B_Z$. Par suite, *si* λ *est un poids dominant de* Z, *alors* $\lambda\chi^N$ *est un poids dominant de* G *pour* N *entier assez grand.*

Partons alors d'une représentation fidèle σ de $\mathfrak{Z}$ dans un A-module M_0 projectif de type fini telle que la K-représentation σ_K de Z soit complètement réductible. On voit comme en 3.7 que, quitte à remplacer σ par la représentation $(\sigma \otimes (\bigotimes^N \chi)) \oplus \chi$ et à considérer séparément chaque composante K-irréductible, il suffit, pour prouver *a)*, de démontrer

b) soit σ *une* K*-représentation* K*-irréductible de* Z *dans* V *telle que les poids dominants des composantes* $\overline{K}$*-irréductibles de* $\sigma_{\overline{K}}$ *soient aussi des poids dominants de* G; *il existe une* K*-représentation* ρ *de* G *dans un espace vectoriel* $W \supset V$ *telle que la restriction de* ρ *à* Z *laisse stable* V *et y induise* σ, *et que l'espace des vecteurs dominants pour* G *de* W *coïncide avec celui des vecteurs dominants pour* Z *de* V.

Rappelons que le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère sur Λ_G^+ (resp. Λ_Z^+) : si $\lambda \mapsto {}^\gamma\lambda$ est l'opération « naturelle » de $\gamma \in \Gamma$ sur le groupe des caractères de T et si $\lambda \in \Lambda_G^+$ (resp. $\lambda \in \Lambda_Z^+$), alors $\gamma_G(\lambda)$ (resp. $\gamma_Z(\lambda)$) est l'unique poids dominant de G (resp. Z) transformé de ${}^\gamma\lambda$ par un élément du groupe de Weyl W_G de G (resp. W_Z de Z). Comme $W_Z \subset W_G$, on voit que si λ et $\gamma_Z(\lambda)$ sont des poids dominants de G (donc

de Z), on a $\gamma_G(\lambda) = \gamma_Z(\lambda)$. En particulier, d'une part *tout poids dominant de* G *qui est fixe par l'action de* Γ *sur* Λ_Z^+ *est aussi fixe pour l'action de* Γ *sur* Λ_G^+ et d'autre part les hypothèses de *b)* entraînent que l'*ensemble* P *des poids dominants des composantes* $\overline{K}$*-irréductibles de* $\sigma_{\overline{K}}$ *est une orbite de* Γ *aussi bien pour son action sur* Λ_G^+ *que sur* Λ_Z^+.

Utilisant les résultats du nº 7 de [36], on se ramène aisément au cas où P est réduit à un seul poids λ. Il suffit alors d'adapter la démonstration du théorème 3.3 de [36], dont nous reprenons les notations (à quelques changements évidents près, notamment de *k* en K...). On peut supposer que le $\overline{K}$-isomorphisme φ de G sur un groupe K-déployé G^d envoie T sur un tore maximal K-déployé T^d de G^d et par suite envoie Z sur un sous-groupe K-déployé Z^d de G^d. Le 1-cocycle $\xi : \gamma \mapsto \varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1} \circ \gamma^{-1}$ envoie alors Γ dans le groupe des automorphismes de $G^d(\overline{K})$ conservant $Z^d(\overline{K})$.

La représentation $\overline{K}$-irréductible ρ^d de G^d dans W^d de poids dominant $\lambda \circ \varphi^{-1}$ restreinte à Z^d contient une fois et une seule la représentation $\overline{K}$-irréductible σ^d de Z^d de même poids dominant ([36], p. 204). Soit V^d le sous-espace correspondant : on voit aussitôt que le 1-cocycle ζ défini dans [36], p. 204, à valeurs dans PGL(W), conserve V et fournit un 1-cocycle ζ' à valeurs dans PGL(V). Il suffit alors de tordre simultanément d'une part G^d et Z^d par ξ, d'autre part GL(W) par ζ et GL(V) par ζ' pour déduire de ρ^d, comme dans [36], la représentation ρ de G cherchée (on remarquera que les algèbres à division canoniquement associées à G et λ d'un côté, à Z et λ de l'autre, sont isomorphes : cela résulte aussi de la prop. 5.5.2 de [36]).

3.9.2. — Pour éviter des complications techniques, nous avons supposé dès le début de ce chapitre que K est le corps des fractions de A. Cependant la méthode peut être aménagée de façon à s'appliquer à la descente d'un corps à un *sous-corps*. On peut ainsi déduire l'existence des schémas de Chevalley sur **Z** à partir de l'existence des groupes correspondants sur **C** : on commence par descendre de **C** à **Q** en faisant jouer à ce dernier le rôle de A, puis de **Q** à **Z** comme en 3.2.

3.9.3. — *Cas des données radicielles schématiques de Chevalley.*

Supposons que A soit un anneau de Dedekind, G un groupe déployé et $\mathscr{D}$ une donnée radicielle schématique de Chevalley. La proposition suivante montre alors qu'un $\mathscr{D}$-module fidèle pour $\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}$ est « presque toujours » fidèle.

a) Proposition. — *Supposons remplie l'une au moins des conditions suivantes* :

(i) *l'idéal* (2) *est totalement non ramifié dans* A, *c'est-à-dire que* $2 \neq 0$ *et que tout idéal dont une puissance est divisible par* 2 *est lui-même divisible par* 2.

(ii) *le groupe* G *ne possède aucun sous-groupe distingué qui soit adjoint de type* C_n ($n \geqq 1$).

Alors, toute donnée radicielle schématique dominée par $\mathscr{D}$ *coïncide avec* $\mathscr{D}$. *En particulier, tout* $\mathscr{D}$*-module fidèle pour* $\mathfrak{S}$ *est fidèle.*

Que la dernière assertion soit conséquence de la précédente résulte de 3.1.6.

b) Il est facile de voir que si un schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}$ de fibre générique G a pour « composante neutre » $\mathfrak{G}^0$ un schéma de Chevalley, alors $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0$ (pour le cas d'un anneau de valuation hensélien, dont le cas général se déduit aussitôt, cf. 4.6). On en déduit :

Corollaire. — *Supposons remplie l'une des conditions* (i) *et* (ii), *soit* $\rho : G \to GL(V)$ *une représentation linéaire fidèle de* G *et soit* M *un sous-*A*-module de type fini de* V *stable par* Dist $\mathscr{D}$ *et tel que* $KM = V$. *Alors l'adhérence schématique* $\mathfrak{G}$ *de* $\rho(G)$ *dans* $\mathfrak{GL}(M)$ *est le schéma de Chevalley associé à* $\mathscr{D}$.

En effet, 3.5.3 (2) entraîne que $\mathfrak{S}$ et les $\mathfrak{U}_a$ opèrent sur M et 2.1.6 montre que $\mathfrak{S}$ y opère fidèlement. Vu la proposition, M est donc un $\mathscr{D}$-module fidèle. Enfin, 3.8.3 puis, à nouveau, la proposition impliquent que $\mathfrak{G}^0$, donc $\mathfrak{G}$, est le schéma de Chevalley associé à $\mathscr{D}$.

Pour $A = \mathbf{Z}$, ceci est essentiellement un résultat de C. Chevalley [16]; notre démonstration s'apparente d'ailleurs à la sienne.

c) Le corollaire précédent et, *a fortiori*, la proposition ne sont pas vrais sans hypothèse sur A et G comme le montre l'exemple suivant : $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $G = PGL_2$, $\rho = Ad$, $\Phi = \{\pm a\}$, $M = \sqrt{2}Ae_{-a} + Ah_a + \sqrt{2}Ae_a$, avec les notations $e_{\pm a}$, h_a de 3.2.2, que nous conservons dans la preuve ci-dessous.

d) Preuve de la proposition.

La condition (ii) est équivalente à

(ii′) pour $a \in \Phi$, le sous-groupe de G engendré par U_a et U_{-a} est isomorphe à SL_2.

Soit $\mathscr{D}' = (\mathfrak{Z}, (\mathfrak{U}'_a))$ une donnée radicielle schématique dominée par $\mathscr{D}$. Nous devons montrer que, pour $a \in \Phi$, le morphisme $\mathfrak{U}_a \to \mathfrak{U}'_a$ prolongeant l'identité de U_a est un isomorphisme. Quitte à remplacer G par le sous-groupe G_a engendré par U_a et U_{-a}, ce qui est loisible vu la reformulation (ii′) de (ii), nous pouvons supposer que $G = G_a$. Posons alors $e = e_a$, $f = e_{-a}$, $h = h_a$. Identifions $K[U_a]$ à un anneau de polynômes K[X] au moyen de l'épinglage utilisé pour définir la donnée $\mathscr{D}$ (cf. 3.2.2). Ainsi, $A[\mathfrak{U}_a] = A[X]$. Comme $\mathfrak{U}'_a$ est normalisé par $\mathfrak{S}$, on peut écrire

$$A[\mathfrak{U}'_a] = A + \Sigma \mathfrak{a}_i X^i,$$

où $\mathfrak{a}_i$ est un idéal de A, et notre assertion revient à $\mathfrak{a}_1 = A$. Faisons l'hypothèse inverse et cherchons à en déduire une contradiction. Quitte à localiser en un idéal premier contenant $\mathfrak{a}_1$, nous pouvons supposer que A est un anneau de valuation discrète et, désignant par π une uniformisante, que π divise $\mathfrak{a}_1$, ce qui implique que $\pi^{-1}e \in \Delta' = \text{Dist}\,\mathscr{D}'$. Comme l'identité de U_{-a} se prolonge en un morphisme $\mathfrak{U}_{-a} \to \mathfrak{U}'_{-a}$, Δ' contient aussi les puissances réduites $f^{(n)}$ de f. Mais un simple calcul (utilisant, si l'on veut, [NB] Lie VIII, n° 12.5, Lemme 4) montre que

$$h = [[f^{(2)}, e] - f.[f, e], e].$$

Par conséquent, $\pi^{-2}h \in \Delta'$, et cela implique que G est isomorphe à PGL_2 (sinon $\mathfrak{S}$ aurait Ah pour algèbre de Lie) et que π^2 divise 2, en contradiction avec les conditions (i) et (ii).

3.9.4. — *Anneaux de dimension homologique* $\leqslant 2$. (Complément ajouté aux épreuves.)

Le théorème 3.8.1 se généralise au cas où l'anneau A n'est plus supposé prüférien mais est nœthérien, intégralement clos et de dimension homologique $\leqslant 2$, par exemple pour $A = k[x, y]$, où k est un corps, ou pour $A = A_1[[z]]$, où A_1 est un anneau de Dedekind (ce cas pourrait être utile dans l'étude des groupes associés aux algèbres de Kac-Moody). Nous devons cependant supposer alors que les schémas $\mathfrak{U}_a$ sont connexes, et le A-schéma $\mathfrak{G}$ obtenu n'est *peut-être pas affine* (cf. 3.2.15) : il ne possède peut-être plus de représentation linéaire fidèle au sens de 1.4.5, mais il s'identifie encore à un sous-schéma en groupes (non nécessairement fermé) plat de dimension finie d'un $\mathfrak{GL}(M)$, et il possède les autres propriétés énoncées dans 3.8.1. Pour établir ce résultat, il suffit de montrer l'existence d'un $\mathscr{D}$-module fidèle et d'appliquer la proposition 2.2.10. Autrement dit, il suffit de généraliser 3.6 et 3.7.

A cette fin, on remarque que si M est un sous-A-module de type fini d'un K-espace vectoriel V, engendrant V (autrement dit, un réseau de V), alors M est contenu dans un plus petit sous-A-module projectif de type fini de V, que nous appelons l'enveloppe projective de M et notons $\hat{M}$. En effet, comme A est un anneau de Krull, on sait que M est contenu dans un plus petit réseau *réflexif*, qui est l'intersection des localisés $M_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}$ décrivant l'ensemble P de idéaux premiers de hauteur 1 de A ([NB] AC VII, p. 50). Mais comme A est nœthérien de dimension homologique $\leqslant 2$, un A-module est un réseau réflexif si et seulement si il est projectif de type fini ([NB] A X, § 8, exer. 13, p. 203), d'où notre assertion. De plus, il existe $x \in K^\times$ tel que $M \subset \hat{M} \subset xM$ ([NB] AC VII, § 4, prop. 2) et x n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in P$, d'où

$$\hat{M} = xM \cap M_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \cap M_{\mathfrak{p}_n}. \tag{1}$$

De (1) résulte aussitôt que si $u \in \mathrm{End}\, V$ est tel que $u(M) \subset M$, alors $u(\hat{M}) \subset \hat{M}$ et que si V est muni d'une structure de comodule

$$d : V \to C \otimes_A V$$

sur une A-coalgèbre plate C telle que M soit un sous-comodule de V, alors $\hat{M}$ est aussi un sous-comodule de V, comme intersection finie de sous-comodules ([30]).

On voit alors aisément que 3.6.1 reste valable, à condition de supposer M_0 projectif de type fini et de remplacer dans (i) et (ii) le sous-module $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathfrak{U}_\Psi).M_0$ par son enveloppe projective $\hat{M}$. On modifie de même 3.6.2 (resp. 3.6.4, resp. 3.7.5) en supposant M_0 projectif de type fini et en remplaçant $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}).M_0$ par $\hat{M}$ (resp. $M_N = \rho(N)(\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}).v_N$ par $\hat{M}_N$, resp. $M = \rho(\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}).M_0$ par $\hat{M}$) et l'existence d'un $\mathscr{D}$-module fidèle (3.7.8) résulte de 3.6.4 et 3.7.5 ainsi modifiés.

§ 4. GROUPES QUASI-DÉPLOYÉS SUR UN CORPS VALUÉ

Dans ce paragraphe, sauf mention expresse du contraire, la lettre G désigne un groupe réductif connexe quasi-déployé sur K et S en est un tore défini et déployé sur K maximal. A partir du n° 4.2, K sera supposé valué.

4.1. Généralités (1). Structure des U_a.

4.1.1. — Rappelons qu'un groupe réductif défini sur K est dit *quasi-déployé* (sur K) s'il possède les propriétés équivalentes suivantes :

— le centralisateur Z d'un K-tore déployé maximal est un tore;
— G possède un sous-groupe de Borel B défini sur K.

On peut toujours supposer que $B \supset Z$. Pour aider le lecteur à se souvenir que Z est un tore (maximal), nous le noterons aussi T.

4.1.2. — Soit K_s une clôture séparable de K. On sait que T et G sont déployés sur K_s. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ opère sur le groupe des caractères $X^*(T)$ de T, conserve le système de racines $\tilde{\Phi}$ de G suivant T ainsi que la base $\tilde{\Delta}$ de $\tilde{\Phi}$ associée au K-sous-groupe de Borel B. Il existe une plus petite sous-extension $\tilde{K}$ de K_s déployant G : c'est aussi la plus petite sous-extension déployant T; elle est galoisienne et est le corps des invariants du noyau de la représentation de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ dans $X^*(T)$.

On note Φ le système des racines de G suivant S, $\boldsymbol{\Phi}$ le système des rayons radiciels de G suivant S (au sens de 1.1.2) et V le dual du sous-espace vectoriel engendré par Φ dans $\mathbf{R} \otimes X^*(S)$. On sait qu'un élément $a \in \boldsymbol{\Phi}$ contient un ou deux éléments de Φ. Dans le premier cas, nous notons également a l'unique élément de Φ appartenant à a. Dans le second cas, nous disons que a est *pluriel* et nous notons a (resp. $2a$) l'élément non divisible (resp. divisible) de Φ appartenant à a. On sait que les éléments de Φ sont les restrictions à S des éléments de $\tilde{\Phi}$, que les restrictions à S des éléments de $\tilde{\Delta}$ forment une base Δ de Φ et que les éléments de $\tilde{\Delta}$ dont la restriction à S est un élément donné de Δ forment une orbite de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ (ou de $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$) dans $\tilde{\Delta}$ (pour toutes ces assertions, voir [4] *passim*, notamment § 6).

---

(1) Les résultats de ce n° 4.1 sont valables pour un corps K quelconque éventuellement fini.

4.1.3. — Pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}$, notons $\widetilde{U}_\alpha$ le sous-groupe radiciel correspondant de $G_{\widetilde{K}}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ permute les $\widetilde{U}_\alpha$ et $\gamma(\widetilde{U}_\alpha) = \widetilde{U}_{\gamma(\alpha)}$. Soit Σ_α le stabilisateur de la racine α dans $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$: c'est aussi le stabilisateur de $\widetilde{U}_\alpha$; il ne dépend donc que du sous-groupe $\widetilde{U}_\alpha$ et non du choix du tore S normalisant $\widetilde{U}_\alpha$. Le corps des invariants de Σ_α sera noté L_α et appelé le *corps de définition* de la racine α (ou du sous-groupe $\widetilde{U}_\alpha$). L'opération de Σ_α dans $\widetilde{U}_\alpha$ le munit par descente galoisienne d'une structure de droite (1.2.10) sur L_α. Si $\widetilde{x}_\alpha : \mathfrak{D}_{L_\alpha} \to \widetilde{U}_\alpha$ est un L_α-épinglage de $\widetilde{U}_\alpha$ (3.2.1), et si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$, on a $\gamma(L_\alpha) = L_{\gamma(\alpha)}$ et $\gamma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1} : \mathfrak{D}_{\gamma(L_\alpha)} \to \widetilde{U}_{\gamma(\alpha)}$ est un $L_{\gamma(\alpha)}$-épinglage de $\widetilde{U}_{\gamma(\alpha)}$, ne dépendant que de $\gamma(\alpha)$.

Il en résulte que l'on peut choisir un $\widetilde{K}$-épinglage $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha \in \widetilde{\Delta}}$ de $G_{\widetilde{K}}$ (3.2.2) tel que

1) $\widetilde{x}_\alpha : \mathfrak{D} \to \widetilde{U}_\alpha$ est un L_α-isomorphisme (pour $\alpha \in \widetilde{\Delta}$).

2) $\widetilde{x}_{\gamma(\alpha)} = \gamma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1}$ (pour $\alpha \in \widetilde{\Delta}$ et $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$).

Nous dirons que c'est un *épinglage de Steinberg* de G (relativement à S). On montre alors (cf. [31]) qu'il existe un $\widetilde{K}$-système de Chevalley $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha \in \widetilde{\Phi}}$ (3.2.2) prolongeant cet épinglage et possédant les propriétés suivantes :

3) Si la restriction a de $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ à S est un élément non divisible de Φ, alors $\widetilde{x}_\alpha$ est un L_α-isomorphisme de $\mathfrak{D}$ sur $\widetilde{U}_\alpha$ et l'on a $\widetilde{x}_{\gamma(\alpha)} = \gamma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1}$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$.

4) Si la restriction a de $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ à S est un élément divisible de Φ, alors il existe deux racines distinctes $\beta, \beta' \in \widetilde{\Phi}$ de restriction $a/2$ à S telles que $\alpha = \beta + \beta'$; on a $L_\beta = L_{\beta'}$, L_β est une extension quadratique (séparable) de L_α et pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$, il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\gamma \circ \widetilde{x}_\alpha(u) \circ \gamma^{-1} = \widetilde{x}_{\gamma(\alpha)}(\varepsilon u)$; si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L_\alpha)$, on a $\varepsilon = -1$ si et seulement si γ induit sur L_β l'unique automorphisme non trivial.

Un tel système sera appelé un *système de Chevalley-Steinberg* de G.

4.1.4. — Nous allons maintenant décrire les structures possibles pour les sous-groupes radiciels U_a pour $a \in \Phi$. Pour cela, on peut évidemment supposer que a contient un élément de Δ. On note $\widetilde{\Delta}_a$ l'orbite correspondante de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ dans $\widetilde{\Delta}$. Soit d'autre part $\pi : G^a \to \langle U_a, U_{-a} \rangle$ un revêtement universel du groupe (semi-simple) engendré par U_a et U_{-a} : c'est un groupe semi-simple, simplement connexe, défini et quasi-déployé sur K, déployé sur $\widetilde{K}$, de rang relatif un, admettant $\pi^{-1}(S)$ (resp. $\pi^{-1}(T)$) comme tore déployé maximal (resp. tore maximal). L'orbite $\widetilde{\Delta}_a$ s'identifie à une base du système des racines de G^a suivant $\pi^{-1}(T)$ et π induit des isomorphismes des deux sous-groupes unipotents maximaux U_+ et U_- de G^a normalisés par $\pi^{-1}(S)$ sur U_a et U_{-a} respectivement.

Le groupe $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ permute transitivement les éléments de l'orbite $\widetilde{\Delta}_a$. Un coup d'œil à la classification des diagrammes de Dynkin montre alors que deux cas seulement sont possibles :

— *Cas* I : $G^a_{\widetilde{K}}$ est isomorphe à un produit de groupes $\mathfrak{SL}_2$ indexé par $\widetilde{\Delta}_a$ et permutés transitivement par $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$, le corps de définition du facteur d'indice α est L_α et $G^a \simeq \Pi_{L_\alpha/K} \mathfrak{SL}_2$ (cf. 1.5.16).

— *Cas* II : $G^a_{\widetilde{K}}$ est isomorphe à un produit de groupes $\mathfrak{SL}_3$ indexé par l'ensemble I des parties à deux éléments $\{\alpha, \alpha'\}$ de $\widetilde{\Delta}_a$ telles que $\alpha + \alpha'$ soit une racine. On a alors $L_\alpha = L_{\alpha'}$, L_α est une extension quadratique (séparable) de $L_{\alpha+\alpha'}$, le facteur simple G' d'indice $\{\alpha, \alpha'\}$ est défini sur $L_2 = L_{\alpha+\alpha'}$, déployé sur $L = L_\alpha$ et est isomorphe sur L_2 au groupe spécial unitaire de la forme hermitienne $h : (x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto x^\sigma_{-1}x_1 + x^\sigma_0 x_0 + x^\sigma_1 x_{-1}$ sur L^3 (où σ est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(L/L_2)$), considéré comme groupe algébrique sur L_2 et que nous noterons ${}^L_{L_2}\mathfrak{SU}_3$, ou simplement $\mathfrak{SU}_3$, lorsque aucune confusion n'est à craindre. On a alors $G^a \simeq \Pi_{L_2/K}\mathfrak{SU}_3$.

Notons que l'on se trouve dans le cas II ou dans le cas I suivant que le rayon radiciel a est pluriel ou non.

4.1.5. — Plaçons-nous dans le cas I. Le groupe $(U_a)_{\widetilde{K}}$ est alors le produit direct des $\widetilde{U}_\alpha$ pour $\alpha \in \widetilde{\Delta}_a$, et ceux-ci sont permutés transitivement par $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$. Il en résulte que U_a *est* K-*isomorphe à* $\Pi_{L_\alpha/K}\widetilde{U}_\alpha$ (pour $\alpha \in \widetilde{\Delta}_a$). Si $\widetilde{x}_\alpha$ est un L_α-épinglage de $\widetilde{U}_\alpha$, alors $x_a = \Pi_{L_\alpha/K}\widetilde{x}_\alpha$ est un K-isomorphisme de $\Pi_{L_\alpha/K}\mathfrak{D}$ sur U_a; un isomorphisme obtenu de cette manière (ou plutôt le couple (L_α, x_a)) sera appelé un *épinglage* de U_a.

Notons que $\Pi_{L_\alpha/K}\mathfrak{D}$ n'est autre que le K-schéma $\mathfrak{L}_\alpha$ associé au K-module L_α (1.4.1), défini par $\mathfrak{L}_\alpha(R) = L_\alpha \otimes_K R$ pour toute K-algèbre R. L'isomorphisme x_a fournit alors un isomorphisme de groupes du groupe additif $L_\alpha = \mathfrak{L}_\alpha(K)$ sur $U_a(K)$, qu'on note encore x_a, par abus de langage. Si $(\widetilde{x}_\beta)_{\beta\in\widetilde{\Delta}}$ est un épinglage de Steinberg de G, on a, pour $u \in L_\alpha$,

$$(1) \qquad x_a(u) = \prod_{\beta\in\widetilde{\Delta}_a} \widetilde{x}_\beta(u_\beta) \quad \text{avec } u_{\gamma(\alpha)} = \gamma(u) \quad \text{pour } \gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K).$$

L'épinglage de U_{-a} *associé* à x_a est celui obtenu à partir du L_α-épinglage de $\widetilde{U}_{-\alpha}$ associé à $\widetilde{x}_{-\alpha}$ (3.2.1) (notons que $L_{-\alpha} = L_\alpha$!). On voit aisément qu'il peut être caractérisé par la propriété suivante (cf. 3.2.1 (i)) : pour $u \in L^\times_\alpha$, on a

$$(2) \qquad m_a(u) = x_a(u)\, x_{-a}(u^{-1})\, x_a(u) \in N$$

$$(\text{resp. } m_{-a}(u) = x_{-a}(u)\, x_a(u^{-1}) x_{-a}(u) \in N).$$

L'image de $m_a(u)$ dans le groupe de Weyl $W = N(K)/T(K)$ est la réflexion par rapport à la racine a. On pose $m_a = m_a(1)$. Alors,

$$(3) \qquad x_{-a}(u) = m_a x_a(u)\, m_a^{-1}.$$

Enfin, soit G^α le facteur simple de $G^a_{\widetilde{K}}$ d'indice α. Vu 3.2.1, il existe un unique L_α-isomorphisme ζ_α de $\mathfrak{SL}_2$ sur G^α tel que $\widetilde{x}_{\pm\alpha} = \pi \circ \zeta_\alpha \circ y_\pm$ où y_+ (resp. y_-) est l'homomorphisme $u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{SL}_2$. On note ζ_a le K-homomorphisme $\pi \circ \Pi_{L/K}\zeta_\alpha$ de $\Pi_{L/K}\mathfrak{SL}_2$ dans G et $\widetilde{a}$ l'homomorphisme

$t \mapsto \zeta_a\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right)$ de $\Pi_{L/K}\mathfrak{Mult}$ dans T (cf. 3.2.1). On a $m_a = \zeta_a\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $m_a(u) = \tilde{a}(u)\, m_a = m_a \tilde{a}(u^{-1})$ pour tout $u \in L_\alpha^\times$.

On prendra garde que, contrairement à ce que les notations pourraient faire croire, les objets $x_{\pm a}$, m_a, ζ_a dépendent non seulement de a, mais des choix de $\alpha \in \tilde{\Delta}_a$ et de l'épinglage $\tilde{x}_\alpha$.

4.1.6. — Déterminons maintenant l'ouvert W_a de $U_a \times U_{-a}$ et le morphisme $\beta_a : W_a \to U_{-a} \times T \times U_a$ introduits en 1.1.10. Des formules

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-uu' & u \\ -u' & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & tv \\ -tv' & t^{-1}-tvv' \end{pmatrix}$$

résulte aussitôt que W_a *est l'ouvert spécial* de $U_a \times U_{-a}$ *défini par la fonction*

$$d_a = \mathrm{Norme}_{L/K}(1-uu') \tag{1}$$

et que

$$\beta_a(x_a(u), x_{-a}(u')) = (x_{-a}((1-uu')^{-1}u'), \tilde{a}((1-uu')), x_a((1-uu')^{-1}u)). \tag{2}$$

4.1.7. — Lorsque l'on se donne le sous-groupe U_a, mais lui seul, il faut faire plusieurs choix pour définir un épinglage de U_a :

(i) Choix d'un tore déployé maximal S normalisant U_a;
(ii) Choix d'un sous-groupe radiciel $\tilde{U}_\alpha \subset U_a$;
(iii) Choix d'un L_α-isomorphisme $\mathfrak{D} \to \tilde{U}_\alpha$.

Le premier choix est sans conséquence : en effet, la composante neutre du normalisateur de U_a contient T, donc est engendrée par T et les sous-groupes radiciels $\tilde{U}_\beta$ qu'elle contient ([4], 3.4). Or, un sous-groupe $\tilde{U}_\beta$ ne peut normaliser U_a que s'il le centralise, d'où $\mathrm{Norm}^0 U_a = T.\mathrm{Cent}^0 U_a$. Il en résulte que les sous-groupes $\tilde{U}_\alpha$ de U_a sont exactement les sous-groupes invariants par l'action de $\mathrm{Norm}^0 U_a$ sur U_a, non triviaux et minimaux. Ils ne dépendent donc pas du choix de $S \subset \mathrm{Norm}^0 U_a$. D'autre part, on sait que la structure de droite et la notion d'épinglage d'un $\tilde{U}_\alpha$ sont intrinsèques (3.2.1).

Remplacer $\tilde{U}_\alpha$ par $\tilde{U}_{\gamma(\alpha)}$ revient à remplacer L_α par le conjugué $\gamma(L_\alpha)$ et le L_α-épinglage $\tilde{x}_\alpha$ de $\tilde{U}_\alpha$ par $\gamma \circ \tilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1}$. L'épinglage x_a est alors remplacé par $x_a \circ i$, où i est l'isomorphisme de $\Pi_{L_{\gamma(\alpha)}/K}\mathfrak{D}$ sur $\Pi_{L_\alpha/K}\mathfrak{D}$ déduit du K-isomorphisme $\gamma^{-1} : L_{\gamma(\alpha)} \to L_\alpha$.

Enfin, les L_α-automorphismes de $\mathfrak{D}$ sont donnés par les multiplications $u \mapsto cu$ pour $c \in L_\alpha^\times$. Par suite, changer le L_α-épinglage de $\tilde{U}_\alpha$ revient à remplacer l'épinglage x_a par un composé de x_a avec une application $u \mapsto cu$ pour un $c \in L_\alpha^\times$.

En résumé, on voit qu'un épinglage de U_a est la donnée d'une sous-extension convenable L de $\widetilde{K}$ et d'un isomorphisme convenable x de $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}$ sur U_a. Si (L', x') est un autre épinglage, ce qui précède montre qu'il existe un K-isomorphisme $j : L' \to L$ et un $c \in L^\times$ tels que x' soit obtenu en effectuant successivement le K-isomorphisme $j' : \mathfrak{D}_{L'} \to \mathfrak{D}_L$ défini par j, l'automorphisme $u \mapsto cu$ de $\mathfrak{Q}$ et l'isomorphisme $x : \mathfrak{D}_L \to U_a$. De plus, *$c$ est bien déterminé* car $x'(1) = cx(1)$ et *j est bien déterminé*, car j' l'est et j n'est autre que l'isomorphisme correspondant de $L' = \mathfrak{D}_{L'}(K)$ sur $L = \mathfrak{D}_L(K)$.

4.1.8. — De cette discussion résultent aisément les faits suivants :

(1) On sait que U_a est muni canoniquement d'une structure de K-espace vectoriel ([4], 3.17); tout épinglage (L, x) est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}$ sur U_a.

(2) L'ensemble des endomorphismes du K-espace vectoriel U_a de la forme $\mu_x(t) : x(u) \mapsto x(tu)$ (pour $t \in L$) ne dépend pas du choix de l'épinglage (L, x). C'est un corps isomorphe à L par l'application $t \mapsto \mu_x(t)$ et contenant les homothéties du K-espace vectoriel U_a. On le note L_a et on l'appelle le *corps attaché au rayon radiciel a.*

(3) Les éléments non nuls de L_a sont exactement les automorphismes de U_a induits par les éléments rationnels sur K de la composante neutre du normalisateur de U_a dans le groupe adjoint de G.

(4) Soit $\alpha \in \widetilde{\Delta}_a$ et soient $\widetilde{x}_\alpha$, x_a comme plus haut. L'isomorphisme μ_{x_a} de (2) ne dépend que de α et non du choix de l'épinglage $\widetilde{x}_\alpha$. Son inverse est un plongement de la K-extension L_a dans $\widetilde{K}$ et on obtient ainsi, lorsque α décrit $\widetilde{\Delta}_a$, tous les plongements de L_a dans $\widetilde{K}$ une fois et une seule.

(5) L'isomorphisme $x_a(u) \mapsto x_{-a}(u) = m_a x_a(u) m_a^{-1}$ de U_a sur U_{-a} (avec les notations de 4.1.6) définit un isomorphisme de L_a sur L_{-a}, indépendant du choix de l'épinglage. On l'appelle l'isomorphisme *canonique* de L_a sur L_{-a}.

4.1.9. — Plaçons-nous maintenant dans le cas II, et reprenons les notations de 4.1.4, cas II. Choisissons un L_α-épinglage $\widetilde{x}_\alpha$ de $\widetilde{U}_\alpha$, posons $\widetilde{x}_{\alpha'} = \sigma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \sigma^{-1}$, $\widetilde{x}_{\alpha+\alpha'} = \operatorname{int} m_{\alpha'}^{-1} \circ \widetilde{x}_\alpha$ (où $m_{\alpha'}$ est l'élément de N associé à $\widetilde{x}_{\alpha'}$ (3.2.1)) et soient $\widetilde{x}_{-\alpha}$, $\widetilde{x}_{-\alpha'}$ et $\widetilde{x}_{-(\alpha+\alpha')}$ les épinglages associés. On montre alors aisément qu'il existe un L-isomorphisme ζ et un seul de $\mathfrak{S}\mathfrak{Q}_3$ sur G' tel que

$$\zeta\begin{pmatrix} 1 & w & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{x}_\alpha(u)\,\widetilde{x}_{\alpha+\alpha'}(-v)\,\widetilde{x}_{\alpha'}(-w),$$

$$\zeta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 \\ -v & u & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{x}_{-\alpha'}(w)\,\widetilde{x}_{-(\alpha+\alpha')}(v)\,\widetilde{x}_{-\alpha}(-u).$$

Si l'on transporte l'action de σ à $\mathfrak{SL}_3$ grâce à ζ, on constate que

$$\sigma\begin{pmatrix} 1 & w & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u^\sigma & u^\sigma w^\sigma + v^\sigma \\ 0 & 1 & -w^\sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et qu'en tordant $\mathfrak{SL}_3$ par σ, on obtient un groupe algébrique défini sur L_2 qui n'est autre, comme on l'a déjà dit, que le groupe $\mathfrak{SU}_3$ de la forme hermitienne $h : (x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto x_{-1}^\sigma x_1 + x_0^\sigma x_0 + x_1^\sigma x_{-1}$ sur L^3, et $\zeta_a = \pi \circ \Pi_{L_2/K}\zeta$ est un homomorphisme de $\Pi_{L_2/K}\mathfrak{SU}_3$ dans G.

Les matrices diagonales et antidiagonales appartenant au groupe des points rationnels sur L_2 de ce groupe $\mathfrak{SU}_3$ sont les matrices

$$(1) \qquad j(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1}t^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & (t^\sigma)^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{pour } t \in L^\times),$$

$$(2) \qquad m(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(t^\sigma)^{-1} \\ 0 & -t^{-1}t^\sigma & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{pour } t \in L^\times).$$

Les matrices triangulaires supérieures unipotentes de ce même groupe sont les matrices

$$(3) \qquad \mu(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -u^\sigma & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $u, v \in L$ satisfaisant à

$$(4) \qquad v + v^\sigma = u^\sigma u$$

(les notations ont été choisies de telle façon que $\mu(u, v)$ corresponde à l'élément noté $u_1(z, k)$ dans I, 10.1.2, avec $z = u$ et $k = v$).

Considérons alors la sous-variété $H_0(L, L_2)$ de $L \times L$, considéré comme espace vectoriel de dimension 4 sur L_2, définie par l'équation (4) et munissons-la de la loi de composition

$$(5) \qquad (u, v)(u', v') = (u + u', v + v' + u^\sigma u')$$

obtenue en transportant par μ la loi de groupe induite par celle de $\mathfrak{SU}_3$. Il résulte alors de ce qui précède que $H_0(L, L_2)$ est un L_2-groupe et que

$$(6) \qquad \zeta \circ \mu : (u, v) \mapsto \tilde{x}_\alpha(u)\tilde{x}_{\alpha+\alpha'}(-v)\tilde{x}_{\alpha'}(u^\sigma)$$

est un L_2-isomorphisme de groupes de $H_0(L, L_2)$ sur le sous-groupe unipotent maximal $U' = \widetilde{U}_\alpha \widetilde{U}_{\alpha+\alpha'} \widetilde{U}_{\alpha'}$ de G'. Comme $U_a = \Pi_{L_2/K} U'$, on voit que

$$x_a = \pi \circ \Pi_{L_2/K}(\zeta \circ \mu)$$

est un K-*isomorphisme de groupes de* $H(L, L_2) = \Pi_{L_2/K} H_0(L, L_2)$ *sur* U_a. Un isomorphisme ainsi obtenu (ou plutôt le triple (L, L_2, x_a)) est appelé un *épinglage* de U_a. Comme plus haut, on note aussi x_a l'isomorphisme correspondant du groupe des points rationnels sur K de $H(L, L_2)$ (groupe qui s'identifie à l'ensemble des $(u, v) \in L \times L$ satisfaisant à (4) muni de la loi de groupe (5)) sur $U_a(K)$, isomorphisme qui est donné par

$$x_a(u, v) = \Pi \widetilde{x}_\beta(u_\beta)\, \widetilde{x}_{\beta+\beta'}(-v_\beta)\, \widetilde{x}_{\beta'}(u_\beta^\sigma), \tag{7}$$

où β décrit un sous-ensemble de $\widetilde{\Delta}_a$ contenant un et un seul point de chaque élément de I, β' étant l'autre point de cet élément de I, et où les différents termes intervenant dans le second membre sont définis comme suit : pour chaque β, on choisit $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/K)$ tel que $\beta = \gamma(\alpha)$; on a alors $\beta' = \gamma(\alpha')$; on pose $\widetilde{x}_\beta = \gamma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1}$, $\widetilde{x}_{\beta'} = \gamma \circ \widetilde{x}_{\alpha'} \circ \gamma^{-1}$, $\widetilde{x}_{\beta+\beta'} = \gamma \circ \widetilde{x}_{\alpha+\alpha'} \circ \gamma^{-1}$, $u_\beta = \gamma(u)$, $v_\beta = \gamma(v)$ (notons que $u_\beta, v_\beta \in L_\beta$ et que $v_\beta + v_\beta^\tau = u_\beta^\tau u_\beta$, où τ est l'unique $L_{\beta+\beta'}$-automorphisme non trivial de L_β).

4.1.10. — Il résulte de 4.1.9 (7) que le sous-groupe radiciel U_{2a} associé à la racine $2a$ se compose des $x_a(0, v)$, où v décrit l'ensemble L^0 des éléments de trace nulle de l'extension quadratique L de L_2 et l'application $v \mapsto x_a(0, v)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de L^0 sur U_{2a}. De plus, l'image de $x_a(u, v)$ dans U_a/U_{2a} ne dépend que de u; si on la note $\bar{x}_a(u)$, l'application $u \mapsto \bar{x}_a(u)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de L sur le groupe quotient U_a/U_{2a}.

4.1.11. — L'épinglage x_{-a} de U_{-a} *associé* à x_a est celui obtenu par la même méthode à partir de l'épinglage $\widetilde{x}_{-\alpha'}$ de $\widetilde{U}_{-\alpha'}$. C'est un isomorphisme de $H(L, L_2)$ sur U_{-a} donné par $x_{-a} = \pi \circ \Pi_{L_2/K}(\zeta \circ \mu_-)$, avec

$$\mu_-(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ -v & -u^\sigma & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(pour } (u, v) \in H(L, L_2)\text{)},$$

caractérisé par la propriété suivante : pour $(u, v) \in L \times L$ satisfaisant à (4) avec $v \neq 0$, les éléments $y', y'' \in U_a(K)$ tels que le produit

$$m_a(u, v) = y' x_{-a}(u, v) y''$$

appartienne à N (et ait donc pour image dans W la réflexion par rapport à la racine a) sont donnés par

$$y' = x_a(uv^{-1}, (v^\sigma)^{-1}) \quad \text{et} \quad y'' = x_a(u(v^\sigma)^{-1}, (v^\sigma)^{-1}) \tag{1}$$

(I, 10.1.11 (3)). Reprenons les notations de 4.1.9 et posons $m_a = \zeta_a(m(1))$. Alors on a

$$m_a(u, v) = \zeta_a(m(v)) = m_a \tilde{a}(v), \tag{2}$$

$$x_{-a}(u, v) = m_a x_a(u, v) m_a^{-1}, \tag{3}$$

où l'on note $\tilde{a}$ l'homomorphisme $t \mapsto \pi \circ \Pi_{L_2/K}(\zeta \circ j)$ de $\Pi_{L_2/K}\mathfrak{Mult}$ dans T.

4.1.12. — Des calculs matriciels simples dans SU_3, qu'il serait peu esthétique d'imprimer et que nous laissons au lecteur, entraînent que *l'ouvert* W_a *de* $U_a \times U_{-a}$ *de* 1.1.10 *est l'ouvert spécial défini par la fonction*

$$d_a(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) = \mathrm{Norme}_{L/K}(1 - u^\sigma u' + vv') \tag{1}$$

et que le morphisme $\beta_a : W_a \to U_{-a} \times T \times U_a$ de 1.1.10 est donné par

$$\begin{aligned} &\beta_a(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) \\ &\qquad = (x_{-a}(t^{-1}(u' - uv'), t^{-1}v'), \tilde{a}(t), x_a((t^\sigma)^{-1}(u - v^\sigma u'), t^{-1}v)), \end{aligned} \tag{2}$$

avec $t = 1 - u^\sigma u' + vv'$.

4.1.13. — Étudions maintenant comment interviennent les différents choix faits (choix de S, de $\tilde{U}_\alpha$, de $\tilde{x}_\alpha$). Si S′ est un autre tore déployé maximal normalisant U_a, il existe $g \in (\mathrm{Norm}^0 U_a)(K)$ tel que $S' = gSg^{-1}$. On voit aisément que

$$\mathrm{Norm}^0 U_a = T.\mathrm{Cent}^0 U_a . U_a.$$

Mais l'intersection $T.\mathrm{Cent}^0 U_a \cap U_a$ est le centre de U_a, qui, vu 4.1.9 (4) et (5), est K-isomorphe au sous-espace vectoriel $\{v \in L \mid v + v^\sigma = 0\}$ de L et a donc une cohomologie galoisienne triviale. Il s'ensuit que $g = g_1 g_2$ avec $g_1 \in (T.\mathrm{Cent}^0 U_a)(K)$ et $g_2 \in U_a(K)$. Alors $\mathrm{int}\, g_1$ conserve le sous-groupe $\tilde{U}_\alpha$ et l'on voit que *changer de tore déployé normalisant* U_a *revient à composer l'épinglage avec un automorphisme intérieur de* $H(L, L_2)$, défini par un élément rationnel sur K. Un tel automorphisme est de la forme

$$(u, v) \mapsto (u, v + w^\sigma u - u^\sigma w) \quad \text{pour un } w \in L. \tag{1}$$

Si S est fixé, remplacer la racine α par $\gamma(\alpha)$ et $\tilde{x}_\alpha$ par $\gamma \circ \tilde{x}_\alpha \circ \gamma^{-1}$ revient à remplacer x_a par $x_a \circ H(\gamma^{-1})$, où $H(\gamma^{-1}) : H(\gamma(L), \gamma(L_2)) \to H(L, L_2)$ est l'isomorphisme déduit de γ^{-1}. Enfin, un autre épinglage $\tilde{x}'_\alpha$ de $\tilde{U}_\alpha$ est de la forme $u \mapsto \tilde{x}_\alpha(cu)$ avec $c \in L^\times$ et remplacer $\tilde{x}_\alpha$ par $\tilde{x}'_\alpha$ revient à composer x_a avec l'automorphisme $(u, v) \mapsto (cu, c^\sigma cv)$ de $H(L, L_2)$.

En résumé, si (L', L'_2, x'_a) est un autre épinglage de U_a, il existe un K-isomorphisme $j : L' \to L$, tel que $j(L'_2) = L_2$, un $c \in L^\times$ et un $w \in L$ tels que x'_α soit obtenu en effectuant successivement

— l'isomorphisme $H(j) : H(L', L'_2) \to H(L, L_2)$ défini par j,
— l'automorphisme $\varphi_{c,w} : (u, v) \to (cu, c^\sigma c(v + w^\sigma u - u^\sigma w))$ de $H(L, L_2)$,
— l'épinglage x_a.

De plus, j, c *et* w *sont bien déterminés* par ces conditions. En effet, il est immédiat que $H(j)$ détermine j et que $\varphi_{c,w}$ détermine c et w. D'autre part, les automorphismes de $H(L, L_2)$ de la forme $\varphi_{c,w}$ forment un groupe qui ne contient aucun automorphisme non trivial de la forme $H(\gamma)$ pour un K-automorphisme γ de L conservant L_2. Le composé $\varphi_{c,w} \circ H(j) = x_a^{-1} \circ x'_a$ détermine donc bien j, c et w.

4.1.14. — Les assertions (1) à (5) de 4.1.8 restent exactes, à condition d'y remplacer U_a par le groupe quotient U_a/U_{2a} et de considérer, au lieu des épinglages x_a, les isomorphismes correspondants $\bar{x}_a$ de L sur U_a/U_{2a} (4.1.10).

De plus, l'image dans L_a du sous-corps L_2 de L par l'isomorphisme de L dans End U_a/U_{2a} défini par $\bar{x}_a$ ne dépend pas du choix de l'épinglage; on le note L_{2a} et l'on obtient ainsi l'*extension quadratique* $L_a \supset L_{2a}$ *attachée au rayon radiciel pluriel* a. On peut encore la caractériser ainsi : un élément rationnel sur K du normalisateur connexe de U_a dans le groupe adjoint de G définit un élément de norme un de L_a si et seulement s'il induit l'identité sur U_{2a}.

4.1.15. — Il est souvent commode d'utiliser une autre description du groupe $H(L, L_2)$ défini en 4.1.9. Soit L^0 le sous-L_2-espace vectoriel de L formé des éléments de trace nulle et soit $\lambda \in L$ tel que $\lambda + \lambda^\sigma = 1$. L'application

$$(1) \qquad j_\lambda : (u, v) \mapsto (u, v - \lambda u^\sigma u)$$

est un isomorphisme du K-groupe algébrique $H(L, L_2)$ sur le K-groupe algébrique H^λ constitué par le K-schéma obtenu par restriction des scalaires de L_2 à K à partir du L_2-groupe additif $L \times L^0$, muni de la loi de groupe

$$(2) \qquad (x, y).(x', y') = (x + x', y + y' - \lambda x x'^\sigma + \lambda^\sigma x^\sigma x').$$

4.1.16. — Donnons-nous un système de Chevalley-Steinberg $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}}$ de G (4.1.2). Pour toute racine $a \in \Phi$ non-divisible, choisissons une racine $\alpha(a) \in \tilde{\Phi}$ dont la restriction à S soit égale à a. Alors 4.1.5 et 4.1.9 nous procurent à partir des $\tilde{x}_{\alpha(a)}$ des épinglages x_a des groupes radiciels U_a (en notant encore a le rayon radiciel qui contient a). On peut choisir les $\alpha(a)$ de telle sorte que x_{-a} soit l'épinglage associé à x_a et nous dirons alors que $(x_a)_{a \in \Phi}$ est un *système cohérent* d'épinglages des U_a, déduit du système de Chevalley-Steinberg donné.

Supposons que G est K-simple et simplement connexe (nous laissons au lecteur le soin de généraliser). Soit $\tilde{\Delta}_0$ une composante du diagramme de Dynkin de G sur $\tilde{K}$, soit $\tilde{\Phi}_0$ le sous-système de racines engendré par $\tilde{\Delta}_0$ et soit Σ le quotient du stabilisateur par le fixateur de $\tilde{\Delta}_0$ dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. Toute orbite de $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ dans $\tilde{\Phi}$ rencontre $\tilde{\Phi}_0$ et l'on peut choisir les racines $\alpha(a)$ dans $\tilde{\Phi}_0$. L'examen des diagrammes de Dynkin et de leurs automorphismes fournit alors les résultats suivants :

a) Si $\Sigma = \{1\}$, autrement dit si G est K-isomorphe à un groupe $\Pi_{L/K} H$, où L est le corps des invariants du stabilisateur de $\tilde{\Delta}_0$ et où H est simple, déployé sur L,

de diagramme de Dynkin $\widetilde{\Delta}_0$, alors toutes les racines sont non divisibles et tous les corps L_α pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ sont égaux à L;

b) Si $\mathrm{Card}\,\Sigma = 2$ et s'il n'existe pas de rayon radiciel pluriel, les corps L_α pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ telle que sa restriction à S soit une racine longue (resp. courte) sont tous égaux à un même corps L (resp. L_2) et L est une extension quadratique (séparable) de L_2;

c) Si $\mathrm{Card}\,\Sigma = 2$ et s'il existe des rayons radiciels pluriels, les L_α pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ telle que sa restriction à S soit non divisible (resp. divisible) sont tous égaux à un même corps L (resp. L_2) et L est une extension quadratique (séparable) de L_2; le groupe G est K-isomorphe à $\Pi_{L_2/K}\mathfrak{SU}_{2n+1}$ $(n \geqq 1)$;

d) Si $\mathrm{Card}\,\Sigma = 3$ (d'où $\widetilde{\Delta}_0$ de type D_4), les assertions de *b)* sont valables, à ceci près que L est alors une extension cubique galoisienne de L_2;

e) Si $\mathrm{Card}\,\Sigma = 6$ (d'où $\widetilde{\Delta}_0$ de type D_4), les L_α pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ dont la restriction à S est une racine longue sont tous égaux à un même corps L_2; il existe une extension cubique non galoisienne L de L_2 contenue dans $\widetilde{K}$ telle que, pour chaque racine courte a, les trois corps associés aux trois racines $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ dont la restriction à S est a soient les trois conjugués de L dans $\widetilde{K}$; on peut choisir les $\alpha(a)$ de telle sorte que $L_{\alpha(a)} = L$ pour toute racine courte a.

Remarque. — Dans les cas *b)* à *e)*, le corps L_2 est le corps des invariants du stabilisateur de $\widetilde{\Delta}_0$, le groupe G est K-isomorphe à un groupe $\Pi_{L_2/K}H$, où H est absolument simple, quasi déployé sur L_2, de diagramme de Dynkin $\widetilde{\Delta}_0$, et $\widetilde{K}$ est la plus petite extension galoisienne de K contenant L.

4.1.17. — Gardons les hypothèses et notations de 4.1.16. Soit $a \in \Phi$. Le stabilisateur W_a de a dans le groupe de Weyl W de G est engendré par les réflexions par rapport aux racines b orthogonales à a. En considérant les groupes de rang relatif 2 correspondant au couple a, b et en utilisant par exemple les formules de I, 10.1.2, on voit facilement que tout élément $n \in N(K)$ stabilisant a induit l'identité sur le corps L_a attaché à a, excepté dans les deux cas suivants :

(E 1) on est dans le cas *b)* de 4.1.16 et a est une racine courte;
(E 2) on est dans le cas *c)* de 4.1.16 et a est non pluriel.

Dans chacun de ces deux cas exceptionnels, le corps L_a attaché à a est une extension quadratique séparable d'un sous-corps isomorphe à L_2 et n induit l'identité (resp. la conjugaison) sur L_a si et seulement si son image dans W_a est produit d'un nombre pair (resp. impair) de réflexions.

On voit alors que, sauf dans les deux cas exceptionnels ci-dessus, *les corps (resp. extensions quadratiques) attachés aux rayons radiciels d'une orbite du groupe de Weyl* W *dans* Φ *sont* canoniquement *isomorphes*, l'isomorphisme canonique de L_a sur $L_{w(a)}$ étant donné par l'isomorphisme $u \mapsto nun^{-1}$ de U_a sur $U_{w(a)}$ pour $n \in N(K)$ d'image w dans W. Dans les deux cas exceptionnels, l'orbite de a sous W est aussi son orbite sous le sous-

groupe W_+ des éléments pairs de W et l'assertion ci-dessus est vraie en y remplaçant W par W_+. Par contre, si $w \in W - W_+$, l'isomorphisme correspondant de L_a sur $L_{w(a)}$ est le composé de l'isomorphisme canonique et de la conjugaison. En particulier, l'isomorphisme canonique de L_a sur L_{-a} que nous venons d'introduire est le composé avec la conjugaison de celui introduit en 4.1.8 (5)!

4.1.18. — Soit K′ une extension de K, linéairement disjointe de $\widetilde{K}$, c'est-à-dire telle que $\widetilde{K}' = K' \otimes_K \widetilde{K}$ soit un corps (cf. 1.6.8 (1)).

Alors toutes les considérations précédentes se conservent par le changement de base $K \to K'$. On sait en effet que $\widetilde{K}'$ est une extension galoisienne de K′, dont le groupe de Galois s'identifie canoniquement à $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ ([NB] A V, p. 68). Il en résulte aussitôt que $\widetilde{K}'$ « est » la plus petite extension de K′ déployant $G' = G_{K'}$, que $S' = S_{K'}$ est un K′-tore déployé maximal de G′, que le système de racines de G′ suivant S′ s'identifie à Φ, etc. En particulier chaque épinglage $x_a : \Pi_{L/K}\mathfrak{D} \to U_a$ (resp. $x_a : H(L, L_2) \to U_a$) fournit canoniquement un épinglage $x'_a : \Pi_{K' \otimes L/K'}\mathfrak{D} \to U'_a$ (resp. $x'_a : H(K' \otimes L, K' \otimes L_2) \to U'_a$). Nous laissons au lecteur le soin de développer le sorite s'il l'estime nécessaire.

4.1.19. — Au groupe algébrique G sont associées naturellement deux *données radicielles* (au sens de I, 6.1.1, compte tenu de 6.1.2 (8)) :

(i) Dans le groupe $\widetilde{G} = G(\widetilde{K})$ des points de G rationnels sur $\widetilde{K}$, celle formée du sous-groupe $\widetilde{T} = T(\widetilde{K})$ et des sous-groupes $\widetilde{U}_\alpha = \widetilde{U}_\alpha(\widetilde{K})$ pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}$: on a vu (I, 6.1.3 *b)*) que $(\widetilde{T}, (\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{M}_\alpha)_{\alpha \in \widetilde{\Phi}})$ est une *donnée radicielle génératrice de type* $\widetilde{\Phi}$ *dans* $\widetilde{G}$, la classe $\widetilde{M}_\alpha$ étant égale à $\widetilde{T}\widetilde{m}_\alpha$ (où $\widetilde{m}_\alpha$ est défini comme en 3.2.1 à partir d'un épinglage $\widetilde{x}_\alpha$ de $\widetilde{U}_\alpha$);

(ii) Dans le groupe $G = G(K)$ des points de G rationnels sur K, celle formée du sous-groupe $T = T(K)$ et des sous-groupes $U_a = U_a(K)$ pour $a \in \Phi$: on a déjà affirmé (I, 6.1.3 *c)*) que $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ *dans* G, avec $M_a = Tm_a$ (où m_a est défini comme en 4.1.5 et 4.1.11). Indiquons brièvement que l'axiome (DR 1) de I, 6.1.1, est évident, que (DR 2) résulte de ([4], 3.8), que (DR 3) est évident, que (DR 4) résulte de 4.1.5 (2) et 4.1.11, (DR 5) de ce que l'image de m_a dans le groupe de Weyl W est la réflexion r_a et (DR 6) de ([4], 3.22 *c)*). Le groupe $N = N(K)$ des points rationnels sur K du normalisateur de S dans G coïncide avec le groupe également noté N en I, 6.1.2 (10) : cela résulte de ce que le quotient N/T dans l'un ou l'autre sens « est » le groupe de Weyl de Φ.

De plus, *ces deux données radicielles sont compatibles* (I, 9.1.9 (DDR 1)) *et satisfont aux conditions* (DDR 2) *de* I, 9.1.10 *et* (DDR 3) *de* I, 9.2.9, en y remplaçant les notations G, U, etc. par $\widetilde{G}$, $\widetilde{U}$, etc. et les notations $G^\natural$, $U^\natural$, etc. par G, U, etc., et en prenant pour V l'espace vectoriel $\widetilde{V}$ dual du sous-espace vectoriel engendré par $\widetilde{\Phi}$ dans $X^*(T) \otimes \mathbf{R}$ et pour $V^\natural$ le sous-espace V des invariants de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ dans $\widetilde{V}$, sous-espace qui s'iden-

tifie au dual de l'espace vectoriel engendré par Φ dans $X^*(S) \otimes \mathbf{R}$. C'est clair pour (DDR 1) et même pour la condition plus forte (DDR 1 *bis*) de I, 9.1.13 (condition qui demande que $U_a(K)$ soit contenu dans le produit $\prod \tilde{U}_\alpha(\tilde{K})$ pour $\alpha \in \tilde{\Phi}$ de restriction à S égale à a ou à $2a$, ce qui est vrai par définition même des U_a), évident pour (DDR 2) (qui demande que $\mathrm{Card}\ a \cap \Phi \leqq 2$ pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$) et pour (DDR 3) (qui signifie que $T \subset \tilde{T}$, $M_a \subset N$ et que l'automorphisme intérieur défini par m_a permute les groupes algébriques U_a et U_{-a} quel que soit $a \in \mathbf{\Phi}$).

4.2. Valuations.

Désormais, nous supposons que le corps K est muni d'une *valuation* non impropre ω (à valeurs réelles) et que l'extension galoisienne minimale $\tilde{K}$ de K déployant G est univalente (1.6.1), c'est-à-dire que ω se prolonge d'une seule manière en une valuation de $\tilde{K}$, notée encore ω.

4.2.1. — Nous avons défini au chapitre I la notion de *valuation d'une donnée radicielle* $(Z, (V_b)_{b \in \Psi})$: rappelons que c'est une famille $\psi = (\psi_b)_{b \in \Psi}$ d'applications $\psi_b : V_b - \{1\} \to \mathbf{R}$, vérifiant des axiomes (V 0) à (V 5) que nous ne recopions pas ici (I, 6.2.1).

Nous avons aussi défini (I, 6.2.3 *b)*) une valuation $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}}$ de la donnée radicielle $(\tilde{T}, (\tilde{U}_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}})$ (4.1.19 (i)) du groupe $\tilde{G} = G(\tilde{K})$ des points rationnels sur $\tilde{K}$ du groupe $\tilde{K}$-déployé $G_{\tilde{K}}$ de la manière suivante : on choisit un $\tilde{K}$-système de Chevalley $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}}$ de $G_{\tilde{K}}$ (relativement au tore maximal $\tilde{K}$-déployé $T_{\tilde{K}}$) et l'on pose

(1) $$\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}_\alpha(u)) = \omega(u) \quad \text{pour tout } u \in \tilde{K}^\times.$$

On dit que $\tilde{\varphi}$ est la *valuation de Chevalley* associée au système de Chevalley choisi.

Dans ce qui suit, nous supposerons que $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Phi}}$ est un *système de Chevalley-Steinberg* de G (4.1.3); nous noterons $(x_a)_{a \in \Phi}$ un système cohérent d'épinglages déduit de $(\tilde{x}_\alpha)$ et L_a (resp. (L_a, L_{2a})) le corps (resp. l'extension quadratique) attaché(e) à un rayon radiciel a non pluriel (resp. pluriel) (4.1.8 et 14).

4.2.2. — Nous allons montrer que la valuation $\tilde{\varphi}$ « se descend » à la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ du groupe $G = G(K)$ (4.1.19 (ii)) et définit ainsi une valuation de celle-ci.

Nous appliquerons pour cela les résultats du chapitre I, § 9, et notamment le théorème 9.2.10, mais le lecteur que la technique de ce § 9 rebute pourra fabriquer une démonstration plus terre à terre, en suivant par exemple les indications de 4.2.11.

Explicitons tout d'abord la définition des applications $\varphi_a : U_a - \{1\} \to \mathbf{R}$ à partir de $\tilde{\varphi}$ (I, 9.1.6) : pour $a \in \Phi$, notons A (resp. B) l'ensemble des $\alpha \in \tilde{\Phi}$ de restriction a (resp. $2a$) à S; pour $u \in U_a$, on sait qu'il existe des $\tilde{u}_\alpha \in \tilde{U}_\alpha$ uniques tels que (pour un ordre choisi arbitrairement sur $A \cup B$)

$$u = \prod_{A \cup B} \tilde{u}_\alpha,$$

et l'on pose

$$\varphi_a(u) = \inf\left(\inf_{\alpha\in A}\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{u}_\alpha),\ \inf_{\alpha\in B}\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{u}_\alpha)\right), \tag{1}$$

le résultat ne dépendant pas de l'ordre choisi sur $A \cup B$ *(loc. cit.)*.

Vu l'invariance de ω par $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$, on voit alors que

— si la racine $a \in \Phi$ n'est ni divisible ni multipliable, on a

$$\varphi_a(x_a(u)) = \omega(u) \quad \text{pour tout } u \in L_a^\times; \tag{2}$$

— si la racine $a \in \Phi$ est multipliable, on a

$$\varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v) \leqq \omega(u) \quad \text{pour } (u,v) \in H(L_a, L_{2a}),\ (u,v) \neq (0,0); \tag{3}$$

$$\varphi_{2a}(x_a(0,v)) = \omega(v) \quad \text{pour } v \in L_a^\times,\ \mathrm{Tr}_{L_a/L_{2a}} v = 0. \tag{4}$$

En effet, (2) résulte de 4.1.5 (1). Si a est multipliable, (1) et 4.1.9 (7) montrent que $\varphi_a(x_a(u,v)) = \inf\left(\omega(u), \frac{1}{2}\omega(v)\right)$; mais 4.1.9 (4) entraîne $\omega(v) \leqq 2\omega(u)$ pour $(u,v) \in H(L_a, L_{2a})$, d'où (3). Enfin, (4) résulte de (3), puisque φ_{2a} est la restriction de $2\varphi_a$ à U_{2a} (I, 9.1.10).

4.2.3. — Notons $\mathscr{I}$ l'immeuble de $\widetilde{G}$ défini par $\widetilde{\varphi}$ (I, 7.4.2) et $\widetilde{A}$ l'appartement correspondant, ou encore l'ensemble des valuations équipollentes à $\widetilde{\varphi}$ (I, 6.2.5). Rappelons que $\widetilde{A}$ est un espace affine euclidien sous l'espace vectoriel $\widetilde{V}$, dual de l'espace engendré par $\widetilde{\Phi}$ dans $X^*(T) \otimes \mathbf{R}$ (4.1.19), muni d'un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl ${}^v\widetilde{W}$ de $\widetilde{\Phi}$. Le sous-groupe $\widetilde{N} = N(\widetilde{K})$ de $\widetilde{G}$ opère sur $\widetilde{A}$ grâce à un homomorphisme $\widetilde{\nu}$ de $\widetilde{N}$ dans le groupe des automorphismes affines de $\widetilde{A}$ (I, 6.2.10). Si $t \in \widetilde{T}$, alors $\widetilde{\nu}(t)$ est la translation de vecteur v donné par

$$\langle v, \alpha\rangle = -\omega(\alpha(t)) \quad \text{pour toute } \alpha \in \widetilde{\Phi}, \tag{1}$$

et pour tout $\widetilde{n} \in \widetilde{N}$ l'image ${}^v\widetilde{\nu}(\widetilde{n})$ de $\widetilde{\nu}(\widetilde{n})$ dans $\mathrm{GL}(\widetilde{V})$ est l'élément du groupe de Weyl ${}^v\widetilde{W}$ de $\widetilde{G}$ image canonique de $\widetilde{n}$.

Vu 4.1.3 (3) et (4), le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ opérant sur $\widetilde{G}$ permute au signe près les épinglages $\widetilde{x}_\alpha$ du système de Chevalley-Steinberg donné et par suite conserve la valuation $\widetilde{\varphi}$: on a $\widetilde{\varphi}_{\gamma(\alpha)}(\gamma u) = \widetilde{\varphi}_\alpha(u)$ quels que soient $\alpha \in \widetilde{\Phi}$, $u \in \widetilde{U}_\alpha(K)$ et $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$.

Par transport de structure, il s'ensuit que $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ opère par automorphismes sur $\mathscr{I}$, conserve le point $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{I}$ et l'appartement $\widetilde{A}$ et opère sur $\widetilde{A}$ par automorphismes affines.

Notons alors $\mathscr{I}_{\natural}$ (resp. A) l'ensemble des points fixes de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ dans $\mathscr{I}$ (resp. $\widetilde{A}$) : c'est une partie convexe (resp. un sous-espace affine de direction V) de $\mathscr{I}$ (resp. $\widetilde{A}$). De plus, comme $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ conserve la base $\widetilde{\Delta}$ de $\widetilde{\Phi}$ (4.1.2), il conserve la chambre

vectorielle $\tilde{D} \subset \tilde{V}$ associée (I, 1.3.12), donc le quartier $\tilde{\varphi} + \tilde{D}$ de $\tilde{A}$ et par suite la chambre $C = C_{\tilde{\varphi}, \tilde{D}}$ (I, 7.2.4). Il en résulte aussitôt (comme nous l'avons déjà dit en I, 9.2.3) que *les conditions* (DI 1), (DI 2) *et* (DI 3) *de* I, 9.2.1 *sont satisfaites* en prenant $F = C$.

Nous avons déjà vu en 4.1.19 que *les conditions* (DDR 1), (DDR 2) *et* (DDR 3) *l'étaient aussi.* Enfin, *les conditions* (DV 1) (*i.e.* $\tilde{\varphi} \in A$) *et* (DV 2) (*i.e.* Card $\varphi_a(U_a) \geqq 3$ pour tout $a \in \Phi$, ce qui est évident vu 4.2.2 (2), (3) et (4) puisque la valuation ω de K n'est pas impropre) *le sont également.* Toutes les conditions du théorème 9.2.10 du chapitre I sont donc remplies, d'où :

Théorème. — *La valuation* $\tilde{\varphi}$ *se descend à* G; *autrement dit la famille* $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Phi}$ *définie par les relations* (2), (3) *et* (4) *de* 4.2.2 *est une valuation de la donnée radicielle* $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ *du groupe* $G = G(K)$.

4.2.4. — On peut donc appliquer à $G = G(K)$ muni de la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ et de la valuation φ de celle-ci les résultats du chapitre I, §§ 6 à 9, dont nous utiliserons librement les notations, à l'exception près de l'usage du symbole $\natural$. En particulier, on peut considérer *l'immeuble* $\mathscr{I}$ de G (I, 7.4.2), qui s'identifie canoniquement en tant qu'espace métrique, à une partie de $\mathscr{I}_\natural \subset \tilde{\mathscr{I}}$ (qui peut être *distincte* de $\mathscr{I}_\natural$ lorsque $\tilde{K}$ est ramifiée), de manière compatible avec les lois d'opération de $G(K) \subset G(\tilde{K})$ sur $\mathscr{I}$ et $\tilde{\mathscr{I}}$ (I, 9.2.14). L'appartement de $\mathscr{I}$ formé des valuations équipollentes à φ (I, 6.2.5) s'identifie alors à A (par l'application $\varphi + v \mapsto \tilde{\varphi} + v$ pour $v \in V$), et est un espace affine sous V. Une racine affine de A (I, 6.2.6) est toujours l'intersection avec A d'une racine affine de $\tilde{A}$, mais la réciproque peut être inexacte lorsque $\tilde{K}$ est ramifié (cf. 4.2.2).

4.2.5. — Soit H un groupe algébrique défini sur K et soit $X^*_K(H)$ le groupe des caractères rationnels sur K de H. Soit $c \in X^*_K(H) \otimes \mathbf{Q}$; il existe un entier $N > 0$ tel que $Nc \in X^*_K(H)$ et l'on pose

$$(1) \qquad (\omega \circ c)(t) = \frac{1}{N}\, \omega((Nc)(t)) \quad \text{pour } t \in H(K),$$

définition licite car il est immédiat que le second membre de (1) ne dépend pas de l'entier N choisi. On obtient ainsi un homomorphisme $\omega \circ c$ de H(K) dans $\mathbf{R}$.

4.2.6. — L'injection $S \to T$ fournit un homomorphisme de $X^*_K(T)$ dans $X^*_K(S) = X^*(S)$ qui est injectif et de conoyau fini puisque S est le sous-tore K-déployé maximal de T. Elle permet donc d'identifier canoniquement $X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$ et $X^*_K(T) \otimes \mathbf{Q}$ et de définir comme en 4.2.5 l'homomorphisme $\omega \circ c : T(K) \to \mathbf{R}$ pour tout $c \in X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$.

Soit $\alpha \in \tilde{\Phi}$, de restriction a à S. Alors a s'identifie à l'élément $(1/[\tilde{K} : K]) \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)} {}^{\sigma}\alpha$ de $X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$ et, pour tout $t \in T(K)$, on a

$$(1) \qquad (\omega \circ a)(t) = \omega(\alpha(t)).$$

4.2.7. — Il résulte immédiatement, soit des formules (2), (3) et (4) de 4.2.2, soit de la formule (1) de 4.2.3 que, pour tout $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ de restriction a à S, l'on a

$$\varphi_a(tut^{-1}) = \varphi_a(u) + \omega(\alpha(t)) \quad (u \in U_a(K),\ t \in T(K)), \tag{1}$$

ou encore, vu 4.2.6,

$$\varphi_a(tut^{-1}) = \varphi_a(u) + (\omega \circ a)(t) \quad (u \in U_a(K),\ t \in T(K)). \tag{2}$$

Comme en I, 6.2.10, on note ν l'homomorphisme de N(K) dans le groupe des automorphismes de l'appartement A défini par l'action naturelle de N(K) sur les valuations de (T, (U_a)). La formule (2) signifie alors que, pour $t \in T(K)$, *l'automorphisme* $\nu(t)$ *est la translation de vecteur noté encore* $\nu(t) \in V$ *défini par*

$$\langle \nu(t), a \rangle = -(\omega \circ a)(t) \quad \text{pour } a \in \Phi. \tag{3}$$

4.2.8. Définition. — *On dit qu'une valuation de la donnée radicielle* (T, (U_a)) *de* G *est compatible avec* ω *si elle satisfait aux conditions équivalentes* (1), (2), (3) *de* 4.2.7.

4.2.9. Proposition. — *Les valuations de la donnée radicielle* (T, $(U_a)_{a\in\Phi}$) *de* G *compatibles avec* ω *sont les valuations équipollentes à* φ.

Il est évident que toute valuation équipollente à φ (I, 6.2.5) (c'est-à-dire un point de l'appartement A, ou encore une valuation de la forme $\varphi + v$ avec $v \in V$) est compatible avec ω. Réciproquement, soit φ' une valuation de (T, (U_a)) compatible avec ω et soit $A' = \varphi' + V$ sa classe d'équipollence. Vu I, 6.2.12 *b)*, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme affine $j : A \to A'$ transformant l'homomorphisme $\nu : N(K) \to \mathrm{Aut}\, A$ défini par φ en celui $\nu' : N(K) \to \mathrm{Aut}\, A'$ défini par φ'.

Or, on sait qu'il existe un sous-groupe *fini* N_1 de N(K) tel que $N(K) = N_1 . T(K)$ (p. ex. le sous-groupe de N(K) engendré par les m_a pour $a \in \Delta$). Alors, N_1 possède un point fixe $p \in A$ (resp. $p' \in A'$) et l'isomorphisme j de A sur A' défini par $j(p + v) = p' + v$ pour tout $v \in V$ répond à la question : d'une part, on a $\nu'(n) \circ j = j \circ \nu(n)$ pour tout $n \in N_1$ puisque n conserve alors p et p' et que $\nu(n)$ et $\nu'(n)$ ont même image dans Aut V, à savoir l'opération naturelle de l'image de n dans le groupe de Weyl W de G; d'autre part, $\nu'(t) \circ j = j \circ \nu(t)$ puisque $\nu(t)$ et $\nu'(t)$ sont, vu 4.2.7 (3), des translations de même vecteur.

4.2.10. — A la famille des épinglages de Chevalley-Steinberg correspond donc une famille de valuations équipollentes de la donnée radicielle (T, (U_a)), que nous appellerons parfois les valuations de Chevalley-Steinberg de celle-ci. Il est facile de les déterminer parmi les valuations équipollentes à φ. En effet, on obtient les épinglages de Chevalley-Steinberg à partir de l'épinglage donné de la manière suivante : on choisit un homomorphisme θ de $\widetilde{\Phi}$ dans $\widetilde{K}^\times$ tel que $\gamma \circ \theta = \theta \circ \gamma$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ et l'on pose

$$\widetilde{x}'_\alpha(u) = \widetilde{x}_\alpha(\theta(\alpha)\, u) \quad \text{pour } \alpha \in \widetilde{\Phi} \text{ et } u \in \widetilde{K}.$$

Pour $a \in \Phi$ non divisible, posons $\theta(a) = \theta(\alpha(a))$. Alors $\theta(a) \in L_a^\times$ et la valuation φ' associée à l'épinglage $(\tilde{x}_\alpha')$ est donnée par

$$a(\varphi' - \varphi) = -\omega(\theta(a)) \text{ pour tout } a \in \Phi, \text{ non divisible.}$$

Réciproquement, si l'on choisit pour tout $a \in \Delta$ un élément $\omega_a \in \omega(L_a^\times)$, il existe une valuation de Chevalley-Steinberg et une seule telle que $a(\varphi' - \varphi) = -\omega_a$ pour tout $a \in \Delta$.

4.2.11. — On remarquera que la démonstration de l'équipollence de deux valuations compatibles avec ω de la donnée radicielle $(T, (U_a))$ est indépendante de celle de l'existence d'une telle valuation.

Il est d'ailleurs possible de démontrer l'existence d'une valuation de $(T, (U_a))$ compatible avec ω sans utiliser le théorème de descente de I, § 9. On peut par exemple montrer directement que la famille $\varphi = (\varphi_a)$ définie par les formules (2), (3) et (4) de 4.2.2 satisfait aux axiomes (V 0) à (V 5) des valuations : les propriétés (V 0) et (V 4) sont évidentes, (V 1) l'est aussi lorsque la racine a est non multipliable et résulte facilement de la détermination de la loi de groupe sur U_a lorsque $2a \in \Phi$ (4.1.9); la condition (V 2) résulte des formules de passage d'un épinglage de U_a à un autre (4.1.7 et 4.1.13), car le composé d'un épinglage et de la conjugaison par un élément de $N(K)$ est encore un épinglage; la condition (V 5) résulte de 4.1.5 (2) et 4.1.11 (1).

Reste donc à démontrer l'axiome « de commutation » (V 3). Cela peut se faire par simple vérification à partir du calcul explicite des applications commutateur $\gamma_{a,b} : U_a \times U_b \to \prod U_c$ définies en 1.1.8 (1) (pour $a, b \in \Phi$, $b \neq -a$). Nous donnerons les résultats de ce calcul en Appendice.

On peut aussi remarquer que la vérification de (V 3) ne fait intervenir qu'un sous-groupe unipotent maximal d'un sous-groupe semi-simple de rang relatif *deux* de G. On peut alors se ramener pour cette vérification au cas où G est semi-simple, simplement connexe, de rang relatif *deux*. Si l'on suppose de plus que Φ n'a pas de facteur de type G_2, on est alors ramené, à une isogénie centrale et à une restriction des scalaires près, à des « groupes classiques » (d'ailleurs d'un type particulier), pour lesquels l'existence d'une valuation compatible avec ω et en particulier (V 3) sont prouvés au § 10 du chapitre I.

4.2.12. — Rappelons que l'immeuble $\mathscr{I}$ de G est parfaitement défini par la donnée radicielle valuée, avec toutes ses structures (appartements, avec leur structure d'espace affine, chambres, facettes, etc.) à l'exception de sa métrique qui dépend du choix d'un produit scalaire sur V invariant par le groupe de Weyl (un tel produit scalaire n'est unique qu'à la multiplication près par un scalaire sur chacun des sous-espaces vectoriels engendrés par une composante irréductible de Φ).

En particulier, soient K' un autre corps valué, $\sigma : K \to K'$ un isomorphisme de corps valués, G' un groupe algébrique défini sur K', et j un σ-isomorphisme de G sur G', d'où un isomorphisme noté aussi j de $G(K)$ sur $G'(K')$. Posons $S' = j(S)$ et

notons par un ′ les objets attachés au triple (K′, G′, S′). Munissons V′ du produit scalaire déduit de celui choisi sur V par transport de structure. Toujours par transport de structure, on en déduit une isométrie, notée encore j, de $\mathscr{I}$ sur $\mathscr{I}'$, compatible avec toutes les structures portées par les immeubles et telle que

(1) $$j(g.x) = j(g).j(x) \quad \text{pour } g \in G(K) \text{ et } x \in \mathscr{I}.$$

Cette bijection est l'unique application $j : \mathscr{I} \to \mathscr{I}'$ satisfaisant à (1) *et à l'une au moins des deux conditions suivantes* :

(2) *j est isométrique*;

(3) *quels que soient $x, y \in \mathscr{I}$, la restriction de j au segment $[xy]$ est une bijection affine de celui-ci sur le segment $[j(x)\, j(y)]$.*

Il suffit de montrer cette unicité lorsque σ et $j : G \to G'$ sont l'identité. Sous (2), elle résulte alors de I, 9.2.15, en y prenant $G^{\natural} = G$ et $\mathscr{I}_{\natural} = \mathscr{I}$. Supposons (3); alors j permute les segments, donc permute les parties convexes de $\mathscr{I}$. D'autre part (1) entraîne que j permute les parties stables par un sous-groupe donné de G(K). Il résulte alors de I, 7.4.32 que $j(A) = A$, puis de I, 7.4.3 que j est l'identité.

Signalons que si $\dim A \geqq 2$, on peut remplacer (3) par

(4) *l'image par j d'un segment est un segment.*

Si ω est *dense*, la condition (1) suffit à elle seule à assurer l'unicité de j (I, 8.2.1).

Remarque. — Plus généralement, la démonstration ci-dessus montre que, pour tout immeuble $\mathscr{I}$ d'une donnée radicielle valuée, l'identité est la seule application j de $\mathscr{I}$ dans lui-même qui satisfasse à (1) et soit à (2), soit à (3), cette deuxième condition étant superflue dans le cas d'une valuation dense.

4.2.13. — L'immeuble $\mathscr{I}$ ne dépend pas, à isomorphisme unique près, du choix de S : cela résulte de ce qui précède, compte tenu de la conjugaison par un élément de G(K) des tores K-déployés maximaux.

4.2.14. — Le *centre* C de G(K) opère trivialement sur $\mathscr{I}$: si $g \in C$ alors $g \in T$ et $v(g) = 1$ par définition même de v (I, 6.2.5), d'où $ghx = hgx = hx$ pour tous $x \in A$ et $h \in G(K)$.

4.2.15. — L'immeuble de G est invariant par épimorphisme central : soit G′ un autre groupe algébrique défini sur K et soit $j : G \to G'$ un homomorphisme surjectif de noyau central. Alors G′ est réductif, quasi déployé sur K, déployé sur $\tilde{K}$; l'image $S' = j(S)$ en est un tore K-déployé maximal, de centralisateur $T' = j(T)$; l'application $a' \mapsto a' \circ j$ est un isomorphisme de $\Phi' = \Phi(S', G')$ sur Φ et si l'on identifie Φ et Φ' par cette application, alors pour tout $a \in \Phi_{red}$ la restriction de j à U_a est un isomorphisme de U_a sur U'_a (pour toutes ces assertions, voir ([5], th. 2.20). On peut alors définir φ'_a par $\varphi_a = \varphi'_a \circ j$, d'où une valuation φ' de la donnée radicielle $(T', (U'_a))$

de G'(K) et on vérifie sans peine qu'il existe un isomorphisme et un seul de $\mathscr{I}$ sur l'immeuble $\mathscr{I}'$ de G' compatible avec les actions de G(K) et de G'(K) et envoyant φ sur φ'.

4.2.16. — Il est parfois préférable d'introduire l'*immeuble élargi* $\mathscr{I}^1$ de G défini comme suit (cf. [27], [40]). Considérons le groupe $X_K^*(G)$ des caractères rationnels sur K de G, l'espace vectoriel $X_K^*(G) \otimes \mathbf{R}$ et son dual V^1, que l'on munit d'une métrique euclidienne. On pose $\mathscr{I}^1 = \mathscr{I} \times V^1$ et l'on fait opérer G(K) sur $\mathscr{I}^1$ en posant

$$g.(x, v) = (g.x, v + \theta(g)) \quad (g \in G(K),\ x \in \mathscr{I},\ v \in V^1), \tag{1}$$

où $\theta(g)$ est l'élément de V^1 défini par

$$\langle \theta(g), \chi \rangle = -\omega(\chi(g)) \quad \text{pour tout } \chi \in X_K^*(G). \tag{2}$$

On définit les appartements, chambres, facettes... de $\mathscr{I}^1$ comme les produits par V^1 des appartements, chambres, facettes... de $\mathscr{I}$ et la métrique de $\mathscr{I}^1$ en prenant, pour tout appartement A' de $\mathscr{I}$, la métrique euclidienne de l'espace affine $A' \times V^1$ somme euclidienne des métriques données sur A' et V^1. Il est facile de voir que la quasi-totalité des propriétés géométriques de l'immeuble $\mathscr{I}$ restent valables pour $\mathscr{I}^1$. Cependant l'assertion d'unicité de 4.2.12 n'est plus exacte : les applications $j : \mathscr{I}^1 \to \mathscr{I}^1$ commutant avec l'action de G et satisfaisant à l'une des conditions (2) ou (3) de 4.2.12 sont les applications de la forme $(x, v) \mapsto (x, v + v_0)$ où v_0 est une constante appartenant à V^1.

Par ailleurs, soit DG le groupe dérivé de G et soit CG son centre connexe. L'isogénie $DG \times CG \to G$ (resp. $(T \cap DG) \times CG \to T$) permet d'identifier $X_K^*(G) \otimes \mathbf{Q}$ et $X_K^*(CG) \otimes \mathbf{Q}$ (resp. $X_K^*(T) \otimes \mathbf{Q}$ et la somme directe de $X_K^*(T \cap DG) \otimes \mathbf{Q}$ et de $X_K^*(CG) \otimes \mathbf{Q}$), donc $X_K^*(T) \otimes \mathbf{R}$ avec le dual de $V \times V^1$, le facteur direct $X_K^*(T \cap DG) \otimes \mathbf{R}$ (resp. $X_K^*(CG) \otimes \mathbf{R} = X_K^*(G) \otimes \mathbf{R}$) étant l'orthogonal de V^1 (resp. V).

On a alors, pour tout $t \in T(K)$ et tout $c \in X_K^*(T) \otimes \mathbf{Q}$,

$$\langle v(t) + \theta(t), c \rangle = -(\omega \circ c)(t). \tag{3}$$

En effet, (3) est vraie pour c si elle l'est pour un multiple nc de c, avec $n \neq 0$. Il suffit donc, compte tenu de l'additivité en c des deux membres, de la vérifier

— pour $c \in X_K^*(T \cap DG)$, et l'on a alors $\langle \theta(t), c \rangle = 0$ par définition de la dualité entre $V \times V^1$ et $X_K^*(T) \otimes \mathbf{R}$ et $\langle v(t), c \rangle = -(\omega \circ c)(t)$ d'après 4.2.7 (3);

— pour $c \in X_K^*(G)$, et l'on a alors $\langle v(t), c \rangle = 0$ par définition de la dualité et $\langle \theta(t), c \rangle = -(\omega \circ c)(t)$ par définition de θ.

On identifie $\mathscr{I}$ et le sous-ensemble $\mathscr{I} \times \{0\}$ de $\mathscr{I}^1$. Alors, le stabilisateur de $\mathscr{I}$ pour l'action de G sur $\mathscr{I}^1$ est le sous-groupe distingué

$$G^1 = \theta^{-1}(0) = \{g \in G(K) \mid \omega(\chi(g)) = 0 \text{ pour tout } \chi \in X_K^*(G)\}.$$

On a $U_a(K) \subset G^1$, d'où résulte aussitôt que $(T \cap G^1, (U_a))$ est une donnée radicielle génératrice dans G^1 (I, 6.1.2 (12)), dont φ est une valuation, et l'immeuble de G^1 s'identifie canoniquement à $\mathscr{I}$.

Si X est une partie de G(K), nous poserons

$$X^1 = X \cap G^1.$$

Si X est le stabilisateur (resp. fixateur) d'une partie M (ou d'un germe de parties) de $\mathscr{I}$ *pour l'opération de* G *sur* $\mathscr{I}$, alors X^1 est le stabilisateur de $M \times \{0\}$ dans G *pour l'opération de* G *sur* $\mathscr{I}^1$. En particulier N^1 est le stabilisateur de $A \times \{0\}$. On pose

$$W^1 = \nu(N^1).$$

4.2.17. — Nous allons donner un exemple d'immeuble élargi qui nous sera utile au § 5. Pour cela, nous utiliserons les résultats de I, 7.6, qu'il nous faut malheureusement compléter. Reprenons *pour ce numéro exclusivement* les seules hypothèses et notations de I, 7.6. Le résultat suivant aurait dû être énoncé comme corollaire 7.6.6 au chapitre I :

Proposition. — *Soit* $x_0 \in A$ *et posons* $\mathscr{I}'_1 = G_1^0.(x_0 + \operatorname{Ker} p)$.

(i) $\mathscr{I}'_1 \cap A = x_0 + \operatorname{Ker} p$.

(ii) *La restriction* π' *de* $\widetilde{\pi}$ *à* $\mathscr{I}'_1$ *est une isométrie de* $\mathscr{I}'_1$ *sur* $\mathscr{I}_1$ *commutant avec les actions de* G_1^0.

(iii) *Soit* j *l'inverse de* π'; *l'application* $(y, v) \mapsto j(y) + v$ *est une bijection de* $\mathscr{I}_1 \times L_1$ *sur* $G_1.A$.

(iv) *Il existe un homomorphisme* θ_1 *de* G_1 *dans* L_1 *tel que*

$$g.(j(y) + v) = j(g.y) + v + \theta_1(g)$$

quels que soient $g \in G_1$, $y \in \mathscr{I}_1$ *et* $v \in L_1$. *On a* $\theta_1(g) = 0$ *pour* $g \in G_1^0$ *et* $\theta_1(t) = (p \circ \nu)(t)$ *pour* $t \in T_1$.

Pour démontrer (i), il suffit de faire voir que si $x \in A$, $g \in G_1^0$ et $x' = g.x \in A$, alors $x' \in x + \operatorname{Ker} p$ (rappelons que p est la projection orthogonale de V sur L_1). Or il résulte de I, 7.6.4 (3) et 7.6.5 (ii) qu'il existe $n \in N_1^0$ tel que $x' = n.x$, d'où $x' \in x + \operatorname{Ker} p$ puisque, par définition même, $\nu(N_1^0)$ est engendré par des réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans stables par L_1.

Démontrons (ii). L'application $\pi' : x_0 + \operatorname{Ker} p \to A_1$ est bijective. Comme $\mathscr{I}_1 = G_1^0.A_1$, il s'ensuit que π' est surjective. De plus, si $x, x' \in \mathscr{I}_1$, il existe $g \in G_1^0$ tel que $\pi'(x), \pi'(x') \in g.A_1$. Vu (i), $(g^{-1} \circ \pi')(x)$ et $(g^{-1} \circ \pi')(x')$ appartiennent à $x_0 + \operatorname{Ker} p$; il en résulte aussitôt que π' est isométrique, d'où (ii).

Par suite, j est une section de l'application $\widetilde{\pi} : G_1.A \to \mathscr{I}_1$, d'où (iii), puisque les fibres de cette application sont les $x + L_1$ pour $x \in G_1.A$ (I, 7.6.4 (iii)).

Enfin, démontrons (iv). Vu I, 7.6.4 (iii), il existe une fonction $\theta : G_1 \times \mathscr{I}_1 \to L_1$ telle que l'on ait $g.(j(x) + v) = j(g.x) + \theta(g, x) + v$ pour $x \in \mathscr{I}_1$, $g \in G_1$ et $v \in L_1$. Un calcul simple et classique donne

$$\theta(gh, x) = \theta(g, h.x) + \theta(h, x) \quad \text{pour } g, h \in G_1,\ x \in \mathscr{I}_1. \tag{1}$$

Mais $\theta(g, x) = 0$ si $g \in G_1^0$, d'où

(2) $\qquad \theta(gt, x) = \theta(t, x) = \theta(t, t^{-1}gt.x) \quad$ pour $g \in G_1^0$ et $t \in T_1$.

De plus, si $x \in A_1$ et $t \in T_1$, on a $t.j(x) = j(x) + v(t)$ et $j(t.x) \in j(x) + \operatorname{Ker} p$, d'où

(3) $\qquad \theta(t, x) = (p \circ v)(t) \quad$ pour $x \in A_1$ et $t \in T_1$.

Mais (2) montre que $\theta(t, g.x) = \theta(t, x)$ pour $g \in G_1^0$, $t \in T_1$ et $x \in \mathscr{I}_1$. Comme $\mathscr{I}_1 = G_1^0.A_1$, on a donc (3) pour tout $t \in T_1$ et tout $x \in \mathscr{I}_1$ et (iv) résulte aussitôt de (2).

4.2.18. — Revenons maintenant à nos conventions générales. Soit Φ_1 un sous-système de racines *quasi-clos* de Φ (I, 7.6.1) et soit G_1 le sous-groupe algébrique de G engendré par T et les U_a pour $a \in \Phi_1$. Alors G_1 est réductif connexe, défini et quasi-déployé sur K, déployé sur $\tilde{K}$ et le système de racines de G_1 par rapport au tore K-déployé maximal S est Φ_1. On peut donc lui appliquer d'une part les résultats démontrés pour G dans les pages précédentes, d'autre part les résultats de I, 7.6 dont nous reprenons les notations (avec $G_1 = G_1(K)$). Le dual V_1^1 de $X_K^*(G_1) \otimes \mathbf{R}$ s'identifie à $L_1 \times V^1$ grâce aux identifications déjà vues :

$$X_K^*(G_1) \otimes \mathbf{R} = X_K^*(CG_1) \otimes \mathbf{R} = (X_K^*(CG_1 \cap DG) \otimes \mathbf{R}) \times (X_K^*(G) \otimes \mathbf{R}).$$

Considérons alors, avec les notations de 4.2.16 et 4.2.17, l'application

$$j_1 : (x, v, v') \mapsto (j(x) + v, v')$$

de $\mathscr{I}_1 \times L_1 \times V^1 = \mathscr{I}_1 \times V_1^1$ dans $G_1.A \times V^1 = G_1.(A \times V^1) \subset \mathscr{I}^1$. Il est clair, vu 4.2.17, que c'est une isométrie surjective, et j_1 est compatible avec les actions de G_1 sur l'immeuble élargi $\mathscr{I}_1 \times V_1^1$ de G_1 d'une part, sur l'immeuble élargi $\mathscr{I}^1$ de G d'autre part : cela résulte de 4.2.15, compte tenu des relations $G_1 = G_1^0.T$ et $G_1^0 \subset DG$. Autrement dit, $G_1.(A \times V^1)$, *c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de l'immeuble élargi de* G *stable par* G_1 *et contenant l'appartement* $A \times V^1$, *s'identifie à l'immeuble élargi de* G_1, et ceci d'une manière et d'une seule à une translation près par un élément de V_1^1.

4.2.19. — *Bornologies.* Le groupe $G = G(K)$ est naturellement muni d'une bornologie $\mathscr{B}(\omega)$: une partie X de G est bornée si et seulement si, pour tout $f \in K[G]$, l'ensemble des $\omega(f(x))$ reste borné inférieurement lorsque x décrit X. Cette bornologie est compatible avec la loi de groupe de G.

D'autre part, la valuation φ définit sur G deux bornologies :

— la bornologie $\mathscr{B}(\varphi)$ dite définie par φ en I, 8.1.7, qui est l'image réciproque de la bornologie naturelle du groupe des isométries Isom $\mathscr{I}$ de l'immeuble $\mathscr{I}$ (I, 3.1.2 *b)*) ;

— la bornologie $\mathscr{B}^1(\varphi)$ image réciproque de la bornologie naturelle du groupe des isométries Isom $\mathscr{I}^1$ de l'immeuble élargi $\mathscr{I}^1$.

Proposition. — (i) $\mathscr{B}(\omega) = \mathscr{B}^1(\varphi)$.

(ii) *Les bornologies induites sur le sous-groupe* G^1 *par* $\mathscr{B}(\omega)$ *et par* $\mathscr{B}(\varphi)$ *sont égales.*

L'assertion (ii) résulte de (i) puisque G^1 opère trivialement sur V^1. Démontrons (i). Il est clair que, pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$, le sous-groupe $U_{a,k}$ est borné pour $\mathscr{B}(\omega)$ et que U_a ne l'est pas. Autrement dit, $\mathscr{B}(\omega)$ est *faiblement compatible avec* φ au sens de I, 8.1.1. Vu I, 8.1.5, il suffit, pour prouver (i), de montrer que $\mathscr{B}(\omega)$ et $\mathscr{B}^1(\varphi)$ induisent la même bornologie sur T. Or, dire que $X \subset T$ est borné pour $\mathscr{B}^1(\varphi)$ signifie que $x \mapsto (\omega \circ a)(x)$ reste bornée inférieurement sur X d'une part pour $a \in \Phi$, d'autre part pour $a \in X^*_K(G)$. Mais $\Phi \cup X^*_K(G)$ engendre $X^*_K(T) \otimes \mathbf{Q}$ (cf. 4.2.6 et 4.2.16) et notre assertion résulte du lemme suivant :

Lemme. — *Soit* T *un tore défini sur* K, *déployé sur* $\tilde{K}$. *Une partie* X *de* T(K) *est bornée pour la bornologie naturelle* $\mathscr{B}(\omega)$ *si et seulement si l'application* $x \mapsto \omega(\chi(x))$ *est bornée inférieurement sur* X *pour tout* $\chi \in X^*_K(T)$.

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la satisfaite. Pour tout $f \in K[T]$, il existe $\chi_1, \ldots, \chi_n \in X^*(T)$ et $c_1, \ldots, c_n \in \tilde{K}$ tels que $f = \Sigma c_i \chi_i$. Il suffit donc de montrer que $\omega(\chi(x))$ reste borné inférieurement sur X pour tout $\chi \in X^*(T)$. Posons

$$\chi^\natural = \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)} \gamma \cdot \chi \in X^*_K(T).$$

On a $\omega((\gamma \cdot \chi)(x)) = \omega((\chi(x))^\gamma) = \omega(\chi(x))$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ et tout $x \in T(K)$, d'où

$$\omega(\chi(x)) = [\tilde{K} : K]^{-1} \omega(\chi^\natural(x)),$$

ce qui démontre le lemme et la proposition.

4.2.20. — *Ensembles de valeurs.* Soit φ la valuation de la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ donnée par 4.2.2. Rappelons que, pour $a \in \Phi$, on a posé (I, 6.2.2) :

$$\Gamma_a = \varphi_a(U_a - \{1\}), \tag{1}$$

$$\Gamma'_a = \{\varphi_a(u) \mid u \in U_a - \{1\}, \varphi_a(u) = \sup \varphi_a(uU_{2a})\} \tag{2}$$

(si $2a \notin \Phi$, on pose $U_{2a} = \{1\}$). Nous allons déterminer ces ensembles de valeurs. Pour cela, notons comme plus haut L_a (resp. (L_a, L_{2a})) le corps (resp. l'extension quadratique) attaché(e) à un rayon radiciel a non pluriel (resp. pluriel). D'une manière générale, si $L \supset L_2$ est une extension quadratique, avec $K \subset L_2 \subset L \subset \tilde{K}$, nous notons L^0 (resp. L^1) l'ensemble des éléments de L de trace nulle (resp. égale à 1) et posons

$$L^1_{\max} = \{\lambda \in L^1 \mid \omega(\lambda) = \sup\{\omega(x) \mid x \in L^1\}\}. \tag{3}$$

Si le corps résiduel de L est de caractéristique $\neq 2$, on a $\frac{1}{2} \in L^1_{\max}$. Avec ces notations :

Lemme. — (i) *Si* $L^1_{\max} = \emptyset$, *la valuation* ω *n'atteint son maximum sur aucune classe de* L *modulo* L^0 *ne contenant pas* 0.

(ii) *Si* $\lambda \in L^1_{\max}$, *on a, pour* $x \in L_2$ *et* $y \in L^0$,

$$\omega(x\lambda + y) = \inf(\omega(x\lambda), \omega(y)). \tag{4}$$

Soit $z \in L^\times$ tel que $\omega(z) = \sup \omega(z + L^0)$. Alors $z \notin L^0$, $\mathrm{Tr}\, z \neq 0$ et $\lambda = (\mathrm{Tr}\, z)^{-1}.z$ appartient à $L^1_{\max}$, d'où (i).

Adoptons maintenant les notations de (ii). Il suffit de démontrer (4) lorsque $x \neq 0$; on a alors $\lambda + x^{-1}y \in L^1$, d'où $\omega(\lambda) \geqq \omega(\lambda + x^{-1}y)$ et $\omega(x\lambda) \geqq \omega(x\lambda + y)$. On en déduit $\omega(y) \geqq \inf(\omega(x\lambda + y), \omega(-x\lambda)) = \omega(x\lambda + y)$ d'où (4).

Remarquons que $\lambda \notin L^0$ et que $L = L_2\lambda + L^0$; la formule (4) permet donc de calculer la valuation de n'importe quel élément de L.

4.2.21. — Soit $a \in \Phi$. On a

(1) $\Gamma_a = \Gamma'_a = \omega(L_a^\times)$ si a est non pluriel;

(2) $\Gamma_{2a} = \Gamma'_{2a} = \omega(L_a^0 - \{0\})$ si a est pluriel;

(3) $\Gamma'_a = \emptyset$ et $\Gamma_a = \frac{1}{2}\omega(L_a^0 - \{0\})$ si a est pluriel et $(L_a)^1_{\max} = \emptyset$;

(4) $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\omega(\lambda) + \omega(L_a^\times)$ et $\Gamma_a = \frac{1}{2}\omega(L_a^\times)$ si a est pluriel et $\lambda \in (L_a)^1_{\max}$.

En effet, les formules (1) et (2) résultent aussitôt de 4.2.2 (2) et (4) respectivement. D'autre part, 4.2.2 (3) et 4.1.9 (5) montrent que, si a est pluriel, Γ_a (resp. Γ'_a) est l'ensemble des $\varphi_a(x_a(u, v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$ pour

$$(u, v) \in H(L_a, L_{2a}) \quad (\text{resp. et } \omega(v) = \sup \omega(v + L_a^0)).$$

Lorsque $(L_a^1)_{\max} = \emptyset$, (3) s'ensuit aussitôt, vu 4.2.20 (i) et I, 6.2.2. Supposons donc que $\lambda \in (L_a^1)_{\max}$, d'où $v = \lambda u^\sigma u + v_0$, avec $v_0 \in L_a^0$. La première relation (4) résulte alors de 4.2.20 (ii). L'inclusion $\Gamma_a \subset \frac{1}{2}\omega(L_a^\times)$ étant évidente, il reste à établir l'inclusion inverse. Si $e = 1$, elle résulte de ce que $\omega(L_a^\times) = \omega(L_{2a}^\times) = \omega(L_{2a}^0 - \{0\}) \subset 2\Gamma_a$, et si $e = 2$, 4.2.20 (ii) implique que

$$\begin{aligned}\omega(L_a^\times) &= (\omega(\lambda) + \omega(L_{2a}^\times)) \cup \omega(L_a^0 - \{0\}) \\ &= (\omega(\lambda) + 2\omega(L_a^\times)) \cup \omega(L_a^0 - 0) \subset 2\Gamma_a,\end{aligned}$$

d'où (4). Notons encore que, toujours sous l'hypothèse où $\lambda \in (L_a^1)_{\max}$, 4.2.20 (ii) entraîne aussi

(5) $$\varphi_a(x_a(u, v)) \leqq \omega(u) + \frac{1}{2}\omega(\lambda),$$

avec *égalité* si et seulement si $\varphi_a(x_a(u, v)) = \sup \varphi_a(x_a(u, v)\, U_{2a})$ (p. ex. si $v = \lambda u^\sigma u$).

Si ω est *discrète*, on a évidemment $(L_a)^1_{\max} \neq \emptyset$ (puisque $x \in L_a^1$ entraîne $\omega(x) \leqq 0$), d'où $\Gamma'_a \neq \emptyset$ pour toute racine multipliable a. Par ailleurs, il est clair que la valuation φ est discrète (I, 6.2.21).

Si ω est *dense* et si $(L_a)^1_{\max} \neq \emptyset$ pour toute racine multipliable a (ce qui est le cas si $\tilde{K}$ est admissible, voir plus loin 4.3.3), alors Γ'_a est dense dans $\mathbf{R}$ pour tout $a \in \Phi$.

4.2.22. — Proposition. — *Supposons* G *simplement connexe. Alors, le groupe* $W = \nu(N)$ *est engendré par les réflexions* $r_{a,k}$ *par rapport aux hyperplans*

$$\partial\alpha_{a,k} = \{x \in A \mid a(x - \varphi) + k = 0\} \quad \textit{pour } a \in \Phi \textit{ et } k \in \Gamma_a.$$

Si de plus ω *est discrète,* W *est le groupe de Weyl affine du système de racines affines* $\alpha_{a,k} = \{x \in A \mid a(x - \varphi) + k \geqq 0\}$ *pour* $a \in \Phi$ *et* $k \in \Gamma'_a$.

On sait que G(K) est engendré par la réunion des $U_a(K)$ pour $a \in \Phi$ (cf. par exemple [33], lemme 64, p. 183). La première assertion résulte alors de I, 6.2.11 et la seconde s'ensuit aussitôt.

4.2.23. — *Echelonnages.* Supposons ω *discrète.* Des formules de 4.2.21 résulte immédiatement la détermination de l'échelonnage $\mathscr{E} \subset \Phi \times \Sigma$ attaché au système de racines affines de A (I, 1.4). Il suffit de le faire lorsque G est K-simple. Il existe alors une extension L de K contenue dans $\widetilde{K}$ telle que $G = \Pi_{L/K} H$, où H est un L-groupe absolument simple; l'immeuble de G sur K s'identifie à celui de H sur L et les échelonnages sont les mêmes. On peut donc se borner au cas où G est absolument simple. On a alors les résultats suivants, où nous reprenons les notations de I, 1.4.6 :

a) Si G est déployé de type X_n, l'échelonnage $\mathscr{E}$ est de type X_n;

b) Si G n'est pas déployé et si $\widetilde{K}$ est une extension *non ramifiée* de K, alors

— pour G de type ${}^2A_{2n}$ $(n \geqq 1)$, $\mathscr{E}$ est de type $C - BC_n^{IV}$,
— pour G de type ${}^2A_{2n+1}$ $(n \geqq 1)$, $\mathscr{E}$ est de type C_{n+1},
— pour G de type ${}^2D_n$ $(n \geqq 4)$, $\mathscr{E}$ est de type B_{n-1},
— pour G de type ${}^2E_6$, $\mathscr{E}$ est de type F_4,
— pour G de type ${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$, $\mathscr{E}$ est de type G_2;

c) Si G n'est pas déployé et si $\widetilde{K}$ est une extension *ramifiée* de K, alors

— pour G de type ${}^2A_{2n}$ $(n \geqq 1)$, $\mathscr{E}$ est de type $C - BC_n^{III}$,
— pour G de type ${}^2A_{2n+1}$ $(n \geqq 1)$, $\mathscr{E}$ est de type $B - C_{n+1}$,
— pour G de type ${}^2D_n$ $(n \geqq 4)$, $\mathscr{E}$ est de type $C - B_{n-1}$,
— pour G de type ${}^2E_6$, $\mathscr{E}$ est de type F_4^I,
— pour G de type ${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$, $\mathscr{E}$ est de type G_2^I.

4.2.24. — Soit E une extension algébriquement close de $\widetilde{K}$, soit K' un sous-corps de E contenant K muni d'une valuation ω' prolongeant ω et posons $\widetilde{K}' = K'\widetilde{K}$: c'est la plus petite extension galoisienne de K' déployant G. Supposons que $\widetilde{K}'$ soit une extension *univalente* de K' et posons $G' = G_{K'}$, $T' = T_{K'}$, etc. Notons qu'en identifiant $X^*(T)$ et $X^*(T')$, on a $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}'$. Soit S'' le sous-tore K'-déployé maximal de T' et Φ'' le système de racines de G'' suivant S''. Il est clair que le système de Chevalley-Steinberg $(\widetilde{x}_\alpha)$ « est » encore un système de Chevalley-Steinberg de G', donc définit une valuation $\widetilde{\varphi}'$ de la donnée radicielle $(T'(\widetilde{K}'), (U'_\alpha(\widetilde{K}')_{\alpha \in \widetilde{\Phi}}))$ de $G(\widetilde{K}')$, qui se descend en une valuation φ' de la donnée radicielle $(T'(K'), (U'_b(K')_{b \in \Phi''}))$ de G(K'). Il est immédiat que $\widetilde{\varphi}'$ se descend en $\widetilde{\varphi}$ (cf. I, 9.1.19 *a)*), d'où résulte par transitivité que φ' se descend en φ.

Appliquant I, 9.1.17 (avec $S^{\natural} = T(K)$), on voit qu'il existe une isométrie j et une seule de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G(K) dans l'immeuble $\mathscr{I}'$ de G(K') telle que $j(\varphi) = \varphi'$ et $j(g.x) = g.j(x)$ pour $x \in \mathscr{I}$ et $g \in G(K)$. Compte tenu de 4.2.10, j est indépendante du choix du système de Chevalley-Steinberg et nous permet d'identifier $\mathscr{I}$ à une partie de $\mathscr{I}'$. L'image $j(A)$ est contenue dans l'appartement A' de $\mathscr{I}'$ associé au tore K'-déployé maximal S''. Enfin compte tenu de la conjugaison des tores K-déployés maximaux et de 4.2.10, on voit que j ne dépend pas non plus du choix de S; on peut donc la qualifier de *canonique*. En particulier, si u est un K-automorphisme de K' conservant ω', alors u opère sur $\mathscr{I}'$ et l'on a $u \circ j = j$.

4.2.25. Définition. — *Supposons que* $\widetilde{K}$ *soit une extension* admissible *de* K (1.6.1) [1], *et soit* K' *une extension de* K, *munie d'une valuation* ω' *prolongeant* ω. *On dit que le changement de base* $K \to K'$ *est* conservateur *par rapport à* $\widetilde{K}$ *si* ω' *est un prolongement non ramifié de* ω (i.e. $\omega'(K') = \omega(K)$) *et si les corps résiduels de* K' *et de* $\widetilde{K}$ *sont linéairement disjoints sur le corps résiduel de* K (cf. 1.6.8).

Un tel changement de base ne change en effet pas grand-chose. Vu 1.6.8, K' et $\widetilde{K}$ sont linéairement disjoints sur K, ce qui permet d'appliquer 4.1.18, et $\widetilde{K}'$ est une extension admissible de K'. Avec les notations de 4.1.18 et 4.2.24, on a $S'' = S'$, $\Phi'' = \Phi$, les sous-groupes radiciels de G et de G' sont « les mêmes », etc. La restriction de j à A est alors un isomorphisme de A sur l'appartement A' de $\mathscr{I}'$ correspondant à S', pour toutes les structures de A (métrique, système de racines affines, etc.).

Ceci nous permettra souvent de nous ramener soit au cas où le corps résiduel de K est infini grâce à 1.6.9 *a)*, soit à celui où K est hensélien grâce à 1.6.9 *b)*.

Bien entendu, l'isométrie $j : \mathscr{I} \to \mathscr{I}'$ n'est en général pas surjective, *sauf cependant si* K' *est l'hensélisé ou le complété de* K (cf. [27], prop. 2.3.5) : en considérant la rétraction de $\mathscr{I}'$ sur A' par rapport à un germe de quartier ayant pour direction la chambre vectorielle D associée à Φ^+ (I, 7.2.3), on voit que tout $x \in \mathscr{I}'$ est transformé d'un point $y \in A'$ par un élément $u \in U^+(K')$ (I, 7.4.25 (1)); mais la densité de K dans K' entraîne aussitôt qu'il existe $u' \in U^+(K)$ et $v \in U_{y+D}(K')$ avec $u = u'v$, d'où $x = u'.y \in j(\mathscr{I})$. Même dans ce cas, il existe en général des appartements de $\mathscr{I}'$ qui ne sont pas images d'appartements de $\mathscr{I}$.

4.3. Les schémas $\mathfrak{U}_a$.

Désormais nous supposons que l'extension $\widetilde{K}$ de K est *admissible* (1.6.1).

4.3.1. — On conserve les notations de 4.2. En particulier, $\varphi = (\varphi_a)$ est la valuation de la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ de $G = G(K)$ associée au système cohérent d'épin-

[1] Ce que nous supposerons à partir du numéro suivant.

glages (x_a) (4.2.4). Chacun des groupes $U_a = U_a(K)$ est filtré par φ_a : rappelons (I, 6.2.1) que l'on pose, pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$,

(1) $$U_{a,k} = \{u \in U_a(K) \mid \varphi_a(u) \geqq k\}.$$

Les $U_{a,k}$ sont des sous-groupes de U_a par définition même des valuations (I, 6.2.1 (V1)). Nous allons voir que chaque $U_{a,k}$ pour $k \in \Gamma'_a$ est le groupe des points entiers d'un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique U_a. Ce sont ces $\mathcal{O}$-schémas que nous utiliserons au n° 4.5 pour construire des « données radicielles schématiques » auxquelles on appliquera les résultats du § 3.

4.3.2. — Si $a \in \Phi$ est non pluriel, ces schémas sont évidents : le groupe U_a s'identifie grâce à l'épinglage x_a au groupe additif du corps L_a attaché à a (4.1.8) et pour tout $k \in \Gamma_a = \Gamma'_a = \omega(L_a^\times)$ (4.2.20 (1)), le sous-groupe $U_{a,k}$ est l'image par x_a du $\mathcal{O}$-module libre de type fini $L_{a,k} = \{u \in L_a \mid \omega(u) \geqq k\}$. Notons $\mathfrak{L}_{a,k}$ le $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse canoniquement associé à ce module (1.4.1). Par transport de structure par x_a, on obtient un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{U}_{a,k}$ de fibre générique U_a tel que

(1) $$\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}) = U_{a,k}.$$

Soit maintenant $k \in \mathbf{R}$ quelconque; si la valuation ω est *discrète*, il existe un plus petit $k' \in \Gamma_a$ tel que $k' \geqq k$ et l'on a $U_{a,k} = U_{a,k'}$. Nous poserons alors

(2) $$\mathfrak{U}_{a,k} = \mathfrak{U}_{a,k'} \quad (\omega \text{ discrète}, \ k' = \inf\{h \in \Gamma_a \mid h \geqq k\}).$$

La relation (1) est évidemment encore exacte.

Par contre, si ω est *dense* et si $k \notin \Gamma_a$, le groupe $U_{a,k}$ s'identifie à un sous-$\mathcal{O}$-module de L_a qui n'est pas de type fini et il n'existe pas de $\mathcal{O}$-schéma admettant $U_{a,k}$ comme groupe de points entiers et possédant les propriétés que nous souhaiterions (par exemple que l'image du groupe des points entiers dans la fibre fermée ne soit pas réduite à $\{0\}$). Nous ne définirons donc pas de schéma $\mathfrak{U}_{a,k}$ lorsque ω est dense et $k \notin \Gamma_a$.

Pour traiter le cas d'un rayon radiciel pluriel, nous aurons besoin du lemme suivant :

4.3.3. Lemme. — *Soient* $L_2 \subset L$ *deux sous-extensions de* $\tilde{K}$ *telles que* $[L : L_2] = 2$.

(i) *L'extension* L *de* L_2 *est admissible, donc séparable, et l'une des deux conditions suivantes est satisfaite* :

(*nr*) *l'extension résiduelle* $\bar{L}$ *de* $\bar{L}_2$ *est quadratique et* $\omega(L) = \omega(L_2)$;
(*r*) ω *est discrète et l'extension* L *de* L_2 *est ramifiée.*

(ii) *Il existe* $t \in L$ *tel que* $L = L_2[t]$ *et que les coefficients* $\alpha, \beta \in L_2$ *de l'équation* $t^2 - \alpha t + \beta = 0$ *satisfaite par t possèdent les propriétés suivantes* :

a) $\omega(\beta) = 0$ (*cas* (*nr*)) *ou bien* ω *est discrète et* β *est une uniformisante de* L_2 (*cas* (*r*));

b) ou bien $\alpha = 0$, *ou bien* $\omega(\beta) \leqq \omega(\alpha) < \omega(2)$, *ou encore* $0 < \omega(\beta) \leqq \omega(\alpha) = \omega(2)$.

Supposons désormais ces conditions satisfaites et définissons $\lambda \in L$ *comme ceci :*
— *si* $\alpha = 0$ *(ce qui entraîne* $2 \neq 0$*), on pose* $\lambda = 1/2$;
— *si* $\alpha \neq 0$, *on pose* $\lambda = t\alpha^{-1}$.
Alors $\lambda \in L^1_{max}$, *qui n'est donc pas vide.*

(iii) *On a* $\omega(\lambda) \leqq 0$ *et* $\omega(\lambda) = 0$ *si et seulement si ou bien* car $\bar{K} \neq 2$, *ou bien l'extension* L *de* L_2 *est étale.*

(iv) *Soit* σ *l'unique* L_2*-automorphisme non trivial de* L *et soit* $k \in \mathbf{R}$. *On a*

$$\inf\{\omega(u - u^\sigma) \mid \omega(u) \geqq k\} \geqq k - \omega(\lambda)$$

avec égalité si $k \in \omega(L^\times)$, *sauf dans le cas (r) lorsque* $k \in 2\mathbf{Z}\omega(t)$, *cas où la borne inférieure est* $k - \omega(\lambda) + \omega(t)$.

L'assertion (i) résulte de 1.6.3 et 1.6.1 *c)*. Démontrons (ii).

Prenons pour t dans le cas *(nr)* un élément de $\mathcal{O}_L$ dont l'image dans $\bar{L}$ engendre l'extension $\bar{L}$ de $\bar{L}_2$ et dans le cas *(r)* une uniformisante de L : il est immédiat que *a)* est vraie et que $\omega(\alpha) \geqq \omega(\beta) \geqq 0$. Si $\alpha \neq 0$ et si l'on a, soit $\omega(\alpha) > \omega(2)$, soit $\omega(\alpha) = \omega(2)$ et $\omega(\beta) = 0$, alors $2 \neq 0$ et l'on peut remplacer t par $t - \frac{\alpha}{2}$, ce qui annule le terme linéaire de l'équation de t et permet de réaliser *a)* et *b)*. Avant de poursuivre la démonstration de (ii), notons deux conséquences immédiates de *a)* et *b)*. On a

$$\omega(x + ty) = \inf(\omega(x), \omega(ty)) \quad \text{pour } x, y \in L_2; \tag{1}$$

en effet, dans le cas contraire, on aurait $\omega(x) = \omega(ty)$, ce qui exclut le cas *(r)*, et l'image de t dans $\bar{L}$ coïnciderait avec celle de $-xy^{-1}$, ce qui est impossible dans le cas *(nr)*. D'autre part, comme $\omega(t) = \omega(\beta)/2$, *b)* implique aussitôt que

$$\text{si } \alpha \neq 0, \quad \omega(\alpha t^{-1}) < \omega(2). \tag{2}$$

Reprenons la preuve de (ii). Si $\alpha = 0$, on a $L^1 = \frac{1}{2} + tL_2$, et (1) implique que $\frac{1}{2} \in L^1_{max}$. Supposons que $\alpha \neq 0$, d'où $t\alpha^{-1} \in L^1$, et que $t\alpha^{-1} \notin L^1_{max}$. Comme $L^0 = (1 - 2t\alpha^{-1})\, L_2$, ceci signifie qu'il existe $u \in L_2$ tel que

$$\omega(t\alpha^{-1}) < \omega(t\alpha^{-1} + u(1 - 2t\alpha^{-1})),$$

c'est-à-dire, vu (1),

$$\omega(t\alpha^{-1}) < \inf(\omega(u), \omega(t\alpha^{-1}) + \omega(1 - 2u)). \tag{3}$$

Cette inégalité implique que $\omega(1 - 2u) > 0$. On en déduit successivement que $\omega(u) = \omega\left(\frac{1}{2}\right)$ puis, compte tenu de (3), que $\omega(t\alpha^{-1}) < \omega\left(\frac{1}{2}\right)$, en contradiction avec (2), d'où (ii).

Démontrons (iii). En vertu de (2), on a

$$\omega(\lambda) = -\omega(2 - \alpha t^{-1}). \tag{4}$$

Par suite, $\omega(\lambda) \leqq 0$. Lorsque $\alpha = 0$, $\omega(\lambda)$ est nul si et seulement si car $\bar{K} \neq 2$. Lorsque $\alpha \neq 0$, d'où car $\bar{K} = 2$ d'après *b)*, on a $\omega(\lambda) = 0$ si et seulement si $\omega(\alpha) = \omega(t)$, ce qui équivaut à L non ramifiée et $\bar{L}$ séparable sur $\bar{L}_2$, c'est-à-dire à L étale.

Démontrons enfin (iv). Posons $u = x + ty$ avec $x, y \in L_2$; on a $u - u^\sigma = (2t - \alpha)y$. Vu (4), il s'ensuit que

$$\omega(u - u^\sigma) = \omega(y) + \omega(t) - \omega(\lambda) \geqq \omega(u) - \omega(\lambda)$$

avec égalité si $u = ty$. L'assertion (iv) en résulte immédiatement, compte tenu de (1).

4.3.4. — Gardons les hypothèses et notations de 4.3.3. On voit facilement que :

— dans le cas (*nr*), on a $\omega(L^0) = \omega(L_2) = \omega(L)$ (cf. 4.3.3 (1));

— dans le cas (*r*), ω est discrète, ce qui permet de normaliser ω de sorte que $\omega(L^\times) = \mathbf{Z}$, et il faut alors distinguer deux sous-cas :

— si $\alpha \neq 0$, on a $\omega(2t\alpha^{-1}) > 1$ (cf. 4.3.3 (2)), d'où $\omega(L^0) = \omega(L_2) = 2\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, $\omega(t\alpha^{-1}) = 1 - \omega(\alpha) \in 1 + 2\mathbf{Z}$ et $\frac{1}{2}\omega(t\alpha^{-1}) + \omega(L^\times) = \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$;

— si $\alpha = 0$, alors $\omega(L^{0\times}) = 1 + 2\mathbf{Z}$, $\omega\left(\frac{1}{2}\right) \in 2\mathbf{Z}$ et $\frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}\right) + \omega(L^\times) = \mathbf{Z}$.

Appliquant ceci au cas d'un rayon radiciel pluriel a, on voit, en utilisant 4.2.21, que si l'extension quadratique attachée à a est non ramifiée, $2\Gamma'_a$ est contenu dans Γ_{2a} et en est une classe modulo $2\Gamma_{2a}$, tandis que dans le cas ramifié, Γ_{2a} et $2\Gamma'_a$ sont les deux classes du groupe (discret) $\omega(L_a^\times)$ modulo $2\omega(L_a^\times)$, et sont disjoints.

On voit aussi, en appliquant les formules (1) à (4) de 4.2.21, que *la valuation* φ *est toujours spéciale*, c'est-à-dire que $0 \in \Gamma_a$ pour toute a non divisible (I, 6.2.13).

4.3.5. — Soient a un rayon radiciel pluriel, $L \supset L_2$ l'extension quadratique attachée à a, σ l'unique L_2-automorphisme non trivial de L et λ un élément de $L^1_{\max}$; posons $\gamma = -\frac{1}{2}\omega(\lambda)$.

Soient $k, \ell \in \mathbf{R}$ tels que

(1) $\qquad k \in \Gamma'_a = -\gamma + \omega(L^\times), \quad \ell \in \Gamma'_{2a} = \Gamma_{2a} = \omega(L^0 - \{0\}),$

(2) $\qquad \ell \leqq \inf \Gamma_{2a} \cap [2k, +\infty[.$

Remarquons que (2) est équivalente à $\ell \leqq 2k$, *sauf* si ω est discrète et l'extension $L \supset L_2$ est *ramifiée*. Dans ce dernier cas, on voit aisément à partir de 4.3.4 que si $c = \omega(t)$, d'où $\omega(L^\times) = c\mathbf{Z}$, la relation (2) est équivalente à

(2 *bis*) $\qquad \ell \leqq 2k + c$

(cela reste vrai dans le cas non ramifié, d'ailleurs!).

Notons $\mathfrak{L}_{k+\gamma}$ (resp. $\mathfrak{L}^0_\ell$) le $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse canoniquement associé au $\mathcal{O}$-module (libre de type fini vu (1))

$$L_{k+\gamma} = \{u \in L \mid \omega(u) \geqq k + \gamma\} \quad (\text{resp. } L^0_\ell = \{v \in L^0 \mid \omega(v) \geqq \ell\}).$$

Vu (2) et 4.3.3 (iv), l'application bilinéaire $(u, u') \mapsto \lambda^\sigma u u'^\sigma - \lambda u^\sigma u'$ de $L \times L$ dans L^0 envoie $L_{k+\gamma} \times L_{k+\gamma}$ dans L^0_ℓ et définit donc un morphisme de schémas de $\mathfrak{L}_{k+\gamma} \times \mathfrak{L}_{k+\gamma}$ dans $\mathfrak{L}^0_\ell$. Il s'ensuit que la loi de produit de 4.1.15 (2) munit le schéma $\mathfrak{L}_{k+\gamma} \times \mathfrak{L}^0_\ell$ d'une structure de *schéma en groupes* que nous notons $\mathfrak{H}^\lambda_{(k,\ell)}$. Par transport de structure au moyen de l'isomorphisme j_λ^{-1} (défini en 4.1.15 (1)), on obtient un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{H}(L, L_2)_{(k,\ell)}$ de fibre générique $H(L, L_2)$ et qui *ne dépend pas du choix de* λ : en effet, si λ' est un autre élément de $L^1_{\max}$, l'isomorphisme $j_{\lambda'} \circ j_\lambda^{-1}$ est donné par

$$(u, v) \mapsto (u, v + (\lambda - \lambda')\, u^\sigma u)$$

et se prolonge en un isomorphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{H}^\lambda_{(k,\ell)}$ sur $\mathfrak{H}^{\lambda'}_{(k,\ell)}$.

L'épinglage $x_a : H(L, L_2) \to U_a$ fournit alors par transport de structure un *$\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ de fibre générique* U_a. Lorsque L est non ramifiée (resp. ramifiée), on pose encore $\mathfrak{U}_{a,k} = \mathfrak{U}_{a,(k,2k)}$ (resp. $\mathfrak{U}_{a,k} = \mathfrak{U}_{a,(k,2k+c)}$).

Montrons que

$$\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}(\mathcal{O}) = \{x_a(u, v) \mid (u, v) \in H(L, L_2),\ \omega(u) \geqq k + \gamma,\ \omega(v - \lambda u^\sigma u) \geqq \ell\} = U_{a,k} \cdot U_{2a,\ell}. \tag{3}$$

Soit en effet $(u, v) \in H(L, L_2)$ et $x = x_a(u, v)$. On a $x = x' x''$ avec

$$x' = x_a(u, \lambda u^\sigma u) = x_a(j_\lambda^{-1}(u, 0)) \in U_a,$$
$$x'' = x_a(0, v - \lambda u^\sigma u) = x_a(j_\lambda^{-1}(0, v - \lambda u^\sigma u)) \in U_{2a}.$$

L'égalité des deux premiers membres de (3) résulte aussitôt de ces formules et de la définition même du schéma $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$. D'autre part, on a

$$\varphi_a(x') = \frac{1}{2}\omega(\lambda u^\sigma u) = \omega(u) - \gamma,$$
$$\varphi_{2a}(x'') = \omega(v - \lambda u^\sigma u),$$

ce qui montre que le deuxième membre de (3) est contenu dans le troisième. Mais le lemme 4.2.20 entraîne que

$$\sup \varphi_a(x U_{2a}) = \sup \frac{1}{2}\omega(\lambda u^\sigma u + L^0) = \omega(u) - \gamma.$$

Par suite, si $x \in U_{a,k} \cdot U_{2a,\ell}$, on a $\omega(u) \geqq k + \gamma$, d'où

$$x' \in U_{a,k} \quad \text{et} \quad x'' \in U_{a,k} \cdot U_{2a,\ell} \cap U_{2a} = U_{2a,\ell}$$

(compte tenu de (2) et de I, 6.2.1 (V4)), d'où $\omega(v - \lambda u^\sigma u) \geqq \ell$. Finalement, on voit que x appartient au deuxième membre de (3), dont la démonstration est ainsi achevée.

4.3.6. — Explicitons la loi de groupe du schéma $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$, en reprenant les notations de 4.3.3 avec $L = L_a$ et $L_2 = L_{2a}$. On pose $c = \omega(t)$ et l'on choisit $u \in L$ de valuation $k + \gamma$.

1er cas : $\alpha = 0$. On a $\lambda = \frac{1}{2}$, $2\gamma = \omega(2)$ et $\mathrm{L}^0 = t\mathrm{L}_2$. Posons $d = 2k + 2\gamma - \ell + c$. On a $d \geqq \omega(2)$ et $d \in \omega(\mathrm{L}_2^\times)$. On peut donc choisir $\delta \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}_2}$ de valuation d. Un calcul simple montre alors que l'application

$$(1) \qquad (x, y, z) \mapsto x_a\left((x + ty)\, u, \left(\frac{1}{2}(x^2 + \beta y^2) + \delta^{-1} tz\right) uu^\sigma\right)$$

est un isomorphisme de schémas de $\mathcal{O}_{\mathrm{L}_2}^3$ sur $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ et que la loi de groupe de $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ transportée par cet isomorphisme à $\mathcal{O}_{\mathrm{L}_2}^3$ est donnée par

$$(2) \qquad (x, y, z)\,(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' - \delta(yx' - xy')).$$

Notons que $d = \omega(\delta) > 0$ *sauf* si $\mathrm{car}\,\overline{\mathrm{K}} \neq 2$ et $\ell = 2k + c$.

2e cas : $\alpha \neq 0$. On a $\lambda = t\alpha^{-1}$, $2\gamma = \omega(\alpha) - c$ et $\mathrm{L}^0 = (1 - 2\alpha^{-1}t)\,\mathrm{L}_2$. Posons $d = 2k + 2\gamma - \ell$. On a $d \in \omega(\mathrm{L}_2^\times)$ et $d \geqq \omega(\alpha) - 2c \geqq 0$. On peut donc choisir $\delta \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}_2}$ de valuation d et tout se passe comme dans le premier cas, à condition de remplacer (1) et (2) par

$$(1\ bis) \qquad (x, y, z) \mapsto x_a((x + ty)\, u, (t\alpha^{-1}(x^2 + \alpha xy + \beta y^2) + \delta^{-1}(1 - 2t\alpha^{-1})\, z)\, uu^\sigma)$$

$$(2\ bis) \qquad (x, y, z)\,(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \delta(xx' + \alpha yx' + \beta yy'))$$

Notons qu'ici on a $\omega(\delta) > 0$ *sauf* si $\omega(\alpha) = 2c$ et $\ell = 2k + c$.

On remarque que la loi de groupe sur $(\overline{\mathrm{L}}_2)^3$ déduite de (2) ou (2 *bis*) par réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ (autrement dit, la loi de groupe de la fibre fermée du schéma en groupes $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$)

— est non commutative si $\ell = 2k + c$ et si ou bien $\mathrm{car}\,\overline{\mathrm{K}} \neq 2$, ou bien $\mathrm{car}\,\overline{\mathrm{K}} = 2$ et l'extension $\mathrm{L} \supset \mathrm{L}_2$ est étale;

— est commutative d'exposant 4 si ω est discrète, L est ramifiée, α est une uniformisante de L_2 (d'où $\mathrm{car}\,\overline{\mathrm{K}} = 2$) et $\ell = 2k + c$;

— est l'addition de $(\overline{\mathrm{L}}_2)^3$ dans tous les autres cas.

4.3.7. — Par transport de structure par l'isomorphisme $v \mapsto x_a(0, v)$ de L^0 sur U_{2a}, on déduit du schéma en groupes additif $\mathfrak{L}_\ell^0$ (pour $\ell \in \omega(\mathrm{L}^0) - \{0\}$) un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique U_{2a} noté $\mathfrak{U}_{2a,\ell}$. Il est clair que si k, ℓ satisfont à 4.3.5 (1) et (2), l'injection de U_{2a} dans U_a se prolonge en un isomorphisme de $\mathfrak{U}_{2a,\ell}$ sur un sous-schéma en groupes fermé distingué de $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$. Le schéma en groupes quotient $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}/\mathfrak{U}_{2a,\ell}$ existe et est isomorphe à $\mathfrak{L}_{k+\gamma}$. L'application canonique de $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}(\mathcal{O})$ dans $(\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}/\mathfrak{U}_{2a,\ell})(\mathcal{O})$ est surjective.

4.3.8. — Soient maintenant $k, \ell \in \mathbf{R}$ quelconques. Si ω est *dense*, on voit comme en 4.3.2 qu'il n'est pas raisonnable de chercher à définir un schéma $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ lorsque les conditions (1) et (2) de 4.3.5 ne sont pas réalisées. Par contre, si ω est *discrète*, posons

$$(1) \qquad k' = \inf\{h \in \Gamma'_a \mid h \geqq k\},$$

$$(2) \qquad \ell' = \inf\{h \in \Gamma'_{2a} \mid h \geqq \inf(2k, \ell)\}.$$

Alors, $k' \in \Gamma'_a$, $\ell' \in \Gamma'_{2a}$ et 4.3.5 (2) est satisfaite par k' et ℓ' : si L_a est non ramifiée, on a $2\Gamma'_a \subset \Gamma'_{2a}$ (4.3.4), d'où $\ell' \leqq 2k'$; si L_a est ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = c + 2\Gamma'_a$ (4.3.4), et l'on voit aussitôt que $\ell' \leqq 2k' + c$.

On pose alors

$$\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)} = \mathfrak{U}_{a,(k',\ell')} \tag{3}$$

et l'on a

$$\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}(\mathcal{O}) = U_{a,k'} \cdot U_{2a,\ell'} = U_{a,k} \cdot U_{2a,\ell}. \tag{4}$$

La première égalité résulte de la définition, et on a évidemment

$$U_{a,k'} \subset U_{a,k} \quad \text{et} \quad U_{2a,\ell'} \subset U_{2a,\inf(2k,\ell)} \subset U_{a,k} \cdot U_{2a,\ell}.$$

Inversement, si $x \in U_{a,k}$, il existe par définition même de Γ'_a et de k' un $x' \in U_{a,k'}$ et un $x'' \in U_{2a}$ avec $x = x'x''$. On a alors $x'' \in U_{2a,2k}$ et il reste seulement à voir que $U_{2a,2k} \cdot U_{2a,\ell} \subset U_{2a,\ell'}$, ce qui est évident.

4.3.9. — Les schémas sous-jacents aux $\mathfrak{U}_{a,k}$, aux $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ et aux $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}/\mathfrak{U}_{2a,\ell}$ sont des schémas associés à des $\mathcal{O}$-modules libres de type fini. En particulier les applications canoniques $\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{U}_{a,k}(\overline{K})$ et $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}(\overline{K})$ sont surjectives. Si $\overline{K}$ est *infini*, ce sont des schémas étoffés (1.7), caractérisés parmi les schémas étoffés de fibre générique U_a par les relations 4.3.2 (1) ou 4.3.5 (3).

4.3.10. — Il est immédiat que si $k' \leqq k$ et $\ell' \leqq \ell$, l'identité de U_a se prolonge en un morphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ dans $\mathfrak{U}_{a,(k',\ell')}$ (ou de $\mathfrak{U}_{a,k}$ dans $\mathfrak{U}_{a,k'}$ lorsque a est non pluriel).

4.3.11. — Un changement de base *conservateur* $K \to K'$ (4.2.25) commute avec toutes les considérations précédentes : à partir du système cohérent d'épinglages (x'_a) de $G_{K'}$ déduit du système (x_a) comme en 4.2.25, on construit des schémas $\mathfrak{U}'_{a,k}$ ou $\mathfrak{U}'_{a,(k,\ell)}$ qui ne sont autres que les schémas déduits des $\mathfrak{U}_{a,k}$ ou des $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ par le changement de base $\mathcal{O} \to \mathcal{O}' = \mathcal{O}_{K'}$. Cela résulte aussitôt de 4.2.25 et de la relation $\mathcal{O}_{K' \otimes_K L} = \mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L$ (1.6.8), valable pour tout corps L avec $K \subset L \subset \widetilde{K}$, qui, jointe au fait que K' est non ramifiée sur K, entraîne que, pour tout $k \in \mathbf{R}$, on a

$$\{u \in K' \otimes_K L \mid \omega(u) \geqq k\} = \{\Sigma \xi_i u_i \mid \xi_i \in \mathcal{O}_{K'}^{\times},\ u_i \in L,\ \omega(u_i) \geqq k\}.$$

Enfin si $K \subset L_2 \subset L \subset \widetilde{K}$ avec $[L : L_2] = 2$ et $L = L_2[t]$, alors $K' \otimes L$ est l'extension quadratique admissible de $K' \otimes L_2$ engendrée par $1 \otimes t$ et $(K' \otimes L)^1_{\max} \supset L^1_{\max}$ d'après le lemme 4.3.3 : on peut donc dans les constructions précédentes conserver le même élément λ après changement de base.

4.3.12. — La famille des schémas $\mathfrak{U}_{a,k}$ ou $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ ne dépend pas (à l'indexation près) du choix du tore déployé maximal S normalisant U_a ni du choix du système cohérent d'épinglages : cela résulte aisément des formules explicites de changement d'épinglage de U_a vues en 4.1.7 et 4.1.13.

4.4. Le schéma $\mathfrak{T}$.

Dans ce numéro, jusqu'à 4.4.14 inclus, le groupe G ne joue aucun rôle et la lettre T désigne un tore quelconque défini sur K. On note $\widetilde{K}$ une extension galoisienne admissible déployant T (non nécessairement minimale) et l'on pose $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_{\widetilde{K}}$. A partir de 4.4.15, on revient aux conventions précédentes.

4.4.1. — Soit L une extension de K, munie d'une valuation ω_L prolongeant ω. On pose

$$T_b(L) = \{t \in T(L) \mid \omega_L(\chi(t)) = 0 \quad \text{pour tout } \chi \in X^*_L(T)\},$$

où $X^*_L(T) \subset L[T]$ est le groupe des caractères rationnels sur L de T.

4.4.2. Proposition. — (i) $T_b(K)$ *est l'ensemble des* $t \in T(K)$ *tels que* $\omega(\chi(t)) = 0$ *pour tout* $\chi \in X^*_{\widetilde{K}}(T) = X^*(T)$; *autrement dit*

$$T_b(K) = T_b(\widetilde{K}) \cap T(K).$$

(ii) $T_b(K)$ *est le plus grand sous-groupe borné de* $T(K)$ (*pour la bornologie naturelle* $\mathscr{B}(\omega)$ *définie par* ω *sur* $T(K)$ (cf. 4.2.19)).

(iii) *Soit u un* K*-morphisme de groupes de* T *dans un tore* T′ *défini sur* K *et déployé sur* $\widetilde{K}$. *Alors*

$$u(T_b(K)) \subset T'_b(K).$$

(iv) *Soit* $\mathfrak{T}$ *un* $\mathcal{O}$*-schéma en groupes plat de fibre générique* T. *Alors*

$$\mathfrak{T}(\mathcal{O}) \subset T_b(K).$$

Démontrons (ii). D'après le lemme 4.2.19, un sous-groupe X de T(K) est borné si et seulement si la fonction $t \mapsto \omega(\chi(t))$ reste bornée inférieurement sur X pour tout $\chi \in X^*_K(T)$. Mais, comme $\omega(\chi(t^n)) = n\omega(\chi(t))$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ceci équivaut à $X \subset T_b(K)$, d'où (ii). On en déduit $T_b(K) = T_b(\widetilde{K}) \cap T(K)$, c'est-à-dire (i). L'assertion (iii) est immédiate, puisque $\chi \circ u \in X^*_K(T)$ pour tout $\chi \in X^*_K(T')$, et (iv) aussi, car $\mathfrak{T}(\mathcal{O})$ est un sous-groupe borné de T(K) : pour toute $f \in K[T]$, il existe $c \in K^\times$ tel que $cf \in \mathcal{O}[\mathfrak{T}]$, d'où $f(t) \in c^{-1}\mathcal{O}$ pour tout $t \in \mathfrak{T}(\mathcal{O})$.

4.4.3. — Supposons que T soit un tore induit (1.5.17), c'est-à-dire un produit direct de tores de la forme $\Pi_{L_i/K}\mathfrak{Mult}_{L_i}$ $(i \leqq i \leqq r)$, où les L_i sont des sous-extensions de $\widetilde{K}$, et donc admissibles. Les anneaux de valuation $\mathcal{O}_{L_i}$ sont des $\mathcal{O}$-modules libres de type fini et l'on peut considérer le $\mathcal{O}$-schéma en groupes

$$\mathfrak{T} = \prod_{1 \leqq i \leqq r} (\Pi_{\mathcal{O}_{L_i}/\mathcal{O}}\mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_{L_i}}).$$

Comme $K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{L_i} = L_i$, la fibre générique de $\mathfrak{T}$ s'identifie à T (1.5.3). On sait que $\mathfrak{T}$ est *lisse* (1.5.8). D'autre part, on a vu (1.5.13) (1) que le schéma sous-jacent

à $\mathfrak{T}$ est un ouvert spécial d'un $\mathcal{O}$-module libre de type fini; c'est donc un schéma étoffé dès que le corps résiduel $\overline{K}$ de K est infini (1.7.3 *e)*). De plus :

Proposition. — $\mathfrak{T}(\mathcal{O}) = T_b(K) = \{t \in T(K) \mid \omega(\chi(t)) = 0$ *pour tout* $\chi \in X_K^*(T)\}$.

La deuxième égalité a été vue (4.4.2 (i)). On peut évidemment supposer $r = 1$ et poser $L_1 = L$. On sait que T(K) s'identifie alors à $L^\times$ et que $X_K^*(T)$ est engendré par la norme $\mathrm{Norme}_{L/K}$ (1.5.17). Par suite, $T_b(K)$ est l'ensemble des $t \in L^\times$ tels que $\mathrm{Norme}_{L/K} t \in \mathcal{O}_K^\times$, relation qui entraîne $t \in \mathcal{O}_L$. La proposition en résulte, puisque $\mathfrak{T}$ est l'ouvert spécial du $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}_L$ défini par la norme (1.5.13 (1)).

4.4.4. — Soient T et T′ deux tores induits, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ les $\mathcal{O}$-schémas associés comme en 4.4.3.

Proposition. — *Tout* K*-morphisme f de groupes algébriques de* T *dans* T′ *se prolonge (d'une manière et d'une seule) en un* $\mathcal{O}$*-morphisme de schémas en groupes de* $\mathfrak{T}$ *dans* $\mathfrak{T}'$.

On a $f(\mathfrak{T}(\mathcal{O})) \subset f(T_b(K)) \subset T'_b(K) = \mathfrak{T}'(\mathcal{O})$ d'après 4.4.2 et 4.4.3. La proposition en résulte si le corps résiduel $\overline{K}$ est *infini*, puisque $\mathfrak{T}$ est alors étoffé (1.7.1). Si $\overline{K}$ est *fini*, on peut trouver une extension étale K′ de K telle que les corps résiduels $\widetilde{\overline{K}}$ et $\overline{K}'$ soient linéairement disjoints sur $\overline{K}$ et que $\overline{K}'$ soit infini (1.6.9 *a)*). Le changement de base $K \to K'$ respecte alors entièrement la situation : reprenons les notations de 4.4.3 et posons $L'_i = K' \otimes_K L_i$; alors L'_i est un corps extension admissible de K′, $\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L$ (1.6.8 (ii)) et l'on a (1.5.3)

$$T_{K'} = \prod_{1 \leqq i \leqq r} \Pi_{L'_i/K'}\, \mathfrak{Mult}_{L'_i},$$

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_{K'}} = \prod_{1 \leqq i \leqq r} \Pi_{\mathcal{O}_{L'_i}/\mathcal{O}_{K'}}\, \mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_{L'_i}}.$$

Par suite, $f_{K'}$ se prolonge en un $\mathcal{O}_{K'}$-morphisme de $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_{K'}}$ dans $\mathfrak{T}'_{\mathcal{O}_{K'}}$, d'où la conclusion par descente (1.2.4).

4.4.5. — Il résulte en particulier de cette proposition que *le schéma* $\mathfrak{T}$ *ne dépend que de* T et non de son écriture comme produit de tores de la forme $\Pi_{L/K}\, \mathfrak{Mult}_L$ (ce qui n'était pas évident *a priori*). Nous l'appellerons le *schéma canonique de fibre générique* T. Il est clair que si T est déployé sur K, on retrouve le schéma canonique introduit en 1.2.11. Plus généralement :

Proposition. — *Soit* S *le sous-tore* K*-déployé maximal de* T. *L'adhérence schématique de* S *dans* $\mathfrak{T}$ *est le schéma canonique de fibre générique* S.

Cela résulte de 1.5.13 (1) et 1.5.17.

Notons encore que $\mathfrak{T}$ ne dépend pas du choix de l'extension galoisienne admissible déployant T (dès qu'il en existe une !): on peut remplacer $\widetilde{K}$ par la plus petite extension $\widetilde{K}_0$

déployant T, qui est galoisienne admissible et contient automatiquement les corps L_i de 4.4.2, et ceci ne change en rien la définition de $\mathfrak{T}$.

4.4.6. — Soit maintenant T un tore quelconque, non nécessairement induit (mais toujours défini sur K et déployé sur $\tilde{K}$). Considérons l'immersion fermée canonique (1.5.11)

(1) $$T \to T^\# = \Pi_{\tilde{K}/K} T_{\tilde{K}}.$$

Puisque $T_{\tilde{K}}$ est déployé, $T^\#$ est un tore induit et on peut considérer le schéma canonique $\mathfrak{T}^\#$ de fibre générique $T^\#$. Soit $\mathfrak{T}^a$ l'adhérence schématique de T dans $\mathfrak{T}^\#$: on sait que c'est un $\mathcal{O}$-schéma de fibre générique T sans torsion (1.2.6), donc *plat* puisque $\mathcal{O}$ est prüférien, donc un $\mathcal{O}$-schéma en groupes (1.2.7), *de type fini* puisque $\mathfrak{T}^\#$ est de type fini, et on a, vu 1.2.5,

(2) $$\mathfrak{T}^a(\mathcal{O}) = \mathfrak{T}^\#(\mathcal{O}) \cap T(K) = T_b^\#(K) \cap T(K) = T_b(K),$$

la dernière égalité résultant de la surjectivité de l'application canonique $X^*(T^\#) \to X^*(T)$.

4.4.7. — Si T' est un autre tore et $\mathfrak{T}'^a$ le schéma obtenu à partir de T' comme en 4.4.6, et si $f : T \to T'$ est un K-morphisme de groupes algébriques de T dans T', alors f se prolonge (d'une manière et d'une seule) en un $\mathcal{O}$-morphisme de schémas en groupes f^a de $\mathfrak{T}^a$ dans $\mathfrak{T}'^a$: en effet, $\Pi_{\tilde{K}/K} f_{\tilde{K}}$ se prolonge, vu 4.4.4, en un morphisme de $\mathfrak{T}^\#$ dans $\mathfrak{T}'^\#$ induisant f sur T.

Si f est une immersion fermée, alors f^a est une immersion fermée. En effet $T'_{\tilde{K}}$ se décompose en produit direct du tore $T_{\tilde{K}} = f_{\tilde{K}}(T_{\tilde{K}})$ et d'un tore T'' défini et déployé sur $\tilde{K}$ ([2], p. 206). Par suite $T'^\# = T^\# \times (\Pi_{\tilde{K}/K} T'')$, d'où $\mathfrak{T}'^\# = \mathfrak{T}^\# \times \mathfrak{T}''^\#$, où $\mathfrak{T}''^\#$ est le schéma canonique de fibre générique $T''^\#$, ce qui démontre notre assertion.

4.4.8. — *Si* T *est un tore induit, $\mathfrak{T}^a$ n'est autre que le schéma canonique de fibre générique* T. Il suffit évidemment de le montrer lorsque $T = \Pi_{L/K} \mathfrak{Mult}_L$. Comme $\tilde{K} \otimes_K L = \tilde{K}^n$ (avec $n = [L : K]$), on a

$$T^\# = \Pi_{\tilde{K}/K}(\Pi_{L/K} \mathfrak{Mult}_L)_{\tilde{K}} = \Pi_{\tilde{K}/K}(\Pi_{\tilde{K}^n/\tilde{K}} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}^n})$$
$$= \Pi_{\tilde{K}^n/K} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}^n} = (\Pi_{\tilde{K}/K} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}})^n,$$

et $$\mathfrak{T}^\# = (\Pi_{\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}} \mathfrak{Mult}_{\tilde{\mathcal{O}}})^n = \Pi_{\tilde{\mathcal{O}}^n/\mathcal{O}} \mathfrak{Mult}_{\tilde{\mathcal{O}}^n}.$$

Considérons alors les immersions fermées canoniques

$$\mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_L} \to \Pi_{\tilde{\mathcal{O}}^n/\mathcal{O}_L} \mathfrak{Mult}_{\tilde{\mathcal{O}}^n},$$
$$\mathfrak{Mult}_L \to \Pi_{\tilde{K}^n/L} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}^n}.$$

Vu 1.5.9, on en déduit des immersions fermées

$$\mathfrak{T} = \Pi_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}} \mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_L} \to \Pi_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}}(\Pi_{\tilde{\mathcal{O}}^n/\mathcal{O}_L} \mathfrak{Mult}_{\tilde{\mathcal{O}}^n}) = \Pi_{\tilde{\mathcal{O}}^n/\mathcal{O}} \mathfrak{Mult}_{\tilde{\mathcal{O}}^n} = \mathfrak{T}^\#,$$
$$T = \Pi_{L/K} \mathfrak{Mult}_L \to \Pi_{L/K}(\Pi_{\tilde{K}^n/L} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}^n}) = \Pi_{\tilde{K}^n/K} \mathfrak{Mult}_{\tilde{K}^n} = T^\#,$$

et la seconde ligne se déduit de la première par le changement de base $\mathcal{O} \to K$, c'est-à-dire par passage aux fibres génériques. Comme $\mathfrak{T}$ est plat, il en résulte bien que $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^a$.

Nous pouvons donc étendre la terminologie et dire que le $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{T}^a$ que nous noterons désormais $\mathfrak{T}$ est le *schéma canonique de fibre générique* T.

Ici encore, il ne dépend pas du choix de $\widetilde{K}$: si $\widetilde{K}_1 \subset \widetilde{K}_2$, l'application identique de $T_{\widetilde{K}_2} = (T_{\widetilde{K}_1})_{\widetilde{K}_2}$ fournit une immersion fermée de $\Pi_{\widetilde{K}_1/K} T_{\widetilde{K}_1}$ dans $\Pi_{\widetilde{K}_2/K} T_{\widetilde{K}_2}$, d'où, etc.

4.4.9. — Notons que *le schéma en groupes $\mathfrak{T}$ admet toujours une représentation linéaire fidèle.* C'est évident si T est un tore induit, puisque $\mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_L}$ possède une représentation linéaire fidèle ρ dans $\mathcal{O}_L$ et que $\Pi_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}} \rho$ est alors une représentation linéaire fidèle de $\Pi_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}} \mathfrak{Mult}_{\mathcal{O}_L}$ dans le $\mathcal{O}$-module sous-jacent à $\mathcal{O}_L$ (1.5.13 (2)). Le cas général s'en déduit, puisque $\mathfrak{T}$ est par définition un sous-schéma fermé du schéma canonique d'un tore induit.

4.4.10. — Soit $K \to K'$ un changement de base conservateur par rapport à $\widetilde{K}$ (4.2.25). Posons $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{K'}$. Le $\mathcal{O}'$-schéma canonique de fibre générique $T_{K'}$ (qui est un tore défini sur K' et déployé sur l'extension galoisienne admissible $\widetilde{K}' = K' \otimes_K \widetilde{K}$ de K') n'est autre que $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}'}$: cela résulte aussitôt de 1.5.3 et de la commutation de l'opération d'adhérence schématique avec le changement de base *plat* $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ (1.2.6).

4.4.11. — De manière analogue, soit ${}^hK$ un hensélisé de K et soit $K' = {}^{hs}K$ un hensélisé strict de K contenant la sous-extension étale maximale de ${}^hK \otimes_K \widetilde{K}$ (considéré comme extension de ${}^hK$) (1.6.7 *b)*). Soit $\widetilde{K}'$ une extension composée de ${}^{hs}K$ et de $\widetilde{K}$: elle est unique à isomorphisme près et c'est une extension admissible de K' (1.6.8 et 9 *c)*). De plus, T est déployé sur $\widetilde{K}'$ et, en utilisant 1.6.8 et 1.5.3, on montre aisément que, si T est un tore induit, alors $T_{K'}$ est aussi un tore induit et le $\mathcal{O}'$-schéma canonique de fibre générique $T_{K'}$ est $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}'}$ (où $\mathcal{O}' = {}^{hs}\mathcal{O}$ est l'anneau de valuation de $K' = {}^{hs}K$, c'est-à-dire un hensélisé strict de $\mathcal{O}$). Cette dernière assertion reste vraie pour un tore T quelconque grâce à 1.2.6, et il en résulte que

$$\mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O}) = T_b({}^{hs}K). \tag{1}$$

Posons

$$\mathscr{H}_K(T) = \{f \in K[T] \mid f(T_b({}^{hs}K)) \subset {}^{hs}\mathcal{O}\}. \tag{2}$$

On a évidemment

$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}] \subset \mathscr{H}_K(T) \tag{3}$$

(4.4.2 (iv)). Si $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition (ET 1) de 1.7.2 (par exemple si ω est discrète ou si T est un tore induit) et est lisse, alors (1) entraîne $\mathcal{O}[\mathfrak{T}] = \mathscr{H}_K(T)$ (1.7.6) et caractérise $\mathfrak{T}$ parmi les schémas en groupes de fibre générique T, lisses et satisfaisant à (ET 1).

4.4.12. — Définition. — *On appelle* lissifié *de $\mathfrak{T}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\mathfrak{T}^R$ de fibre générique* T, *lisse, satisfaisant à* (ET 1), *admettant une représentation linéaire fidèle, tel que l'identité de* T *se prolonge en un morphisme $i : \mathfrak{T}^R \to \mathfrak{T}$ et tel que, pour tout $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{X}$ lisse satisfaisant à* (ET 1) *et tout morphisme $v : \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$, il existe un morphisme $v^R : \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}^R$ et un seul tel que $v = i \circ v^R$.*

Un tel lissifié, s'il existe, est évidemment unique à isomorphisme unique près. Si $K \to K'$ est un changement de base conservateur et *étale* et si $\mathfrak{T}^R$ est un lissifié de T, alors $(\mathfrak{T}^R)_{\mathcal{O}'}$ est un lissifié de $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}'}$ (il satisfait à (ET 1) d'après 1.7.5).

Proposition. — (i) *Si $\mathfrak{T}^R$ est un lissifié de $\mathfrak{T}$, on a*

$$\mathfrak{T}^R(\mathcal{O}) = \mathfrak{T}(\mathcal{O}) = T_b(K),$$
$$\mathfrak{T}^R({}^{hs}\mathcal{O}) = \mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O}) = T_b({}^{hs}K),$$
$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R] = \mathscr{H}_K(T).$$

(ii) *Réciproquement, si le $\mathcal{O}$-schéma d'algèbre affine $\mathscr{H}_K(T)$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse, satisfaisant à* (ET 1) *et possédant une représentation linéaire fidèle, alors c'est un lissifié de $\mathfrak{T}$.*

L'assertion (i) est évidente : la définition même du lissifié entraîne que $\mathfrak{T}^R(\mathcal{O}) = \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{T}^R({}^{hs}\mathcal{O}) = \mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O})$, et la dernière assertion de (i) résulte de 1.7.6.

L'assertion (ii) résulte aussi de 1.7.6 : si $v : \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$ est comme dans la définition précédente, on a $v(\mathfrak{X}({}^{hs}\mathcal{O})) \subset \mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O})$, donc $v^*(\mathscr{H}_K(\mathfrak{T})) \subset \mathcal{O}[\mathfrak{X}]$ (1.7.6), d'où l'existence et l'unicité de v^R (1.2.4).

4.4.13. — Si ω est *discrète* (ce qui entraîne que tout $\mathcal{O}$-schéma plat satisfait à (ET 1) et que tout $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse possède une représentation fidèle), un théorème de M. Raynaud ([24], p. 345) assure que *le lissifié $\mathfrak{T}^R$ de $\mathfrak{T}$ existe toujours* (signalons que le théorème de lissification de Raynaud est valable pour n'importe quel $\mathcal{O}$-schéma en groupes plat, de type fini, à fibre générique lisse, que celle-ci soit un tore ou non).

Lorsque ω est *dense*, nous ignorons si un lissifié de $\mathfrak{T}$ existe toujours. Montrons cependant cette existence lorsque $[\widetilde{K} : K] = 2$ (ou, ce qui revient pratiquement au même, si T se déploie sur une extension quadratique de K). Nous obtiendrons par la même occasion une construction explicite du lissifié de Raynaud lorsque de plus ω est discrète. On montre facilement qu'il suffit d'étudier le cas du « tore des éléments de norme 1 » de $\widetilde{K}$, un tore défini sur K et déployé sur une extension quadratique $\widetilde{K}$ étant produit direct d'un tore déployé, de tores induits $\Pi_{\widetilde{K}/K}\,\mathfrak{Mult}$ et de tores de cette forme. En reprenant les notations de 4.3.3, avec $L_2 = K$, on a

$$K[T] = K[X, Y]/(X^2 + \alpha XY + \beta Y^2 - 1)$$

et l'on vérifie aisément que le schéma canonique $\mathfrak{T}$ est donné par

$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}] = \mathcal{O}[X, Y]/(X^2 + \alpha XY + \beta Y^2 - 1).$$

Notons que T est anisotrope sur K et que

$$\mathfrak{T}(\mathcal{O}) = T(K) = T_b(K).$$

Si $\operatorname{car} \overline{K} \neq 2$ ou si $\omega(\alpha) = 0$, le schéma $\mathfrak{T}$ est lisse et il n'y a rien à démontrer. Sinon, $\mathfrak{T}$ n'est pas lisse et nous distinguerons deux cas :

a) $\operatorname{Car}\overline{K} = 2$ et $\alpha = 0$ (d'où $\operatorname{car} K \neq 2$). Posons $X = 1 - 2U$ et $Y = 2V$, d'où $K[T] = K[U, V]/(U - U^2 - \beta V^2)$, et considérons le schéma $\mathfrak{T}^R$ de fibre générique T défini par

$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R] = \mathcal{O}[U, V]/(U - U^2 - \beta V^2).$$

On vérifie sans peine que c'est un schéma en groupes lisse, dont la fibre fermée est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathfrak{Add}$ (donc non connexe) lorsque $\widetilde{K}$ est ramifiée, et à un groupe unipotent connexe non déployé de dimension 1 lorsque $\widetilde{K}$ est non ramifiée. Soit ${}^{hs}K$ un hensélisé strict de K. Si $u, v \in {}^{hs}K$, on a

$$\omega(u^2 + \beta v^2) = \inf(\omega(u^2), \omega(\beta v^2)),$$

car ou bien $\widetilde{K}$ est ramifiée (ce qui implique que ω est discrète et que β est une uniformisante de K) et $\omega(u^2)$ et $\omega(\beta v^2)$ sont de « parité » différente, ou bien $\widetilde{K}$ est non ramifiée, ce qui implique que l'extension résiduelle $\overline{\widetilde{K}}/\overline{K}$ est quadratique inséparable et que le polynôme $U^2 + \beta V^2$ reste irréductible sur la clôture séparable de K. Il en résulte que l'équation $u = u^2 + \beta v^2$ entraîne $u, v \in {}^{hs}\mathcal{O}$. On en déduit aisément que

$$\mathfrak{T}^R({}^{hs}\mathcal{O}) = T({}^{hs}K) = \mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O}). \tag{1}$$

b) $\operatorname{Car}\overline{K} = 2$, $0 < \omega(\alpha) \leqq \omega(2)$ (cf. 4.3.3 *b)*). Posons $X = 1 + \alpha U$ et $Y = \alpha V$, d'où $K[T] = K[U, V]/(V + \delta U + U^2 + \alpha UV + \beta V^2)$ avec $\delta = 2\alpha^{-1}$, et prenons

$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R] = \mathcal{O}[U, V]/(V + \delta U + U^2 + \alpha UV + \beta V^2).$$

On voit alors comme plus haut que c'est un schéma en groupes lisse de fibre générique T, de fibre fermée isomorphe à $\mathfrak{Add}$ lorsque $\widetilde{K}$ est ramifiée et à un groupe unipotent connexe non déployé lorsque $\widetilde{K}$ est non ramifiée, et l'on démontre (1) comme ci-dessus.

Dans les deux cas, $\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R]$ est un $\mathcal{O}$-module libre, admettant une base constituée par les monômes V^n et UV^n pour $n \in \mathbf{N}$, donc (ET 1) est satisfait. Par suite, 1.7.6 entraîne

$$\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R] = \mathscr{H}_K(T). \tag{2}$$

Enfin, $\mathfrak{T}^R$ admet une représentation linéaire fidèle : on vérifie facilement que le sous-$\mathcal{O}$-module (libre) M engendré par U et V est un sous-comodule de $\mathcal{O}[\mathfrak{T}^R]$ pour la représentation régulière et la restriction à M de cette représentation est fidèle (cf. [DG], p. 183).

En conclusion, (2) et la proposition 4.4.12 (ii) entraînent que $\mathfrak{T}^R$ est bien le lissifié de $\mathfrak{T}$.

4.4.14. Proposition. — *Soit* $K \to K'$ *un changement de base conservateur par rapport à* $\widetilde{K}$ (4.2.25). *Supposons satisfaite l'une au moins des deux conditions suivantes* :

a) T *est un tore induit* (1.5.17);

b) *l'extension* $\widetilde{K}$ *de* K *est non ramifiée.*

Alors, l'injection canonique de $T(K)/T_b(K)$ *dans* $T(K')/T_b(K')$ *est surjective.*

Supposons *a)*. — Il suffit d'examiner le cas $T = \Pi_{L/K}\,\mathfrak{Mult}$, où L est un corps avec $K \subset L \subset \widetilde{K}$. D'après 1.6.8 (ii), $L' = L \otimes_K K'$ est une extension *non ramifiée* de L. Or l'identification canonique de T(K) (resp. T(K')) à $L^\times$ (resp. $L'^\times$) identifie $T_b(K)$ à $\mathcal{O}_L^\times$ (resp. $T_b(K')$ à $\mathcal{O}_{L'}^\times$), d'où l'assertion.

Supposons *b)*. — Posons $\widetilde{K}' = \widetilde{K} \otimes_K K'$. Vu *b)* et 1.6.8 (ii), on a $\omega(K) = \omega(\widetilde{K}) = \omega(\widetilde{K}')$. Posons $\gamma = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}'/K') = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ et identifions T(K) à $\mathrm{Hom}_\gamma(X^*(T), \widetilde{K}^\times)$ et T(K') à $\mathrm{Hom}_\gamma(X^*(T), \widetilde{K}'^\times)$. Soit $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une base de $X^*(T)$ et soit $x \in T(K')$. Soit $(\omega_j)_{1 \leqq j \leqq k}$ une base du sous-**Z**-module Λ de **R** engendré par les $\omega(x(e_i))$ pour $1 \leqq i \leqq n$ et soit π_j un élément de K de valuation ω_j $(1 \leqq j \leqq k)$. L'application $\omega_j \mapsto \pi_j$ se prolonge en un isomorphisme r de Λ sur un sous-groupe de $K^\times$, d'inverse ω. Considérons alors l'homomorphisme $y = r \circ \omega \circ x$ de $X^*(T)$ dans $K^\times$; il est immédiat que $y \in \mathrm{Hom}_\gamma(X^*(T), K^\times) \subset T(K)$ et que $y^{-1}x \in T_b$. Par suite,

$$T(K') = T(K)\,T_b(K'),$$

d'où la proposition.

4.4.15. — Revenons désormais à nos conventions générales : T est le tore maximal du groupe quasi-déployé G, centralisateur du tore K-déployé maximal S, et $T_b(K)$ est le fixateur H^1 de l'appartement $A \times V^1$ de l'immeuble élargi de G (4.2.16).

4.4.16. Proposition. — *Si* G *est adjoint (resp. simplement connexe), alors* T *est un tore induit.*

En effet, les éléments de la base $\widetilde{\Delta}$ du système de racines $\widetilde{\Phi}$ de G suivant T (resp. les poids fondamentaux relativement à $\widetilde{\Delta}$) définie par un K-sous-groupe de Borel contenant T (cf. 4.1.2) forment une base de $X^*(T)$ invariante par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$.

4.4.17. Proposition. — *Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes soit satisfaite* :

a') G *est simplement connexe ou adjoint ou déployé*;
b') *L'extension* $\widetilde{K}$ *de* K *est non ramifiée.*

Alors, l'image W *de* N(K) *dans* Aut A *par l'homomorphisme* ν (4.2.7) *est invariante par tout changement de base conservateur.*

En effet, l'image de W dans GL(V) est le groupe de Weyl du système de racines Φ et le sous-groupe des translations de W s'identifie canoniquement à un quotient de $T(K)/T_b(K)$ (4.2.7). La proposition résulte donc de 4.4.14, compte tenu de 4.4.16.

4.4.18. — Le schéma canonique $\mathfrak{T}$ de fibre générique T possède les propriétés suivantes :

(I) $\mathfrak{T}$ *est un* $\mathcal{O}$*-schéma en groupes plat de type fini, possédant une représentation linéaire fidèle* ;
(II) *l'inclusion de* S *dans* T *se prolonge en une immersion fermée de* $\mathfrak{S}$ *dans* $\mathfrak{T}$;

(III) *le groupe de Weyl* ${}^{v}W$ *de* G *sur* K, *considéré comme groupe d'automorphismes de* T, *se prolonge en un groupe d'automorphismes de* $\mathfrak{T}$;

(IV) *l'action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ *sur* T *se prolonge en une action galoisienne de* $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ *sur* $\mathfrak{T}$;

(V) *soit* T_{Ad} *l'image de* T *dans le groupe adjoint* Ad G; *la restriction à* T *de la représentation adjointe se prolonge en un morphisme de* $\mathfrak{T}$ *dans le schéma canonique* $\mathfrak{T}_{Ad}$ *de fibre générique* T_{Ad};

(VI) *soit* $\pi : \tilde{G} \to G$ *un revêtement simplement connexe du groupe dérivé de* G *et soit* $\tilde{T}$ *l'image réciproque de* T *par* π; *la restriction de* π *à* $\tilde{T}$ *se prolonge en un morphisme du schéma canonique* $\tilde{\mathfrak{T}}$ *de fibre générique* $\tilde{T}$ *dans* $\mathfrak{T}$;

(VII) $\mathfrak{T}(\mathcal{O}) = T_b(K) = \{t \in T(K) \mid \omega(\chi(t)) = 0$ *pour tout* $\chi \in X_K(T)\}$ *et*

$$\mathfrak{T}({}^{hs}\mathcal{O}) = T_b({}^{hs}K) = \{t \in T({}^{hs}K) \mid \omega(\chi(t)) = 0 \text{ pour tout } \chi \in X_{{}^{hs}K}(T)\};$$

(VIII) $\pi^{-1}(\mathfrak{T}(\mathcal{O})) \cap \tilde{T}(K) = \tilde{\mathfrak{T}}(\mathcal{O})$ *et, lorsque* G *est semi-simple,*

$$\mathrm{Ad}^{-1}(\mathfrak{T}_{Ad}(\mathcal{O})) \cap T(K) = \mathfrak{T}(\mathcal{O}).$$

En effet, (I), (II) et (VII) ont été explicitement vues; (III), (IV), (V) et (VI) résultent des propriétés fonctorielles de $\mathfrak{T}$ (4.4.7). Enfin, (VIII) résulte de (VII) et du fait suivant : l'application $\chi \mapsto \chi \circ \mathrm{Ad} \circ \pi$ et, lorsque G est semi-simple, l'application $\chi \mapsto \chi \circ \mathrm{Ad}$ envoient le groupe des caractères rationnels sur K de T_{Ad} (qui est le groupe engendré par Φ) sur un sous-groupe d'indice fini du groupe des caractères rationnels sur K de $\tilde{T}$ (qui est le groupe des poids de Φ) resp. de T (qui est un groupe intermédiaire entre le groupe des racines et le groupe des poids de Φ).

De plus, 4.4.16 entraîne

(IX) *Si* G *est simplement connexe ou adjoint, alors* $\mathfrak{T}$ *est lisse et connexe et l'on a*

$$(\mathrm{IX}\ 1) \qquad \mathcal{O}[\mathfrak{T}] = \mathscr{H}_K(T) = \{f \in K[T] \mid f(T_b({}^{hs}K)) \subset {}^{hs}\mathcal{O}\}.$$

Si de plus le corps résiduel $\bar{K}$ *est infini,* $\mathfrak{T}$ *est étoffé et l'on a*

$$(\mathrm{IX}\ 2) \qquad \mathcal{O}[\mathfrak{T}] = \{f \in K[T] \mid f(T_b(K)) \subset \mathcal{O}\}.$$

Enfin, si le lissifié $\mathfrak{T}^R$ de $\mathfrak{T}$ existe, par exemple si ω est discrète, on vérifie immédiatement que $\mathfrak{T}^R$ possède les propriétés (I) à (VIII) (où l'on remplace $\mathfrak{T}$ par $\mathfrak{T}^R$), avec en plus celle d'être *lisse* (mais non nécessairement connexe), même si G n'est ni simplement connexe, ni adjoint.

4.4.19. — Soit $a \in \Phi$ et soit $\mathfrak{U}_a$ l'un des schémas $\mathfrak{U}_{a,k}$ ou $\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$ définis en 4.3.

Proposition. — *Soit* $\mathfrak{T}$ *un* $\mathcal{O}$*-schéma en groupes plat de fibre générique* T, *possédant la propriété* (V) *de* 4.4.18. *L'application* $(t, x) \mapsto txt^{-1}$ *de* $T \times U$ *dans* U_a *se prolonge en un morphisme de* $\mathfrak{T} \times \mathfrak{U}_a$ *dans* $\mathfrak{U}_a$.

Vu (V), il suffit de le montrer lorsque G est semi-simple adjoint et que $\mathfrak{T}$ est le schéma canonique de fibre générique T. De plus, on peut supposer, quitte à faire un changement de base conservateur et à appliquer ensuite 1.2.4, que le corps

résiduel $\overline{K}$ est infini. Les schémas $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}_a$ sont alors étoffés (4.4.18 (IX) et 4.3.9) et il suffit de montrer que $txt^{-1} \in \mathfrak{U}_a(\mathcal{O})$ quels que soient $t \in \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ et $x \in \mathfrak{U}_a(\mathcal{O})$, ce qui est immédiat. En effet, en reprenant les notations de 4.1.5 et 9, on a $\alpha(t) \in \mathcal{O}_{L_\alpha}^\times$ pour tout $t \in \mathfrak{T}(\mathcal{O}) = T_b(K)$ et

(1) $$tx_a(u)\, t^{-1} = x_a(\alpha(t)\, u) \qquad \text{si } a \text{ est non pluriel et } u \in L_\alpha,$$

(2) $$tx_a(u, v)\, t^{-1} = x_a(\alpha(t)\, u, \alpha(t)\, \alpha(t)^\sigma\, v)$$
si a est pluriel et $(u, v) \in H(L_\alpha, L_{\alpha+\alpha'})$,

d'où notre assertion.

4.5. Fonctions quasi-concaves et données radicielles schématiques.

4.5.1. — Nous allons, dans ce numéro, construire des familles $(\mathfrak{U}_a)_{a\in\Phi}$ de $\mathcal{O}$-schémas formant avec le schéma canonique $\mathfrak{T}$ de fibre générique T (resp. le lissifié $\mathfrak{T}^R$ de $\mathfrak{T}$ lorsqu'il existe) une donnée radicielle schématique au sens du § 3 (rappelons que $Z = T$). Nous prendrons évidemment pour $\mathfrak{U}_a$ l'un des schémas définis au n° 4.3 : autrement dit, *on donne une fonction* $f : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant lorsque* ω *est* dense *à la condition*

(Sch) $$f(a) \in \Gamma'_a \quad \textit{et} \quad f(2a) \geqq 2f(a) \quad \textit{pour toute } a \in \Phi,$$

(où l'on prend $f(2a) = 2f(a)$ lorsque $2a$ n'est pas une racine) *et l'on pose, pour* $a \in \mathbf{\Phi}$,

$$\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{a,f(a)} \qquad \text{si } a \text{ est non pluriel (4.3.2);}$$
$$\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{a,(f(a),f(2a))} \qquad \text{si } a \text{ est pluriel (4.3.5, 6 et 8).}$$

On a vu que

$$\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) = U_{a,f(a)}\, U_{2a,f(2a)}$$

(avec la convention habituelle $U_{2a} = \{1\}$ lorsque a est non pluriel).

Supposons ω discrète et posons $g(a) = f(a)$ pour $a \in \Phi$, $a/2 \notin \Phi$ et $g(a) = \inf(f(a), 2f(a/2))$ pour $a, a/2 \in \Phi$. Il résulte des définitions même (4.3.8) que $\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{g,a}$ pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$. Autrement dit, on peut toujours se ramener au cas où f satisfait à la condition suivante (cf. 4.3.5 (2)), d'ailleurs conséquence de (Sch) lorsque ω est dense :

(QC 0) $$f(2a) \leqq \inf \Gamma_{2a} \cap [2f(a), +\infty[\quad \text{pour tout } a \in \mathbf{\Phi}.$$

4.5.2. — Soit f comme ci-dessus. Pour $a \in \Phi$, posons

(1) $$f'(a) = \inf\left\{ k \in \Gamma'_a \mid k \geqq f(a) \text{ ou, lorsque } \frac{a}{2} \in \Phi,\ k \geqq 2f\left(\frac{a}{2}\right) \right\}.$$

Nous dirons que f' est l'*optimisée* de f et que f est *optimale* si $f = f'$. Lorsque f est optimale, $k = f(a)$ et $\ell = f(2a)$ satisfont aux relations (1) et (2) de 4.3.5, et f satisfait à (QC 0).

Lorsque ω est *dense*, il résulte aussitôt de (Sch) que $f' = f$. Si ω est *discrète*, $f'(a)$ peut être différent de $f(a)$, mais on a, par définition même,

$$\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{f',a} \quad \text{pour tout } a \in \Phi, \tag{2}$$

$$U_{a,f(a)}\, U_{2a,f(2a)} = U_{a,f'(a)}\, U_{2a,f'(2a)}, \tag{3}$$

(cf. I, 6.4.12 *a)*). Si f satisfait à (QC 0), on a aussi

$$U_{2a,f(2a)} = U_{2a,f'(2a)}. \tag{4}$$

Remarquons que la définition (1) a l'air différente de celle donnée en I, 6.4.10, où la borne inférieure était prise dans l'ensemble ordonné $\tilde{\mathbf{R}} \supset \mathbf{R}$; mais les hypothèses faites sur f entraînent en fait la coïncidence des deux définitions : cela résulte de (Sch) lorsque ω est dense (et dans ce cas, (Sch) signifie que la fonction $f' : \Phi \to \tilde{\mathbf{R}}$ de (I, 6.4.10) satisfait à $f'(a) \in \Gamma'_a$ pour toute $a \in \Phi$), et de ce que les Γ'_a sont discrets lorsque ω est discrète.

4.5.3. — Rappelons que f est dite *concave* (I, 6.4.3 et 5) si elle satisfait aux deux conditions

(C 1) $\quad f(a) + f(b) \geqq f(a+b)$ pour a, b et $a + b \in \Phi$,

(C 2) $\quad f(a) + f(-a) \geqq 0$ pour toute $a \in \Phi$,

et *quasi-concave* (cf. I, 6.4.7 et l'addendum E2 ci-dessous, p. 173) si elle satisfait à (QC 0) et aux conditions suivantes, où $N_f^{(a)}$ désigne l'intersection avec $N = N(K)$ du sous-groupe $U_f^{(a)}$ engendré par les $U_{ia,f(ia)}$ pour $i = \pm 1, \pm 2$ (I, 6.4.2) :

(QC 1) $U_{-2a,f(-2a)}\, U_{-a,f(-a)}\, U_{a,f(a)}\, U_{2a,f(2a)}\, N_f^{(a)}$ *est un sous-groupe de* $G = G(K)$ *pour toute racine* $a \in \Phi$.

(QC 2) *Si* $a, b \in \Phi$ *ne sont pas proportionnelles, le groupe des commutateurs* $(U_{a,f(a)}, U_{b,f(b)})$ *est contenu dans le groupe engendré par les* $U_{pa+qb,f(pa+qb)}$ *pour* $p, q \in \mathbf{N}^*$ *et* $pa + qb \in \Phi$.

On sait (I, 6.4.7) que *toute fonction concave est quasi-concave.* Vu 4.5.2 (3) et (4), *l'optimisée d'une fonction f satisfaisant à* (QC 0), *et à* (Sch) *lorsque* ω *est dense, est quasi-concave si et seulement si f l'est.* Par contre, l'optimisée d'une fonction concave n'est pas nécessairement concave : c'est pourquoi il est utile de considérer des fonctions qui ne sont pas optimales.

Notons que la condition (QC 1) se décompose en conditions $(QC\ 1)_a$ pour $a \in \Phi$, ne faisant intervenir que les multiples entiers de a, et que (QC 2) se décompose en conditions $(QC\ 2)_{a,b}$ pour $a, b \in \Phi$ non proportionnelles, ne faisant intervenir que les racines de la forme $pa + qb$ avec $p, q \in \mathbf{N}$.

4.5.4. — Le but principal de ce numéro est d'établir le théorème suivant, dont la démonstration sera achevée en 4.5.11 :

Théorème. — *Soit* $f : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant à* (QC 0) *et à* (Sch) *lorsque* ω *est dense. Soit* $\mathfrak{T}$ *un* $\mathcal{O}$*-schéma en groupes de fibre générique* T, *possédant les propriétés* (I), (II), (V) *et* (VI) *de* 4.4.18. *Pour que* $\mathfrak{T}$ *et les* $\mathfrak{U}_{f,a}$ *pour* $a \in \Phi$ *forment une donnée radicielle schématique sur* G *relativement à* $\mathfrak{S}$, *il faut et il suffit que f soit quasi-concave.*

On notera que l'on peut prendre pour $\mathfrak{T}$ le schéma canonique de fibre générique T, ou son lissifié lorsqu'il existe (par exemple si ω est discrète ou si $[\tilde{K} : K] = 2$), ou encore la composante neutre de ce dernier lorsqu'elle possède une représentation linéaire fidèle (mêmes exemples).

4.5.5. — Commençons par étudier la condition $(QC\ 1)_a$.

Proposition. — *Soit* $f : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant à* (Sch) *si* ω *est dense. Supposons f optimale; alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *f satisfait à* $(QC\ 1)_a$;

(ii) *f satisfait aux inégalités*

(1) $\qquad f(a) + f(-a) \geqq 0, \qquad f(2a) + f(-2a) \geqq 0,$

(2) $\qquad f(a) + f(-2a) \geqq f(-a), \qquad f(-a) + f(2a) \geqq f(a),$

(3) $\qquad 2f(a) + f(-2a) \geqq 0, \qquad 2f(-a) + f(2a) \geqq 0;$

(iii) *f est l'optimisée d'une fonction* $f_1 : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant à* (Sch) *lorsque* ω *est dense, et dont la restriction au système de racines* $\{\pm a, \pm 2a\}$ *est concave.*

Il est clair que les inégalités (1) et (2) entraînent (3) et que (ii) entraîne (iii) : il suffit de prendre pour f_1 la fonction définie par $f_1(2a) = \inf(f(2a), 2f(a))$, $f_1(-2a) = \inf(f(-2a), 2f(-a))$ et $f_1(b) = f(b)$ pour $b \neq \pm 2a$. Si ω est dense, on a d'ailleurs $f_1 = f$. D'autre part, on sait (I, 6.4.7) que (iii) entraîne (i). Reste à montrer que (i) entraîne (1) et (2).

Soit donc f optimale satisfaisant à $(QC\ 1)_a$. Les inégalités (1) et (3) sont l'assertion (i) du lemme 6.4.11 de I, ce qui achève la démonstration si $2a \notin \Phi$, ou si $f(a) + f(-a) = 0$, car (3) entraîne alors (2).

Reste à examiner le cas où a est pluriel et $f(a) + f(-a) > 0$. Si $N_f^{(a)} \not\subset T(K)$, l'assertion (ii) du même lemme 6.4.11 de I montre que $f(2a) + f(-2a) = 0$ et que la réflexion $r_{a,k}$ avec $2k = f(2a)$ appartient à l'image canonique de $N_f^{(a)}$ dans le groupe des automorphismes affines de l'appartement A, ensemble des valuations équipollentes à φ. La formule (1) de I, 6.4.10 donne alors

$$f(-a) = f(a) + a(r_{a,k}(\varphi) - \varphi) = f(a) - f(2a),$$

et de même $f(-a) = f(a) + f(-2a)$, d'où (2).

D'autre part, si $f(-2a) + 2f(a) = 0$, alors $2f(a) \in 2\Gamma'_a \cap (-\Gamma_{-2a}) = 2\Gamma'_a \cap \Gamma_{2a}$ et $f(2a) = 2f(a)$, ce qui nous ramène au cas précédent.

Finalement, reste à démontrer (2) lorsque a est pluriel, que $N_f^{(a)} \subset T(K)$ et que par conséquent

$$f(a) + f(-a) > 0, \quad f(2a) + f(-2a) > 0, \quad f(\pm 2a) + 2f(\mp a) > 0.$$

D'après I, 6.4.11 (ii), on a alors $N_f^{(a)} \subset H$ (rappelons que H est le noyau de l'homomorphisme $v : N \to \mathrm{Aut}\, A$ et que H normalise tous les sous-groupes $U_{b,k}$ pour $b \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$), d'où

$$U_f^{(a)} \subset U_{-2a,f(-2a)}\, U_{-a,f(-a)}\, H U_{a,f(a)}\, U_{2a,f(2a)},$$

et par suite, en reprenant les notations de 4.1.12, $U_{f,a} \times U_{f,-a} \subset W_a(K)$ et

$$\beta_a(U_{f,a} \times U_{f,-a}) \subset U_{f,-a} \times T(K) \times U_{f,a}.$$

Choisissons alors $u \in L_a$ tel que $\omega(u) = f(a) + \gamma$ (avec $\gamma = -\frac{1}{2}\omega(\lambda)$: cf. 4.3.5) et $v' \in L_a^0$ tel que $\omega(v') = f(-2a)$, ce qui est possible puisque $f(a) \in \Gamma'_a = \gamma + \omega(L_a^\times)$ et que $f(2a) \in \Gamma'_{-2a} = \omega(L_a^0 - \{0\})$. Alors $x_a(u, \lambda u^\sigma u) \in U_{f,a}$, $x_{-a}(0, v') \in U_{f,-a}$, et, comme $\omega(\lambda u^\sigma uv') = 2f(a) + f(-2a) > 0$, on a $t = 1 + \lambda u^\sigma uv' \in \mathcal{O}_L^\times$ et

$$\omega(-t^{-1}uv') = f(a) + \gamma + f(-2a). \tag{4}$$

Mais d'après 4.1.12 (2), on doit avoir $x_{-a}(-t^{-1}uv',\ t^{-1}v') \in U_{f,-a}$; 4.2.21 (4) et (5) impliquent alors que $f(a) + f(-2a) \geqq f(-a)$, ce qui est la première des inégalités (2). La deuxième se démontre de même, en échangeant a et $-a$.

4.5.6. Remarques. — Soit f comme en 4.5.5, satisfaisant à $(QC\ 1)_a$ pour un $a \in \Phi$.

1) Si ω est dense ou si a est non pluriel ou si a est pluriel et l'extension L_a/L_{2a} non ramifiée, alors $f = f_1$ et la restriction de f à $\{\pm a, \pm 2a\}$ est *concave*.

2) Supposons que l'une au moins des inégalités (1) soit une égalité. Alors la restriction de f à $\{\pm a, \pm 2a\}$ est concave, *sauf* si ω est discrète, a pluriel, l'extension L_a/L_{2a} *ramifiée* et si $f(a) + f(-a) = 0$, $f(2a) = 2f(a) + c$ et $f(-2a) = -2f(a) + c$ (où c est comme plus haut la valuation d'une uniformisante de L_a).

3) On a vu dans le courant de la démonstration que si a est pluriel et si $f(-2a) + 2f(a) = 0$, alors $f(a) + f(-a) = f(2a) + f(-2a) = 0$ et $f(\pm 2a) = 2f(\pm a)$. Ceci n'est d'ailleurs possible que si l'extension L_a/L_{2a} est non ramifiée.

4.5.7. Corollaire. — *Soit* $K \to K_1$ *un changement de base conservateur, et soit* $f : \Phi \to \mathbf{R}$ *(satisfaisant toujours à* (QC 0), *et à* (Sch) *lorsque* ω *est dense). Pour que f satisfasse à* $(QC\ 1)_a$ *pour* G, *il faut et il suffit qu'elle y satisfasse pour* G_{K_1}.

En effet, les ensembles Γ'_a restent inchangés par le changement de base $K \to K_1$, donc la condition (Sch) et l'optimisée de f sont conservées, ainsi d'ailleurs que les inégalités de 4.5.5 (ii).

4.5.8. — *Le schéma* $\mathfrak{W}_{f,a}$. Soit $a \in \Phi$.

Proposition. — *Soit f comme en* 4.5.5, *satisfaisant à* $(\mathrm{QC}\ 1)_a$ *et soit* $\mathfrak{T}$ *un* $\mathcal{O}$*-schéma en groupes de fibre générique* T *possédant la propriété* (VI) *de* 4.4.18.

(i) *La fonction* d_a *sur* $\mathrm{U}_a \times \mathrm{U}_{-a}$ *définie en* 4.1.6 (1) *et* 4.1.12 (1) *appartient à* $\mathcal{O}[\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}]$.

(ii) *Soit* $\mathfrak{W}_{f,a}$ *l'ouvert spécial du schéma* $\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}$ *défini par* d_a. *La fibre générique de* $\mathfrak{W}_{f,a}$ *est égale à* W_a *et le morphisme* $\beta_a : \mathrm{W}_a \to \mathrm{U}_{-a} \times \mathrm{T} \times \mathrm{U}_a$ *se prolonge en un morphisme (noté encore* β_a*) de* $\mathfrak{W}_{f,a}$ *dans* $\mathfrak{U}_{f,-a} \times \mathfrak{T} \times \mathfrak{U}_{f,a}$. *On a* $(\mathfrak{U}_{f,a} \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathfrak{U}_{f,-a}) \subset \mathfrak{W}_{f,a}$. *Si* $f(a) + f(-a) > 0$ *et* $f(2a) + f(-2a) > 0$, *alors* $\mathfrak{W}_{f,a}$ *contient la fibre fermée de* $\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}$.

Supposons tout d'abord que G est simplement connexe et que $\mathfrak{T}$ est le schéma canonique de fibre générique T. Compte tenu de 1.2.4, 4.4.10 et 4.5.7, on peut supposer le corps résiduel $\overline{\mathrm{K}}$ infini. Les schémas $\mathfrak{U}_{f,a}$ et $\mathfrak{U}_{f,-a}$ sont alors étoffés et pour démontrer (i), il suffit de prouver que

$$d_a(\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}. \tag{1}$$

Cela fait, on pourra considérer $\mathfrak{W}_{f,a}$, dont la fibre générique est W_a, puisque ce dernier est l'ouvert spécial de $\mathrm{U}_a \times \mathrm{U}_{-a}$ défini par d_a, et la prolongeabilité de β_a équivaut à

$$\beta_a(\mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})) \subset \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{T}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}), \tag{2}$$

puisque $\mathfrak{W}_{f,a}$ est étoffé (1.7.3 *e)*). Démontrons donc (1) puis (2).

Si a est non pluriel et si $u, u' \in \mathrm{L}_a$ avec $\omega(u) \geqq f(a)$ et $\omega(u') \geqq f(-a)$, on a $\omega(uu') \geqq 0$ et $t = 1 - uu' \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}_a}$ d'où

$$d_a(x_a(u), x_{-a}(u')) = \mathrm{Norme}_{\mathrm{L}_a/\mathrm{K}}(1 - uu') \in \mathcal{O},$$

d'où (1). Si de plus $(x_a(u), x_{-a}(u')) \in \mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})$, alors $d_a(x_a(u), x_{-a}(u')) \in \mathcal{O}^\times$, d'où $\omega(t) = 0$, $\tilde{a}(t) \in \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ d'après 4.4.7, et $\omega(t^{-1}u') \geqq f(-a)$, $\omega(t^{-1}u) \geqq f(a)$, d'où (2) d'après 4.1.6 (2).

Si a est pluriel, considérons la fonction *concave* f_1 dont f est l'optimisée, définie en 4.5.5. Pour $u, v \in \mathrm{L}_a$ avec $v + v^\sigma = u^\sigma u$, on a $x_a(u, v) \in \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})$ si et seulement si $\omega(u) \geqq f_1(a) + \gamma$ et $\omega(v) \geqq f_1(2a)$ et de même pour $-a$. Il résulte aussitôt de la concavité de f_1 que, si $x_a(u, v) \in \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})$ et $x_{-a}(u', v') \in \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O})$, alors $t = 1 - u^\sigma u' + vv' \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}_a}$, d'où (1) puisque

$$d_a(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) = \mathrm{Norme}_{\mathrm{L}_a/\mathrm{K}}\, t \in \mathcal{O}.$$

Si de plus $(x_a(u, v), x_{-a}(u', v')) \in \mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})$, alors $\omega(t) = 0$, $\tilde{a}(t) \in \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ d'après 4.4.7. D'autre part, $\omega(u' - uv') \geqq \inf(f_1(-a) + \gamma, f_1(a) + \gamma + f_1(-2a)) = f_1(-a) + \gamma$, vu la concavité de f_1, et de même $\omega(u - v^\sigma u') \geqq f_1(a) + \gamma$. La formule (2) résulte alors de 4.1.12 (2), compte tenu de 4.2.21 (5).

D'autre part, il est évident que $d_a = 1$ sur $\mathfrak{U}_{f,a} \times \{1\}$ et sur $\{1\} \times \mathfrak{U}_{f,-a}$.

Enfin, si $f(a) + f(-a) > 0$ et $f(2a) + f(-2a) > 0$, on a vu dans la démonstration de 4.5.5 que l'on avait nécessairement $f(\pm 2a) + 2f(\mp a) > 0$, d'où

$$\alpha = \inf(f_1(a) + f_1(-a), f_1(2a) + f_1(-2a)) > 0$$

et il résulte des calculs précédents que, avec les notations ci-dessus, $\omega(1-t) \geqq \alpha$. L'on en déduit qu'il existe $\xi \in \mathcal{O}$ avec $\omega(\xi) > 0$ tel que $\xi^{-1}(1-d_a) \in \mathcal{O}[\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}]$, ce qui démontre la dernière assertion de la proposition.

Dans le cas général, considérons un revêtement simplement connexe $\pi : \tilde{G} \to G$ du groupe dérivé de G et le tore maximal $\tilde{T} = \pi^{-1}(T)$ de $\tilde{G}$; identifions les sous-groupes radiciels $U_{\pm a}$ de G et de $\tilde{G}$ grâce à π. Le morphisme $\beta_a : W_a \to U_{-a} \times T \times U_a$ se factorise en $\beta_a : W_a \to U_{-a} \times \tilde{T} \times U_a$ suivi de $\pi \times \pi \times \pi$ et il suffit d'appliquer 4.4.18 (VI).

4.5.9. Remarques. — *a)* $\mathfrak{W}_{f,a}$ est le plus grand ouvert de $\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}$ de fibre générique W_a puisque son complémentaire est l'adhérence du complémentaire de W_a dans $U_a \times U_{-a}$.

b) On a

$$(1) \qquad \mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O}) = \{(x,y) \in \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O}) \mid xy \in U_{-a}(K)\, \mathfrak{T}(\mathcal{O})\, U_a(K)\}$$
$$= \{(x,y) \in U_a(K) \times U_{-a}(K) \mid xy \in \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O})\, \mathfrak{T}(\mathcal{O})\, \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})\}.$$

En effet, $\mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})$ est contenu dans les 2e et 3e membres de (1). Inversement, si (x,y) appartient au 2e membre de (1), alors $(x,y) \in W_a(K)$ et les formules 4.1.6 (2) et 4.1.12 (2) montrent que $d_a(x,y) \in \mathcal{O}^\times$, car la relation $\tilde{a}(t) \in \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ pour $t \in L_a$ entraîne $t \in \mathcal{O}_{L_a}^\times$. On voit de même que le 3e membre de (1) est contenu dans $\mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})$.

Par contre, les relations $x \in \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})$, $y \in \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O})$ et $xy \in U_{-a}(K)\, T(K)\, U_a(K)$ (c'est-à-dire $(x,y) \in W_a(K)$) *n'entraînent pas* $(x,y) \in \mathfrak{W}_{f,a}(\mathcal{O})$.

4.5.10. — Passons maintenant à l'étude de la condition (QC 2).

Proposition. — *Soit* $f : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant à* (QC 0), *et à* (Sch) *si* ω *est dense, et soit* $K \to K'$ *un changement de base conservateur. Pour que f satisfasse à* (QC 2) *relativement à* G, *il faut et il suffit qu'elle y satisfasse relativement à* $G_{K'}$.

On peut supposer f optimale (cf. démonstration de 4.5.7). Soient $a, b \in \Phi$, non proportionnelles; notons Ψ l'ensemble des $c \in \Phi$ de la forme $pa + qb$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux, et notons X (resp. X') le groupe engendré par les $U_{c,f(c)}$ (resp. les $U'_{c,f(c)} = \{x \in U_c(K') \mid \varphi'_c(x) \geqq f(c)\}$) pour $c \in (\Psi \cup 2\Psi) \cap \Phi$. Rappelons que $U_{f,c} = U_{c,f(c)}\, U_{2c,f(2c)}$ et $U'_{f,c} = U'_{c,f(c)}\, U'_{2c,f(2c)}$.

Si f satisfait à (QC 2) pour $G_{K'}$, alors, d'après I, 6.4.9 (ii), on a

$$(1) \qquad X' = \prod_{c \in \Psi} U'_{f,c}.$$

Or, $U'_{f,c} \cap G(K) = U_{f,c}$ d'après 4.3.2 et 4.3.5 (3), et, comme l'application produit est un isomorphisme de K-variétés algébriques de $\prod U_c$ sur U_Ψ (cf. 1.1.7), on déduit de (1) que

$$X \subset X' \cap G(K) = \prod_{c \in \Psi} U_{f,c} \subset X, \tag{2}$$

d'où $X = X' \cap G(K)$. Mais le groupe des commutateurs $(U_{a,f(a)}, U_{b,f(b)})$ est contenu dans $X' \cap G(K)$, donc dans X, et (2) montre que f satisfait à (QC 2) relativement à G.

Réciproquement, supposons que f possède la propriété (QC 2) pour G et montrons que f satisfait à $(QC\ 2)_{a,b}$ pour $G_{K'}$. Nous raisonnerons par induction sur $\mathrm{Card}(\Psi \cup 2\Psi) \cap \Phi$, l'assertion étant triviale si ce cardinal est nul. L'hypothèse de récurrence entraîne que (1) et (2) sont exactes et aussi que les groupes de commutateurs $(U'_{2a,f(2a)}, U'_{b,f(b)})$ et $(U'_{a,f(a)}, X')$ sont contenus dans X'. Montrons que $(U'_{a,f(a)}, U_{b,f(b)}) \subset X'$; compte tenu de la relation classique

$$(x'x, y) = (x, y)\,((y, x), x')\,(x', y)$$

(où $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$, suivant la convention adoptée dans I), il suffit, vu ce qui précède, de montrer qu'il existe une partie V de $U'_{a,f(a)}$ telle que $U'_{a,f(a)}$ soit le monoïde engendré par V et $U'_{2a,f(2a)}$ et que le commutateur (x, y) appartienne à X' pour tout $v \in V$ et $y \in U_{b,f(b)}$.

Posons $\Phi_1 = \Phi \cap (\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b)$: c'est une partie close symétrique de Φ et le sous-groupe G_{Φ_1} engendré par T et les U_c pour $c \in \Phi_1$ est réductif, quasi-déployé de tore K-déployé maximal S et de système de racines relatives Φ_1 (cf. [4], 3.8 et 3.13). Or, la condition $(QC\ 2)_{a,b}$ ne fait intervenir qu'un sous-groupe unipotent maximal de G_{Φ_1} contenant U_a, U_b et les U_c pour $c \in \Psi$. On peut donc remplacer G par G_{Φ_1} et même par son groupe adjoint.

Supposons donc G adjoint et $\Phi \subset \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b$. Alors, $\{a, b\}$ est une base du groupe des caractères de S et pour tout $\xi \in \mathcal{O}'^{\times}$, il existe $s \in S(K')$ tel que $a(s) = \xi$ et $b(s) = 1$.

Supposons pour fixer les idées que $2a \in \Phi$ (le cas où $2a \notin \Phi$, se traitant de manière analogue mais plus simple : nous laisserons au lecteur le soin d'adapter la démonstration qui suit). Soient $u, v \in L_a$, avec $v + v^\sigma = u^\sigma u$. On a

$$sx_a(u, v)\,s^{-1} = x_a(a(s)\,u, a(s)^2\,v) = x_a(\xi u, \xi^2 v),$$
$$sys^{-1} = y \quad \text{pour tout } y \in U_b(K'),$$
$$sX's^{-1} = X',$$

d'où l'on déduit, compte tenu de la validité de (QC 2) pour G, que le commutateur $(x_a(\xi u, \xi^2 v), y)$ appartient à X' pour $u, v \in L_a$ avec $v + v^\sigma = uu^\sigma$, $x_a(u, v) \in U_{a,f(a)}$ et $y \in U_{b,f(b)}$. Comme

$$\{u' \in K' \otimes L_a \mid \omega(u') \geqq f(a) + \gamma\}$$
$$= \{\Sigma \xi_i u_i \mid \xi_i \in \mathcal{O}'^{\times},\ u_i \in L_a,\ \omega(u_i) \geqq f(a) + \gamma\}$$

(cf. 4.3.11), on voit que l'ensemble V des $x_a(\xi u, \xi^2 v)$ pour $x_a(u, v) \in U_{a,f(a)}$ et $\xi \in \mathcal{O}'^{\times}$ satisfait aux conditions souhaitées et que par suite

$$(U'_{a,f(a)}, U_{b,f(b)}) \subset X'.$$

Intervertissant alors les rôles de a et b, on voit de même que $(U'_{a,f(a)}, U'_{b,f(b)}) \subset X'$, ce qui achève la démonstration.

4.5.11. — Démontrons enfin le théorème 4.5.4. Supposons f quasi-concave et vérifions les conditions (DRS) de 3.1.1, en prenant pour ouvert $\mathfrak{W}_a$ dans (DRS 3) l'ouvert $\mathfrak{W}_{f,a}$ défini en 4.5.8. La condition (DRS 0) est 4.4.18 (II). La condition (DRS 3) est l'assertion (ii) de 4.5.8. La condition (DRS 2) n'est autre que 4.4.19. Enfin, pour démontrer (DRS 1), on peut, vu 1.2.4, 4.5.7 et 4.5.10, supposer le corps résiduel $\overline{K}$ de K infini, donc les schémas $\mathfrak{U}_{f,a}$ étoffés, et il suffit alors de montrer que pour $a, b \in \Phi$, $b \neq -a$, l'application commutateur envoie $\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{U}_{f,b}(\mathcal{O})$ dans le produit des $\mathfrak{U}_{f,c}(\mathcal{O})$ pour $c \in \Phi \cap (a + b)$: c'est évident pour $b = a$ et cela résulte de (QC 2) pour $b \neq a$, compte tenu de I, 6.4.9.

Réciproquement, supposons les conditions (DRS) satisfaites. Alors, il est immédiat que (QC 2) est satisfaite. Démontrons $(\text{QC } 1)_a$ pour $a \in \Phi$. Vu 4.5.7, on peut supposer f optimale et $\overline{K}$ infini; l'image canonique de $\mathfrak{W}_a(\mathcal{O})$ dans la fibre fermée de $\mathfrak{U}_{f,a} \times \mathfrak{U}_{f,-a}$ est alors dense. Supposons a pluriel et soient $u_+ \in L_a$ avec $\omega(u_+) = f(a) + \gamma$ et $v_+ \in L_a^0$ avec $\omega(v_+) = f(2a)$. L'application $(\xi, \eta) \mapsto j_+(\xi, \eta) = x_a(\xi u_+, \lambda\xi^\sigma \xi u_+^\sigma u_+ + \eta v_+)$ est alors un isomorphisme de $\mathcal{O}$-schémas de $\mathfrak{X} = \Pi_{\mathcal{O}_{L_a}/\mathcal{O}} \mathfrak{Add} \times \Pi_{\mathcal{O}_{L_{2a}}/\mathcal{O}} \mathfrak{Add}$ sur $\mathfrak{U}_{f,a}$. Définissons de manière analogue u_-, v_- et j_-. Si $(j_+(\xi, \eta), j_-(\xi', \eta')) \in \mathfrak{W}_a(\mathcal{O})$, on a $t = d_a(j_+(\xi, \eta), j_-(\xi', \eta')) \in \mathcal{O}^{\times}$, d'où

$$\omega(1 - \xi^\sigma \xi' u_+^\sigma u_- + (\lambda\xi^\sigma \xi u_+^\sigma u_+ + \eta v_+)(\lambda\xi'^\sigma \xi' u_-^\sigma u_- + \eta' v_-)) = 0 \tag{1}$$

(cf. 4.1.12 (1)), et $\mathrm{pr}_1 \circ \beta_a(j_+(\xi, \eta), j_-(\xi', \eta')) \in \mathfrak{U}_{f,-a}(\mathcal{O})$, d'où

$$\omega(\xi' u_- - \xi u_+(\lambda\xi'^\sigma \xi' u_-^\sigma u_- + \eta' v_-)) \geqq f(-a) + \gamma \tag{2}$$

(cf. 4.1.12 (2)). Or, on a

$$\begin{aligned}
\omega(u_+ u_-) &= f(a) + f(-a) + 2\gamma, \\
\omega(\lambda^2 u_+^\sigma u_+ u_-^\sigma u_-) &= 2(f(a) + f(-a)), \\
\omega(\lambda u_+^\sigma u_+ v_-) &= 2f(-a) + f(2a), \\
\omega(\lambda u_-^\sigma u_- v_+) &= 2f(a) + f(-2a), \\
\omega(v_+ v_-) &= f(2a) + f(-2a), \\
\omega(u_-) &= f(-a) + \gamma, \\
\omega(\lambda u_+ u_-^\sigma u_-) &= f(a) + 2f(-a) + \gamma, \\
\omega(u_+ v_-) &= f(a) + f(-2a) + \gamma,
\end{aligned}$$

et l'on vérifie aisément que (1) ne peut être « génériquement vraie », c'est-à-dire pour (ξ, η, ξ', η') décrivant l'ensemble des points entiers d'un ouvert non vide de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$,

que si les inégalités (1) et (3) de 4.5.5 (ii) sont satisfaites, et que (2) ne peut être génériquement vraie que si, en outre, la première inégalité (2) de 4.5.5 (ii) est satisfaite. En échangeant les rôles de a et $-a$, on trouve de même la deuxième inégalité (2) de 4.5.5 (ii). Par conséquent (DRS 3) entraîne que f satisfait à $(\mathrm{QC}\ 1)_a$.

Des calculs analogues, mais nettement plus simples et que nous laissons au lecteur, fournissent la même conclusion dans le cas non pluriel.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.5.4.

4.5.12. — Il ne faudrait pas croire que les données radicielles schématiques associées grâce au théorème 4.5.3 aux fonctions quasi-concaves sur Φ soient toujours les seules données radicielles schématiques sur G relativement à S, même si l'on exige que $\mathfrak{T}$ est le schéma canonique de fibre générique T et si on le suppose lisse. C'est cependant bien souvent le cas, mais il est possible de construire par exemple dans $G = \Pi_{L/K} SL_2$ avec $K = \mathbf{Q}_2$ et $L = K(\sqrt{2})$ des données radicielles schématiques pour lesquelles les schémas $\mathfrak{U}_a$ ne sont pas du type étudié en 4.3. Nous espérons revenir ultérieurement sur ce problème de classification.

4.6. Les schémas $\mathfrak{G}_f$.

On conserve les hypothèses et notations précédentes. Si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma et $u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathcal{O}$-schémas, on note $\bar{\mathfrak{X}}$ la fibre fermée de $\mathfrak{X}$ et l'on pose $\bar{u} = u_{\bar{K}} : \bar{\mathfrak{X}} \to \bar{\mathfrak{Y}}$.

4.6.1. — *On suppose désormais que le $\mathcal{O}$-schéma canonique de fibre générique* T (4.4.8) *possède un lissifié* (4.4.12), *que l'on note* $\mathfrak{T}$ (et non $\mathfrak{T}^R$ comme en 4.4). Rappelons que cette hypothèse est réalisée dans chacun des cas suivants :

(A) G est *déployé* sur K, ou plus généralement, il existe une sous-extension $L \subset \tilde{K}$ et un groupe G′ déployé sur L tel que $G = \Pi_{L/K} G'$;

(B) G est *simplement connexe* ou *adjoint*;
(dans ces deux cas, T est un tore induit et $\mathfrak{T}$ est le schéma canonique de fibre générique T);

(C) ω est *discrète*;

(D) $[\tilde{K} : K] = 2$.

Rappelons aussi que $\mathfrak{T}$ possède alors les propriétés (I) à (VIII) et (IX 1) de 4.4.18. Dans les cas (A) et (B), $\mathfrak{T}$ est *connexe*; il n'en est pas toujours de même dans les cas (C) et (D) même si $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos ou fini (cf. 4.4.13).

Rappelons encore que l'hypothèse supplémentaire que nous venons de faire est stable par changement de base conservateur *étale* (4.4.12), et même par un changement

de base conservateur quelconque dans chacun des quatre cas ci-dessus. Ceci nous permettra de nous ramener parfois au cas ou le corps résiduel $\overline{\mathrm{K}}$ est infini (cf. 1.6.9 *a)*).

Enfin, *nous nous donnons une fonction* $f : \Phi \to \mathbf{R}$, *satisfaisant à la condition* (Sch) de 4.5.1 *lorsque* ω *est dense, optimale* (4.5.2) *et quasi-concave* (4.5.3).

4.6.2. — La conjonction des théorèmes 4.5.4 d'une part, 3.8.1 et 3.8.3 (où, bien entendu, on prend $\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}_a = \mathfrak{U}_{f,a}$) d'autre part, fournit un $\mathcal{O}$-schéma en groupes (affine) lisse connexe de fibre générique G, que nous notons $\mathfrak{G}_f^0$, caractérisé (à isomorphisme unique près) par les propriétés (S^0 1), (S^0 2) et (S^0 3) de 3.8.3, et également un $\mathcal{O}$-schéma en groupes (affine) lisse de fibre générique G, noté $\mathfrak{G}_f$, admettant G_f^0 comme composante neutre, et caractérisé (à isomorphisme unique près) par les propriétés (S 1), (S 2), (S 3) de 3.8.3 et la relation $\mathfrak{G}_f = \mathfrak{T}.\mathfrak{G}_f^0$. On note $\mathfrak{C}_f$ (resp. $\mathfrak{C}_f^0$) la « grosse cellule » de $\mathfrak{G}_f$ (resp. $\mathfrak{G}_f^0$), *i.e.* le sous-schéma ouvert de $\mathfrak{G}_f$ (resp. $\mathfrak{G}_f^0$) défini en (S 3) (resp. (S^0 3)).

Soit Φ^+ un système de racines positives; la condition (S 2) ou (S^0 2) dit que l'application produit est un isomorphisme de schémas de $\prod_{a \in \Phi^+} \mathfrak{U}_{f,a}$ sur un sous-schéma en groupes lisse fermé de $\mathfrak{G}_f^0$, que nous noterons $\mathfrak{U}_f^+$ (la notation $\mathfrak{U}_f^-$ s'explique alors d'elle-même). Plus généralement, soit Ψ une partie *quasi-close* de Φ^+ et soit Ψ_{nd} l'ensemble des $a \in \Psi$ telles que $(1/2)\, a \notin \Psi$.

On sait ([4], 3.11) que l'application produit est un isomorphisme de K-variétés de $\prod_{a \in \Psi_{\mathrm{nd}}} \mathrm{U}_a$ sur le groupe algébrique engendré par les U_a. Si $a \in \Psi_{\mathrm{nd}} \cap 2\Phi$, $\mathfrak{U}_{f,a}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{U}_{f,(1/2)a}$. On déduit alors de 1.2.7 que l'application produit est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-schémas de $\prod_{a \in \Psi_{\mathrm{nd}}} \mathfrak{U}_{f,a}$ sur un sous-schéma en groupes fermé lisse de $\mathfrak{U}_f^+$, que nous notons $\mathfrak{U}_{f,\Psi}$. Le schéma sous-jacent à $\mathfrak{U}_{f,\Psi}$ est celui associé à un $\mathcal{O}$-module libre de type fini (4.3.9) et l'application canonique $\mathfrak{U}_{f,\Psi}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{U}_{f,\Psi}(\overline{\mathrm{K}})$ est surjective.

Soit Ψ une partie *close* de Φ^+ et soit $g : \Psi \to \mathbf{R}$ une fonction *concave* (*i.e.* telle que $g(a+b) \leqq g(a) + g(b)$ pour $a, b, a+b \in \Psi$), satisfaisant lorsque ω est dense à (Sch) pour $a \in \Psi$. Chaque demi-espace $\{x \in \mathrm{A} \mid a(x - \varphi) + g(a) > 0\}$ contient un quartier ayant pour direction la chambre vectorielle associée à Φ^+, et il en est de même de leur intersection. On peut donc choisir une valuation de Chevalley-Steinberg x appartenant à cette intersection et un nombre réel $\mathrm{N} \in \omega(\mathrm{K}^\times)$ tels que

$$-a(x - \varphi) < g(a) < -a(x - \varphi) + \mathrm{N} \quad \text{pour tout } a \in \Psi.$$

Posons $f_0(a) = g(a)$ pour $a \in \Psi$ et $f_0(a) = -a(x - \varphi) + \mathrm{N}$ pour $a \in \Phi - \Psi$. On vérifie sans peine que $f_0 : \Phi \to \mathbf{R}$ est concave et satisfait à (Sch) lorsque ω est dense. Soit f son optimisée. Pour tout $a \in \Psi$, on a

$$\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{a,(g(a),g(2a))}.$$

Par suite, le schéma en groupes $\mathfrak{U}_{f,\Psi}$ ne dépend pas du choix de x et de N. Nous le noterons $\mathfrak{U}_{g,\Psi}$. L'application produit est un isomorphisme $\prod_{a\in\Psi_{nd}} \mathfrak{U}_{g,a}$ sur $\mathfrak{U}_{g,\Psi}$.

Posons $\Psi' = \Phi \cap (\Psi + \Psi)$, notons encore g la restriction de g à Ψ' et considérons le schéma $\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$. Il résulte de ce qui précède que $\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathfrak{U}_{g,\Psi}$, distingué car l'application commutateur envoie $\mathfrak{U}_{g,a} \times \mathfrak{U}_{g,b}$ dans $\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$ quels que soient $a, b \in \Psi$. Le schéma en groupes quotient $\mathfrak{U}_{g,\Psi}/\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$ existe et est isomorphe au schéma en groupes associé à un $\mathcal{O}$-module libre de type fini d'après 4.3.9. Soit de plus $h : \Psi \to \mathbf{R}$ satisfaisant aux mêmes conditions que g. Supposons $h \geqq g$; l'identité de U_Ψ se prolonge en un morphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{U}_{h,\Psi}$ dans $\mathfrak{U}_{g,\Psi}$ (cf. 4.3.10 et 4.6.24), envoyant $\mathfrak{U}_{h,\Psi'}$ dans $\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$, donc définissant par passage aux quotients un homomorphisme de $\mathfrak{U}_{h,\Psi}/\mathfrak{U}_{h,\Psi'}$ dans $\mathfrak{U}_{g,\Psi}/\mathfrak{U}_{g,\Psi'}$. Si de plus $h(a) = g(a)$ pour tout $a \in \Psi - \Psi'$, alors ce dernier morphisme est un isomorphisme.

4.6.3. — Les groupes de points entiers $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{G}_f(\mathcal{O})$ sont étroitement liés aux sous-groupes de G que nous avons associés à la fonction quasi-concave f au chapitre I, 6.4.2, dont nous reprenons les notations. Rappelons que U_f (resp. $U_f^\pm$) est le sous-groupe engendré par les $U_{f,a}$ pour $a \in \Phi$ (resp. $a \in \Phi^\pm$), que $N_f = U_f \cap N(K)$ et que $P_f = HU_f$, où $H \subset T(K)$ est le noyau de l'homomorphisme $v : N(K) \to W \subset \mathrm{Aut}\, A$ (I, 6.2.11). Rappelons aussi que $G^1 = \theta^{-1}(\{0\})$ est le sous-groupe des $t \in G(K)$ tels que $\omega(\chi(t)) = 0$ pour tout $\chi \in X_K^*(G)$ (4.2.16).

On a vu (4.3.2 (1) et 4.3.5 (3)) que

$$\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) = U_{f,a} = U_{a,f(a)} \cdot U_{2a,f(2a)} \quad (a \in \Phi), \tag{1}$$

d'où par 3.8.3 (S 2) et I, 6.4.9 :

$$\mathfrak{U}_f^\pm(\mathcal{O}) = U_f^\pm. \tag{2}$$

D'autre part, on déduit de 4.4.18 (VII), compte tenu de l'isomorphisme de $X_K^*(T) \otimes \mathbf{Q}$ avec la somme directe $X_K^*(G) \otimes \mathbf{Q} + X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$ (cf. 4.2.16), que

$$\mathfrak{T}(\mathcal{O}) = \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Ker}\, \theta = H \cap G^1 = H^1. \tag{3}$$

On pose

$$H^0 = \mathfrak{T}^0(\mathcal{O}), \quad P_f^0 = H^0 U_f \subset \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}), \quad P_f^1 = H^1 U_f \subset \mathfrak{G}_f(\mathcal{O}), \tag{4}$$

(nous verrons en 4.6.7 que ces deux inclusions sont des égalités). Comme $U_f \subset G^1$, on a $P_f^1 = P_f \cap G^1$, conformément aux conventions de 4.2.16. On pose enfin

$$N_f^0 = P_f^0 \cap N(K) = H^0 N_f, \quad N_f^1 = P_f^1 \cap N(K) = H^1 N_f^0 = H^1 N_f, \tag{5}$$

$$W_f = v(N_f^0) = v(N_f^1) = v(N_f). \tag{6}$$

Notons que (malheureusement) on n'a pas en général $N_f^1 = N_f \cap G^1$!

4.6.4. Proposition. — (i) *$\overline{\mathfrak{S}}$ est un tore $\overline{K}$-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$.*

(ii) *$\mathfrak{T}^0$ est le centralisateur de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{G}_f^0$; autrement dit, $\overline{\mathfrak{T}}^0$ est le centralisateur de $\overline{\mathfrak{S}}$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$.*

Soient $\hat{K}$ et $\hat{\mathcal{O}}$ les complétés respectifs de K et $\mathcal{O}$. Comme le changement de base $K \to \hat{K}$ est conservateur, S est encore un tore $\hat{K}$-déployé *maximal* de G. Si $\overline{\mathcal{S}}$ (qui est un tore $\overline{K}$-déployé de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$) n'était pas maximal, il existerait un entier $n > \dim S$ et une immersion fermée $\bar{u} : (\mathfrak{Mult}_{\overline{K}})^n \to \overline{\mathfrak{G}}_f^0$. Vu [SGAD], Exp. XI, cor. 4.2, $\bar{u}$ se relève en un $\mathcal{O}$-morphisme $u : (\mathfrak{Mult}_{\hat{\mathcal{O}}})^n \to (\mathfrak{G}_f^0)_{\hat{\mathcal{O}}}$ et, vu [SGAD], Exp. IX, cor. 2.5 et cor. 6.6, u est une immersion fermée. Mais alors $\operatorname{Im} u_{\hat{K}}$ est un tore $\hat{K}$-déployé de G de dimension $> \dim S$, ce qui est impossible. D'où (i).

Quant à l'assertion (ii) elle résulte aussitôt de la décomposition $\mathfrak{C}_f^0 = \mathfrak{U}_f^- \times \mathfrak{T}^0 \times \mathfrak{U}_f^+$ du voisinage ouvert $\mathfrak{C}_f^0$ de la section unité, compte tenu de ce que le centralisateur d'un sous-tore dans un schéma en groupes lisse connexe est lisse et connexe ([SGAD], Exp. XI, cor. 5.3 et [2], 11.12).

Corollaire. — (i) *Pour tout* $a \in \Phi$, *le sous-groupe radiciel de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *associé à* a *est l'image canonique de* $\overline{\mathfrak{U}}_{f,a}$.

(ii) *Pour toute partie quasi-close* $\Psi \subset \Phi^+$, *le sous-groupe unipotent de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *associé à* Ψ *est l'image canonique de* $\overline{\mathfrak{U}}_{f,\Psi}$.

C'est évident.

4.6.5. Proposition. — (i) $\overline{\mathfrak{G}}_f^0 = \overline{\mathfrak{U}}_f^+(\overline{K}) . \overline{\mathfrak{C}}_f^0 = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O}) . \overline{\mathfrak{C}}_f^0$.

(ii) $\overline{\mathfrak{G}}_f = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O}) . \overline{\mathfrak{C}}_f$.

Comme $\overline{\mathfrak{C}}_f^0$ est un voisinage ouvert de l'élément neutre, et que $\mathfrak{U}_f^- \mathfrak{T}^0$ est un sous-groupe fermé de $\mathfrak{G}_f^0$, on a

$$\overline{\mathfrak{G}}_f^0 = (\overline{\mathfrak{C}}_f^0)^{-1} . \overline{\mathfrak{C}}_f^0 = (\overline{\mathfrak{U}}_f^+ \overline{\mathfrak{T}}^0 \overline{\mathfrak{U}}_f^-) . (\overline{\mathfrak{U}}_f^- \overline{\mathfrak{T}}^0 \overline{\mathfrak{U}}_f^+) = \overline{\mathfrak{U}}_f^+ . \overline{\mathfrak{C}}_f^0 .$$

Si $\overline{K}$ est infini, $\overline{\mathfrak{U}}_f^+(\overline{K})$ est dense dans $\overline{\mathfrak{U}}_f^+$ (qui est un $\overline{K}$-espace vectoriel), d'où la première égalité de (i). Si $\overline{K}$ est fini, il est parfait, le radical unipotent R de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ est défini et déployé sur $\overline{K}$ et $\overline{\mathfrak{C}}_f^0 . R = \overline{\mathfrak{C}}_f^0$ (cf. 1.1.11). D'après [4], 6.25, on a

$$\overline{\mathfrak{G}}_f^0 / R = (\overline{\mathfrak{U}}_f^+ / (R \cap \overline{\mathfrak{U}}_f^+))(\overline{K}) . (\overline{\mathfrak{C}}_f^0 / R).$$

Mais R étant unipotent connexe déployé, l'application canonique de $\overline{\mathfrak{U}}_f^+(\overline{K})$ dans $(\overline{\mathfrak{U}}_f^+ / R \cap \overline{\mathfrak{U}}_f^+)(\overline{K})$ est surjective, d'où encore la première égalité de (i). La seconde en résulte, puisque l'application canonique de $\mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{U}_f^+(\overline{K})$ est surjective (4.6.2). Enfin (ii) est conséquence immédiate de (i) puisque par définition même on a $\mathfrak{G}_f = \mathfrak{T} . \mathfrak{G}_f^0$.

4.6.6. Corollaire. — *On a* $\mathfrak{G}_f^0 = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O}) . \mathfrak{C}_f^0$ *et* $\mathfrak{G}_f = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O}) . \mathfrak{C}_f$. *Si* $\overline{K}$ *est infini et si* $\mathfrak{T}^0$ (resp. $\mathfrak{T}$) *est étoffé (par exemple dans les cas* (A) *ou* (B), *ou dans le cas* (C) *si de plus* K *est strictement hensélien), alors* $\mathfrak{G}_f^0$ (resp. $\mathfrak{G}_f$) *sont étoffés.*

On voit en effet comme ci-dessus que $G = (\mathfrak{U}_f^+)_K . (\mathfrak{C}_f^0)_K$ et $\mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})$ est dense dans $(\mathfrak{U}_f^+)_K$ puisque le schéma $\mathfrak{U}_f^+$ est associé à un $\mathcal{O}$-module libre de type fini. D'où les deux premières assertions. La dernière résulte alors de 1.7.

4.6.7. Corollaire. — (i) $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})\,\mathfrak{C}_f^0(\mathcal{O}) = U_f^+\,U_f^-\,U_f^+\,H^0 = P_f^0 = U_f^+\,U_f^-\,N_f^0$ *et* $\mathfrak{G}_f(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})\,\mathfrak{C}_f(\mathcal{O}) = \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})\,H^1 = P_f^1 = U_f^+\,U_f^-\,N_f^1$.

(ii) $\overline{\mathfrak{G}}_f^0(\overline{K}) = \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}).\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$ *et* $\overline{\mathfrak{G}}_f(\overline{K}) = \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}).\overline{\mathfrak{T}}(\overline{K})$.

(iii) *Si l'application canonique* $\mathfrak{T}^0(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$ (resp. $\mathfrak{T}(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{T}}(\overline{K})$) *est surjective (ce qui est vrai dans les cas* (A) *et* (B) *ou si* $\mathcal{O}$ *est hensélien), alors l'application canonique* $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{G}}_f^0(\overline{K})$ (resp. $\mathfrak{G}_f(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{G}}_f(\overline{K})$) *est surjective.*

Soit $x \in \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ (resp. $x \in \mathfrak{G}_f(\mathcal{O})$); vu 4.6.5 il existe $y \in \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})$ tel que le point fermé de la section $y^{-1}x$ appartienne à $\overline{\mathfrak{C}}_f^0$ (resp. $\overline{\mathfrak{C}}_f$). Comme $\mathfrak{C}_f^0$ (resp. $\mathfrak{C}_f$) est ouvert, il en résulte que $y^{-1}x$ est une section de $\mathfrak{C}_f^0$ (resp. $\mathfrak{C}_f$) et l'on a $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})\,\mathfrak{C}_f^0(\mathcal{O})$ (resp. $\mathfrak{G}_f(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})\,\mathfrak{C}_f(\mathcal{O})$). Les autres égalités de (i) en résultent, compte tenu pour les dernières de I, 6.4.9 (iii).

L'assertion (ii) résulte de 4.6.4 et de la surjectivité de l'application canonique $\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K})$ et (iii) résulte trivialement de (ii).

4.6.8. — Si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes, notons ${}^1\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ le noyau de l'application canonique de $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ dans $\overline{\mathfrak{X}}(\overline{K})$. Avec cette notation :

Corollaire. — *L'application produit est une bijection de* ${}^1\mathfrak{U}_f^-(\mathcal{O}) \times {}^1\mathfrak{T}^0(\mathcal{O}) \times {}^1\mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})$ *(resp.* ${}^1\mathfrak{U}_f^-(\mathcal{O}) \times {}^1\mathfrak{T}(\mathcal{O}) \times {}^1\mathfrak{U}_f^+(\mathcal{O})$) *sur* ${}^1\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ *(resp.* ${}^1\mathfrak{G}_f(\mathcal{O})$).

On voit en effet comme ci-dessus que ${}^1\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{C}_f^0(\mathcal{O})$ (resp. ${}^1\mathfrak{G}_f(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{C}_f(\mathcal{O})$).

4.6.9. — Rappelons qu'en I, 6.4.1, on a plongé le monoïde additif ordonné $\mathbf{R}$ dans un monoïde ordonné $\widetilde{\mathbf{R}}$, qui n'est autre que le monoïde additif des intervalles de $\mathbf{R}$ de la forme $[k, +\infty[$ ou $]k, +\infty[$ avec $-\infty < k \leqq +\infty$, muni de l'ordre inverse de l'inclusion : on identifie $k \in \mathbf{R}$ avec l'intervalle fermé $[k, +\infty[$. On note $k+$ l'intervalle ouvert $]k, +\infty[$ et ∞ l'intervalle vide.

Si g est une fonction sur Φ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et si $a \in \Phi$, on pose, comme en I, 6.4.23 :

$$g^*(a) = g(a) \qquad \text{si } g(a) + g(-a) > 0,$$
$$g^*(a) = g(a)+ \qquad \text{si } g(a) + g(-a) \leqq 0.$$

4.6.10. Proposition. — (i) *La fonction* $f^* : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *est quasi-concave (au sens de* I, 6.4.8*).*

(ii) *Pour tout* $a \in \Phi$, *l'intersection du radical unipotent déployé* R *de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *avec* $\overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K})$ *est l'image canonique* I_a *du sous-groupe* $U_{f^*,a}$ *de* $U_{f,a} = \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})$.

(iii) $R(\overline{K})$ *est le sous-groupe de* $\mathfrak{G}_f^0(\overline{K})$ *engendré par l'image canonique du sous-groupe* $U_{f^*} \subset U_f$ *de* $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ *et le groupe des points rationnels sur* $\overline{K}$ *du radical unipotent déployé de* $\overline{\mathfrak{T}}^0$.

Montrons tout d'abord que pour tout $a \in \Phi$, la fonction f^* satisfait à $(QC\ 1)_a$. On peut pour cela se placer dans le groupe G_a engendré par U_a, U_{-a} et T et supposer

que $\Phi = \{\pm a\}$. Si ω est *dense* ou si a est non pluriel, alors f est concave (4.5.6), donc f^* est concave (I, 6.4.23) et satisfait à (QC 1). Supposons ω discrète et a pluriel et reprenons la fonction concave f_1 dont f est l'optimisée (4.5.5). Montrons que *l'optimisée* $(f^*)'$ *de* f^* *est égale à l'optimisée* $(f_1^*)'$ *de* f_1^* (définies comme en I, 6.4.10). Pour cela, distinguons plusieurs cas :

a) Si $f(a) + f(-a) > 0$ et $f(2a) + f(-2a) > 0$, alors $f = f^* = f' = f_1'$ et $f_1 \leqq f_1^* \leqq f^*$, d'où $(f^*)' = f_1' \leqq (f_1^*)' \leqq (f^*)'$;

b) Si $f(2a) + f(-2a) = 0$, alors $f = f_1$ (4.5.5);

c) Si $f(2a) + f(-2a) > 0$ et $f(a) + f(-a) = 0$, alors l'extension L_a de L_{2a} est ramifiée, $f(\pm 2a) = 2f(\pm a) + c$ (4.3.5), $f_1(\pm a) = f(\pm a)$ et $f_1(\pm 2a) = 2f(\pm a)$; de plus, $f(a) \in \Gamma_a'$. On vérifie alors sans peine que

$$(f_1^*)'(\pm a) = f_1(\pm a) + c = f(\pm a) + c = (f^*)'(\pm a)$$
$$(f_1^*)'(\pm 2a) = 2f(\pm a) + c = f(\pm 2a) = (f^*)'(\pm 2a)$$

d'où notre assertion.

Comme f_1 est concave, il en est de même de f_1^* (I, 6.4.23), son optimisée est quasi-concave, donc f^* est quasi-concave. Revenant au groupe G lui-même, ceci montre que f^* satisfait à $(\mathrm{QC}\ 1)_a$ pour tout $a \in \Phi$.

De plus, d'après I, 6.4.23 et 27, il existe un sous-groupe X de H^1 tel que $U_{f^*,-a} X U_{f^*,a}$ soit un sous-groupe de G^1 normalisé par $U_{f,a}$ et $U_{f,-a}$. Il en résulte que $J_a = \overline{\mathfrak{U}}_{f,-a}(\overline{K})\, \mathfrak{T}^0(\overline{K})\, I_a$ *est un sous-groupe de* $\mathfrak{G}_f^0(\overline{K})$.

Démontrons maintenant (ii). Ici encore on peut supposer $G = G_a$ (1.1.11). Nous ferons la démonstration dans le cas où a est pluriel, le cas non pluriel étant analogue mais nettement plus simple. Soit q l'application canonique de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ sur son quotient par R et soit $\xi \in I_a$. Si $q(\xi) \neq 1$, il résulte de l'existence de la donnée radicielle de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ rappelée en 1.1.13, des propriétés des données radicielles (axiomes (DR 4) et (DR 5) de I, 6.1.1) et de la surjectivité de $q : \overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K}) \to q(\overline{\mathfrak{U}}_{f,a})(\overline{K})$ (cf. 1.1.12) qu'il existe $\xi', \xi'' \in \overline{\mathfrak{U}}_{f,-a}(\overline{K})$ tels que $q(\xi'\,\xi\xi'')$ normalise $q(\overline{\mathfrak{S}})$ et y induit la réflexion par rapport à a. Mais ξ' et ξ'' appartiennent au sous-groupe J_a introduit ci-dessus,

$$q(\xi'\,\xi\xi'') \in q(\overline{\mathfrak{U}}_{f,-a})(\overline{K}) \cdot q(\overline{\mathfrak{T}}^0)(\overline{K}) \cdot q(\overline{\mathfrak{U}}_{f,a})(\overline{K})$$

et les propriétés de la décomposition de Bruhat de $(\overline{\mathfrak{G}}_f^0/R)(\overline{K})$ associée à la donnée radicielle de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/R$ (I, 6.1.15) entraînent alors que $q(\xi'\,\xi\xi'') \subset q(\overline{\mathfrak{T}}^0)$, donc $q(\xi'\,\xi\xi'')$ centralise $q(\overline{\mathfrak{S}})$, d'où une contradiction. Par suite

$$(1) \qquad I_a \subset \overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K}) \cap R.$$

Reste à montrer que si $\xi \in \overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K})$ et $\xi \notin I_a$, alors $\xi \notin R$. Vu la surjectivité de l'application canonique $\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \to \overline{\mathfrak{U}}_{f,a}(\overline{K})$, il existe $x \in \mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O})$ d'image ξ, et $x \notin U_{f^*,a}$. Si $x \notin U_{f^*,a} \cdot U_{2a,f(2a)}$ (ce qui nécessite $f^*(a) > f(a)$, donc $f(a) + f(-a) = 0$), on a, avec les notations de 4.1.9 et 4.3.5, $x = x_a(u, v)$ avec $\omega(u) = f(a) + \gamma$ et $\omega(v) = 2f(a)$.

Les éléments $x' = x_{-a}(uv^{-1}, v^{-\sigma})$ et $x'' = x_{-a}(uv^{-\sigma}, v^{-\sigma})$ appartiennent alors à $U_{f,-a}$ et $x'xx'' \in \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$. Mais 4.1.11 entraîne que $x'xx''$ normalise S et y induit la réflexion par rapport à a. Par suite, l'image de $x'xx''$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/R$ normalise $q(\overline{\mathfrak{S}})$ et ne le centralise pas, ce qui implique $q(\xi) \neq 1$ et $\xi \notin R$. Si maintenant $x \in U_{f^*,a}\, U_{2a,f(2a)}$, on se ramène en le multipliant par un élément de $U_{f^*,a}$ (ce qui d'après (1) multiplie ξ par un élément de R) au cas où $x \in U_{2a,f(2a)}$ et $x \notin U_{2a,f^*(2a)}$, ce qui nécessite $f(2a) + f(-2a) = 0$. On a alors $x = x_a(0, v)$ avec $\omega(v) = f(2a)$ et l'on termine comme dans le premier cas en considérant les éléments $x' = x'' = x_{-a}(0, v^{-\sigma})$. Ceci achève la démonstration de (ii).

L'assertion (iii) résulte de (ii) puisque R est le produit de ses intersections avec les $\overline{\mathfrak{U}}_{f,a}$ et du radical unipotent déployé de $\overline{\mathfrak{T}}^0$ (1.1.11).

Enfin achevons la démonstration de (i). On a déjà vu que f^* satisfait à $(QC\ 1)_a$ pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$. De plus, on vérifie aisément que $U_{f^*,a}$ contient le noyau de l'application canonique $\mathfrak{U}_{f,a}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{U}_{f,a}(\overline{K})$, donc est l'image réciproque de I_a dans $U_{f,a}$. Pour toute partie positivement close Ψ de $\mathbf{\Phi}$, le produit des I_a pour $a \in \Psi$ est un groupe (1.1.7); il en est alors de même du produit des $U_{f^*,a}$ pour $a \in \Psi$, d'où résulte facilement (QC 2).

4.6.11. Remarque. — Si $\overline{K}$ est *infini* (et l'on peut se ramener à ce cas par un changement de base conservateur étale), $R(\overline{K})$ est dense dans R et 4.6.10 détermine complètement R.

4.6.12. Corollaire. — (i) *Le système de racines de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/R$ *par rapport au tore* $\overline{K}$*-déployé maximal* $q(\overline{\mathfrak{S}})$ *(identifié à* $\overline{\mathfrak{S}}$*) est l'ensemble* Φ_f *des* $a \in \Phi$ *telles que* $f(a) + f(-a) = 0$.

(ii) *L'application canonique de* Aut A *dans* Aut V^* *induit un isomorphisme de* W_f *sur le groupe de Weyl de* Φ_f *(opérant naturellement sur le sous-espace de* V^* *engendré par* Φ_f *et trivialement sur son supplémentaire orthogonal).*

(iii) *Supposons* $\overline{K}$ *séparablement clos et soit* R' *le radical unipotent de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$. *Le système de racines du groupe réductif* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/R'$ *(défini sur la clôture algébrique de* $\overline{K}$*) est l'ensemble* Φ_f^{nm} *des éléments non multipliables de* Φ_f.

L'assertion (i) résulte de 4.6.10 et 1.1.11; (ii) résulte de I, 6.4.10 et (iii) de [7], th. 3, compte tenu de ce que, lorsque $\overline{K}$ est séparablement clos, $q(\overline{\mathfrak{S}})$ est un tore maximal $\overline{K}$-déployé.

4.6.13. Corollaire. — *Soit* Q^0 *(resp.* Q*) le normalisateur de* $\overline{\mathfrak{S}}$ *dans* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *(resp.* $\overline{\mathfrak{G}}_f$*). Toute classe latérale de* Q^0 *(resp.* Q*) suivant* $\overline{\mathfrak{T}}^0$ *(resp.* $\overline{\mathfrak{T}}$*) contient l'image canonique d'un élément de* N_f^0.

On sait en effet que $Q^0 = Q^0(\overline{K}).\overline{\mathfrak{T}}^0$ (1.1.15), d'où $Q = Q^0(\overline{K}).\overline{\mathfrak{T}}$, et que $Q^0(\overline{K})/\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K}) = W_f$ (1.1.13), d'où le corollaire puisque $N_f^0/H^0 = W_f$.

On remarquera que le schéma des composantes connexes du normalisateur de $\overline{\mathfrak{S}}$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ n'est en général pas constant; sa fibre générique est le groupe de Weyl de Φ et a fibre fermée celui de Φ_f (elle peut être réduite à l'élément neutre).

4.6.14. Corollaire. — *Soit* $a \in \mathbf{\Phi}$. *Le sous-groupe radiciel* V_a *du quotient quasi-réductif* ${}^q\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *de* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ (1.1.12) *associé à* a *est* K*-isomorphe à* :

— $\{1\}$ *si* $a \cap \Phi_f = \emptyset$;

— $\Pi_{\overline{L}_a/\overline{K}}\, \mathfrak{Add}$ *si* $a \in \Phi_f$ *et* $2a \notin \Phi_f$ (*ce qui entraîne, lorsque* a *est pluriel, que l'extension* L_a *de* L_{2a} *est ramifiée*);

— $\Pi_{\overline{L}_{2a}/\overline{K}}\, \mathfrak{Add}$ *si* $a \notin \Phi_f$ *et* $2a \in \Phi_f$;

— $H(\overline{L}_a, \overline{L}_{2a})$ (*pour la notation, voir* 4.1.9) *si* a *et* $2a \in \Phi_f$ (*ce qui entraîne que l'extension* L_a *de* L_{2a} *est non ramifiée*) *et si l'extension résiduelle* $\overline{L}_a$ *de* $\overline{L}_{2a}$ *est séparable*;

— $\Pi_{\overline{L}_a/\overline{L}_{2a}}\, \mathfrak{Add} \times \Pi_{\overline{L}_{2a}/\overline{K}}\, \mathfrak{Add}$ *si* a *et* $2a \in \Phi_f$ (*ce qui entraîne que l'extension* L_a *de* L_{2a} *est non ramifiée*) *et si l'extension résiduelle* $\overline{L}_a$ *de* $\overline{L}_{2a}$ *est inséparable.*

La démonstration est facile et nous la laissons au lecteur.

4.6.15. Corollaire. — *Supposons* $\overline{K}$ *séparablement clos. Alors* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *est réductif si et seulement si* G *est déployé sur* K *et s'il existe un point spécial* $x \in A$ *tel que* $f(a) = -a(x - \varphi)$ *pour tout* $a \in \Phi$. *Le schéma* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ *est alors un schéma de Chevalley* (3.2.13).

Rappelons que $x \in A$ est dit *spécial* si $a(x - \varphi) \in \Gamma_a$ pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$ (I, 6.2.13). Lorsque G est déployé sur K, cela signifie que x est une valuation de Chevalley, associée à un système de Chevalley de G (4.2.1); le schéma de Chevalley correspondant est le schéma $\mathfrak{G}_f^0$ avec $f(a) = f_x(a) = -a(x - \varphi)$ $(a \in \Phi)$: le lecteur vérifiera que les deux définitions sont identiques.

Supposons $\overline{K}$ séparablement clos; 4.6.12 (iii) entraîne alors que $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ est réductif si et seulement si $\dim \overline{\mathfrak{G}}_f^0 = \operatorname{Card} \Phi_f^{nm} + \dim \overline{\mathfrak{S}}$, c'est-à-dire

$$\dim G = \operatorname{Card} \Phi_f^{nm} + \dim S. \tag{1}$$

Mais, $\dim G = \sum_{a \in \mathbf{\Phi}} \dim U_a + \dim T$ et (1) est donc équivalente à l'ensemble des trois relations

$$\dim S = \dim T, \tag{2}$$

$$\Phi_f^{nm} = \Phi, \tag{3}$$

$$\dim U_a = 1 \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{\Phi}. \tag{4}$$

La relation (2) dit que G est déployé sur K et entraîne (4), et (3) dit alors que

$$f(a) + f(-a) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \Phi. \tag{5}$$

Soit B une base de Φ et soit x le point de A défini par les relations $a(x - \varphi) + f(a) = 0$ pour $a \in B$. Comme f est optimale, on a $f(a) \in \Gamma_a$ pour tout $a \in B$ et x est un point spécial de A (I, 6.2.14). Il résulte alors de I, 6.4.10 (1) que (5) équivaut à $f = f_x$, ce qui achève la démonstration.

4.6.16. — Le schéma $\mathfrak{G}_f$ et les autres notions que nous avons associées à f dépendent bien entendu non seulement de la fonction $f : \Phi \to \mathbf{R}$ mais aussi de la valuation de

Chevalley-Steinberg φ que nous avons fixée en 4.2. Soit $\varphi' = \varphi + v$ une autre valuation de Chevalley-Steinberg; notons par un indice supérieur gauche les notions attachées à φ ou à φ'. Comme $a(v) \in \omega(L_a^\times)$ pour tout $a \in \Phi$ (4.2.10), on voit aussitôt que si, $k \in \mathbf{R}$ (resp. $(k, \ell) \in \mathbf{R}^2$) satisfait aux conditions de 4.3.2 (resp. 4.3.5), il en est de même de $k + a(v)$ (resp. $(k + a(v), \ell + 2a(v))$) et que

$$^{\varphi}\mathfrak{U}_{a,k} = {}^{\varphi'}\mathfrak{U}_{a,k+a(v)} \quad \text{si } a \text{ est non pluriel,}$$

$$^{\varphi}\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)} = {}^{\varphi'}\mathfrak{U}_{a,(k+a(v),\ell+2a(v))} \quad \text{si } a \text{ est pluriel,}$$

d'où

$$(1) \qquad {}^{\varphi}\mathfrak{G}_f = {}^{\varphi'}\mathfrak{G}_{f'} \quad \text{avec } f'(a) = f(a) + a(\varphi' - \varphi) \quad \text{pour } a \in \Phi.$$

Ceci nous permet d'étendre nos notations au cas d'une valuation φ' équipollente à φ quelconque, en prenant (1) comme définition. Nous dirons que les couples (φ, f) et (φ', f') sont *équivalents*.

4.6.17. — Le groupe $N = N(K)$ opère par transport de structure sur l'ensemble des couples (ψ, g) formés d'une valuation équipollente à φ et d'une fonction $g : \Phi \to \mathbf{R}$ et cette opération est compatible avec la relation d'équivalence. Comme chaque classe d'équivalence contient un et un seul élément de la forme (φ, g), on en déduit une loi d'opération de N dans l'ensemble F des fonctions $g : \Phi \to \mathbf{R}$ et un calcul simple montre que pour $n \in N$ et $a \in \Phi$, on a

$$(1) \qquad (n.g)(a) = g({}^t({}^v\nu(n)).a) - a(\nu(n).\varphi - \varphi).$$

D'une manière générale, si u est un automorphisme de l'espace affine A tel que ${}^t({}^v u)$ conserve Φ, on définira $u.g$ par

$$(1\ bis) \qquad (u.g)(a) = g({}^t({}^v u).a) - a(u.\varphi - \varphi) \quad (a \in \Phi).$$

Le sous-groupe H de N opère alors trivialement sur F, d'où une loi d'opération de $W = N/H$ dans F. Il est clair que l'automorphisme intérieur de G défini par n se prolonge en un *isomorphisme* de $\mathfrak{G}_f$ sur $\mathfrak{G}_{n.f}$, et d'une manière générale transforme tous les objets que nous avons attachés à f en les analogues attachés à $n.f$. Par exemple, on a $nU_f n^{-1} = U_{n.f}$, $nN_f^0 n^{-1} = N_{n.f}^0$, etc. Nous posons

$$N_f^\dagger = \{n \in N \cap G^1 \mid n.f = f\}$$

$$W_f^\dagger = \nu(N_f^\dagger) = N_f^\dagger / H^1.$$

Il est immédiat, vu (1), que $W_f^\dagger$ ne contient pas de translation non triviale. L'application canonique $w \to {}^v w$ de W sur le groupe de Weyl de Φ permet donc d'identifier $W_f^\dagger$ à un sous-groupe de ${}^v W$.

Le groupe N_f^0 est contenu dans $N_f^\dagger$, et en est un sous-groupe distingué : c'est à peu près évident, du fait en particulier que l'automorphisme intérieur défini par un élément de N_f^0 permute entre eux les sous-groupes $U_{f,a}$, mais cela résulte encore plus aisément de I, 6.4.10 (1). Par suite, W_f est un sous-groupe distingué de $W_f^\dagger$.

4.6.18. Proposition. — *Il existe un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}_f^\dagger$ de fibre générique* G, *contenant $\mathfrak{G}_f$ comme sous-schéma en groupes ouvert distingué, tel que $N_f^\dagger \subset \mathfrak{G}_f^\dagger(\mathcal{O})$, que $\mathfrak{G}_f^\dagger = N_f^\dagger . \mathfrak{G}_f$ et que $\overline{\mathfrak{G}}_f^\dagger / \overline{\mathfrak{G}}_f \simeq N_f^\dagger / N_f^1$.*

Montrons tout d'abord un lemme, dont l'énoncé et la démonstration résultent d'une discussion avec P. Deligne : ses observations nous ont permis de simplifier notre texte original.

Lemme. — *Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes,* non nécessairement affine, *plat et séparé et soit* Y *un sous-groupe de $\mathfrak{X}(K)$ tel que, pour tout $y \in Y$, l'automorphisme intérieur de $\mathfrak{X}_K$ défini par y se prolonge (d'une manière nécessairement unique) en un automorphisme de $\mathfrak{X}$, noté i_y. Il existe un $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\widetilde{\mathfrak{X}}$* non nécessairement affine, *plat et séparé, de fibre générique $\mathfrak{X}_K$, contenant $\mathfrak{X}$ comme sous-schéma en groupes ouvert distingué, tel que $Y \subset \widetilde{\mathfrak{X}}(\mathcal{O})$ et que $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}.Y$.*

Soit Y′ un système de représentants de $Y/Y \cap \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ dans Y, contenant 1. Pour $y \in Y'$, soit $\mathfrak{X}_y$ une copie de $\mathfrak{X}$ (qui sera le translaté de $\mathfrak{X}$ par y). Notons $x \mapsto x_y$ l'isomorphisme choisi de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{X}_y$ et soit $\widetilde{\mathfrak{X}}$ le $\mathcal{O}$-schéma non nécessairement affine, mais *plat*, obtenu en recollant les $\mathfrak{X}_y$ pour $y \in Y'$ suivant les fibres génériques de la manière naturelle, c'est-à-dire en identifiant $(\mathfrak{X}_y)_K$ à $(\mathfrak{X}_z)_K$ par l'isomorphisme $x \mapsto xy^{-1}z$. On identifie $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_1$ et l'on identifie $\mathfrak{X}_y$ à son image (ouverte) dans $\widetilde{\mathfrak{X}}$.

Les applications

$$(x_y, x'_z) \mapsto (xi_y(x')yz(z')^{-1})_{z'}$$

de $\mathfrak{X}_y \times \mathfrak{X}_z$ dans $\mathfrak{X}_{z'}$ (où $y, z \in Y'$ et où z' est le représentant de yz dans Y′) se recollent et définissent un morphisme de schémas $\widetilde{\mathfrak{X}} \times \widetilde{\mathfrak{X}} \to \widetilde{\mathfrak{X}}$, et l'on vérifie aisément que ce morphisme est une loi de groupe sur $\widetilde{\mathfrak{X}}$, dont l'élément neutre est la section unité e de $\mathfrak{X}_1$, dont l'application inverse s'obtient en recollant les morphismes $x_y \mapsto (i_{y^{-1}}(x^{-1}).(y'y)^{-1})_{y'}$, où y' est le représentant de y^{-1} dans Y′, qui induit sur $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$ la loi de groupe donnée et qui fait de $\mathfrak{X}$ un sous-schéma en groupes ouvert distingué de $\widetilde{\mathfrak{X}}$.

La seule chose qui nous reste à démontrer est que $\widetilde{\mathfrak{X}}$ est *séparé*, ou encore que la section unité est fermée ([DG], p. 165). Supposons le contraire; il existe alors $y \in Y'$, $y \neq 1$ tel que le point générique e_K de e ne soit pas fermé dans $\mathfrak{X}_y$ ou encore, puisque $e_K = (y^{-1})_y$, tel que y^{-1} (considéré comme point fermé de la fibre générique de $\mathfrak{X}$) ne soit pas fermé dans $\mathfrak{X}$. Soit alors $\mathfrak{Y}$ l'adhérence schématique de y^{-1} dans $\mathfrak{X}$ et soit $\mathfrak{Y}_0$ un ouvert affine de $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathfrak{Y}_0 \cap \overline{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$. Comme $\mathfrak{Y}$, donc $\mathfrak{Y}_0$, est plat (1.2.6), l'algèbre affine R de $\mathfrak{Y}_0$ s'injecte dans $R \otimes K$. D'autre part, on a $R \otimes K = K$ puisque la fibre générique de $\mathfrak{Y}_0$ (ou de $\mathfrak{Y}$) est réduite au point $y^{-1} \in \mathfrak{X}(K)$. Mais, une sous-$\mathcal{O}$-algèbre de K est égale soit à $\mathcal{O}$, soit à K, et l'on ne peut pas avoir $R = K$ puisque $\mathfrak{Y}_0 \cap \overline{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$. Donc, $R = \mathcal{O}$ et $\mathfrak{Y}_0$ est une section de $\mathfrak{X}$. Autrement dit $y^{-1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ et $y = 1$, d'où une contradiction. Le lemme est démontré.

4.6.19. — Du lemme précédent résulte l'existence d'un $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{G}_f^\dagger$, *a priori* non nécessairement affine, mais quasi-compact puisque $N_f^\dagger/N_f^1$ est fini et possédant les autres propriétés requises, et notamment la lissité puisque $\mathfrak{G}_f$ est lisse. Reste donc seulement à démontrer que $\mathfrak{G}_f^\dagger$ *est affine.*

Montrons tout d'abord que $\mathfrak{G}_f^\dagger$ est *quasi-affine* (*i.e.* isomorphe à un ouvert quasi-compact d'un schéma affine). Comme $\mathfrak{G}_f^\dagger$ est lisse, quasi-compact, séparé et à fibre générique affine, il suffit, d'après un théorème de M. Raynaud ([25], Th. X.10, p. 153), de montrer que le centralisateur de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{G}_f^\dagger$ est quasi-affine. Nous allons même montrer que ce centralisateur est contenu dans $\mathfrak{G}_f$, donc est affine. Il suffit de faire voir que, pour toute extension k de $\overline{K}$ et tout $x \in \overline{\mathfrak{G}}_f^\dagger(k)$ centralisant $\overline{\mathfrak{S}}$, on a $x \in \overline{\mathfrak{G}}_f(k)$. Or on peut écrire $x = yx'$, avec $y \in N_f^\dagger$ et $x' \in \overline{\mathfrak{G}}_f(k)$; alors x' normalise $\overline{\mathfrak{S}}$ et induit sur $X^*(\overline{\mathfrak{S}}) = X^*(S)$ un élément de W_f (4.6.12). Mais x centralise $\overline{\mathfrak{S}}$; par suite, y induit sur $\overline{\mathfrak{S}}$ un élément de W_f, donc $y \in N_f^1$ et $x \in \overline{\mathfrak{G}}_f(k)$, ce qu'il fallait démontrer.

Un autre théorème de M. Raynaud ([25], prop. VII. 3.1, p. 117) entraîne alors que le morphisme canonique de $\mathfrak{G}_f^\dagger$ dans $\mathfrak{G}' = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}[\mathfrak{G}_f^\dagger]$ muni de sa structure naturelle de $\mathcal{O}$-schéma en groupes (affine) ([SGAD], Exp. VI_B, 11.2, p. 396) est un isomorphisme sur un sous-groupe ouvert de $\mathfrak{G}'$. De plus, $K[\mathfrak{G}'] = K \otimes \mathcal{O}[\mathfrak{G}_f^\dagger] = K[\mathfrak{G}_f^\dagger]$, car on voit aussitôt en considérant un recouvrement de $\mathfrak{G}_f^\dagger$ par un nombre fini d'ouverts affines, que pour tout $f \in K[\mathfrak{G}_f^\dagger]$, il existe $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $\alpha f \in \mathcal{O}[\mathfrak{G}_f^\dagger]$. Le lemme 2.2.6 entraîne alors que $\mathfrak{G}_f^\dagger$ est affine (et par suite égal à $\mathfrak{G}'$).

La démonstration de 4.6.18 est achevée.

4.6.20. Remarques. — *a)* Si ω est *discrète*, un théorème de Raynaud (non publié) assure que tout $\mathcal{O}$-schéma en groupes séparé, plat, de type fini et de fibre générique affine, est lui-même affine : cela rend 4.6.19 inutile dans ce cas.

b) Les schémas $\mathfrak{G}_f^0$ et $\mathfrak{G}_f$ sont stables par changement de base conservateur étale, et même par changement de base conservateur quelconque dans chacun des quatre cas (A) à (D) de 4.6.1. Nous ignorons s'il en est toujours de même de $\mathfrak{G}_f^\dagger$. C'est cependant exact dans chacun des cas (A) et (B), ou si l'extension $\tilde{K}$ de K est non ramifiée : il résulte en effet de 4.4.17 que $W_f^\dagger$ reste alors stable.

4.6.21. — Soit $\mathscr{Y}$ (resp. $\mathscr{Y}^1$) l'ensemble des sous-groupes de $N_f^\dagger/N_f^0$ (resp. $N_f^\dagger/N_f^1$). Pour $Y \in \mathscr{Y}$ (resp. $Y \in \mathscr{Y}^1$), notons YN_f^0 (resp. YN_f^1) son image réciproque dans $N_f^\dagger$ et posons $Y\mathfrak{G}_f^0 = YN_f^0.\mathfrak{G}_f^0$ (resp. $Y\mathfrak{G}_f = YN_f^1.\mathfrak{G}_f$). Puisque $\mathfrak{G}_f$ est ouvert dans $\mathfrak{G}_f^\dagger = N_f^\dagger.\mathfrak{G}_f$, on a $\mathfrak{G}_f^\dagger(\mathcal{O}) = N_f^\dagger\, \mathfrak{G}_f(\mathcal{O})$ et, vu 4.6.7 (i), $\mathfrak{G}_f^\dagger(\mathcal{O}) = N_f^\dagger\, \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$. La proposition suivante en résulte aussitôt :

Proposition. — (i) *L'application* $Y \mapsto Y\mathfrak{G}_f$ *est un isomorphisme d'ensembles ordonnés (par l'inclusion) de* $\mathscr{Y}^1$ *sur l'ensemble des sous-schémas en groupes ouverts de* $\mathfrak{G}_f^\dagger$ *contenant* $\mathfrak{G}_f$.

(ii) *L'application* $Y \mapsto Y\mathfrak{G}_f^0$ *est un isomorphisme d'ensembles ordonnés (par l'inclusion) de* $\mathscr{Y}$ *sur l'ensemble des sous-schémas en groupes ouverts* $\mathfrak{G}'$ *de* $\mathfrak{G}_f^\dagger$ *tels que* $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'(\mathcal{O}).\mathfrak{G}'^0$.

Remarquons que si $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\mathcal{O}).\mathfrak{T}^0$ (par exemple si $\mathfrak{T}$ est connexe, notamment dans les cas (A) et (B) de 4.6.1, ou si $\mathcal{O}$ est strictement hensélien), alors $\mathfrak{G}_f = \mathfrak{T}(\mathcal{O}).\mathfrak{G}_f^0$ et $\mathfrak{G}_f^\dagger = \mathrm{N}_f^\dagger.\mathfrak{G}_f^0$. Par suite, tout sous-schéma en groupes ouvert $\mathfrak{G}'$ de $\mathfrak{G}_f^\dagger$ remplit la condition de (ii), on a $\mathfrak{G}_f^\dagger = (\mathrm{N}_f^\dagger/\mathrm{N}_f^0)\,\mathfrak{G}_f^0$ et $\mathfrak{G}_f = (\mathrm{N}_f^1/\mathrm{N}_f^0)\,\mathfrak{G}_f^0$. Rappelons que $\mathrm{N}_f^1/\mathrm{N}_f^0 \simeq \mathfrak{T}(\mathcal{O})/\mathfrak{T}^0(\mathcal{O}) = \mathrm{H}^1/\mathrm{H}^0$.

Corollaire. — *Soit $\mathfrak{H}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique* G, *tel que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathcal{O}).\mathfrak{H}^0$ (condition automatiquement satisfaite si $\mathcal{O}$ est strictement hensélien). Supposons que l'injection canonique de $(\mathfrak{C}_f^0)_K$ (resp. $(\mathfrak{C}_f)_K$) dans* G *se prolonge en un isomorphisme de schémas de $\mathfrak{C}_f^0$ (resp. $\mathfrak{C}_f$) sur un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{H}$. Alors, il existe un sous-groupe* Y *de $\mathrm{N}_f^\dagger/\mathrm{N}_f^0$ (resp. de $\mathrm{N}_f^\dagger/\mathrm{N}_f^1$) et un seul tel que l'identité de* G *se prolonge en un isomorphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{H}$ sur $\mathrm{Y}\mathfrak{G}_f^0$ (resp. sur $\mathrm{Y}\mathfrak{G}_f$).*

Cela résulte de 1.2.13 et 14.

4.6.22. — Supposons G *déployé* sur K et soit x un point spécial de A. Prenons $f = f_x$, de sorte que $\mathfrak{G}_f^0$ est le schéma de Chevalley associé à x (4.6.15). Comme $\Phi_f = \Phi$, l'image de W_f dans ${}^v\mathrm{W}$ est ${}^v\mathrm{W}$ tout entier et l'on a $\mathrm{W}_f^\dagger = \mathrm{W}_f$. Comme de plus $\mathfrak{T}$ est connexe, on voit que $\mathfrak{G}_f^0 = \mathfrak{G}_f = \mathfrak{G}_f^\dagger$.

Il en résulte que *si $\mathfrak{H}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique* G, *dont la composante neutre est un schéma de Chevalley, alors* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0$: il suffit d'appliquer le corollaire précédent, après avoir éventuellement effectué le changement de base $\mathrm{K} \to {}^{hs}\mathrm{K}$, qui est conservateur puisque $\widetilde{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$.

4.6.23. — Lorsque ω est discrète, on peut dans tout ce qui précède supprimer l'hypothèse que f est optimale : si $f : \Phi \to \mathbf{R}$ est une fonction quasi-concave quelconque, on considère son optimisée f', qui est quasi-concave optimale. On a alors $\mathfrak{U}_{f,a} = \mathfrak{U}_{f',a}$ pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$, et on pose $\mathfrak{G}_f = \mathfrak{G}_{f'}$, etc. On prendra toutefois garde que le système de racines $\Phi_f = \Phi_{f'}$ n'est pas nécessairement l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $f(a) + f(-a) = 0$. Si f est concave, Φ_f est l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $f(a) \in \Gamma_a'$ et que $f(a) + f(-a) = 0$.

4.6.24. Proposition. — *Soit $g : \Phi \to \mathbf{R}$ une autre fonction optimale quasi-concave, satisfaisant à* (Sch) *lorsque ω est dense et telle que $f \leqq g$.*

(i) *L'identité de* G *se prolonge en un morphisme noté $i_{f,g}^0$ (resp. $i_{f,g}$) de $\mathfrak{G}_g^0$ (resp. $\mathfrak{G}_g$) dans $\mathfrak{G}_f^0$ (resp. $\mathfrak{G}_f$).*

(ii) *Soit de plus* Y (*resp.* Y') *un sous-groupe de $\mathrm{N}_f^\dagger/\mathrm{N}_f^0$ (resp. $\mathrm{N}_g^\dagger/\mathrm{N}_g^0$). Si* $\mathrm{Y}'\,\mathrm{N}_g^0 \subset \mathrm{Y}\mathrm{N}_f^0$, *l'identité de* G *se prolonge en un morphisme noté $i_{f,g}^{\mathrm{Y},\mathrm{Y}'}$ de $\mathrm{Y}'\,\mathfrak{G}_g^0$ dans $\mathrm{Y}\mathfrak{G}_f^0$.*

Pour tout $a \in \mathbf{\Phi}$, l'identité de U_a se prolonge en un morphisme de $\mathfrak{U}_{g,a}$ dans $\mathfrak{U}_{f,a}$ (4.3.10), d'où par produit un prolongement de l'identité de $\mathfrak{C}_K$ en un morphisme de schémas de $\mathfrak{C}_g^0$ dans $\mathfrak{C}_f^0$. Il suffit alors d'appliquer 1.2.13.

Remarquons d'une part que $\mathrm{N}_g^0 \subset \mathrm{N}_f^0$, puisque $\mathrm{U}_g \subset \mathrm{U}_f$, d'autre part que $\Phi_g \subset \Phi_f$: plus précisément, on a $\Phi_g = \{a \in \Phi_f \mid f(\pm a) = g(\pm a)\}$.

4.6.25. Proposition. — *Gardons les notations de* 4.6.24 *et supposons de plus que* $\Phi_f = \Phi_g$.

(i) *L'image par* $\bar{i}^0_{f,g}$ *du radical unipotent déployé de* $\overline{\mathfrak{G}}^0_g$ *est contenue dans le radical unipotent déployé de* $\overline{\mathfrak{G}}^0_f$.

(ii) $\bar{i}^0_{f,g}$ *définit par passage aux quotients un isomorphisme* ${}^q\bar{i}^0_{f,g}$ *du groupe quasi-réductif* ${}^q\overline{\mathfrak{G}}^0_g$ (cf. 1.1.12) *sur* ${}^q\overline{\mathfrak{G}}^0_f$.

On peut supposer $\overline{\mathrm{K}}$ infini. Comme $\Phi_f = \Phi_g$, on a $f^* \leqq g^*$ et (i) résulte aussitôt de 4.6.10. De plus, $\bar{i}^0_{f,g}$ est « l'identité » sur $\overline{\mathfrak{T}}^0$ et définit par passage aux quotients un morphisme j_a de $q(\overline{\mathfrak{U}}_{g,a})$ dans $q(\overline{\mathfrak{U}}_{f,a})$ (pour $a \in \mathbf{\Phi}$); on vérifie sans peine que j_a est un isomorphisme (cf. 4.6.14), d'où (ii).

4.6.26. — Soit Ω une partie bornée non vide de l'appartement A. On lui fait correspondre une fonction $f_\Omega : \Phi \to \mathbf{R}$ en posant

$$f_\Omega(a) = \inf\{k \in \mathbf{R} \mid a(x - \varphi) + k \geqq 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega\} \quad (a \in \Phi)$$

(I, 7.1.1). C'est évidemment une fonction *concave*. Mais lorsque ω est *dense*, f_Ω ne satisfait pas toujours à (Sch) (sauf si $\omega(\mathrm{K}^*) = \mathbf{R}$!) : si par exemple $\Omega = \{x\}$, alors f_Ω ne vérifie (Sch) que si $a(x - \varphi) \in \Gamma'_a$ pour tout $a \in \Phi$, ce qui entraîne que x est un point spécial (et même hyperspécial : cf. [40], 1.10.2, p. 36). *Jusqu'à* 4.6.31, *toutes les parties de* A *notées* Ω *(affecté éventuellement d'indices ou d'accents) sont supposées telles que, lorsque* ω *est dense,* f_Ω *satisfasse à* (Sch). Vu I, 7.4.9, cette propriété ne dépend que de Ω en tant que partie de $\mathscr{I}$ et non de l'appartement $\mathrm{A} \supset \Omega$ choisi.

L'optimisée f'_Ω de f_Ω satisfait donc aux conditions imposées à f en 4.6.1 et nous pouvons considérer les schémas $\mathfrak{G}_{f'_\Omega}$, ... et les sous-groupes $\mathrm{U}_{f'_\Omega}$, ... que nous noterons plus simplement $\mathfrak{G}_\Omega$, ... et U_Ω, ... (en conformité avec I, 7.1, à une exception près, due à des raisons typographiques : le groupe que nous notons désormais $\mathrm{N}^\dagger_\Omega$ n'est pas celui noté ainsi en I, 4.1.4 et 7.3.9, mais l'intersection de ce dernier avec G^1).

En I, 7.1.8, nous avons noté $\hat{\mathrm{N}}_\Omega$ le fixateur de Ω dans N. Le groupe $\hat{\mathrm{N}}^1_\Omega = \hat{\mathrm{N}}_\Omega \cap \mathrm{G}^1$ contient N^1_Ω et est contenu dans $\mathrm{N}^\dagger_\Omega$. On pose

$$\hat{\mathfrak{G}}_\Omega = \mathrm{Y}\mathfrak{G}_\Omega \quad \text{avec } \mathrm{Y} = \hat{\mathrm{N}}^1_\Omega/\mathrm{N}^1_\Omega.$$

4.6.27. — La fonction f'_Ω (et tout ce qui lui est associé) ne dépend que de l'*enclos* $cl(\Omega)$ de Ω (I, 7.1.2), qui est l'intersection des racines affines $\{x \in \mathrm{A} \mid a(x - \varphi) + f'_\Omega(a) \geqq 0\}$ pour $a \in \Phi$.

Si $\Omega \subset \bar{\Omega}'$, alors $f'_\Omega \leqq f'_{\bar{\Omega}'}$, et l'on peut appliquer 4.6.24 et 25. On pose $i_{\Omega,\Omega'} = i_{f'_\Omega, f'_{\bar{\Omega}'}}$, etc.

4.6.28. Proposition. — (i) $\hat{\mathrm{P}}^1_\Omega = \hat{\mathfrak{G}}_\Omega(\mathscr{O})$ *est le fixateur de* Ω *dans* G^1 *et* $\mathrm{P}^0_\Omega = \mathfrak{G}^0_\Omega(\mathscr{O})$ *en est un sous-groupe, que l'on appelle le* fixateur connexe *de* Ω.

(ii) *Si* Ω *est close (i.e. égale à son enclos* $cl(\Omega)$*), alors* $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathscr{O}) = \mathrm{N}^\dagger_\Omega.\mathrm{P}^0_\Omega$ *est le stabilisateur de* Ω *dans* G^1.

(iii) $\mathfrak{G}^0_\Omega(\mathscr{O})$ *permute transitivement les appartements de* I *contenant* Ω.

Vu I, 7.4.9 et la relation $\hat{P}_\Omega = U_\Omega \hat{N}_\Omega$ de I, 7.1.8, le sous-groupe U_Ω permute transitivement les appartements contenant Ω. Comme $U_\Omega \subset \mathfrak{G}^0_\Omega(\mathcal{O})$, l'assertion (iii) en résulte.

D'autre part, on a $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega(\mathcal{O}) = \hat{N}^1_\Omega P^0_\Omega = \hat{P}_\Omega \cap G^1$ donc (i) résulte de I, 7.4.4. Enfin, si Ω est close, $N^\dagger_\Omega$ (qui est par définition le stabilisateur de f_Ω dans G^1) stabilise Ω; inversement, si $g \in G^1$ stabilise Ω, il existe $u \in U_\Omega$ tel que gu stabilise A et $gu \in N^\dagger_\Omega$, d'où (ii).

4.6.29. Corollaire. — (i) *Si Ω est close, alors Ω est exactement l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{G}^0_\Omega(\mathcal{O})$ dans l'appartement* A (1).

(ii) *Si* $cl(\Omega) \supset \Omega'$, *alors* $\mathfrak{G}^0_\Omega(\mathcal{O}) \not\subset \mathfrak{G}^0_{\Omega'}(\mathcal{O})$.

(iii) *Si* $cl(\Omega) \neq cl(\Omega')$, *alors* $\mathfrak{G}^0_\Omega \neq \mathfrak{G}^0_{\Omega'}$.

Soit $x \in A$, $x \notin cl(\Omega)$; d'après I, 7.4.5, il existe $u \in U_\Omega \subset \mathfrak{G}^0_\Omega(\mathcal{O})$ ne fixant pas x, d'où (i). Les assertions (ii) et (iii) résultent de (i).

4.6.30. — Reprenons les notations de 4.2.12, posons $\Omega' = j(\Omega)$, soit S'' un tore K'-déployé maximal de G', soit A'' l'appartement de $\mathscr{I}'$ associé à S'' et supposons $\Omega' \subset A''$. Alors Ω' satisfait aux conditions voulues pour que l'on puisse définir les schémas $\mathfrak{G}'_{\Omega'}$, etc. à partir du triple (K', G', S'') et j se prolonge en un σ-isomorphisme du $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}^0_\Omega$ (resp. $\mathfrak{G}_\Omega$, $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega$, $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$) sur le $\mathcal{O}'$-schéma en groupes $\mathfrak{G}'^0_{\Omega'}$ (resp. $\mathfrak{G}'_{\Omega'}$, $\hat{\mathfrak{G}}'_{\Omega'}$, $\mathfrak{G}'^\dagger_\Omega$) : quitte à multiplier à droite j par l'automorphisme intérieur de G défini par un élément de $\mathfrak{G}^0_\Omega(\mathcal{O})$, on peut, vu (4.6.28) (iii), supposer que $A'' = j(A)$, ou encore $S'' = j(S)$, et l'assertion est évidente par transport de structure.

En particulier, *les schémas $\mathfrak{G}^0_\Omega$, $\mathfrak{G}_\Omega$, $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega$ et $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ ne dépendent que de Ω en tant que partie de $\mathscr{I}$ et non du choix de l'appartement* A *contenant* Ω.

Il en est de même des morphismes $i^0_{\Omega,\Omega'}$, etc.

Il s'ensuit que l'on peut définir les schémas $\mathfrak{G}^0_\Omega$, etc. pour toute partie bornée Ω de l'immeuble $\mathscr{I}$ telle qu'il existe un appartement contenant Ω, et notamment les schémas $\mathfrak{G}^0_x$, ... pour tout $x \in \mathscr{I}$ (sous la condition (Sch) dans le cas dense).

4.6.31. Proposition. — *Supposons $\overline{K}$ séparablement clos et soit $\mathfrak{H}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) La fibre fermée $\overline{\mathfrak{H}}$ est réductive;

b) La fibre fermée $\overline{\mathfrak{H}}$ est réductive connexe;

c) G *est déployé sur* K *et il existe un point spécial* (2) $x \in \mathscr{I}$ *tel que* $\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G}^0_x$;

d) G *est déployé sur* K *et $\mathfrak{H}$ est un schéma de Chevalley.*

---

(1) Pour un meilleur résultat, voir 5.1.39.

(2) *I.e.* un point de $\mathscr{I}$ qui est spécial dans un appartement le contenant, et l'est alors dans tout appartement le contenant.

On a vu (cf. la démonstration de 4.6.15) que *c)* et *d)* sont équivalentes (même si $\overline{K}$ n'est pas séparablement clos) et entraînent *b)* donc *a)*. Il suffit de montrer que *b)* entraîne *d)*, car on saura alors que *a)* entraîne que $\mathfrak{H}^0$ est un schéma de Chevalley, d'où $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0$ (4.6.22). Or, soit $\mathcal{O}'$ l'hensélisé de $\mathcal{O}$, qui est strictement hensélien. D'après [SGAD], Exp. XIX, 6.1, $\mathfrak{H}_{\mathcal{O}'}$ possède un sous-schéma dont les fibres sont des tores maximaux déployés. Donc, G est déployé sur $K' = {}^hK$, et, comme le changement de base $K \to {}^hK$ est conservateur, G est déployé sur K. De plus, le théorème d'unicité de Demazure ([SGAD], Exp. XXIII, cor. 5.2) entraîne que $\mathfrak{H}_{\mathcal{O}'}$ est un schéma de Chevalley. Il existe donc un point spécial x de l'immeuble $\mathscr{I}'$ de $G_{K'}$ tel que l'identité de G se prolonge en un $\mathcal{O}'$-morphisme de $\mathfrak{H}_{\mathcal{O}'}$ sur $\mathfrak{G}'^0_x$. Mais on a vu que l'injection canonique de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{I}'$ est surjective (4.2.25). Donc, x est un point spécial de $\mathscr{I}$ et $\mathfrak{G}'^0_x = (\mathfrak{G}^0_x)_{\mathcal{O}'}$. Il ne reste qu'à invoquer 1.2.4 pour conclure que $\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G}^0_x$.

4.6.32. Proposition. — *Supposons* ω *discrète et* G *simplement connexe. Si* Ω *est contenue dans une facette* F *de* A, *alors* $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega = \mathfrak{G}^0_\Omega = \mathfrak{G}_\Omega = \hat{\mathfrak{G}}_\Omega$ *et* $\mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O})$ *est à la fois le fixateur et le stabilisateur de* Ω *dans* G.

En effet, d'une part $\mathfrak{T}$ est connexe et $G = G^1$, d'où $H^0 = H^1 = H$; d'autre part, $W = \nu(N)$ est le groupe de Weyl affine de A (4.2.22) et il résulte des propriétés bien connues des groupes de Weyl affines (cf. [NB] Lie V, § 3, prop. 1) que $W^\dagger_\Omega = \hat{W}_\Omega = W_\Omega$, d'où $N^\dagger_\Omega = \hat{N}_\Omega = N^0_\Omega$.

4.6.33. Théorème. — *Supposons* ω *discrète. Soit* F *une facette de* $\mathscr{I}$ *et soit* $\mathscr{I}(F)$ *l'étoile de* F *dans le complexe polysimplicial* $\mathscr{I}$, *c'est-à-dire l'ensemble des facettes* F′ *de* $\mathscr{I}$ *telles que* $F \subset \overline{F}'$, *ordonnée par la relation* $F' \subset \overline{F}''$.

(i) *L'application* $F' \mapsto p(F') = \operatorname{Im} \bar{i}^0_{F,F'}$ *est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de* $\mathscr{I}(F)$ *sur l'ensemble des* $\overline{K}$*-sous-groupes pseudo-paraboliques de* $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ *ordonné par la relation opposée à l'inclusion* (1).

(ii) $p(F')(\overline{K})$ *est le produit de l'image canonique de* $\mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$ *par* $\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$.

(iii) *L'image réciproque de* $p(F')(\overline{K})$ *dans* $\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$ *est égale à* $\mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$.

On peut supposer $F \subset A$. Comme les murs de A contenant F sont les hyperplans $\{a(x - \varphi) + f_F(a) = 0\}$ pour $a \in \Phi_F$, il existe une chambre C de A et une seule telle que $F \subset \overline{C}$ et que $C \subset \{a(x - \varphi) + f_F(a) > 0\}$ pour tout $a \in \Phi^+_F = \Phi^+ \cap \Phi_F$. Soit B la base de Φ_F correspondant au système de racines positives Φ^+_F. Pour $J \subset B$, notons Φ_J l'ensemble des $a \in \Phi_F$ qui sont combinaisons linéaires d'éléments de J et F_J la facette de A caractérisée par les relations $F \subset \overline{F}_J \subset \overline{C}$ et $J = \{a \in B \mid f_{F_J}(a) = f_F(a)\}$.

L'application $J \mapsto F_J$ est une bijection de $\mathscr{P}(B)$ sur l'ensemble des facettes F′ telles que $F \subset \overline{F}' \subset \overline{C}$, et l'on a $\Phi_{F_J} = \Phi_J$.

---

(1) Rappelons que si $\overline{K}$ est parfait, les sous-groupes pseudo-paraboliques ne sont autres que les sous-groupes paraboliques.

On a $f_F \leqq f_{F_J}$ et f_{F_J} est inférieure à l'optimisée de f_F^*. Il résulte alors de 4.6.10 que *l'image* $p(F_J)$ *de* $\bar{i}^0_{F,F_J}$ *contient le radical unipotent déployé* R *de* $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$. Elle contient aussi $\overline{\mathfrak{T}}^0$ et, vu 4.6.5, son image dans le quotient quasi-réductif $\overline{\mathfrak{G}}^0_F/R$ est engendrée par l'image de $\overline{\mathfrak{T}}^0$ et les sous-groupes radiciels de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F/R$ correspondants à $\Phi_F^+ \cup \Phi_J$. Il est alors immédiat que $p(F_J)$ *est le* $\overline{K}$*-sous-groupe pseudo-parabolique standard associé à* J (1.1.14).

De plus, d'une part toute facette $F' \in \mathscr{I}(F)$ est transformée d'une facette F_J par un élément de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\mathcal{O})$ (car $\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$ permute transitivement les appartements contenant F (4.6.28) et W^0_F permute transitivement les chambres de A contenant F dans leur adhérence), d'autre part tout $\overline{K}$-sous-groupe pseudo-parabolique de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ est conjugué d'un $p(F_J)$ par un élément de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\overline{K})$ image d'un élément de $\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$ (cela résulte de 1.1.14, compte tenu de 4.6.7 (ii)). Donc *p est une application surjective de* $\mathscr{I}(F)$ *sur l'ensemble des* $\overline{K}$*-sous-groupes pseudo-paraboliques de* $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$.

Démontrons (ii). Supposons tout d'abord $F' = C$. On a $p(C) = \overline{\mathfrak{U}}^+_F . \overline{\mathfrak{T}}^0 . R$ et l'application produit est un isomorphisme de variétés de $\overline{\mathfrak{U}}^+_F \times (\overline{\mathfrak{U}}^-_F \cap R) \times \overline{\mathfrak{T}}^0$ sur $p(C)$. Or $\mathfrak{U}^+_F = \mathfrak{U}^+_C$, $\overline{\mathfrak{U}}^-_F \cap R = \overline{\mathfrak{U}}^-_{(f^*_F)'}$ et $f_C \leqq (f^*_F)'$ d'où (iii) lorsque $F' = C$. Si maintenant $F' = F_J$, on a $p(F_J)(\overline{K}) = p(C)(\overline{K}) . N_J . p(C)(\overline{K})$, où N_J est le sous-groupe du normalisateur de $\overline{\mathfrak{S}}$ dans $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\overline{K})$ image réciproque du sous-groupe de W_F engendré par les réflexions par rapport aux éléments de J. Mais N_J est égal au produit de $\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$ par l'image de $N^0_{F_J}$, d'où (ii) lorsque $F' = F_J$. Le cas général en résulte par conjugaison.

Démontrons (iii). Il résulte de 4.6.8 que le noyau de l'application canonique de $\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$ dans $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\overline{K})$ est contenu dans $\mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$. Compte tenu de (ii), il suffit donc de montrer que, si l'image canonique $\bar{x}$ dans $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\overline{K})$ d'un élément x de $\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$ appartient à $\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$, alors $\bar{x}$ est aussi l'image canonique d'un élément de $\mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$. Or, on a $x = uvn$, avec $u \in U^+_F$, $v \in U^-_F$ et $n \in N^0_F$ (4.6.7 (i)). Considérons l'application canonique q de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ sur son quotient quasi-réductif $\overline{\mathfrak{G}}^0_F/R$. On a $q(\bar{v})\, q(\bar{n}) = q(\bar{u})^{-1}\, q(\bar{x})$ et il résulte donc de la décomposition de Bruhat de $(\overline{\mathfrak{G}}^0_F/R)(\overline{K})$ que $q(\bar{n}) = q(\bar{x})$ (et que $q(\bar{u}) = q(\bar{v}) = 1$). Par suite, $q(\bar{n})$ centralise $q(\overline{\mathfrak{S}})$. Comme le groupe de Weyl de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F/R$ est $W_F = N^0_F/H^0$ (1.1.13 et 4.6.13), on en déduit que $n \in H^0 = \mathfrak{T}^0(\mathcal{O})$. Mais l'application produit de $\mathfrak{U}^+_F \times \mathfrak{U}^-_F \times \mathfrak{T}^0$ dans $\mathfrak{G}^0_F$ est injective, donc la relation $\bar{x} = \bar{u}.\bar{v}.\bar{n}$ entraîne $\bar{x} = \bar{n}$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ est bien l'image d'un élément de $\mathfrak{T}^0(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$.

Enfin, (iii) entraîne que p est *injective*, ce qui achève la démonstration de (i) et du théorème.

4.6.34. Corollaire. — *Soit de plus* Y *un sous-groupe de* $N^\dagger_F/N^0_F$. *Pour toute facette* $F' \in \mathscr{I}(F)$, *le normalisateur de* $p(F')$ *dans* $Y\mathfrak{G}^0_F(\overline{K})$ *est le produit par* $\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$ *de l'image de* $Y'\mathfrak{G}^0_{F'}(\mathcal{O})$, *où* $Y' = (YN^0_F \cap N^\dagger_{F'})/N^0_{F'}$, *et* $Y'\mathfrak{E}^0_{F'}(\mathcal{O})$ *en est l'image réciproque dans* $Y\mathfrak{G}^0_F(\mathcal{O})$.

Soit $x \in Y\mathfrak{G}^0(\overline{K})$ normalisant $p(F_J)$. Les deux tores $\overline{K}$-déployés maximaux $\overline{\mathfrak{S}}$ et $x\overline{\mathfrak{S}}x^{-1}$ de $p(F_J)$ sont conjugués par un élément $y \in p(F_J)(\overline{K})$ ([7]) et vu l'assertion (ii) du théorème, on peut prendre y dans l'image de $\mathfrak{G}^0_{F_J}(\mathcal{O})$. On est donc ramené au cas où x normalise $\overline{\mathfrak{S}}$. Mais alors $x \in YN^0_F . \overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K})$, d'où résulte aisément le corollaire.

4.6.35. — L'application $p \mapsto p(\overline{K})$ est une bijection de l'ensemble des $\overline{K}$-sous-groupes pseudo-paraboliques de $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques du système de Tits associé à la donnée radicielle de $\overline{\mathfrak{G}}_F^0(\overline{K})$ (1.1.14). Le théorème précédent montre que, si l'on munit l'étoile $\mathscr{I}(F)$ de la facette F d'une structure de complexe simplicial abstrait en prenant comme relation de face la relation $F' \subset \overline{F}''$, *l'application* $F' \mapsto p(F')(\overline{K})$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{I}(F)$ *sur l'immeuble combinatoire* $\mathscr{I}_F$ *de ce système de Tits* ([37]), compatible avec les actions de $\mathfrak{G}_F^0(\mathcal{O})$ sur $\mathscr{I}(F)$ et de $\overline{\mathfrak{G}}_F^0(\overline{K})$ sur $\mathscr{I}_F$. De plus, à l'ensemble des facettes $F' \in \mathscr{I}(F)$ contenues dans l'appartement A correspond l'ensemble des $\overline{K}$-sous-groupes pseudo-paraboliques contenant $\overline{\mathfrak{S}}$, donc formant un appartement de $\mathscr{I}_F$. Par conjugaison, on voit que *les images réciproques des appartements de* $\mathscr{I}_F$ *sont les ensembles de facettes de* $\mathscr{I}(F)$ *contenues dans un même appartement de* $\mathscr{I}$.

4.6.36. — Lorsque ω est *dense*, le théorème 4.6.33 n'est évidemment plus valable, ne serait-ce que parce que les facettes F sont alors des germes de parties (I, 7.2) et que les schémas $\mathfrak{G}_F$ n'existent pas en général. On va cependant en donner un substitut. *Jusqu'à la fin de* 4.6, *nous supposons* ω *dense* et le lecteur qui ne s'intéresse qu'au cas des valuations discrètes peut passer directement au paragraphe suivant.

Par hypothèse, l'extension $\widetilde{K}$ de K est non ramifiée (1.6.1 *c)*). Par suite, $\Gamma'_a = \omega(K^\times) = \Gamma$ pour tout $a \in \Phi$, sauf lorsque $2a \in \Phi$, cas où $\Gamma'_a = \gamma_a + \Gamma$, avec γ_a défini comme en 4.3.5. On a $2\gamma_a \in \Gamma$. Si a et b sont multipliables et appartiennent à la même composante irréductible de Φ, alors $\gamma_a = \gamma_b$ (4.1.17). Si a, b et $a + b \in \Phi$, on a

$$\Gamma'_a + \Gamma'_b = \Gamma'_{a+b}. \tag{1}$$

En effet, si a est non multipliable, alors b et $a + b$ sont simultanément multipliables ou non multipliables et dans le premier cas on a $\gamma_{a+b} = \gamma_b$; si a est multipliable et si b est non multipliable (resp. multipliable), alors $a + b$ est multipliable (resp. non multipliable) et $\gamma_a = \gamma_{a+b}$ (resp. $\gamma_a = \gamma_b$).

Il en résulte que pour toute partie Ω de A, le système de racines Φ_Ω, qui est l'ensemble des $a \in \Phi$ pour lesquelles il existe $k \in \Gamma'_a$ avec $\Omega \subset \{x \in A \mid a(x - \varphi) + k = 0\}$, est un sous-système *clos* de Φ.

D'autre part, si F est une facette de A, et $a \in \Phi$, on note $f_F(a)$ la borne inférieure *dans l'ensemble ordonné* $\widetilde{\mathbf{R}}$ des $f_\Omega(a)$ pour Ω décrivant le filtre F (I, 7.2.1 et 6). On obtient ainsi une fonction *concave* $f_F : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$. Le système de racines $\Phi_F = \Phi_{f_F}$ associé est l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $f_F(a) \in \Gamma'_a$ et que $f_F(a) + f_F(-a) = 0$.

4.6.37. Lemme. — *Soit* X *une partie bornée (quelconque) de* A, *ou une facette de* A, *et soit* Ψ_X *l'ensemble des* $a \in \Phi$ *telles que* $f_X(a) \in \Gamma'_a$. *Soit* Ξ *le groupe des automorphismes affines de* A *conservant* Φ *et le système de racines affines de* A *et stabilisant* X. *Il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* ε *avec* $0 < \varepsilon < \eta$, *on puisse trouver une fonction concave* $f : \Phi \to \mathbf{R}$ *satisfaisant à* (Sch) *et aux relations suivantes* :

a) $u.f = f$ *pour tout* $u \in \Xi$;

b) $f(a) = f_X(a)$ *pour toute* $a \in \Psi_X$;

c) $f_X(a) + \frac{1}{2}\varepsilon < f(a) < f_X(a) + \varepsilon$ *pour toute* $a \in \Phi - \Psi_X$;

d) $\Phi_f = \Phi_X$.

Une telle fonction f est appelée un *ε-épaississement* de X.

Soient $u \in \Xi$ et $a \in \Phi$. Posons $b = {}^t({}^v u)(a)$. Si $k \in \Gamma'_a$, le transformé par u^{-1} de la racine affine $\{x \in A \mid a(x - \varphi) + k \geqq 0\}$ est le demi-espace fermé

$$\{x \in A \mid b(x - \varphi) + a(u(\varphi) - \varphi) + k \geqq 0\},$$

qui est donc aussi une racine affine. Il s'ensuit que

(1) $$a(u(\varphi) - \varphi) \in \Gamma'_b - \Gamma'_a \quad \text{pour } a \in \varphi,\ u \in \Xi \text{ et } b = {}^t({}^v u)(a).$$

D'autre part, vu 4.6.17 (1 *bis*) (généralisé aux fonctions à valeurs dans $\tilde{\mathbf{R}}$), on a

(2) $$u.f_X(a) = f_X(b) - a(u(\varphi) - \varphi),$$

et par transport de structure ou par calcul explicite, on voit que

(3) $$u.f_X = f_X \quad \text{pour tout } u \in \Xi.$$

De (1), (2) et (3) résulte aussitôt que

(4) $${}^t({}^v u)(\Psi_X) = \Psi_X \quad \text{et} \quad {}^t({}^v u)(\Phi_X) = \Phi_X.$$

Démontrons alors le lemme *lorsque* X *est la partie réduite à un point x de* A. Dans ce cas, la fonction f_X est la fonction *linéaire* $f_x : a \mapsto -a(x - \varphi)$, donc Ψ_x coïncide avec Φ_x et est un sous-système *clos* de Φ. De plus, soient $a \in \Phi$, $b \in \Psi_x$ telles que $a + b \in \Phi$ et soit $h \in \mathbf{R}$. Vu 4.6.36 (1) et la linéarité de f_x,

(5) $$f_x(a) + h \in \Gamma'_a \quad \text{équivaut à } f_x(a + b) + h \in \Gamma'_{a+b}.$$

De même, si $a \in \Phi$, $u \in \Xi$ et $h \in \mathbf{R}$, (1), (2) et (3) entraînent que

(6) $$f_x(a) + h \in \Gamma'_a \quad \text{équivaut à } f_x(b) + h \in \Gamma'_b \quad \text{avec } b = {}^t({}^v u)(a).$$

Considérons alors la plus petite relation d'équivalence $\sim$ sur Φ telle que ${}^t({}^v u)(a) \sim a$ pour $a \in \Phi$, $u \in \Xi$ et que $a + b \sim b$ dès que $a \in \Psi_x$, $b, a + b \in \Phi$. Comme Ψ_x est clos et stable par Ξ, c'est une réunion de classes d'équivalence suivant $\sim$. On voit alors, grâce à (5) et (6), que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir une famille $(\varepsilon_a)_{a \in \Phi}$ de nombres réels possédant les propriétés suivantes :

(7) ε_a est constante sur les classes d'équivalence suivant $\sim$;

(8) $$f_x(a) + \varepsilon_a \in \Gamma'_a \quad \text{pour tout } a \in \Phi;$$

(9) $$\varepsilon_a = 0 \quad \text{pour tout } a \in \Psi_x;$$

(10) $$\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon_a < \varepsilon \quad \text{pour } a \in \Phi - \Psi_x.$$

La fonction f définie par $f(a) = f_x(a) + \varepsilon_a$ *pour* $a \in \Phi$ *est alors un ε-épaississement de* $\{x\}$. En effet, il est clair que f satisfait à (Sch), que $u.f = f$ pour tout $u \in \Xi$, que $f(a) = f_x(a)$

pour $a \in \Psi_x$ et que $f_x(a) + \frac{1}{2}\varepsilon < f(a) < f_x(a) + \varepsilon$ pour $a \in \Phi - \Psi_x$, d'où aussi $\Phi_f = \Phi_x$. Reste à montrer que f est *concave*. On a évidemment $f(a) + f(-a) \geqq f_x(a) + f_x(-a) \geqq 0$ pour tout $a \in \Phi$. Soient $a, b \in \Phi$ telles que $a + b \in \Phi$; on a

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + \varepsilon_{a+b} - \varepsilon_a - \varepsilon_b$$

et il suffit de montrer que $\varepsilon_{a+b} \geqq \varepsilon_a + \varepsilon_b$. Or, si $a, b \in \Psi_x$, alors $a + b \in \Psi_x$ (qui est clos) et $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b} = 0$. Si $a \in \Psi_x$ et $b \notin \Psi_x$, alors $\varepsilon_a = 0$ et $\varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ d'après (7). Enfin, si ni a ni b n'appartiennent à Ψ_x, on a $\varepsilon_a + \varepsilon_b > \varepsilon > \varepsilon_{a+b}$ d'après (10) et (9). Par suite, f est bien concave et le lemme est démontré dans le cas $X = \{x\}$.

Supposons maintenant que X soit une *facette* F de A. Soient x le centre de F, D sa direction (I, 7.2.4 et 5) et Φ_D^- l'ensemble des $a \in \Phi$ strictement négatives sur D. On a $\Phi_D^- \subset \Phi_x = \Psi_x$ et, d'après I, 7.2.6,

$$f_F(a) = \begin{cases} f_x(a) & \text{si } a \notin \Phi_D^-, \\ f_x(a) + & \text{si } a \in \Phi_D^-, \end{cases}$$

d'où $\Psi_F = \Phi_x - \Phi_D^-$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un ε-épaississement g de x et un nombre réel $\varepsilon' \in \Gamma$ tel que $\varepsilon' < \varepsilon$ et que $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon' < \inf\{g(a) - f_x(a) \mid a \in \Phi - \Psi_x\}$. Posons $h(a) = f_x(a)$ si $a \notin \Phi_D^-$ et $h(a) = f_x(a) + \varepsilon'$ si $a \in \Phi_D^-$. Comme Φ_D^- est clos et f_x linéaire, la fonction $h : \Phi \to \mathbf{R}$ est concave. Enfin, posons $f = \sup(g, h)$, c'est-à-dire $f(a) = g(a)$ si $a \notin \Phi_D^-$ et $f(a) = f_x(a) + \varepsilon'$ si $a \in \Phi_D^-$. Alors, f est concave, satisfait à (Sch), est invariante par tout $u \in \Xi$ (car ${}^v u(D) = D$ puisque u stabilise F, d'où ${}^t({}^v u)(\Phi_D^-) = \Phi_D^-$), et $f(a) = g(a) = f_x(a) = f_F(a)$ pour tout $a \in \Psi_F = \Phi_x - \Phi_D^-$. Si $a \in \Phi - \Phi_x$, on a

$$f_F(a) + \frac{1}{2}\varepsilon = f_x(a) + \frac{1}{2}\varepsilon < g(a) = f(a) < f_x(a) + \varepsilon = f_F(a) + \varepsilon,$$

et, si $a \in \Phi_D^-$,

$$f_F(a) + \frac{1}{2}\varepsilon = (f_x(a) + \frac{1}{2}\varepsilon) + < f_x(a) + \varepsilon' = f(a) < f_x(a) + \varepsilon < f_F(a) + \varepsilon,$$

ce qui achève de montrer que f est un ε-épaississement de F.

Remarquons que dans ces deux premiers cas on peut prendre η arbitraire.

Enfin, supposons que X soit une partie bornée Ω de A. On peut supposer Ω close : c'est alors un polyèdre convexe fermé et l'ensemble Y de ses points extrémaux est fini. On a $f_\Omega = \sup_{y \in Y} f_y$. Pour $a \in \Phi$, notons Y_a l'ensemble des $y \in Y$ tels que $f_\Omega(a) = f_y(a)$ et posons $\eta = \inf\{f_\Omega(a) - f_y(a) \mid a \in \Phi$ et $y \in Y - Y_a\}$. Alors $\eta > 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}$ avec $0 < \varepsilon < \eta$ et choisissons pour chaque $y \in Y$ un ε-épaississement g_y de y de telle sorte que si $u \in \Xi$ l'on ait $u.g_y = g_{u(y)}$, ce qui est évidemment possible puisque $u(Y) = Y$ et que, pour $y \in Y$, chaque ε-épaississement de $\{y\}$ est invariant par le stabilisateur de y dans Ξ. Posons $f = \sup_{y \in Y} g_y$ et montrons que f est un ε-épaississement de Ω. La fonction f

est concave, satisfait à (Sch) et est invariante par tout $u \in \Xi$. Soit $a \in \Phi$; comme $\varepsilon < \eta$, on a

(11) $\qquad g_y(a) < f_y(a) + \varepsilon < f_\Omega(a) \quad$ pour tout $y \in Y - Y_a$.

Soit $y \in Y_a$. Si $a \in \Psi_\Omega$, alors $a \in \Psi_y$ et $g_y(a) = f_y(a) = f_\Omega(a)$, d'où

(12) $\qquad f(a) = f_\Omega(a) \quad$ pour $a \in \Psi_\Omega$.

Si $a \notin \Psi_\Omega$, alors $a \notin \Psi_y$, on a $f_y(a) + \frac{1}{2}\varepsilon < g_y(a) < f_y(a) + \varepsilon$, ce qui, joint à (11), donne

(13) $\qquad f_\Omega(a) + \frac{1}{2}\varepsilon < f(a) < f_\Omega(a) + \varepsilon \quad$ pour $a \in \Phi - \Psi_\Omega$.

Enfin, (12) et (13) entraînent que $\Phi_f = \Phi_\Omega$, ce qui achève la démonstration du lemme.

4.6.38. Remarques. — 1) Si Ω est une partie de A et si f_Ω satisfait à (Sch), tout épaississement de Ω est égal à f_Ω.

2) Soient Ω et Ω' deux parties bornées de A telles que $\Omega \subset \bar{\Omega}'$, d'où $f_\Omega \leqq f_{\Omega'}$. Soit δ le plus petit de ceux des nombres $f_{\Omega'}(a) - f_\Omega(a)$ qui sont strictement positifs. Alors on voit aisément que tout ε-épaississement f de Ω avec $\varepsilon < \delta$ est inférieur à tout 2ε-épaississement f' de Ω'.

De même, si F et F' sont deux facettes de A telles que $F \subset \bar{F}'$ (ce qui entraîne que F et F' ont même centre et que $D \subset \bar{D}'$, d'où $\Phi_D^- \subset \Phi_{D'}^-$), alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout ε-épaississement f de F est inférieur à tout 2ε-épaississement f' de F'.

Dans chacun de ces deux cas, on obtient donc un morphisme $i^0_{f,f'}$ de $\mathfrak{G}^0_{f'}$ dans $\mathfrak{G}^0_f$ (4.6.24).

4.6.39. — Il est clair que la famille $E = E(X)$ des épaississements de X est filtrante décroissante : si $2\varepsilon < \varepsilon'$, un ε-épaississement est inférieur à un ε'-épaississement. On en déduit donc un *système inductif filtrant croissant de schémas* $((\mathfrak{G}^0_f)_{f\in E}, (i^0_{f,g})_{f,g\in E, f\leqq g})$, dont nous nous garderons de considérer la limite inductive.

Soit $f \in E$; on a $\Phi_f = \Phi_X$ (4.6.37 *d)*), d'où $W_f = W_X$ et $N^0_f = N^0_X$, et f est invariante par tout $u \in N^\dagger_X$ (4.6.37 *a)*), d'où $N^\dagger_f \supset N^\dagger_X$. Soit alors Y un sous-groupe de $N^\dagger_X/N^0_X \subset N^\dagger_f/N^0_f$; les schémas $Y\mathfrak{G}^0_f$ forment eux aussi un système inductif filtrant croissant. Si X est une partie close ou une facette, on montre aisément que $N^\dagger_X = N^\dagger_f$ pour tout ε-épaississement f avec ε assez petit, d'où également un système inductif filtrant croissant de schémas $\mathfrak{G}^\dagger_f$.

Notons P^Y_X le sous-groupe engendré par U_X (ou encore par les $U_{a,f_X(a)}$ pour $a \in \Phi$) et l'image réciproque de Y dans $N^\dagger_X$. Si $Y = N^\dagger_X/N^0_X$ (resp. $\hat{N}^1_X/N^0_X$), alors P^Y_X est le stabilisateur $P^\dagger_X$ (resp. le fixateur $\hat{P}^1_X$) de X dans G^1 (I, 7.4.4); si $Y = \{1\}$, alors P^Y_X est le sous-groupe $U_X H^0$, que nous notons P^0_X et appelons le *fixateur connexe* de X (cf. 4.6.28).

4.6.40. Proposition. — (i) *Le groupe* U_X *est réunion filtrante croissante des* U_f *pour* $f \in E(X)$.

(ii) *Pour tout sous-groupe* Y *de* $N_X^\dagger/N_X^0$, *le groupe* P_X^Y *est réunion croissante des sous-groupes* $Y\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ *pour* $f \in E(X)$. *En particulier, le fixateur connexe* P_X^0 *est réunion filtrante croissante des* $\mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ *pour* $f \in E(X)$.

Il est immédiat que (i) entraîne (ii). Pour prouver (i), il suffit de montrer que, pour tout $a \in \Phi$, le groupe $U_{f_X,a}$ est réunion des $U_{f,a}$ pour $f \in E$, ce qui est évident puisque $f_X(a)$ (resp. $f_X(2a)$) est la borne inférieure dans $\tilde{\mathbf{R}}$ des $f(a)$ (resp. $f(2a)$) pour $f \in E$.

4.6.41. — Soit f (resp. g) un ε-épaississement (resp. un ε'-épaississement) de X, avec $2\varepsilon' < \varepsilon$, d'où $g \leqq f$, et considérons le morphisme $h = i_{g,f}^0$ de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_g^0$. On voit aisément que h est l'identité sur $\overline{\mathfrak{T}}^0$ et que les restrictions $h_a : \overline{\mathfrak{U}}_{f,a} \to \overline{\mathfrak{U}}_{g,a}$ pour $a \in \Phi$ sont données par les règles suivantes :

— si $a \cap \Phi \subset \Psi_X$, alors h_a est l'identité;
— si $a \cap \Psi_X = \emptyset$, alors h_a est le morphisme trivial;
— reste le cas où a est pluriel, $a \notin \Psi_X$ et $2a \in \Psi_X$ (notons que si $a \in \Psi_X$, alors $2a \in \Psi_X$ puisque l'extension $L_a \supset L_{2a}$ est non ramifiée). On a alors

$$f(2a) = f_X(2a) = 2f_X(a) < 2f(a) - \varepsilon$$

et l'on vérifie sans peine que le groupe $\overline{\mathfrak{U}}_{f,a}$ est produit direct de $\overline{\mathfrak{U}}_{2a,f(2a)} \simeq \Pi_{\bar{L}_{2a}/\bar{K}} \mathfrak{Abb}$ par l'image canonique de $\overline{\mathfrak{U}}_{a,(f(a),2f(a))}$, image qui est isomorphe à $\Pi_{\bar{L}_a/\bar{K}} \mathfrak{Abb}$ et sur laquelle $\overline{\mathfrak{S}}$ opère par la racine a. De plus h_a est l'identité sur $\overline{\mathfrak{U}}_{2a,f(2a)}$ et est trivial sur l'image de $\overline{\mathfrak{U}}_{a,(f(a),2f(a))}$.

En considérant les « grosses cellules » $\overline{\mathfrak{C}}_f^0$ et $\overline{\mathfrak{C}}_g^0$, on voit que h est séparable et que l'application produit est un isomorphisme de variétés du produit des Ker h_a pour $a \in \Phi$ sur le noyau $Q_{g,f}$ de h.

Il en résulte que $\Phi - \Psi_X$ est *clos dans* $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ (au sens de [7], ou quasi-clos au sens de [4] généralisé au cas non réductif) et que $Q_{g,f}$ est le sous-groupe unipotent déployé $(\overline{\mathfrak{G}}_f^0)_{(\Phi-\Psi_X)}$ associé à $\Phi - \Psi_X$ (*loc. cit.* ou 1.1.6). Il est donc indépendant du choix de g; on peut le noter Q_f. La détermination des h_a donnée ci-dessus montre que $h(Q_f) \subset Q_g$ et qu'on obtient par passage aux quotients un *isomorphisme* de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/Q_f$ sur $\overline{\mathfrak{G}}_g^0/Q_g$ (rappelons que f est un ε-épaississement de X et g un ε'-épaississement de X, avec $2\varepsilon' < \varepsilon$).

Autrement dit, du système inductif des $\mathfrak{G}_f^0$ pour $f \in E$, on déduit par passage aux fibres fermées, par restriction à un système cofinal convenable et par passage aux quotients par les noyaux des morphismes de transition, un système inductif trivial de groupes algébriques $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/Q_f$; ce système admet évidemment une limite inductive que nous notons $\overline{\mathfrak{G}}_X^0$, isomorphe à tous les $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/Q_f$, et que nous appelons le $\bar{K}$-*groupe algébrique connexe attaché à* X. Vu 4.6.39, les applications canoniques des $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_X^0$ définissent une application dite *canonique* de P_X^0 dans $\overline{\mathfrak{G}}_X^0(\bar{K})$ et l'on a $\overline{\mathfrak{G}}_X^0(\bar{K}) = \mathrm{Im}\, P_X^0.\overline{\mathfrak{T}}^0(\bar{K})$ (4.6.7).

Notons qu'il résulte aussi directement de 4.6.25 que les quotients quasi-réductifs

${}^{q}\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ sont isomorphes et s'identifient naturellement à ${}^{q}\overline{\mathfrak{G}}_X^0$. Leur système de racines est Φ_X et 4.6.12 se généralise aussitôt.

Les mêmes considérations appliquées au système inductif des $\hat{\mathfrak{G}}_f$ (resp. des $\mathfrak{G}_f^\dagger$) permettent de définir le $\overline{K}$-groupe algébrique $\overline{\hat{\mathfrak{G}}}_X$ (resp. $\overline{\mathfrak{G}}_X^\dagger$).

4.6.42. Proposition. — *Soit σ un automorphisme de K conservant ω et soit j un σ-automorphisme de G. Notons encore j l'automorphisme correspondant de l'immeuble $\mathscr{I}$ (4.2.12). Soit X comme en 4.6.37 et supposons que $j(X) = X$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ε-épaississement f de X avec $\varepsilon < \delta$, l'automorphisme j de G se prolonge en un σ-automorphisme du $\mathcal{O}$-schéma $\mathfrak{G}_f^0$ (resp. $\hat{\mathfrak{G}}_f$, $\mathfrak{G}_f^\dagger$).*

D'après I, 7.4.9, il existe $g \in U_X$ tel que $j(A) = g.A$. L'application $x \mapsto g^{-1}.j(x)$ conserve A et y induit un élément $u \in \Xi$ (4.6.37) qui conserve tout épaississement f de X. Par transport de structure, il en résulte que le σ-automorphisme $y \mapsto g^{-1}j(y)\,g$ de G se prolonge en un σ-automorphisme de $\mathfrak{G}_f^0$ (resp. $\hat{\mathfrak{G}}_f$, $\mathfrak{G}_f^\dagger$). D'autre part, 4.6.40 entraîne qu'il existe $\delta > 0$ et un 2δ-épaississement f_0 de X tel que $g \in U_{f_0}$. Mais alors $g \in U_f \subset \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O})$ pour tout ε-épaississement f de X avec $\varepsilon < \delta$, d'où la proposition.

4.6.43. Corollaire. — *Le $\overline{K}$-groupe algébrique $\overline{\mathfrak{G}}_X^0$ (resp. $\overline{\hat{\mathfrak{G}}}_X$, $\overline{\mathfrak{G}}_X^\dagger$) attaché à X ne dépend que de X comme partie de l'immeuble $\mathscr{I}$ et non de l'appartement A choisi pour le construire.*

Plus précisément, si A′ est un autre appartement contenant X, les systèmes inductifs de schémas associés aux épaississements de X dans A et dans A′ respectivement sont cofinaux.

4.6.44. — Si $X \subset \overline{X}'$, la remarque 4.6.38 (2) fournit un $\overline{K}$-homomorphisme dit *canonique* et noté $\bar{\imath}^0_{X,X'}$ de $\overline{\mathfrak{G}}_{X'}^0$ dans $\overline{\mathfrak{E}}_X^0$, qui est compatible avec l'application d'inclusion $P_{X'}^0 \to P_X^0$.

4.6.45. Proposition. — *Quitte à y remplacer $\mathfrak{G}_F^0(\mathcal{O})$ par P_F^0, le théorème 4.6.33 et les assertions de 4.6.35 restent valables lorsque ω est dense.*

Nous laisserons au lecteur le soin d'adapter les démonstrations données plus haut de ces résultats, ainsi d'ailleurs que l'énoncé et la preuve de 4.6.34.

§ 5. DESCENTE ÉTALE

5.1. Descente de l'immeuble.

On conserve les hypothèses et notations précédentes. Cependant, on désigne par φ un point quelconque de l'appartement A et non plus nécessairement une valuation de Chevalley-Steinberg.

De plus, *on suppose que* K *est strictement hensélien* (c'est-à-dire hensélien à corps résiduel séparablement clos) et l'on donne un sous-corps *hensélien* $K^\natural$ de K, dont K soit une extension étale (autrement dit, K est l'hensélisé strict de $K^\natural$). Alors K (resp. $\overline{K}$) est une extension algébrique galoisienne de $K^\natural$ (resp. du corps résiduel $\overline{K}^\natural$ de $K^\natural$). On note $\mathcal{O}^\natural$ l'anneau de valuation de $K^\natural$ et Σ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/K^\natural)$: il s'identifie canoniquement à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/\overline{K}^\natural)$.

On suppose de plus que le groupe réductif connexe G *est défini sur* $K^\natural$. On note $S^\natural$ un tore $K^\natural$-déployé maximal de G et l'on suppose que le tore K-déployé maximal S de G contient $S^\natural$, ce qui est évidemment loisible (bien entendu, S n'est pas *a priori* défini sur $K^\natural$: voir cependant 5.1.12). On note Z le centralisateur de $S^\natural$ dans G. Pour $a \in \Phi$, on note $a^\natural$ la restriction de a à $S^\natural$. On note Φ_0 l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $a^\natural = 0$ et $\Phi^\natural$ l'ensemble des $a^\natural$ pour $a \in \Phi$ *et* $a^\natural \neq 0$. On sait que $\Phi^\natural$ est le système de racines de G suivant $S^\natural$. Pour $b \in \Phi^\natural$, on note Φ^b l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $a^\natural = b$ ou $2b$ (on prendra garde que cette notation *n'est pas* celle de I, 9.1.1). C'est une partie positivement close de Φ; on note U_b le sous-groupe unipotent associé à Φ^b. Il est défini sur $K^\natural$ et est le sous-groupe radiciel associé à la racine b de G suivant $S^\natural$.

5.1.1. — Inversement, partons d'un corps valué $K^\natural$ hensélien et prenons pour K son hensélisé strict. Soit H un groupe algébrique réductif connexe défini sur $K^\natural$ et prenons $G = H_K$. Alors les hypothèses précédentes sont satisfaites si et seulement si

a) H est quasi-déployé sur K;

b) H est déployé sur une extension admissible de K;

c) le schéma canonique de fibre générique T possède un lissifié.

Si ω est *discrète*, la condition *a)* entraîne *b)* (1.6.1 *f)*) et *c)* (4.6) (rappelons aussi que, lorsque ω est dense, *c)* résulte de *a)* et *b)* dès que H est déployé sur K, ou si H est simplement connexe ou adjoint). Si de plus $\overline{K}^\natural$ est *parfait*, alors *a)* est satisfaite d'après un résultat bien connu de Steinberg ([32] et [3], 8.6). Nous serons amenés plus loin à faire une hypothèse supplémentaire (DE) (5.1.5), mais nous verrons qu'elle est auto-

matiquement satisfaite lorsque ω est discrète. Par suite, *tous les résultats de ce paragraphe sont applicables à n'importe quel groupe réductif connexe défini sur un corps hensélien pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait.*

5.1.2. — Soit $b \in \Phi^{\natural}$; posons $U_b^{\natural} = U_b(K^{\natural})$. On sait que $(Z(K^{\natural}), (U_b^{\natural})_{b \in \Phi^{\natural}})$ est une donnée radicielle génératrice de type $\Phi^{\natural}$ dans $G^{\natural} = G(K^{\natural})$ (I, 6.1.3 *c)*), qui est compatible avec la donnée radicielle $(T(K), (U_a(K)_{a \in \Phi})$ de G(K) au sens de I, § 9. En effet, les *conditions* (DDR 1) *de* 9.1.9 (et même (DDR 1 *bis*) de 9.1.13), (DDR 2) *de* 9.1.10 *et* (DDR 3) *de* 9.2.9 *sont satisfaites* en prenant pour $V^{\natural}$ le sous-espace vectoriel de V défini comme ceci : l'espace V des translations de A est le dual du sous-espace vectoriel V^* engendré par Φ dans $X^*(S) \otimes \mathbf{R}$ (4.1.2), l'application qui à un caractère de S associe sa restriction à $S^{\natural}$ définit une application linéaire surjective u de V^* sur le sous-espace vectoriel $(V^{\natural})^*$ engendré par $\Phi^{\natural}$ dans $X^*(S^{\natural}) \otimes \mathbf{R}$ et $V^{\natural}$ est l'image du dual de $(V^{\natural})^*$ par l'application linéaire injective transposée de u. On identifiera dans la suite chacun des deux espaces $V^{\natural}$ et $(V^{\natural})^*$ au dual de l'autre. On vérifie sans peine que $V^{\natural} = \nu(S^{\natural}(K)) \otimes \mathbf{R}$.

Le but principal de ce paragraphe est de démontrer que, moyennant une condition supplémentaire toujours satisfaite lorsque ω est discrète, on peut choisir S et la valuation $\varphi \in A$ de G(K) de telle sorte que φ se descende à $G^{\natural}$ au sens de I, § 9, et définisse donc une valuation de la donnée radicielle de $G^{\natural}$, d'où un immeuble, etc.

5.1.3. — Soit S_1 un tore $K^{\natural}$-déployé de G contenu dans S et soit Z_1 le centralisateur de S_1. C'est le sous-groupe de G engendré par T et les U_a pour a décrivant le système de racines Φ_1 formé des $a \in \Phi$ nulles sur S_1. Il est défini sur $K^{\natural}$, quasi-déployé sur K, déployé sur $\tilde{K}$ et admet T comme tore maximal. On peut donc le substituer à G dans tous les résultats des paragraphes précédents et considérer en particulier son immeuble $\mathscr{I}(Z_1)$. De plus, on peut lui appliquer les résultats de I, 7.6 (voir aussi 4.2.17 et 18). Posons $\mathscr{I}_{S_1} = Z_1(K).A$: c'est la réunion des appartements de $\mathscr{I}$ associés aux tores K-déployés maximaux de G contenant S_1, puisque ces tores sont les tores K-déployés maximaux de Z_1, ou encore les conjugués de S par les éléments de $Z_1(K)$. On a montré (I, 7.6.4) qu'il existe une application π (notée $\tilde{\pi}$ dans I, 7.6) et une seule de $\mathscr{I}_{S_1}$ sur $\mathscr{I}(Z_1)$ commutant avec les actions de Z(K) et telle que, pour toute valuation $\varphi \in A$, l'image $\pi(\varphi)$ est la valuation de la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi_1})$ de Z_1 obtenue par restriction de φ. De plus *(loc. cit.)* l'image réciproque par π d'un appartement (resp. d'une racine affine) de $\mathscr{I}(Z_1)$ est un appartement (resp. racine affine) de $\mathscr{I}$ et pour tout $x \in A$, l'image réciproque $L_x = \pi^{-1}(\pi(x))$ est un sous-espace affine de A, dont la direction est l'intersection des noyaux des $a \in \Phi_1$. En particulier, L_x est stable par $\nu(S_1(K))$. Si F est une facette de $\mathscr{I}$ contenue dans $\mathscr{I}_{S_1}$, il existe une facette F' de $\mathscr{I}(Z_1)$ telle que $F \subset \pi^{-1}(F')$. Par suite, *si* F_1 *et* F_2 *sont deux facettes de* $\mathscr{I}$ *contenues dans* $\mathscr{I}_{S_1}$, *il existe un appartement* $A' = z.A$ *(avec* $z \in Z_1(K)$*) contenant* $S_1(K).F_1$ *et* $S_1(K).F_2$.

5.1.4. — Le groupe de Galois $\Sigma = \mathrm{Gal}(K/K^{\natural})$ opère sur l'immeuble $\mathscr{I}$ de G (4.2.12). On note $\mathscr{I}_{\natural}$ l'ensemble des points fixes de Σ dans $\mathscr{I}$. C'est une partie convexe de $\mathscr{I}$, stable par $G^{\natural}$: autrement dit, *la condition* (DI 1) *de* I, 9.2.1 *est satisfaite.*

Pour tout appartement A′ *de* $\mathscr{I}$, *il existe un sous-groupe distingué* Σ' *d'indice fini dans* Σ *laissant fixes tous les points de* A′. En effet, le tore K-déployé maximal correspondant à A′ est défini et déployé sur une extension galoisienne finie K_1 de $K^{\natural}$ contenue dans K, le groupe G est quasi-déployé sur K_1 et il suffit de prendre $\Sigma' = \mathrm{Gal}(K/K_1)$ (cf. 4.2.24). En particulier, *l'orbite sous* Σ *de tout point de* I *est finie* et l'image de Σ dans Isom $\mathscr{I}$ est bornée. Il en résulte (I, 3.2, I, 8.2) que si M est une partie convexe de $\mathscr{I}$ stable par Σ, alors Σ possède un point fixe appartenant à l'adhérence de M dans le *complété* $\hat{\mathscr{I}}$ de $\mathscr{I}$. Si ω est *discrète*, $\mathscr{I}$ est complet et ce point appartient à $\mathscr{I}_{\natural}$; prenant $M = \mathscr{I}$, on voit que $\mathscr{I}_{\natural}$ est non vide.

5.1.5. — Bien entendu, Σ opère également sur l'immeuble $\mathscr{I}(Z)$ de Z et l'application canonique de $\mathscr{I}_{S^{\natural}}$ (qui est évidemment invariant par Σ comme réunion des appartements associés aux tores K-déployés maximaux contenant $S^{\natural}$) sur $\mathscr{I}(Z)$ est compatible avec les actions de Σ. De ce qui précède, résulte que *si* ω *est* discrète, *la condition suivante est satisfaite* :

(DE) *Le groupe de Galois* $\Sigma = \mathrm{Gal}(K/K^{\natural})$ *a un point fixe dans l'immeuble* $\mathscr{I}(Z)$ *du centralisateur* Z *de* $S^{\natural}$.

5.1.6. — Lorsque ω est *dense*, nous ignorons si (DE) est toujours satisfaite ou non [1]. Cependant :

Proposition. — *Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaites* :

a) Le complété de $K^{\natural}$ *est maximalement complet*;

b) Il existe une sous-extension galoisienne K_1 *de* K, *de degré* 2^n, *telle que* G *soit quasi-déployé sur* K_1.

Alors, la condition (DE) *est satisfaite.*

Dans le cas *a)*, notons K_1 une sous-extension galoisienne de degré fini de K telle que G soit quasi-déployé sur K_1. Dans les deux cas, la plus petite extension $\tilde{K}_1$ de K_1 déployant G est contenue dans $\tilde{K}$ et est donc une extension univalente de K_1. De même, Z est quasi-déployé sur K_1 et déployé sur $\tilde{K}_1$, ce qui permet de parler de l'immeuble $\mathscr{I}_1(Z)$ de Z_{K_1}. Nous avons vu (4.2.24) que $\mathscr{I}_1(Z)$ s'identifie canoniquement à une partie de $\mathscr{I}(Z)$ formée de points invariants par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/K_1)$ et sur laquelle l'action de Σ sur $\mathscr{I}(Z)$ induit l'action naturelle de $\Sigma_1 = \mathrm{Gal}(K_1/K^{\natural})$.

---

[1] La démonstration d'existence de points fixes du groupe de Galois dans l'immeuble donnée dans [27] est insuffisante, comme nous l'a indiqué G. Rousseau lui-même : le corollaire 1.2.9, p. I.17, sur lequel elle repose, est non démontré et probablement inexact.

Dans le cas *a)*, le complété de K_1 est maximalement complet, comme extension de degré fini d'un corps maximalement complet, et l'immeuble $\mathscr{I}_1(Z)$ est complet (I, 7.5.5), d'où (DE) (cf. 5.1.4).

Dans le cas *b)*, montrons par récurrence sur n que Σ_1 a un point fixe dans $\mathscr{I}_1(Z)$. C'est évident si $n = 0$. Si $n > 0$, Σ_1 possède un sous-groupe distingué Σ_1' d'indice 2. En remplaçant K^h par le corps des invariants de Σ_1' et appliquant l'hypothèse de récurrence, on voit que l'ensemble M des points de $\mathscr{I}_1(Z)$ invariants par Σ_1' est non vide. Mais Σ_1 opère sur M par l'intermédiaire de son quotient Σ_1/Σ_1' d'ordre 2 et si $x \in M$, le milieu du segment joignant x à son transformé par l'élément non trivial de Σ_1/Σ_1' est fixe par Σ_1, c.q.f.d.

5.1.7. — *Désormais, nous supposons la condition* (DE) *satisfaite.* Il en résulte aussitôt que Σ *a un point fixe dans* $\mathscr{I}_{sh}$: si x est un point fixe de Σ dans $\mathscr{I}(Z)$, l'image réciproque $\pi^{-1}(x)$ est un sous-espace affine d'un appartement de $\mathscr{I}$, elle est invariante par Σ et Σ y opère par automorphismes affines par l'intermédiaire d'un quotient fini (5.1.4), donc y possède un point fixe.

5.1.8. — Soit $\mathfrak{G}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique G_K, d'algèbre affine $\mathcal{O}[\mathfrak{G}] \subset K[G] = K \otimes K^h[G]$. Faisons opérer le groupe de Galois Σ de manière naturelle sur K[G] et sur G(K). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{O}[\mathfrak{G}]$ est invariante par Σ;

b) $\mathfrak{G}$ provient par le changement de base $\mathcal{O}^h \to \mathcal{O}$ d'un $\mathcal{O}^h$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}^h$ de fibre générique G.

C'est évident par descente étale : l'algèbre affine $\mathcal{O}^h[\mathfrak{G}^h]$ n'est autre que l'ensemble des points fixes de Σ dans $\mathcal{O}[\mathfrak{G}]$. Notons que si ω est discrète ou plus généralement si $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (ET 1) de 1.7.2, alors $\mathcal{O}[\mathfrak{G}] = \{f \in K[G] \mid f(\mathfrak{G}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}\}$ (puisque $\mathcal{O}$ est strictement hensélien (1.7.6)) et *a)* est équivalente à

c) $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ est invariant par Σ.

5.1.9. — Ceci s'applique en particulier aux schémas $\mathfrak{G}_f$ de 4.6. Notamment, soit Ω une partie bornée d'un appartement de $\mathscr{I}$, satisfaisant lorsque ω est dense à la condition de 4.6.26. Si Ω est invariante par Σ, il résulte de 4.6.30 que $\mathcal{O}[\mathfrak{G}_\Omega^0]$ est invariante par Σ, donc que $\mathfrak{G}_\Omega^0$ provient par changement de base d'un $\mathcal{O}^h$-schéma. Il en est de même des schémas $\mathfrak{G}_\Omega$, $\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega$ et $\mathfrak{G}_\Omega^\dagger$.

En particulier, *si* ω *est discrète, à toute facette* F *de* $\mathscr{I}$ *invariante par* Σ *est canoniquement associé un* $\mathcal{O}^h$*-schéma en groupes lisse connexe* $\mathfrak{G}_F^{0h}$ *de fibre générique* G *tel que* $\mathfrak{G}_F^0 = (\mathfrak{G}_F^{0h})_{\mathcal{O}}$. Si ω est *dense*, les schémas $\mathfrak{G}_F^0$ n'existent plus en général, mais il résulte de 4.6.42 (compte tenu de 5.1.4) que *pour toute facette* F *de* $\mathscr{I}$ *invariante par* Σ, *contenue dans un appartement* A', *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* ε*-épaississement* f *de* F *dans* A' *avec* $\varepsilon < \delta$, *le* $\mathcal{O}$*-schéma* $\mathfrak{G}_f^0$ *soit invariant par* Σ *et provienne donc d'un* $\mathcal{O}^h$*-schéma* $\mathfrak{G}_f^{0h}$. On voit de même que le groupe algébrique $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ attaché à F (4.6.40) est « défini sur $\overline{K}^h$ ».

Notons aussi que si S′ est un tore défini sur $K^\natural$ et déployé sur K et si $\mathfrak{S}'$ est le $\mathcal{O}$-schéma canonique de fibre générique S′, alors $\mathfrak{S}'$ provient par changement de base d'un $\mathcal{O}^\natural$-schéma en groupes lisse dont la fibre générique est canoniquement $K^\natural$-isomorphe à S′. Ce $\mathcal{O}^\natural$-schéma est appelé le $\mathcal{O}^\natural$-schéma canonique de fibre générique S′ et est noté $\mathfrak{S}'^\natural$. C'est d'ailleurs celui défini en 4.4.

On se permettra parfois de supprimer les exposants $\natural$ dans ces notations.

5.1.10. Proposition. — *Soit* F *une facette de* $\mathscr{I}$ *invariante par* Σ, *soit* A′ *un appartement contenant* F *et soit* S′ *le tore* K-*déployé maximal de* G *associé à* A′. *On se donne de plus l'un des deux objets suivants* :

a) Un sous-tore S_1 *de* S′, *défini sur* $K^\natural$ *et* $K^\natural$-*déployé*;

b) Un sous-tore $\overline{K}^\natural$-*déployé* $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$ *de* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$.

Alors, il existe un tore K-*déployé maximal* S″ *de* G, *défini sur* $K^\natural$, *tel que* F *est contenue dans l'appartement* A″ *associé à* S″ *et que*

— *dans le cas a),* S″ *contient* S_1;

— *dans le cas b), le* $\mathcal{O}^\natural$-*schéma canonique* $\mathfrak{S}''$ *de fibre générique* S″ *possède un sous-schéma fermé en tores déployés dont l'image canonique dans* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ *est* $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$.

Soit $\mathfrak{G}^\natural$ le $\mathcal{O}^\natural$-schéma en groupes lisse défini comme suit : si ω est discrète, on prend $\mathfrak{G}^\natural = \mathfrak{G}_F^{0\natural}$; si ω est dense, on prend $\mathfrak{G}^\natural = \mathfrak{G}_f^{0\natural}$, où f est un ε-épaississement de F dans A′ tel que $\mathfrak{G}_f^0$ soit invariant par Σ. Soit $\mathfrak{S}'$ le $\mathcal{O}$-schéma canonique de fibre générique S′. C'est un sous-schéma fermé de $(\mathfrak{G}^\natural)_\mathcal{O}$.

Dans le cas *a)*, soit $\mathfrak{S}_1^\natural$ le $\mathcal{O}^\natural$-schéma canonique de fibre générique S_1 et soit u l'immersion fermée de $(\mathfrak{S}_1^\natural)_\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{S}'$ prolongeant l'inclusion de S_1 dans S′.

Dans le cas *b)*, définissons un $\overline{K}$-isomorphisme $\bar{u}$ de $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$ sur un sous-tore $\overline{K}^\natural$-déployé de $\overline{\mathfrak{G}}^\natural$ de la manière suivante : si ω est discrète, $\bar{u}$ est l'identité; si ω est dense, l'isomorphisme canonique de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0/\mathrm{Q}_f$ sur $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ (4.6.41) permet, puisque Q_f est unipotent, de remonter $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$ en un tore $\overline{K}^\natural$-déployé de $\overline{\mathfrak{G}}^\natural$, autrement dit de choisir un $\overline{K}^\natural$-isomorphisme $\bar{u}$ de $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$ sur un tore $\overline{K}^\natural$-déployé de $\overline{\mathfrak{G}}^\natural$ tel que le composé de $\bar{u}$ et de l'homomorphisme canonique de $\overline{\mathfrak{G}}^\natural$ sur $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ soit l'identité.

La fibre fermée $\overline{\mathfrak{S}}'$ est un tore $\overline{K}$-déployé maximal de $(\overline{\mathfrak{G}}^\natural)_{\overline{K}}$ (4.6.4) donc un tore maximal puisque $\overline{K}$ est séparablement clos. Soit $\overline{\mathfrak{S}}''$ un tore maximal défini sur $\overline{K}^\natural$ de $\overline{\mathfrak{G}}^\natural$ contenant $\bar{u}(\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural)$, et soit $\bar{g} \in \overline{\mathfrak{G}}^\natural(\overline{K})$ tel que $\overline{\mathfrak{S}}'' = \bar{g}.\overline{\mathfrak{S}}'.\bar{g}^{-1}$ et appartenant dans le cas *a)* au centralisateur de $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$. Des résultats de Grothendieck sur l'existence et la lissité du schéma des homomorphismes d'un schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini dans un schéma en groupes (affine) lisse ([SGAD], Exp. XI, cor. 4.2), on déduit d'une part qu'il existe un sous-$\mathcal{O}^\natural$-schéma en groupes fermé $\mathfrak{S}''$ de $\mathfrak{G}^\natural$, isomorphe à $\mathfrak{Mult}^r$ avec $r = \dim \overline{\mathfrak{S}}'' = \dim \overline{\mathfrak{S}}' = \dim \mathrm{S}$, de fibre fermée $\overline{\mathfrak{S}}''$, d'autre part que $\bar{g}$ se relève en un élément $g \in \mathfrak{G}^\natural(\mathcal{O}) \subset \mathrm{P}_F^0$ (4.6.7 et 4.6.40) tel que $\mathfrak{S}'' = g.\mathfrak{S}'.g^{-1}$ et qui appartient au centralisateur de $\mathfrak{S}_1^\natural$ dans le cas *a)* (rappelons

que ce centralisateur est lisse). Alors, la fibre générique $S'' = g.S'.g^{-1}$ est un tore K-déployé maximal de G, défini sur $K^\natural$, et $F = g.F$ appartient à l'appartement $g.A'$ associé à S''. De plus, $S'' \supset S_1$ dans le cas *a)*. Dans le cas *b)*, le même théorème de Grothendieck permet de relever un $\overline{K}^\natural$-isomorphisme $\bar{v} : \mathfrak{Mult}' \to \bar{u}(\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural)$ en un $\mathcal{O}^\natural$-morphisme $v : \mathfrak{Mult}' \to \mathfrak{S}''$ qui est une immersion fermée puisque $\bar{v}$ en est une ([SGAD], Exp. IX, 2.5 et 6.6). Le sous-$\mathcal{O}^\natural$-schéma de $\mathfrak{S}''$ image de v possède alors les propriétés requises, ce qui achève la démonstration de la proposition.

5.1.11. Corollaire. — *Soit* F *une facette de* A *invariante par* Σ. *L'image canonique de* $\overline{\mathfrak{S}}^\natural$ *dans* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ *est un tore* $\overline{K}^\natural$*-déployé maximal de* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$.

5.1.12. Corollaire. — *Il existe un tore* K*-déployé maximal de* G, *défini sur* $K^\natural$ *et contenant le tore* $K^\natural$*-déployé maximal* $S^\natural$.

Prenons pour F une facette invariante par Σ contenue dans $\mathscr{I}_{S^\natural}$ (5.1.7); elle est alors contenue dans un appartement A' associé à un tore K-déployé maximal S' contenant $S^\natural$ (5.1.3) et il suffit d'appliquer 5.1.10 *a)*, avec $S_1 = S^\natural$.

5.1.13. Lemme. — *Soit* S' *un tore* K*-déployé maximal de* G, *défini sur* $K^\natural$, *d'appartement associé* A', *et soit* S_1 *le sous-tore* $K^\natural$*-déployé maximal de* S'.

(i) *L'ensemble* $A'_\natural = A' \cap \mathscr{I}_\natural$ *des points de* A' *invariants par* Σ *est un sous-espace affine non vide.*

(ii) $A'_\natural$ *est l'enveloppe convexe de* $S_1(K).x$ *pour tout* $x \in A'_\natural$ *et* $\dim A'_\natural = \dim S_1/S_1 \cap C$, *où* C *est le centre de* G.

Quitte à remplacer G par G/C, on peut supposer que $C = \{1\}$. L'appartement A' est invariant par Σ, qui y opère *via* un groupe fini d'automorphismes affines (5.1.4), d'où (i). Soit Φ' le système de racines de G suivant S' et V' l'espace vectoriel des translations de A'. Comme Φ' engendre un sous-module d'indice fini de $X^*(S')$, le tore S_1 est la composante neutre de l'intersection des noyaux (dans S) des caractères $a^\sigma - a$ pour $a \in \Phi'$ et $\sigma \in \Sigma$. Mais le sous-espace $V'_\natural$ des invariants de Σ dans V' est lui aussi l'intersection des noyaux des $a^\sigma - a$ (cette fois-ci dans V'!) et (ii) en résulte (cf. 4.2.7).

5.1.14. Proposition. — *Soit* S' *un tore* K*-déployé maximal de* G, *défini sur* $K^\natural$ *et soit* S_1 *le sous-tore* $K^\natural$*-déployé maximal de* S'.

Soit F *une facette de l'appartement* A' *associé à* S', *rencontrant* $A'_\natural = A' \cap \mathscr{I}_\natural$. *On suppose que l'image de* $\overline{\mathfrak{S}}_1$ *dans* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ *en est un tore* $\overline{K}^\natural$*-déployé maximal et qu'il n'existe pas de facette* $F' \neq F$ *rencontrant* $A'_\natural$ *telle que* $F \subset \overline{F}'$ *(p. ex. que* dim F *est la plus grande possible). Alors :*

(i) $F \cap \mathscr{I}_\natural = F \cap A'_\natural$ *est ouvert* (cf. I, 7.2.1) *dans* $A'_\natural$ *et* $A'_\natural$ *est le plus petit sous-espace affine de* A' *contenant* $F \cap A'_\natural$;

(ii) F *n'est contenue dans l'adhérence d'aucune facette* $F' \neq F$ *rencontrant* $\mathscr{I}_\natural$;

(iii) *Pour tout appartement* A'' *contenant* F, *l'intersection* $F \cap \mathscr{I}_\natural$ *est ouverte dans* $A'' \cap A'_\natural$;

(iv) *Pour tout appartement* A'' *contenant* $A'_\natural$, *on a* $A'' \cap \mathscr{I}_\natural = A'_\natural$.

L'assertion (i) est immédiate. Pour démontrer (ii), reprenons les notations de 4.6.33 et 4.6.45. Comme l'extension $\overline{K}$ de $\overline{K}^\natural$ est séparable, les $\overline{K}^\natural$-sous-groupes pseudo-paraboliques de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ sont les $\overline{K}$-sous-groupes pseudo-paraboliques invariants par Σ, c'est-à-dire les images par p des facettes $F' \in \mathscr{I}(F)$ invariantes par Σ. Or, comme $\overline{\mathfrak{S}}_1$ est un tore $\overline{K}^\natural$-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$, tout $\overline{K}^\natural$-sous-groupe pseudo-parabolique de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ est conjugué d'un $\overline{K}^\natural$-sous-groupe pseudo-parabolique contenant $\overline{\mathfrak{S}}_1$, donc contenant le centralisateur de $\overline{\mathfrak{S}}_1$ et *a fortiori* contenant $\overline{\mathfrak{S}}'$, donc image d'une facette $F' \in \mathscr{I}(F)$ invariante par Σ et contenue dans A'. Mais il résulte de (i) qu'une telle facette est égale à F. On en conclut que $p(F) = \overline{\mathfrak{G}}^0_F$ est l'unique $\overline{K}^\natural$-sous-groupe pseudo-parabolique de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ et que F est l'unique élément de $\mathscr{I}(F)$ rencontrant $\mathscr{I}_\natural$, ce qu'il fallait démontrer.

L'assertion (iii) résulte alors de (ii) et de I, 9.2.5 (iii), en y prenant $M = A'' \cap \mathscr{I}_\natural$, et (iv) résulte de I, 9.2.6 (ii).

5.1.15. — *Désormais, nous supposons, ce qui est loisible vu* 5.1.12, *que le tore* K*-déployé maximal* S *contenant* $S^\natural$ *est défini sur* $K^\natural$. Il en est alors de même de T et les schémas $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}^0$ proviennent par changement de base de $\mathcal{O}^\natural$-schémas en groupes. De plus, $A_\natural = \mathscr{I}_\natural \cap A$ est alors un sous-espace affine non vide de A (5.1.13) : autrement dit, *la condition* (DI 2) *de* I, 9.2.1 *est satisfaite.* La direction de $A_\natural$ est l'espace des invariants de Σ dans V, c'est-à-dire le sous-espace $V^\natural$ introduit en 5.1.2, ce qui est conforme aux notations de I, § 9 (9.2.8).

De plus, nous *supposons désormais que la valuation* φ *appartient à* $A_\natural$ (on prendra garde que l'on ne peut pas en général supposer simultanément que $\varphi \in A_\natural$ et que φ est une valuation de Chevalley-Steinberg : il est aisé de donner des exemples où $A_\natural$ ne contient même aucun point spécial de A). La famille des ensembles de valeurs $(\Gamma'_a)_{a \in \Phi}$ est alors invariante par Σ en ce sens que $\Gamma'_{\sigma(a)} = \Gamma'_a$ pour tous $a \in \Phi$ et $\sigma \in \Sigma$. En effet, si $k \in \Gamma'_a$, l'image par σ de la racine affine $\alpha_{a,k} = \{x \in A \mid a(x - \varphi) + k \geqq 0\}$ est encore une racine affine, qui est $\{x \in A \mid \sigma(a)(x - \varphi) + k \geqq 0\}$, d'où $k \in \Gamma'_{\sigma(a)}$. De plus, on a

$$\mathfrak{U}_{\sigma(a),k} = \sigma(\mathfrak{U}_{a,k}). \tag{1}$$

5.1.16. — Rappelons (4.2.2 et I, 9.1.6) que la famille $\varphi^\natural = (\varphi^\natural_b)_{b \in \Phi^\natural}$ est définie comme suit. Soit $b \in \Phi^\natural$; on a posé

$$\Phi^b = \{a \in \Phi \mid a^\natural = b \text{ ou } a^\natural = 2b\}.$$

C'est une partie positivement close de Φ, invariante par Σ. Pour tout $k \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$U_{b,k} = \prod_{a \in \Phi^b,\, a^\natural = b} U_{a,k} \cdot \prod_{a \in \Phi^b_{nd},\, a^\natural = 2b} U_{a,2k}$$

est un sous-groupe de $U_b(K)$ (I, 9.1.5). On pose

$$\varphi_b^{\natural}(u) = \sup\{k \in \mathbf{R} \mid u \in U_{b,k}\} \quad (u \in U_b(K)),$$
$$U_{b,k}^{\natural} = U_{b,k} \cap U_b(K^{\natural}) = \{u \in U_b(K^{\natural}) \mid \varphi_b^{\natural}(u) \geqq k\},$$
$$\Gamma_b^{\natural} = \varphi_b^{\natural}(U_b(K^{\natural}) - \{1\}),$$
$$\Gamma_b^{\natural\prime} = \{\varphi_b^{\natural}(u) \mid u \in U_b(K^{\natural}) - \{1\} \text{ et } \varphi_b^{\natural}(u) = \sup \varphi_b^{\natural}(uU_{2b}(K^{\natural}))\},$$

(cf. I, 6.2.2).

5.1.17. Lemme. — *Soit* L *une extension galoisienne finie de* $K^{\natural}$, *contenue dans* K, *d'anneau de valuation* $\mathcal{O}_L$, *de groupe de Galois* Σ_L *et soit* M *un* $\mathcal{O}_L$*-module libre de type fini.*

(i) *Pour toute loi d'opération de* Σ_L *dans* M *telle que, pour* $\sigma \in \Sigma_L$, *l'application* $m \mapsto m^{\sigma}$ *soit un* σ*-automorphisme de* M, *on a* $H^q(\Sigma_L, M) = \{0\}$ *quel que soit* $q \geqslant 1$.

(ii) *Sous les mêmes hypothèses, on a* $H^1(\Sigma_L, GL(M)) = \{1\}$.

(iii) *Soit* $\mathfrak{X}$ *le* $\mathcal{O}_L$*-schéma en groupes canoniquement associé à* M, *muni de la loi d'opération canonique de* $\mathfrak{Mult}$ *dans* M. *Supposons donnée une loi d'opération* $(\sigma, x) \mapsto x^{\sigma}$ *de* Σ_L *dans* $\mathfrak{X}$ *telle que, pour tout* σ, *l'application* $x \mapsto x^{\sigma}$ *soit un* σ*-automorphisme de* $\mathfrak{X}$ *et* $(t.x)^{\sigma} = t^{\sigma}.x^{\sigma}$ *pour* $t \in \mathfrak{Mult}$ *et* $x \in \mathfrak{X}$. *Alors,* $\mathfrak{X}$, *muni de ces deux lois d'opération, est isomorphe au* $\mathcal{O}_L$*-schéma en groupes obtenu par changement de base* $\mathcal{O}^{\natural} \to \mathcal{O}_L$ *à partir du* $\mathcal{O}^{\natural}$*-schéma en groupes* $\mathfrak{X}^{\natural}$ *associé à un* $\mathcal{O}^{\natural}$*-module libre de type fini* $M^{\natural}$ *muni de la loi d'opération canonique de* $\mathfrak{Mult}$ *et de la loi d'opération canonique de* Σ_L *sur* $(\mathfrak{X}^{\natural})_{\mathcal{O}_L}$.

Soit $e \in \mathcal{O}_L$, d'image $\bar{e} \in \bar{L}$ telle que $(\bar{e}^{\sigma})_{\sigma \in \Sigma_L}$ soit une base normale de $\bar{L}$ sur $\bar{K}^{\natural}$. Alors, $(e^{\sigma})_{\sigma \in \Sigma_L}$ est une base de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}^{\natural}$ et $\det(e^{\sigma\tau})_{\sigma,\tau \in \Sigma_L} \in \mathcal{O}_L^{\times}$. Il en résulte aussitôt que l'ensemble $M^{\natural}$ des points fixes de Σ_L dans M est un $\mathcal{O}^{\natural}$-module libre de type fini et que l'application canonique de $\mathcal{O}_L \otimes M^{\natural}$ dans M est un isomorphisme de $\mathcal{O}_L$-modules transformant l'action naturelle de Σ_L en l'action donnée sur M.

Pour démontrer (i), il suffit alors de montrer que $H^q(\Sigma_L, \mathcal{O}_L) = \{0\}$ pour $q \geqslant 1$, ce qui résulte de ce que le Σ_L-module $\mathcal{O}_L$ est un *module induit* ([28], p. 158) puisque $(e^{\sigma})_{\sigma \in \Sigma_L}$ en est une base.

Démontrons (ii). Ici aussi, il suffit de montrer que $H^1(\Sigma_L, GL_n(\mathcal{O}_L)) = \{1\}$ et pour cela de recopier la démonstration de Cartier (voir [28], p. 159) de l'assertion analogue dans le cas des corps, en remarquant que des vecteurs $y_1, \ldots, y_n$ forment une base de $\mathcal{O}_L^n$ si et seulement si leurs images dans $\bar{L}^n$ en forment une base.

Enfin, (iii) résulte de (ii) par descente galoisienne, puisque le groupe des automorphismes de $\mathfrak{X}$ muni de la loi d'opération de $\mathfrak{Mult}$ s'identifie canoniquement à GL(M).

5.1.18. Proposition. — *Soit* $a \in \Phi$. *Notons* Σ_a *le stabilisateur de a dans* Σ, K_a *le corps des invariants de* Σ_a *et* $\mathcal{O}_a$ *l'anneau de valuation de* K_a. *Soit* $k \in \Gamma_a'$.

(i) *Les* $\mathcal{O}$*-schémas en groupes* $\mathfrak{U}_{a,k}$, $\mathfrak{U}_{2a,2k}$ *et* $\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k}$ *proviennent par changement de base de* $\mathcal{O}_a$*-schémas en groupes dont le schéma sous-jacent est associé à un* $\mathcal{O}_a$*-module libre de type fini.*

(ii) *L'application canonique* $\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}_a) \to (\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k})(\bar{K}_a)$ *est surjective.*

L'assertion (i) résulte du lemme 5.1.17 (iii), compte tenu de 5.1.15 (1) et 4.4.19 (1) et (2). Comme $H^1(\Sigma_a, \mathfrak{U}_{2a,2k}(\mathcal{O})) = \{0\}$ (5.1.17 (i)) et que l'application canonique $\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}) \to (\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k})(\mathcal{O})$ est surjective (4.3.7), l'application canonique $\mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O}_a) \to (\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k})(\mathcal{O}_a)$ est surjective, d'où (ii) puisque $\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k}$ est lisse et $\mathcal{O}_a$ hensélien.

5.1.19. Proposition. — *Soient* $b \in \Phi^\natural$ *et* $k \in \mathbf{R}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $k \in \Gamma_b^{\natural\prime}$;

(ii) *il existe* $a \in \Phi$ *telle que* $a^\natural = b$ *et* $k \in \Gamma'_a$.

Dire que $k \in \Gamma_b^{\natural\prime}$ signifie qu'il existe $u \in U_{b,k}^\natural$ tel que

$$(1) \qquad u \notin \prod_{a \in \Phi^b,\, a^\natural = b} (U_{a,k+} \cdot U_{2a,2k}) \cdot \prod_{a \in \Phi^b_{\mathrm{nd}},\, a^\natural = 2b} U_{a,2k}.$$

C'est impossible si (ii) n'est pas satisfaite, puisqu'on a alors $U_{a,k} = U_{a,k+} \cdot U_{2a,2k}$ pour tout $a \in \Phi^b$ telle que $a^\natural = b$. Donc (i) implique (ii).

Réciproquement, soit $a \in \Phi$ tel que $a^\natural = b$ et $k \in \Gamma'_a$. Identifions $\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k}$ au schéma en groupes associé à un $\mathcal{O}_a$-module libre de type fini M. Il résulte de la construction même du schéma $\mathfrak{U}_{a,k}$ (4.3.2 et 4.3.5) que l'image canonique I de $U_{a,k+}\, U_{2a,2k} \subset \mathfrak{U}_{a,k}(\mathcal{O})$ dans $(\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k})(\overline{K}) = M \otimes \overline{K}$ est un sous-$\overline{K}$-espace vectoriel de $M \otimes \overline{K}$ distinct de $M \otimes \overline{K}$, évidemment invariant par Σ_a. Par suite, $(\mathfrak{U}_{a,k}/\mathfrak{U}_{2a,2k})(\overline{K}_a) \not\subset I$ et il résulte de 5.1.18 (ii) qu'il existe $v \in U_{a,k}(\mathcal{O}_a) = U_{a,k} \cap G(K_a)$ tel que $v \notin U_{a,k+} \cdot U_{2a,2k}$.

Posons $x = \prod_{\sigma \in \Sigma/\Sigma_a} v^\sigma$ (compte tenu de ce que $v^\sigma = v$ pour $\sigma \in \Sigma_a$). Considérons l'ensemble Ψ des éléments de Φ de la forme $\sigma(a) + \sigma'(a)$ avec $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. C'est une partie positivement close de Φ et la fonction g sur Ψ constante égale à $2k$ est concave et satisfait à (Sch) lorsque ω est dense (4.6.36 (1)). D'après 4.6.2, on peut donc considérer le schéma $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_{g,\Psi}$, qui est associé à un $\mathcal{O}$-module libre de type fini. Le schéma $\mathfrak{X}$ est invariant par Σ et le tore $\mathfrak{S}^\natural$ opère sur $\mathfrak{X}$ par la racine non nulle $2b$; on en déduit aussitôt en utilisant 5.1.17 (iii) que $\mathfrak{X}$ provient d'un schéma $\mathfrak{X}^\natural$ associé à un $\mathcal{O}^\natural$-module libre de type fini et 5.1.17 (i) entraîne que $H^1(\Sigma, \mathfrak{X}(\mathcal{O})) = \{0\}$. Or, le groupe des commutateurs du sous-groupe engendré par les $U_{\sigma(a),k}$ pour $\sigma \in \Sigma$ est contenu dans le produit des $U_{\sigma(a)+\sigma'(a),2k}$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$. Il en résulte que l'application $\sigma \mapsto x^{-1} x^\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ et il existe donc $y \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ tel que $u = xy \in G(K^\natural)$. Alors, $u \in U_{b,k}^\natural$ et u satisfait à (1). Par suite, (ii) implique (i).

5.1.20. Théorème. — (i) *Toute valuation* $\varphi \in A_\natural$ *se descend à* $G(K^\natural)$; *autrement dit, la famille* $\varphi^\natural$ *définie en* 5.1.16 *est une valuation de la donnée radicielle* $(Z(K^\natural), (U_b^\natural)_{b \in \Phi^\natural})$ *de* $G(K^\natural)$ (cf. I, 9.1.11).

(ii) *Soit* $\varphi \in A_\natural$ *et soit* $\mathscr{I}^\natural$ *l'immeuble de* $G(K^\natural)$ *défini par* $\varphi^\natural$. *L'application* $\psi \mapsto \psi^\natural$ *est une bijection de* $A^\natural$ *sur l'appartement* $A^\natural = \varphi^\natural + V^\natural$ *de* $\mathscr{I}^\natural$.

(iii) *Identifions ainsi* $A_\natural$ *à l'appartement* $A^\natural$. *Les racines affines de* $A^\natural$ *sont les intersections avec* $A^\natural$ *des racines affines de* A *associées à des racines* $a \in \Phi - \Phi_0$, *c'est-à-dire non nulles sur* $V^\natural$.

Démontrons (i). Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 9.2.10 du chapitre I sont satisfaites. Or, nous avons vu successivement qu'il en est ainsi des conditions (DDR 1), (DDR 2) et (DDR 3) (en 5.1.2), (DI 1) (en 5.1.4), (DI 2) (en 5.1.15) et (DI 3) (en 5.1.14 (ii) en prenant $S = S'$ et $S^\natural = S_1$). Enfin, (DV 1) est l'hypothèse $\varphi \in A_\natural$ et (DV 2) résulte de 5.1.19.

L'assertion (ii) est évidente, puisque $A_\natural = \varphi + V^\natural$ (5.1.13 et 15). Quant à (iii), c'est une autre formulation de 5.1.19.

Remarques. — 1) Nous avons fait depuis le début de 4.6 l'hypothèse que le schéma canonique de fibre générique T admet un lissifié (cf. 5.1.1 *c)*), hypothèse qui est toujours vérifiée lorsque G est simplement connexe ou adjoint, ou lorsque ω est discrète. En réalité, *le théorème précédent reste vrai même si l'on supprime cette hypothèse* : il suffit de considérer le morphisme canonique de G dans le groupe adjoint ad G (cf. 4.2.14 et 15).

Il en est de même des résultats ci-dessous concernant l'immeuble $\mathscr{I}^\natural$ (5.1.21 à 28), qui est le même pour G et ad G.

2) Supposons G *quasi-déployé* sur $K^\natural$, et soit $\widetilde{K}^\natural$ la plus petite extension de $K^\natural$ contenue dans $\widetilde{K}$ et déployant G. On a $\widetilde{K} = K(\widetilde{K}^\natural)$ et l'on vérifie immédiatement que $\widetilde{K}^\natural$ est une extension admissible de $K^\natural$, de sorte que l'on peut appliquer 4.2. *Les valuations* $\varphi^\natural$ *de la donnée radicielle de* $G(K^\natural)$ (*pour* $\varphi \in A_\natural$) *sont les mêmes que celles introduites en* 4.2 (c'est-à-dire les valuations équipollentes à une valuation de Chevalley-Steinberg), *et l'immeuble* $\mathscr{I}^\natural$ *est le même que celui de* 4.2. Cela résulte de 4.2.9 et de la proposition 5.1.23 ci-dessous, mais peut aussi se voir directement. Considérons un système de Chevalley-Steinberg $C^\natural$ de G sur $K^\natural$ relativement à S. Il définit canoniquement par extension des scalaires un système de Chevalley-Steinberg C de G sur K. Soit $\widetilde{\varphi}$ la valuation de Chevalley de $G(\widetilde{K})$ correspondant à C. Alors, d'une part $\widetilde{\varphi}$ se descend en une valuation de Chevalley-Steinberg φ de G(K) invariante par Σ, donc en une valuation $\varphi^\natural$ de $G(K^\natural)$ au sens du théorème précédent, d'autre part en la valuation de Chevalley $\widetilde{\varphi}^\natural$ de $G(\widetilde{K}^\natural)$ correspondant à $C^\natural$. Par transitivité de la descente (cf. I, 9.1.12 *b)*), il en résulte que $\varphi^\natural$ s'obtient par descente de $\widetilde{\varphi}^\natural$ et est la valuation de Chevalley-Steinberg de $G(K^\natural)$ correspondant à $C^\natural$.

5.1.21. Corollaire. — *Les facettes de l'appartement* $A^\natural$ *de* $\mathscr{I}^\natural$ *sont les intersections non vides de* $A^\natural$ *avec les facettes de* A, *ou encore les intersections avec* $A^\natural$ *des facettes de* A *invariantes par* Σ.

Cela résulte de 5.1.20 (iii), compte tenu de ce qu'une facette de A est invariante par Σ si et seulement si elle rencontre $A^\natural$.

5.1.22. — Appliquons les résultats de 4.2.18 en prenant $\Phi_1 = \Phi_0$, d'où $G_1 = Z$ et $L_1 = V^\natural$. On a vu que le sous-espace $Z(K).(A \times V^1)$ de l'immeuble élargi $\mathscr{I}^1$

de G (4.2.16) s'identifie à l'immeuble élargi $\mathscr{I}(Z) \times V_1^1$ de Z (avec $V_1^1 = V^\natural \times V^1$) de la manière suivante : on choisit un point de A — et nous choisissons naturellement le point φ — et à $z.(x, v)$, avec $z \in Z(K)$, $x \in A$ et $v \in V^1$, on fait correspondre $z.(\pi(x), p(x - \varphi) + v)$, où p est la projection orthogonale de V sur $V^\natural$ et π est la projection canonique de $Z(K).A$ sur $\mathscr{I}(Z)$ (notée $\tilde{\pi}$ dans I, 7.6.4). Vu 4.2.16 (1) et (3), on a

$$z.(\pi(x), p(x - \varphi) + v) = (\pi(z.x), p(x - \varphi) + v + \theta_Z(g)),$$

où θ_Z est l'homomorphisme de Z(K) dans V_1^1 défini par

$$\langle \theta_Z(z), c \rangle = - (\omega \circ c)(z) \quad \text{pour } z \in Z(K) \text{ et } c \in X_K^*(Z) \otimes \mathbf{Q}.$$

Prenons en particulier $z \in Z(K^\natural)$; alors z opérant sur $\mathscr{I}$ laisse fixe $A^\natural$ et y induit la translation $\nu^\natural(z) \in V^\natural$. Tenant compte de ce que le sous-espace engendré par $\Phi^\natural$ dans $X_K^*(Z) \otimes \mathbf{R}$ est l'orthogonal du sous-espace V^1 de V_1^1, on voit que *la translation* $\nu^\natural(z)$ *est donnée par*

(1) $$\langle \nu^\natural(z), b \rangle = - (\omega \circ b)(z) \quad \text{pour } b \in \Phi^\natural$$

(avec les notations de 4.2.5, en identifiant $X^*(S^\natural) \otimes \mathbf{Q}$ et $X_{K^\natural}^*(Z) \otimes \mathbf{Q}$), autrement dit, que l'on a

(2) $$\varphi_b^\natural(zuz^{-1}) = \varphi_b^\natural(u) + (\omega \circ b)(z) \quad \text{pour } z \in Z(K^\natural) \text{ et } b \in \Phi^\natural.$$

D'une manière générale, nous dirons qu'une valuation ψ de la donnée radicielle de $G(K^\natural)$ est *compatible avec* ω si elle satisfait à (2) (cf. 4.2.8). On montre alors exactement comme en 4.2.9 :

5.1.23. Proposition. — *Les valuations de la donnée radicielle* $(Z(K^\natural), (U_b)_{b \in \Phi^\natural})$ *de* $G(K^\natural)$ *compatibles avec* ω *sont les valuations* $\varphi^\natural$ *pour* $\varphi \in A_\natural$.

5.1.24. — Vu I, 9.2.14 et 15, *il existe une isométrie* j *et une seule de l'immeuble* $\mathscr{I}^\natural$ *de* $G(K^\natural)$ *pour* $\varphi^\natural$ *dans l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* $G(K)$ *telle que* $j(g.x) = g.j(x)$ *pour tous* $x \in \mathscr{I}^\natural$ *et* $g \in G(K^\natural)$. On a $j(\varphi^\natural) = \varphi$ et la restriction de j à l'appartement $A^\natural$ est l'inverse de l'application $\psi \mapsto \psi^\natural$ qui nous a permis d'identifier $A_\natural$ et $A^\natural$ (5.1.20 (ii)). On dit que j est *l'injection canonique* de $\mathscr{I}^\natural$ dans $\mathscr{I}$. On a évidemment $j(\mathscr{I}^\natural) \subset \mathscr{I}_\natural$ mais on a vu au chapitre I que dans la situation générale du théorème I, 9.2.10, on n'a pas toujours $j(\mathscr{I}^\natural) = \mathscr{I}_\natural$ (p. ex. cette égalité peut être inexacte dans la situation étudiée en 4.2 lorsque $\tilde{K}$ est une extension ramifiée de K). Ceci est cependant vrai dans le cas de « descente étale » que nous étudions en ce moment :

5.1.25. Théorème. — *L'injection canonique* j *de l'immeuble* $\mathscr{I}^\natural$ *de* $G(K^\natural)$ *dans l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* $G(K)$ *est une bijection de* $\mathscr{I}^\natural$ *sur l'ensemble des points de* $\mathscr{I}$ *invariants par* Σ : *autrement dit, on a*

$$\mathscr{I}_\natural = j(\mathscr{I}^\natural) = G(K^\natural).A_\natural.$$

Soit $x \in \mathscr{I}_\natural$. Il s'agit de montrer que $x \in G(K^\natural).A_\natural$. Soit F une facette de $\mathscr{I}$, telle que $x \in \overline{F}$, que $F \cap \mathscr{I}_\natural \neq \varnothing$ et que la dimension de F soit la plus grande possible. En appliquant 5.1.10 *b)*, à partir d'un tore $\overline{K}^\natural$-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$, on construit un tore $K^\natural$-déployé $S_1^\natural$ de G, contenu dans un tore K-déployé maximal S'' défini sur $K^\natural$, tels que F soit contenue dans l'appartement A'' associé à S'' et que $\overline{\mathfrak{S}}_1^\natural$ soit un tore $\overline{K}^\natural$-déployé maximal aussi bien de $\overline{\mathfrak{S}}''$ que de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$.

Il existe $g \in G(K^\natural)$ tel que $gS_1^\natural g^{-1} \subset S^\natural$ (conjugaison des tores $K^\natural$-déployés maximaux!). Quitte à remplacer x par $g.x$, on peut donc supposer que $S_1^\natural \subset S^\natural$. Les appartements A et A'' étant tous deux associés à des tores K-déployés maximaux contenant $S_1^\natural$, il résulte de 5.1.3 qu'il existe un appartement A' de $\mathscr{I}$ contenant φ et $S_1(K^\natural).x$, donc φ et $A''_\natural$ (5.1.13). Mais ceci entraîne que $\varphi \in A''_\natural$ d'après 5.1.14 (iv), d'où $S_1^\natural(K^\natural).\varphi \subset A''_\natural$, et même que $A''_\natural$ est l'enveloppe convexe de $S_1^\natural(K^\natural).\varphi$ puisque $\dim A''_\natural = \dim S_1^\natural/S_1^\natural \cap C$ (5.1.13) est égale à la dimension de cette enveloppe convexe. Par suite $A''_\natural \subset A_\natural$ et $x \in A_\natural$, c.q.f.d.

5.1.26. Corollaire. — *Le groupe de Galois* Σ *a un unique point fixe dans l'immeuble* $\mathscr{I}(Z)$ *du centralisateur* Z *de* $S^\natural$.

En remplaçant G par Z dans tout ce qui précède, on voit que la restriction de φ à la donnée radicielle $(T(K), (U_a(K))_{a \in \Phi_0})$ de Z(K) se descend en une valuation de la donnée radicielle $(Z(K^\natural), \varnothing)$ de type $\varnothing$ de $Z(K^\natural)$. L'immeuble de cette dernière d'une part est réduit à un point, d'autre part s'identifie, vu le théorème, à l'ensemble des points fixes de Σ dans $\mathscr{I}(Z)$, d'où le corollaire.

Rappelons néanmoins que pour démontrer ce corollaire (et le suivant), nous avons dû, lorsque ω est dense, postuler l'existence de points fixes (5.1.5 à 7).

5.1.27. Corollaire. — *Supposons de plus que* G *est anisotrope sur* $K^\natural$.

(i) *Le groupe de Galois* Σ *a un unique point fixe dans l'immeuble élargi* $\mathscr{I}^1$ *de* G.

(ii) *Le groupe* $G(K^\natural)$ *des points de* G *rationnels sur* $K^\natural$ *est borné pour la bornologie naturelle* $\mathscr{B}(\omega)$.

On a en effet $G = Z$, donc Σ a un unique point fixe dans $\mathscr{I}$; mais Σ a aussi un unique point fixe dans V^1 (l'origine), puisque G n'a pas de caractère rationnel sur $K^\natural$ non trivial. D'où (i).

D'autre part, l'unique point fixe de Σ dans $\mathscr{I}^1$ est invariant par $G(K^\natural)$. Par suite, l'image de $G(K^\natural)$ dans Isom $\mathscr{I}^1$ est bornée. Vu 4.2.19, ceci signifie que $G(K^\natural)$ est borné pour $\mathscr{B}(\omega)$.

Remarque. — En fait, comme l'a montré G. Rousseau ([27]), le groupe des points rationnels de tout groupe réductif anisotrope sur un corps hensélien est borné. Autrement dit, l'assertion (ii) ci-dessus reste vraie sans les hypothèses supplémentaires de ce para-

graphe et en particulier sans imposer *a priori* la condition (DE). Une preuve élémentaire de ce résultat a été récemment donnée par G. Prasad ([23]).

5.1.28. — *Désormais nous identifierons l'immeuble* $\mathscr{I}^{\natural}$ *de* $G(K^{\natural})$ *avec l'ensemble* $\mathscr{I}_{\natural}$ *des points fixes de* Σ *dans* $\mathscr{I}$ *grâce à l'injection canonique j.*

Corollaire. — *Les facettes de* $\mathscr{I}^{\natural}$ *sont les intersections avec* $\mathscr{I}^{\natural}$ *des facettes de* $\mathscr{I}$ *invariantes par* Σ *(*i.e. *rencontrant* $\mathscr{I}^{\natural}$*).*

Cela résulte du théorème et de 5.1.21.

Par contre, s'il est vrai que tout appartement de $\mathscr{I}^{\natural}$ est l'intersection avec $\mathscr{I}$ d'un appartement de A invariant par Σ, la réciproque est inexacte.

5.1.29. — On peut également considérer l'immeuble élargi $\mathscr{I}^1$ de G(K) et le stabilisateur G^1 de $\mathscr{I} \subset \mathscr{I}^1$ dans G(K) opérant sur $\mathscr{I}^1$ (4.2.16). Le groupe de Galois Σ opère sur $\mathscr{I}^1$ et l'immeuble élargi de $G(K^{\natural})$ (défini comme en 4.2.16) s'identifie canoniquement à l'ensemble $\mathscr{I}^1_{\natural}$ des points fixes de Σ dans $\mathscr{I}^1$: il suffit de remarquer que $\mathscr{I}^1_{\natural} = \mathscr{I}_{\natural} \times V^1_{\natural}$, où $V^1_{\natural}$ est l'ensemble des points fixes de Σ dans V^1 et s'identifie naturellement au dual de $X_{K^{\natural}}(G) \otimes \mathbf{R}$.

Notons que le stabilisateur $G(K^{\natural})^1$ de $\mathscr{I}_{\natural}$ considéré comme partie de $\mathscr{I}^1_{\natural}$, est l'intersection $G^1 \cap G(K^{\natural})$. En effet, si $g \in G(K^{\natural})^1$ et si $c \in X_K(G)$, on a $\omega(c(g)) = \frac{1}{n}\omega(c_0(g))$ où c_0 est la somme des transformés distincts de c par Σ et où n est le nombre de ces transformés, d'où $g \in G^1$.

Il résulte immédiatement de 4.2.19 que la bornologie naturelle sur $G(K^{\natural})$ (resp. $G(K^{\natural})^1$) est égale à la bornologie image réciproque de celle de Isom $\mathscr{I}^1_{\natural}$ (resp. Isom $\mathscr{I}_{\natural}$).

5.1.30. — Soit Ω une partie bornée non vide de $A^{\natural}$. C'est une partie de A invariante par Σ. Si ω est discrète ou si, lorsque ω est dense, Ω satisfait *comme partie de* $\mathscr{I}$ aux conditions de 4.6.26 (ce qui ne peut être réalisé que si pour tout $a \in \Phi$ nulle sur $S^{\natural}$ il existe $k \in \Gamma'_a$ tel que $A^{\natural} \subset \{x \in A \mid a(x - \varphi) + k = 0\}$, condition qui *n'est pas* toujours satisfaite), on lui a associé des $\mathcal{O}$-schémas $\mathfrak{G}^0_\Omega$, $\mathfrak{G}_\Omega$, $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega$ et $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$. Vu 4.6.30, chacun de ces $\mathcal{O}$-schémas est invariant par Σ et provient par changement de base d'un $\mathcal{O}^{\natural}$-schéma en groupes lisse, que nous noterons $\mathfrak{G}^{0\natural}_\Omega$, etc. Lorsque G est quasi-déployé sur $K^{\natural}$, on vérifie sans difficultés que $\mathfrak{G}^{0\natural}_\Omega$ (resp. $\mathfrak{G}^{\natural}_\Omega$) s'identifie canoniquement au schéma noté $\mathfrak{G}^0_\Omega$ (resp. $\mathfrak{G}_\Omega$) en 4.6. Ceci nous permet, sans qu'une ambiguïté en résulte, de noter plus simplement $\mathfrak{G}^0_\Omega$ le $\mathcal{O}^{\natural}$-schéma $\mathfrak{G}^{0\natural}_\Omega$, ce que nous ferons désormais. Par contre, le schéma $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega$ (resp. $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$) de 4.6 s'identifie seulement au sous-schéma ouvert de $\hat{\mathfrak{G}}^{\natural}_\Omega$ (resp. $\mathfrak{G}^{\dagger\natural}_\Omega$) dont la fibre fermée se compose des classes suivant $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$ (c'est-à-dire des composantes connexes lorsque $\overline{\mathfrak{T}}$ est connexe) qui ont un point rationnel sur $\overline{K}^{\natural}$.

Si ω est dense et si X est une partie bornée non vide quelconque de $A^{\natural}$ (resp. une

facette de $A^\natural$), on voit comme en 5.1.9 qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ε-épaississement f de X (resp. de la facette X′ de A contenant X) avec $\varepsilon < \delta$, les schémas $\mathfrak{G}_f^0$, etc., sont invariants par Σ et proviennent de $\mathcal{O}^\natural$-schémas $\mathfrak{G}_f^{0\natural}$, etc. Par passage à la limite inductive, on voit que les $\overline{K}$-groupes algébriques $\overline{\mathfrak{G}}_X^0$, etc. (resp. $\overline{\mathfrak{G}}_{X'}^0$, etc.) sont canoniquement munis d'une structure de $\overline{K}^\natural$-groupe algébrique. Enfin, on définit de manière évidente les groupes $P_X^{Y\natural}$.

5.1.31. — On voit alors aisément, et nous en laisserons le soin au lecteur, que la plupart des résultats de 4.6 « se descendent » sur $\mathcal{O}^\natural$ ou sur $\overline{K}^\natural$. Citons notamment 4.6.10 (en utilisant 5.1.18 et un raisonnement analogue à celui de 5.1.19), 4.6.12 (le système de racines relatives du quotient quasi-réductif ${}^q\overline{\mathfrak{G}}_X^0$ par rapport au tore $\overline{K}^\natural$-déployé maximal image de $\overline{\mathfrak{S}}^\natural$ est l'ensemble des $b \in \Phi^\natural$ telles qu'il existe $k \in \Gamma_b'^\natural$ avec $X \subset \{x \in A \mid b(x - \varphi^\natural) + k = 0\}$), 4.6.28, 4.6.29 (on remarquera que le sous-groupe $U_\Omega^\natural$ opère transitivement sur l'ensemble des appartements contenant Ω et est contenu dans $\mathfrak{G}_\Omega^0(\mathcal{O}^\natural)$), 4.6.30 à 32.

5.1.32. Proposition. — *Soit* F *une facette de* $\mathscr{I}^\natural$ *et soit* $\mathscr{I}^\natural(F)$ *l'étoile de* F *dans* $\mathscr{I}^\natural$.

(i) *L'application p qui, à une facette* $F' \in \mathscr{I}^\natural(F)$, *fait correspondre l'image canonique de* $\overline{\mathfrak{G}}_{F'}^0$ *dans* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ *est un isomorphisme d'ensembles ordonnées de* $\mathscr{I}^\natural(F)$ *sur l'ensemble des* $\overline{K}^\natural$*-sous-groupes pseudo-paraboliques de* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0$ *ordonné par la relation opposée à l'inclusion.*

Soit $F' \in \mathscr{I}^\natural(F)$.

(ii) *L'image réciproque de* $p(F')(\overline{K}^\natural)$ *dans le fixateur connexe* $P_F^{0\natural}$ *de* F *est le fixateur connexe* $P_{F'}^{0\natural}$ *de* F′, *et l'homomorphisme* $P_{F'}^{0\natural} \mapsto p(F')(\overline{K}^\natural)$ *est surjectif.*

(iii) *Soit* Y *un sous-groupe de* $N_F^{\dagger\natural}.N_F^0/N_F^0$; *le normalisateur de* $p(F')$ *dans* $Y\overline{\mathfrak{G}}_F^0(\overline{K}^\natural)$ *est l'image canonique de* $Y'\overline{\mathfrak{G}}_{F'}^0(\mathcal{O}^\natural)$, *où* $Y' = (YN_F^0 \cap N_{F'}^{\dagger\natural} N_{F'}^0)/N_{F'}^0$, *et* $Y'\overline{\mathfrak{G}}_{F'}^0(\mathcal{O}^\natural)$ *en est l'image réciproque dans* $Y\overline{\mathfrak{G}}_F^0(\mathcal{O}^\natural)$.

(iv) *L'application* $F' \mapsto p(F')(\overline{K}^\natural)$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{I}^\natural(F)$ *sur l'immeuble combinatoire* $\mathscr{I}_F^\natural$ *du système de Tits de* $\overline{\mathfrak{G}}_F^0(\overline{K}^\natural)$.

(v) *Les images réciproques des appartements de* $\mathscr{I}_F^\natural$ *sont les ensembles de facettes de* $\mathscr{I}^\natural(F)$ *contenues dans un même appartement de* $\mathscr{I}^\natural$.

La démonstration par descente à partir de 4.6.33, 34, 35 et 45 est facile et laissée au lecteur. On tiendra compte pour (ii) et (iv) de ce que l'application canonique $\mathfrak{T}^0(\mathcal{O}^\natural)$ dans $\overline{\mathfrak{T}}^0(\overline{K}^\natural)$ est surjective puisque $\mathcal{O}^\natural$ est hensélien.

5.1.33. Proposition. — *Soit* Ω *une partie bornée non vide de* $A^\natural$ *et soit* $S^{\natural'}$ *un tore* $K^\natural$*-déployé maximal de* G. *Supposons que le schéma canonique* $\mathfrak{S}^{\natural'}$ *de fibre générique* $S^{\natural'}$ *soit contenu dans* $\mathfrak{G}_f^0$ *(c'est-à-dire que l'injection de* $S^{\natural'}$ *dans* G *se prolonge en une immersion fermée de* $\mathfrak{S}^{\natural'}$ *dans* $\mathfrak{G}_f^0$*), où f est égale à* f_Ω *lorsque* ω *est discrète et est un* ε*-épaississement de* Ω *lorsque* ω *est dense. Alors,* Ω *est contenue dans l'appartement* $A^{\natural'}$ *associé à* $S^{\natural'}$.

Les tores $\overline{\mathfrak{S}}^{\natural}$ et $\overline{\mathfrak{S}}^{\natural'}$ sont des sous-tores $\overline{K}^{\natural}$-déployés de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ et sont isomorphes. Par suite, $\overline{\mathfrak{S}}^{\natural'}$ est lui aussi un tore $\overline{K}^{\natural}$-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0$ et est conjugué de $\overline{\mathfrak{S}}^{\natural}$ par un élément de $\overline{\mathfrak{G}}_f^0(\overline{K}^{\natural})$. La lissité du sous-schéma fermé *Transp*$(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ de $\mathfrak{G}_f^0$ ([SGAD], Exp. XI, cor. 5.2) entraîne qu'il existe $g \in \mathfrak{G}_f^0(\mathcal{O}^{\natural})$ tel que $S^{\natural'} = gS^{\natural}g^{-1}$, d'où la proposition.

5.1.34. Remarque. — La même démonstration montre plus généralement que si f est une fonction quasi-concave sur Φ, invariante par Σ, telle que $\mathfrak{S}^{\natural'} \subset \mathfrak{G}_f^0$, alors le schéma $\mathfrak{G}_f^0$ est aussi un schéma $\mathfrak{G}_{f'}^0$ obtenu à partir de $S^{\natural'}$, d'un tore K-déployé maximal S′ défini sur $K^{\natural}$ contenant $S^{\natural'}$, de l'appartement A′ de $\mathscr{I}$ associé à S′, d'une valuation $\varphi' \in A' \cap \mathscr{I}^{\natural}$ et d'une fonction quasi-concave f' sur le système de racines Φ' de G suivant S′ invariante par Σ.

5.1.35. Lemme. — *Soit k un corps fini, de cardinal $\geqq 4$, et soit h un groupe réductif défini sur k. Soit s un tore k-déployé maximal de h. Tout sous-groupe parabolique p de h contenant $s(k)$ contient s.*

Comme h est quasi-déployé sur k, on peut choisir un sous-groupe de Borel b de h, défini sur k et contenant s. Comme $p \cap b$ est résoluble connexe ([4], 4.5) et contient un tore maximal de h ([4], 4.6), il existe un tore maximal t de h tel que $s(k) \subset t \subset p \cap b$ ([4], 11.2). Il suffit alors de montrer que le centralisateur z de $s(k)$ dans b est réduit à t : comme $s \subset z$, cela entraînera $s \subset t \subset p$. Or, z est connexe ([4], 11.2) et, puisqu'il contient t, est engendré par t et les sous-groupes radiciels u_a pour a décrivant l'ensemble des racines positives de h suivant t nulles sur $s(k)$ ([4], 3.4). Il suffit donc de prouver qu'une racine a de h suivant t ne s'annule pas sur $s(k)$. Or, ou bien la restriction $a\big|_s$ de a à s est un élément primitif de $X^*(s)$ et $a(s(k)) = k^{\times} \neq \{1\}$ dès que $\operatorname{Card} k \geqq 3$, ou bien il existe un élément a' primitif dans $X^*(s)$ tel que $a\big|_s = 2a'$ et $a(s(k)) = (k^{\times})^2 \neq \{1\}$ dès que $\operatorname{Card} k \geqq 4$, d'où le lemme.

Remarquons que si le système de racines de h suivant s n'a pas de composante de type C_n ou BC_n, alors toute racine est primitive et l'on peut remplacer 4 par 3 dans l'énoncé du lemme.

5.1.36. — *Dans ce numéro exclusivement, nous abandonnons les conventions en vigueur et nous reprenons les notations de* I, § 7. En particulier, $\mathscr{I}$ désigne l'immeuble d'un groupe G doté d'une donnée radicielle valuée quelconque, $\hat{\mathscr{I}}$ est son complété, A l'appartement standard de $\mathscr{I}$, etc.

Proposition. — *Soient $x \in \hat{\mathscr{I}}$, $z \in A$, C une chambre de A contenant z dans son adhérence et ρ la rétraction de $\hat{\mathscr{I}}$ sur A de centre C* (I, 7.5.7). *Posons $y = \rho(x)$ et soit Δ l'adhérence de la réunion des chambres vectorielles D telles que $z \in y + \overline{D}$. Alors, il existe une suite $(z_p)_{p \geqq 1}$*

de points du segment $[zy]$, *convergeant de manière monotone vers* y, *avec* $z_1 = z$, *et une suite* $(u_p)_{p\geqq 1}$ *d'éléments de* $U_{z+\Delta}$ *telles que*

$$u_{p+1} \in u_p U_{z_p+\Delta} \quad \textit{pour tout } p \geqq 1, \tag{1}$$

et

$$x = \lim_{p\to+\infty} u_p.y. \tag{2}$$

C'est une variante de la première assertion de I, 7.5.2; comme là, il existe une réciproque dont nous laissons la formulation et la démonstration au lecteur.

Posons $B = P_C$. On a

$$B = (B \cap U_{z+\Delta}).(B \cap P_y). \tag{3}$$

En effet, soient Ψ l'ensemble des racines qui prennent des valeurs strictement positives sur $y - z$ et Ψ_1 un système de racines positives dans le système des racines s'annulant sur $y - z$. Ainsi, $\Phi^+ = \Psi_1 \cup (-\Psi)$ est un système de racines positives dans Φ. Comme d'habitude, notons U_Ψ, etc. le produit des U_a pour $a \in \Psi$, etc. Vu I, 6.4.9, on a

$$B = (B \cap U_\Psi).(B \cap U_{-\Psi_1}).(B \cap U_{\Phi^+}).H,$$

d'où (3), puisque $B \cap U_\Psi \subset U_{z+\Delta}$ et $(B \cap U_{-\Psi_1}).(B \cap U_{\Phi^+}).H \subset P_y$.

Soit $(x_p)_{p\geqq 1}$ une suite de points de $\mathscr{I}$ tendant vers x. Posons $y_p = \rho(x_p)$ et soient $g_p \in B$ et $u_p \in B \cap U_{z+\Delta}$ tels que $x_p = g_p.y_p$ et $g_p \in u_p.P_y$. Pour tout p, on a

$$d(x_p, u_p.y) = d(x_p, g_p.y) = d(y_p, y),$$

où, rappelons-le, d représente la distance. On voit donc que les $u_p.y$ tendent vers x et, quitte à remplacer la suite (x_p) par une suite extraite de $(u_p.y)$, nous pouvons supposer que $x_p = u_p.y$ pour tout p, d'où (2), et que la suite $(d(x, x_p))$ est décroissante. Choisissons arbitrairement une chambre vectorielle D contenue dans Δ et un vecteur $v \in D$. On montre alors, exactement comme dans I, 7.5.2, qu'il existe une suite décroissante $(\lambda_p)_{p\geqq 1}$ de nombres réels tendant vers zéro telle que $u_p^{-1}u_q \in U_{y+\lambda_p v+D}$ pour $q \geqq p$. Comme l'enveloppe convexe de $\{y + \lambda_p v\} \cup (z + \Delta)$ contient $y + \lambda_p v + \Delta$, on a

$$u_p^{-1}u_q \in U_{y+\lambda_p v+D} \cap U_{z+\Delta} \subset U_{y+\lambda_p v+\Delta}.$$

Mais alors, si l'on définit le point z_p de $[zy]$ par la relation

$$[zz_p] = [zy] \cap (y + \lambda_p v + \Delta)$$

dès que $p \geqq 2$ et que l'intersection du second membre n'est pas vide, et par $z_p = z$ dans les autres cas, on voit que la condition (1) de l'énoncé est satisfaite.

Corollaire. — *Soient* $x \in \hat{\mathscr{I}}$ *et* $z \in \mathscr{I}$. *Tous les points du segment géodésique* $[xz]$, *sauf peut-être* x *lui-même, appartiennent à l'immeuble* $\mathscr{I}$.

On peut supposer $z \in A$ et reprendre les notations de la proposition, et l'on a alors

$$[zx[= \bigcup_{p \geqq 1} u_p . [z_p\, z_{p+1}] \subset \mathscr{I}.$$

5.1.37. Proposition. — *Supposons* Card $\overline{K}^h \geqq 4$. *L'appartement* A^h *est alors l'ensemble des points fixes de* $\mathfrak{S}^h(\mathcal{O}^h)$ *dans le complété* $\hat{\mathscr{I}}^h$ *de l'immeuble* $\mathscr{I}^h$, *et* a fortiori *dans* $\mathscr{I}^h$.

Soit $x \in \hat{\mathscr{I}}^h$ fixe par $\mathfrak{S}^h(\mathcal{O}^h)$. Supposons $x \notin A^h$ et soit $z \in A^h$. Il existe $z' \in [zx[$ tel que $[zx] \cap A = [zz']$. Quitte à remplacer z par z', on peut donc supposer $]zx[\cap A = \varnothing$. Vu le corollaire précédent, on a $[zx[\subset \mathscr{I}^h$ et il existe une facette F′ de $\mathscr{I}$ et une seule rencontrant $]zx[$ et dont l'adhérence contient z et donc la facette F de A contenant z. Alors, F′, comme tous les points de $[zx]$, est invariante par Σ et par $\mathfrak{S}^h(\mathcal{O}^h)$. Le $\overline{K}^h$-sous-groupe pseudo-parabolique $p(F')$ de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$ est normalisé par $\overline{\mathfrak{S}}^h(\overline{K}^h)$, donc contient $\overline{\mathfrak{S}}^h(\overline{K}^h)$. Mais alors $p(F')$ contient $\overline{\mathfrak{S}}^h$: si $\overline{K}^h$ est infini, cela résulte de ce que $\overline{\mathfrak{S}}^h(\overline{K}^h)$ est dense dans le tore déployé $\overline{\mathfrak{S}}^h$ et si $\overline{K}^h$ est fini, alors $\overline{K}^h$ est parfait et il suffit d'appliquer le lemme 5.1.35 après passage au quotient par le radical unipotent de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F$. Par suite, l'image de $p(F')$ dans l'immeuble combinatoire $\mathscr{I}_F$ de $\overline{\mathfrak{G}}^0_F(\overline{K}^h)$ est contenue dans l'appartement associé à $\overline{\mathfrak{S}}^h$ et F′ $\cap$ $\mathscr{I}^h$ est contenu dans A^h (5.1.32 (v)). D'où une contradiction, puisque F′ $\cap$ $]zx[\neq \varnothing$ et $A^h \cap]zx[= \varnothing$.

5.1.38. Corollaire. — *Reprenons les notations de* 5.1.33, *mais supposons seulement que* $\mathfrak{S}^{h'}(\mathcal{O}^h) \subset \mathfrak{G}^0_f(\mathcal{O}^h)$. *Supposons de plus* Card $\overline{K}^h \geqq 4$. *Alors* Ω *est contenue dans l'appartement de* $\mathscr{I}^h$ *associé à* $S^{h'}$.

En effet, les points de Ω sont fixes par $\mathfrak{S}^{h'}(\mathcal{O}^h)$.

5.1.39. Corollaire. — *Si* Card $\overline{K}^h \geqq 4$, *et si* Ω *est close, alors* Ω *est l'ensemble des points fixes de* P^{0h}_Ω *dans* $\mathscr{I}^h$.

Cela résulte de 4.6.29 et 5.1.37 lorsque ω est discrète. Si ω est dense, on utilise 5.1.38 et l'on raisonne comme en 4.6.29 en utilisant 4.6.40 (i).

5.1.40. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{H}$ *un* $\mathcal{O}^h$*-schéma en groupes lisse de fibre générique* G. *Pour que la fibre fermée de* $\mathfrak{H}$ *soit réductive, il faut et il suffit que* G *soit déployé sur* K *et qu'il existe un point* $x \in \mathscr{I}^h$ *spécial en tant que point de* $\mathscr{I}$, *tel que* $\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G}^{0h}_x$.

De 4.6.31, on déduit immédiatement que la condition est suffisante et que, si $\overline{\mathfrak{H}}$ est réductive, G est déployé sur K et il existe un point spécial $x \in \mathscr{I}$ tel que $\mathfrak{H}_{\mathcal{O}}$ soit $\mathcal{O}$-isomorphe à $\mathfrak{G}^0_x$. Mais $\mathfrak{H}(\mathcal{O})$ est invariant par Σ et x est le seul point fixe de $\mathfrak{G}^0_x$ dans $\mathscr{I}$ (4.6.29). Par suite, x est invariant par Σ, $x \in \mathscr{I}^h$ et $\mathfrak{H}$ est $\mathcal{O}^h$-isomorphe à $\mathfrak{G}^{0h}_x$ (1.2.4).

5.1.41. — L'immeuble $\mathscr{I}^h$ de G sur K^h « dépend fonctoriellement » de K^h. De manière précise, soit K'^h une extension de K^h, munie d'une valuation ω' prolongeant ω;

supposons $K'^{\natural}$ *hensélien* et soit K' un hensélisé strict de $K'^{\natural}$, qu'on peut supposer contenant K; supposons enfin que la plus petite extension $\tilde{K}'$ de K' déployant G soit une extension *admissible* de K' (ce qui est toujours vrai si ω' est *discrète* (1.6.1)). Considérons l'isométrie canonique j de l'immeuble de G sur K dans l'immeuble $\mathscr{I}'$ de G sur K' (4.2.24). Par transport de structure, le groupe de Galois $\Sigma' = \mathrm{Gal}(K'/K'^{\natural})$ opère sur $\mathscr{I}'$, et opère sur $\mathscr{I}$ via l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Gal}(K'/K'^{\natural}) \to \mathrm{Gal}(K/K^{\natural})$, et ces lois d'opération sont compatibles avec j. Il en résulte que les points de $j(\mathscr{I}^{\natural})$ sont fixes par Σ', ce qui entraîne immédiatement que la condition (DE) de 5.1.5 est satisfaite pour G considéré comme groupe algébrique sur K'. On peut donc considérer l'immeuble $\mathscr{I}'^{\natural}$ de G sur $K'^{\natural}$, qui n'est autre que l'ensemble des points fixes de Σ' dans $\mathscr{I}'$ (5.1.25), et la restriction de j à $\mathscr{I}^{\natural}$ est une isométrie, dite *canonique*, de $\mathscr{I}^{\natural}$ dans $\mathscr{I}'^{\natural}$, compatible avec les lois d'opération de $G(K^{\natural})$.

Remarquons que $\varphi' = j(\varphi)$ est une valuation de la donnée radicielle de G(K') associée au plus grand sous-tore K'-déployé S'' de T (4.2.24) et que φ' se descend à G(K) suivant φ, donc à $G(K^{\natural})$ suivant $\varphi^{\natural}$. D'autre part, φ' est invariante par Σ', donc se descend à $G(K'^{\natural})$ suivant une valuation $\varphi'^{\natural}$ (5.1.20 et 5.1.25). De I, 9.1.12 *b)*, on déduit que $\varphi'^{\natural}$ *se descend à* $G(K^{\natural})$ suivant $\varphi^{\natural}$, ce qui permet d'appliquer les résultats de I, § 9.

Lorsque $K'^{\natural}$ est une extension *étale* de $K^{\natural}$, on a $K' = K$ et l'isométrie canonique de $\mathscr{I}^{\natural}$ dans $\mathscr{I}'^{\natural}$ est simplement l'injection canonique de l'ensemble des points de $\mathscr{I}$ invariants par $\mathrm{Gal}(K/K^{\natural})$ dans l'ensemble des points de $\mathscr{I}$ invariants par $\mathrm{Gal}(K/K'^{\natural})$. Si de plus $K'^{\natural}$ est une extension galoisienne de $K^{\natural}$, alors $\mathscr{I}^{\natural}$ est l'ensemble des points de $\mathscr{I}'^{\natural}$ invariants par $\mathrm{Gal}(K'^{\natural}/K^{\natural})$.

5.2. Sous-groupes parahoriques.

Désormais, nous supposons que la valuation ω *de* K *est discrète.* On conserve de plus les hypothèses et notations précédentes. En règle générale, les objets attachés à la valuation $\varphi^{\natural}$ de $G^{\natural} = G(K^{\natural})$ seront désignés par la lettre qui leur est attribuée par les conventions du chapitre I et des paragraphes précédents, affectée de l'exposant $\natural$, qu'on se permettra parfois d'omettre. Par exemple, $N^{\natural}$ est le stabilisateur de $A^{\natural}$ dans $G^{\natural}$, c'est-à-dire le groupe des points rationnels sur $K^{\natural}$ du normalisateur de $S^{\natural}$ dans G, $H^{\natural}$ est le fixateur de $A^{\natural}$ dans $G^{\natural}$, c'est-à-dire le sous-groupe formé des $z \in Z(K^{\natural})$ tels que $v^{\natural}(z) = 0$, etc.

5.2.1. — *Le schéma* $\mathfrak{Z}$. Nous avons déjà remarqué que le centralisateur Z de $S^{\natural}$ satisfait à toutes les conditions mises sur G, et qu'on peut donc lui appliquer tout ce qui précède. De plus, nous avons vu que le groupe de Galois Σ a un unique point fixe x dans l'immeuble $\mathscr{I}(Z)$ (5.1.26). Appliquant alors à Z et à $\Omega = \{x\}$ les résultats de 5.1.30, on trouve un $\mathcal{O}^{\natural}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{Z}_{\{x\}}$ de fibre générique Z, que nous qualifierons de *canonique* et que nous noterons plus simplement $\mathfrak{Z}$.

D'autre part, désignons par Z^1, comme en 4.2.16, l'ensemble des $z \in Z(K)$ tels que $\omega(\chi(z)) = 0$ pour tout $\chi \in X^*_K(Z)$. D'après 4.6.28 (i), on a

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{O}) = \{z \in Z^1 \mid z.x = x\}.$$

Mais, $Z^1 \cap Z(K^\natural)$ est l'ensemble des $z \in Z(K^\natural)$ tels que $\omega(\chi(z)) = 0$ pour tout $\chi \in X^*_{K^\natural}(Z)$ et $X^*_{K^\natural}(Z) \otimes \mathbf{Q}$ s'identifie à la somme directe de

$$X^*_{K^\natural}(G) \otimes \mathbf{Q} = X^*_{K^\natural}(CG) \otimes \mathbf{Q}$$

et du sous-espace vectoriel engendré par $\Phi^\natural$ dans $X^*(S^\natural) \otimes \mathbf{Q}$. Par ailleurs, $Z(K^\natural)$ laisse fixe l'unique point $x \in \mathscr{I}(Z)$ invariant par Σ. On en déduit, vu 5.1.22 (1), que

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{O}^\natural) = \{z \in Z(K^\natural) \cap G^1 \mid v^\natural(z) = 0\}.$$

Si le centre connexe de G est $K^\natural$-anisotrope, par exemple si G est semi-simple, alors $G^\natural \subset G^1$ et

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{O}^\natural) = \{z \in Z(K^\natural) \mid v^\natural(z) = 0\} = H^\natural.$$

5.2.2. — *Les schémas* $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$. Soit $b \in \Phi^\natural$ et soit $k, \ell \in \mathbf{R}$ avec $\ell \leqq 2k$. Posons, comme en 5.1.16, $\Phi^b = \{a \in \Phi \mid a^\natural = b \text{ ou } 2b\}$. La fonction $g : \Phi^b \to \mathbf{R}$ définie par $g(a) = k$ si $a^\natural = b$ et $g(a) = \ell$ si $a^\natural = 2b$ est concave. On peut donc, d'après 4.6.2, considérer le schéma en groupes $\mathfrak{U}_{g,\Phi^b}$, que nous noterons aussi $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$ (ou simplement $\mathfrak{U}_{b,k}$ lorsque b est non multipliable). Comme l'application produit

$$\prod_{a \in \Phi^b,\, a^\natural = b} \mathfrak{U}_{a,(k,\ell)} \times \prod_{a \in \Phi^b_{nd},\, a^\natural = 2b} \mathfrak{U}_{a,\ell} \to \mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$$

est un isomorphisme de schémas (4.2.6), on a, avec les notations de 5.1.16 :

$$\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}(\mathcal{O}) = U_{b,k}.U_{2b,\ell},$$

relation qui caractérise $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$ parmi les schémas lisses de fibre générique U_b. De plus, il est clair que $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$ est invariant par Σ (5.1.15), donc provient d'un $\mathcal{O}^\natural$-schéma en groupes lisse encore noté $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$. On vérifie aisément (en raisonnant comme en 5.1.19) que

$$\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}(\mathcal{O}^\natural) = U^\natural_{b,k}.U^\natural_{2b,\ell}.$$

Le schéma en groupes $\mathfrak{U}_{2b,\ell}$ s'identifie à un sous-schéma en groupes fermé distingué de $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$ et l'on déduit facilement de 5.1.18 que les schémas $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$, $\mathfrak{U}_{2b,\ell}$, et $\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}/\mathfrak{U}_{2b,\ell}$ sont des schémas associés à des $\mathcal{O}^\natural$-modules libres de type fini.

5.2.3. — Plus généralement, soit Ψ une partie positivement close de $\Phi^\natural$ et soit $g : \Psi \to \mathbf{R}$ une fonction concave. Considérons l'ensemble $\Psi^\#$ des $a \in \Phi$ telles que $a^\natural \in \Psi$ et la fonction concave $g^\#$ sur $\Psi^\#$ définie par $g^\#(a) = g(a^\natural)$. De 4.6.2 on déduit un schéma en groupes lisse $\mathfrak{U}_{g^\#,\Psi^\#}$, qui est invariant par Σ (5.1.15 (1)) et provient donc d'un $\mathcal{O}^\natural$-schéma en groupes lisse que nous noterons $\mathfrak{U}_{g,\Psi}$. L'application produit

$$\prod_{b \in \Psi_{nd}} \mathfrak{U}_{b,(g(b),g(2b))} \to \mathfrak{U}_{g,\Psi}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}^\natural$-schémas. Si l'on s'est donné un système de racines positives $\Phi^{\natural+}$ dans $\Phi^\natural$, et une fonction concave g sur $\Phi^\natural$, on pose $\mathfrak{U}_g^\pm = \mathfrak{U}_{g,\Phi^{\natural\pm}}$. Lorsque $g = f_\Omega$, où Ω est une partie bornée non vide de $A^\natural$, on pose $\mathfrak{U}_\Omega^{\pm\natural} = \mathfrak{U}_g^\pm$, etc. : ce sont des sous-schémas en groupes fermés de $\mathfrak{G}_\Omega^0$ et $\mathfrak{U}_\Omega^{\pm\natural}(\mathcal{O}^\natural) = U_\Omega^{\pm\natural}$ (conformément à nos conventions, $U_\Omega^{+\natural}$ est le sous-groupe engendré par les $U_{b,f_\Omega(b)}^\natural$ pour $b \in \Phi^{\natural+}$ (I, 7.1.1)).

5.2.4. — Soit Ω une partie bornée non vide de $A^\natural$. Comme l'image de $A^\natural$ dans $\mathscr{I}(Z)$ est l'unique point x invariant par Σ, on voit aisément que l'adhérence schématique de Z dans $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega^\natural$ s'identifie à $\mathfrak{Z}$. Du théorème 2.2.3 et de son corollaire 2.2.8, résulte alors que le morphisme produit

$$\mathfrak{U}_\Omega^{-\natural} \times \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_\Omega^{+\natural} \to \hat{\mathfrak{G}}_\Omega^\natural \quad (\text{resp. } \mathfrak{U}_\Omega^{-\natural} \times \mathfrak{Z}^0 \times \mathfrak{U}_\Omega^{+\natural} \to \mathfrak{G}_\Omega^0)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}^\natural$-schémas sur un ouvert $\hat{\mathfrak{C}}_\Omega^\natural$ (resp. $\mathfrak{C}_\Omega^{\natural 0}$) de $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega^\natural$ (resp. $\mathfrak{G}_\Omega^0$).

On montre alors comme en 4.6.6 et 7 que

$$\mathfrak{G}_\Omega^0 = \mathfrak{U}_\Omega^{+\natural}(\mathcal{O}^\natural) \cdot \mathfrak{C}_\Omega^{\natural 0}, \quad \hat{\mathfrak{G}}_\Omega^\natural = \mathfrak{U}_\Omega^{+\natural}(\mathcal{O}^\natural) \cdot \hat{\mathfrak{C}}_\Omega^\natural = \mathfrak{G}_\Omega^0 \cdot \mathfrak{Z},$$
$$\mathfrak{G}_\Omega^0(\mathcal{O}^\natural) = \mathfrak{U}_\Omega^{+\natural}(\mathcal{O}^\natural)\mathfrak{U}_\Omega^{-\natural}(\mathcal{O}^\natural)\mathfrak{U}_\Omega^{+\natural}(\mathcal{O}^\natural)\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural) = U_\Omega^{+\natural} U_\Omega^{-\natural} N_\Omega^{0\natural},$$
$$\hat{\mathfrak{G}}_\Omega^\natural(\mathcal{O}^\natural) = \mathfrak{G}_\Omega^0(\mathcal{O}^\natural)\mathfrak{Z}(\mathcal{O}^\natural),$$

où $N_\Omega^{0\natural} = N^\natural \cap \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural) U_\Omega^\natural$. De plus $\mathfrak{G}_\Omega^0(\mathcal{O}^\natural)$ *est le sous-groupe* $P_\Omega^{0\natural}$ *de* $G^\natural$ *engendré par* $U_\Omega^\natural$ *et* $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural)$.

5.2.5. Proposition. — *Si* G *est simplement connexe, alors le* $\mathcal{O}^\natural$*-schéma en groupes canonique* $\mathfrak{Z}$ *de fibre générique* Z *est connexe,* i.e. *on a* $\mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{Z}$.

Prenons pour Ω une facette F de $A^\natural$. Comme F est une partie d'une facette de A, on a $\mathfrak{G}_F = \mathfrak{G}_F^0$ (4.6.32). Par suite, l'ouvert $\mathfrak{C}_F^\natural$ de 5.2.4 est à fibres connexes et $\mathfrak{Z}$ est nécessairement connexe.

5.2.6. Définition. — *Les sous-groupes parahoriques (resp. les sous-groupes d'Iwahori) de* G *sont les fixateurs connexes dans* G(K) (4.6.28) *des facettes (resp. chambres) de l'immeuble* $\mathscr{I}$.

Autrement dit, les sous-groupes parahoriques de G sont les groupes $P_F^0 = \mathfrak{G}_F^0(\mathcal{O})$ de points entiers des composantes connexes des schémas associés aux facettes de $\mathscr{I}$. Rappelons que l'application $F \mapsto P_F^0$ est *injective* (4.6.29).

Un $K^\natural$*-sous-groupe parahorique* de G est par définition un sous-groupe parahorique invariant par le groupe de Galois Σ, ou, ce qui est équivalent, vu 4.6.29, le fixateur connexe dans G(K) d'une facette de $\mathscr{I}$ invariante par Σ ou encore d'une facette de $\mathscr{I}^\natural$ (cf. 5.1.28). De 5.1.27 résulte alors :

5.2.7. Proposition. — *Si* G *est anisotrope sur* $K^\natural$, *alors* G *possède un unique* $K^\natural$*-sous-groupe parahorique.*

5.2.8. Proposition. — *Deux* $K^\natural$*-sous-groupes parahoriques sont égaux si et seulement si leurs intersections avec* $G(K^\natural)$ *sont égales.*

Soient F et F′ deux facettes de $\mathscr{I}^\natural$. Supposons que $P_F^0 \cap G(K^\natural) = P_{F'}^0 \cap G(K^\natural)$ et montrons que $F = F'$. Comme F et F′ sont contenues dans un même appartement de $\mathscr{I}^\natural$, on peut, quitte à conjuguer par un élément de $G(K^\natural)$, les supposer contenues dans $A^\natural$. Si alors $F' \not\subset \overline{F}$, il existe un élément $u \in U_F^\natural$ ne fixant pas F′ (I, 7.4.5); mais $U_F^\natural \subset P_F^0 \cap G(K^\natural)$, d'où une contradiction. Par suite $\overline{F} = \overline{F}'$ et $F = F'$.

Cette proposition justifie que l'on appelle parfois, par abus de langage, sous-groupes parahoriques de $G(K^\natural)$ les intersections avec $G(K^\natural)$ des $K^\natural$-sous-groupes parahoriques de G.

5.2.9. — Si G est *simplement connexe*, on a vu (4.6.32) que le fixateur connexe d'une facette F de $\mathscr{I}$ est égal à son fixateur ou à son stabilisateur dans G(K) et par suite est aussi le fixateur ou le stabilisateur de n'importe quel point de F. Les groupes de points rationnels sur $K^\natural$ des $K^\natural$-sous-groupes parahoriques de G sont donc alors les fixateurs dans $G(K^\natural)$ des facettes de $\mathscr{I}^\natural$.

5.2.10. Proposition. — *Supposons* G *simplement connexe. Soient* C *une chambre de* $A^\natural$, B *le fixateur de* C *dans* $G(K^\natural)$, **S** *l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de* C *dans l'appartement* $A^\natural$.

(i) *Le quadruplet* $(G(K^\natural), B, N^\natural, \mathbf{S})$ *est un double système de Tits* (I, 5.1.1) *dont le groupe de Weyl est le groupe de Weyl affine du système de racines affines de* $A^\natural$ *et dont les sous-groupes parahoriques* (I, 1.5.1) *sont les groupes de points rationnels sur* $K^\natural$ *des* $K^\natural$*-sous-groupes parahoriques de* G.

(ii) *Deux* $K^\natural$*-sous-groupes parahoriques de* G *sont conjugués dans* G(K) *si et seulement si ils sont conjugués par un élément de* $G(K^\natural)$ *et si et seulement si leurs intersections avec* $G(K^\natural)$ *sont conjuguées dans* $G(K^\natural)$.

Vu I, 6.5, il suffit pour prouver (i) de montrer que $v^\natural(N^\natural)$ se réduit au groupe de Weyl affine du système de racines affines de $A^\natural$, ou encore que si $n \in N^\natural$ stabilise la chambre C, alors $v^\natural(n) = 1$. Or ceci est évident, puisque comme nous l'avons rappelé plus haut, stabilisateur et fixateur de C dans G(K) sont identiques.

Démontrons (ii). D'après 5.2.8, les deux conditions de (ii) sont équivalentes. Il nous suffit donc de montrer que si F et F′ sont deux facettes de $\mathscr{I}^\natural$, si P et P′ sont les $K^\natural$-sous-groupes parahoriques correspondants et si $g \in G(K)$ est tel que $P' = gPg^{-1}$, alors P et P′ sont conjugués par un élément de $G(K^\natural)$. Comme toute facette de $\mathscr{I}^\natural$ est transformée par un élément de $G(K^\natural)$ d'une facette contenue dans l'adhérence de la chambre C, on peut supposer $F, F' \subset \overline{C}$. Soit $\widetilde{F}$ (resp. $\widetilde{F}'$, $\widetilde{C}$) la facette de $\mathscr{I}$ dont l'intersection avec $\mathscr{I}^\natural$ est F (resp. F′, C). On a $\widetilde{F}, \widetilde{F}' \subset \overline{\widetilde{C}}$ et $\widetilde{F}' = g.\widetilde{F}$. Or deux facettes contenues dans l'adhérence d'une même facette ne peuvent être conjuguées par un élément de G(K) que si elles sont égales (I, 2.1.6, compte tenu de 4.2.22), donc $P = P'$.

5.2.11. — Si G n'est pas simplement connexe, les deux assertions de 5.2.10 sont en général inexactes. L'assertion (i) est déjà fausse pour $G = PGL_2$; nous discuterons de (ii) plus loin.

On peut dire que le passage du cas simplement connexe au cas général d'un groupe réductif connexe quelconque fait apparaître des phénomènes analogues à ceux qui apparaissent dans l'étude classique des groupes réductifs sur un corps quelconque du point de vue des sous-groupes paraboliques et des systèmes de Tits à groupe de Weyl fini, lorsque l'on passe du cas des groupes *connexes* à celui des groupes *non nécessairement connexes*.

Introduisons un sous-groupe de $G^\natural$ qui va jouer en quelque sorte le rôle de « composante neutre » de $G^\natural$, à savoir le sous-groupe G' de $G^\natural$ engendré par les groupes de points rationnels sur $K^\natural$ des $K^\natural$-sous-groupes parahoriques de G. Vu 5.2.4, c'est aussi le sous-groupe engendré par $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural)$ et les $U_b^\natural$ pour $b \in \Phi^\natural$. Si G est simplement connexe, 5.2.10 (i) entraîne que $G' = G^\natural$. Dans le cas général, soit $\varphi : \tilde{G} \to G$ un $K^\natural$-revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. La restriction de φ au centralisateur $\tilde{Z}$ du tore $K^\natural$-déployé maximal $\tilde{S}^\natural = \varphi^{-1}(S^\natural)$ de $\tilde{G}$ se prolonge en un morphisme du $\mathcal{O}^\natural$-schéma canonique $\tilde{\mathfrak{Z}}$ de fibre générique $\tilde{Z}$ dans $\mathfrak{Z}$ (car $\varphi(\tilde{\mathfrak{Z}}(\mathcal{O})) \subset \mathfrak{Z}(\mathcal{O})$: voir 4.2.15) et, comme $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est connexe (5.2.5), on a $\varphi(\tilde{\mathfrak{Z}}(\mathcal{O}^\natural)) \subset \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural)$, d'où $\varphi(\tilde{G}(K^\natural)) \subset G'$ et $G' = \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}^\natural) \cdot \varphi(\tilde{G}(K^\natural))$.

5.2.12. Proposition. — *Soient* C *une chambre de* $A^\natural$, B' *le fixateur de* C *dans* G', **S** *l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de* C *et* $N' = N^\natural \cap G'$.

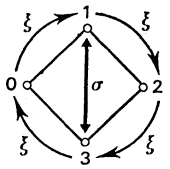
(i) *Le quadruplet* (G', B', N', **S**) *est un double système de Tits dont le groupe de Weyl est le groupe de Weyl affine du système de racines affine de* $A^\natural$ *et dont les sous-groupes parahoriques sont les groupes de points rationnels sur* $K^\natural$ *des* $K^\natural$*-sous-groupes parahoriques de* G.

(ii) *L'injection de* G' *dans* $G^\natural$ *est un homomorphisme* B'-N'*-adapté, de type connexe* (I, 4.1.3).

Cela résulte facilement de I, 6.5.

Remarquons que si H est un groupe réductif non connexe, défini sur $K^\natural$, de composante neutre $H^0 = G$, l'injection de G' dans $H(K^\natural)$ est encore un homomorphisme B'-N'-adapté, mais qui n'est plus nécessairement de type connexe.

5.2.13. — Donnons un contre-exemple à l'assertion (ii) de 5.2.10 dans le cas non simplement connexe. Soit L une extension quadratique de $K^\natural$ contenue dans K et prenons pour G le groupe adjoint du groupe ${}^{L}_{K}\mathfrak{U}_4$ de la forme hermitienne $x^\sigma_{-2}x_2 + x^\sigma_{-1}x_1 + x^\sigma_1 x_{-1} + x^\sigma_2 x_{-2}$ sur L^4 (cf. 4.1.4). Le groupe G est quasi-déployé sur $K^\natural$, déployé sur K, et isomorphe sur K à PGL_4; l'échelonnage $\mathscr{E}$ de G_K est de type A_3 (4.2.23) et l'image Ξ de G(K) dans le groupe des automorphismes du graphe de Dynkin Δ de $\mathscr{E}$ est le groupe des permutations circulaires des sommets 0, 1, 2, 3 :



ξ = générateur de Ξ,
σ = générateur de $\mathrm{Gal}(L/K^{\natural})$.

Quant au groupe de Galois Σ, il opère sur Δ via $\mathrm{Gal}(L/K^{\natural})$ et le générateur σ de $\mathrm{Gal}(L/K^{\natural})$ opère par l'échange des sommets 1 et 3. Soit alors C une chambre de $\mathscr{I}$ invariante par Σ (cf. 4.2.3). Les deux sous-groupes parahoriques de G associés aux facettes de type $\{0, 2\}$ et $\{1, 3\}$ de C sont invariants par Σ et sont conjugués par un élément du stabilisateur de C dans G(K) d'image ξ. Mais l'un de ces deux $K^{\natural}$-sous-groupes parahoriques est maximal et l'autre ne l'est pas. Ils ne peuvent donc pas être conjugués par un élément de $G(K^{\natural})$.

On peut aussi donner des exemples de deux sous-groupes parahoriques maximaux invariants par Σ conjugués dans G(K) et non conjugués dans $G(K^{\natural})$.

Cependant, pour répondre à une question de Y. A. Nisnevich, donnons un résultat positif.

5.2.14. Proposition. — *Supposons* G *semi-simple et déployé sur* K *et soient* x, y *deux points de* $\mathscr{I}^{\natural}$ *qui sont des points spéciaux de* $\mathscr{I}$. *Si les deux* $K^{\natural}$*-sous-groupes parahoriques maximaux* P_x^0 *et* P_y^0 *sont conjugués par un élément de* G(K), *ils le sont par un élément de* $G(K^{\natural})$.

Notons tout d'abord que les hypothèses faites reviennent à dire que l'on s'est donné deux $\mathscr{O}^{\natural}$-schémas en groupes semi-simples (*i.e.* dont les fibres sont des groupes semi-simples) lisses de même fibre générique H. En effet, comme K est strictement hensélien, le groupe H est nécessairement déployé sur K (cf. 4.6.31) et vérifie automatiquement toutes les conditions que nous avons imposées à G; enfin, 5.1.40 montre que ces schémas sont ceux associés à deux points de $\mathscr{I}^{\natural}$ spéciaux dans $\mathscr{I}$.

On peut évidemment supposer que x et y appartiennent à $A^{\natural}$. Si P_x^0 et P_y^0 sont conjugués dans G(K), la décomposition de Bruhat $G(K) = P_y^0 N(K) P_x^0$ (I, 7.3.4) entraîne l'existence d'un élément $n \in N(K)$ tel que $y = n.x$. Puisque x est un point spécial de A, $P_x^0 \cap N(K)$ contient un système de représentants du groupe de Weyl ${}^{v}W = N(K)/T(K)$ et l'on peut prendre $n \in T(K)$; $v(n)$ est alors une translation invariante par le groupe de Galois Σ, puisque son vecteur $y - x$ l'est.

Soit π une uniformisante de $K^{\natural}$, qui est aussi une uniformisante de K, et soit T_π le sous-groupe de T formé des $t \in T(K)$ tels que $\chi(t)$ soit une puissance de π pour tout $\chi \in X^*(T)$. Comme T est déployé sur K, on a $T(K) = T_\pi . T_b(K)$ (cf. 4.4.1); comme G est semi-simple, le noyau de la restriction de v à T(K) est égal à $T_b(K)$ et v définit un isomorphisme de T_π sur $v(T(K))$; enfin, T_π est invariant par Σ et v est compatible

avec les actions de Σ. Par suite, il existe un élément $t \in T_\pi \cap T(K^\natural)$ et un seul tel que $v(t) = v(n)$. On a alors $y = t.x$ et $P_y^0 = tP_x^0 t^{-1}$, c.q.f.d.

5.2.15. Remarque. — La proposition précédente devient inexacte si l'on ne suppose plus que G est *semi-simple*. Un contre-exemple est fourni par le groupe U_2 d'une forme hermitienne isotrope à deux variables relative à une extension quadratique étale du corps de base $K^\natural$.

ANNEXE. — Relations de commutation

Dans cette Annexe, K désigne un corps (éventuellement fini) et G un groupe réductif connexe, défini et quasi-déployé sur K. On reprend les notations de 1.1 et 4.1. On choisit un système cohérent d'épinglages $(x_a)_{a\in\Phi}$ des U_a, déduit d'un système de Chevalley-Steinberg donné (4.1.16) et l'on note V_a le K-groupe algébrique source de x_a.

A.1. — Soient $a, b \in \Phi$ avec $b \neq -a$, et choisissons un ordre total sur $(a+b)\cap\Phi$ [1]. D'après 1.1.8, il existe une famille $(\gamma^c_{a,b})_{c\in(a+b)\cap\Phi}$ et une seule de morphismes de K-variétés

$$\gamma^c_{a,b} : V_a \times V_b \to V_c$$

telle que le morphisme commutateur $\gamma_{a,b}$ soit le composé

$$U_a \times U_b \xrightarrow{(x_a,x_b)^{-1}} V_a \times V_b \xrightarrow{\Pi\gamma^c_{a,b}} \prod_{c\in(a+b)\cap\Phi} V_c \xrightarrow{\text{prod}} G.$$

Le but de cette Annexe est de donner des formules presque entièrement explicites pour les $\gamma^c_{a,b}$. Disons tout de suite qu'il n'y a là rien de vraiment nouveau : les résultats qui suivent sont au moins implicitement contenus dans [14] et [31], mais n'ont jamais été, à notre connaissance, complètement explicités et il n'était peut-être pas inutile que ces formules soient effectivement écrites quelque part. Cependant, nous laisserons au lecteur le soin de faire les calculs qui permettent de les établir à partir de [14] et [31] (voir aussi I, § 10, [35] et [41]).

A.2. — Il est clair qu'il suffit d'étudier le cas où G est simplement connexe et K-simple, donc de la forme $\Pi_{L/K}G'$, où L est une extension séparable de degré fini de K et où G' est un groupe algébrique défini sur L, simplement connexe, absolument simple et quasi-déployé sur L. Les systèmes de racines de G et de G' s'identifient naturellement et les $\gamma^c_{a,b}$ sont les $\Pi_{L/K}$ des morphismes analogues pour G'. Par suite, il suffit de considérer le cas où G est *absolument simple*, ce que nous supposons désormais.

A.3. — Il résulte alors de 4.1.16 que, pour $a \in \Phi$, la source V_a de l'épinglage x_a est de l'un des trois types suivants :

(I) La droite $\mathfrak{D}_K$;

(II) Le groupe algébrique $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$, où L est une extension quadratique ou cubique séparable de K;

(III) Le groupe algébrique H(L, K), où L est une extension quadratique séparable de K (4.1.9).

---

[1] En réalité, les U_c pour $c \in (a+b)\cap\Phi$ commutent entre eux, et le choix de cet ordre est sans conséquence, sauf dans le cas où $\{a, b\}$ est une base d'un sous-système de racines de type G_2 de Φ.

De plus, les corps L qui interviennent pour les différents $a \in \mathbf{\Phi}$ de type (II) ou (III) sont tous égaux, à condition, lorsque G est de type ${}^6D_4$, de choisir convenablement le système cohérent d'épinglages, ce que nous supposons fait.

A.4. — Dans le cas où G est déployé, les $\gamma^c_{a,b}$ sont donnés par les formules de Chevalley ([14]; cf. 3.2.3), sur lesquelles repose finalement tout ce qui suit. Mais on sait que ces formules ne donnent les $\gamma^c_{a,b}$ qu'*au signe près* et qu'il n'existe pas en général de manière naturelle de déterminer ces signes (cf. [35]). Dans le cas non déployé, à cette incertitude des signes s'ajoute l'impossibilité d'éliminer celle due au groupe de Galois de L, lorsqu'il y a des racines de type (II) ou (III) avec L quadratique (cf. 4.1.17).

C'est pourquoi nous ne donnerons les $\gamma^c_{a,b}$ qu'à une « similitude » près : deux morphismes de $V_a \times V_b$ dans V_c sont dits *semblables* (en symbole : $\sim$) s'ils ne diffèrent que par des opérations des types suivants effectuées successivement sur l'un ou plusieurs des groupes V :

— passage à l'inverse;
— automorphisme déduit de l'unique K-automorphisme σ non trivial de L, lorsque V est de type (II) ou (III) et que $[L : K] = 2$.

Par exemple, les opérations permises sur V dans le cas (III) sont les suivantes :

$$(u, v) \mapsto (-u, -v + u^\sigma u),$$

$$(u, v) \mapsto (u^\sigma, v^\sigma),$$

$$(u, v) \mapsto (-u^\sigma, -v^\sigma + u^\sigma u).$$

A.5. — Soit L une extension séparable de K. Nous noterons Nr et Tr les morphismes de K-variétés de $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ dans $\mathfrak{D}_K$ définis comme suit. Pour toute K-algèbre R et tout $u \in \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L(R) = L \otimes R$, on pose

$$\mathrm{Nr}(u) = \mathrm{Norme}_{L\otimes R/R}\, u \in R = \mathfrak{D}_K(R),$$

$$\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}_{L\otimes R/R}\, u \in R.$$

Si de plus L est une extension *cubique* de K, il existe un endomorphisme θ de $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et un seul tel que $\mathrm{Nr}(u) = u\theta(u)$ pour toute K-algèbre R et tout $u \in L \otimes R$. Enfin, on note $*$ le morphisme de $(\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L)^2$ dans $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ défini par

$$u * v = \theta(u + v) - \theta(u) - \theta(v) \qquad (u, v \in L \otimes R).$$

A.6. — Donnons maintenant les $\gamma^c_{a,b}$ dans les différents cas possibles (en nous limitant bien sûr à ceux où $(a + b) \cap \mathbf{\Phi} \neq \varnothing$!). Reprenons les notations et la classification de 4.1.16, avec les simplifications dues à l'hypothèse G absolument simple, qui entraîne $L_2 = K$ et $\Sigma = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. Lorsque Φ est réduit, nous identifions Φ et $\mathbf{\Phi}$ par la bijection $a \mapsto \mathbf{R}^\times_+ . a$. Enfin pour $a, b \in \Phi$ ou $\mathbf{\Phi}$, on note $\widehat{ab}$ l'angle de a et de b.

a) Card $\Sigma = 1$. Autrement dit, $\tilde{K} = K$ et G est déployé sur K. Alors $V_a = \mathfrak{D}_K$ pour toute $a \in \Phi$ et les formules de Chevalley ([14], 3.2.3) disent qu'il existe des entiers $C^c_{a,b}$ (égaux à 1, 2 ou 3) tels que

$$\gamma^c_{a,b}(u, v) \sim C^c_{a,b} u^p v^q \quad \text{pour } c = pa + qb \in \Phi, \quad p, q \in \mathbf{N}^*.$$

b) Card $\Sigma = 2$ *et* Φ *est réduit.* Autrement dit, G est de type ${}^2A_{2n-1}$ (*i.e.* SU_{2n}) pour $n \geqq 2$, ${}^2D_n$ (*i.e.* $Spin_{2n}$ non déployé) pour $n \geqq 4$ ou ${}^2E_6$. Alors, $L = \tilde{K}$ et $[L : K] = 2$.

— Si $\widehat{ab} = 90^\circ$, ce qui entraîne que a et b sont courtes, que $c = a + b$ est longue, que $V_a = V_b = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et que $V_c = \mathfrak{D}_K$, on a

$$\gamma^{a+b}_{a,b}(u, v) \sim \mathrm{Tr}(uv).$$

— Si $\widehat{ab} = 120^\circ$, ce qui entraîne que $c = a + b$ et que $V_a = V_b = V_c$ est égal à $\mathfrak{D}_K$ (resp. $\Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$) lorsque a, b, et c sont longues (resp. courtes), on a

$$\gamma^{a+b}_{a,b}(u, v) \sim uv.$$

— Si $\widehat{ab} = 135^\circ$ et si a est courte et b longue, on a $V_a = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et $V_b = \mathfrak{D}_K$; de plus, ou bien $c = a + b$, c est courte et $V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$, ou bien $c = 2a + b$, c est longue et $V_c = \mathfrak{D}_K$. On a

$$\gamma^{a+b}_{a,b}(u, v) \sim uv,$$
$$\gamma^{2a+b}_{a,b}(u, v) \sim v\,\mathrm{Nr}(u).$$

c) Card $\Sigma = 2$ *et* Φ *n'est pas réduit* : autrement dit, G est de type ${}^2A_{2n}$ (*i.e.* SU_{2n+1}) avec $n \geqq 1$. Alors, $L = \tilde{K}$ et $[L : K] = 2$.

— Si $\widehat{ab} = 90^\circ$ et si a et b sont non pluriels, alors c est pluriel et contient les deux racines $a + b$ et $\frac{1}{2}(a + b)$. On a $V_a = V_b = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$, $V_c = H(L, K)$ et

$$\gamma^c_{a,b}(u, v) \sim (0, v^\sigma u^\sigma - uv).$$

— Si $\widehat{ab} = 90^\circ$ et si a et b sont pluriels, alors c est non pluriel et contient la seule racine $a + b$. On a $V_a = V_b = H(L, K)$, $V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et

$$\gamma^c_{a,b}((u, v), (u', v')) \sim uu'.$$

— Si $\widehat{ab} = 120^\circ$, alors a, b et c sont non pluriels, $c = a + b$,

$$V_a = V_b = V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L \quad \text{et} \quad \gamma^c_{a,b}(u, v) \sim uv.$$

— Si $\widehat{ab} = 135^\circ$ et si a est non pluriel, alors b est pluriel, $V_a = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$, $V_b = H(L, K)$ et ou bien $\widehat{ac} = 45^\circ$, c est pluriel, contient les deux racines $a + b$ et $2a + 2b$, $V_c = H(L, K)$ et

$$\gamma^c_{a,b}(u, (u', v')) \sim \gamma^c_{b,a}((u', v'), u) \sim (uu', uu^\sigma v'^\sigma),$$

ou bien $\widehat{ac} = 90^\circ$, c est non pluriel et contient la seule racine $a + 2b$, $V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et

$$\gamma^c_{a,b}(u, (u', v')) \sim \gamma^c_{b,a}((u', v'), u) \sim uv'.$$

d) et e) Card $\Sigma = 3$ *ou* 6. Autrement dit, G est une forme trialitaire de D_4. Alors, L est une extension cubique de K et l'on peut choisir le système cohérent d'épinglages de telle sorte que :

— Si $\widehat{ab} = 60^\circ$, alors $c = a + b$, $V_a = V_b = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$, $V_c = \mathfrak{D}_K$ et

$$\gamma^c_{a,b}(u, v) \sim \mathrm{Tr}(uv);$$

— Si $\widehat{ab} = 120^\circ$ et si a et b sont courtes, alors $V_a = V_b = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et

$$\gamma^c_{a,b}(u, v) \sim \begin{cases} u * v & \text{lorsque } c = a + b, \quad \text{d'où } V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L, \\ \mathrm{Tr}(\theta(u)v) & \text{lorsque } c = 2a + b, \quad \text{d'où } V_c = \mathfrak{D}_K, \\ \mathrm{Tr}(u\theta(v)) & \text{lorsque } c = 2b + a, \quad \text{d'où } V_c = \mathfrak{D}_K; \end{cases}$$

— Si $\widehat{ab} = 120^\circ$ et si a et b sont longues, alors $c = a + b$ est longue, $V_a = V_b = V_c = \mathfrak{D}_K$ et l'on a

$$\gamma^{a+b}_{a,b}(u, v) \sim uv;$$

— Si $\widehat{ab} = 150^\circ$ et si a est courte, d'où $V_a = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L$ et $V_b = \mathfrak{D}_K$, on a :

$$\gamma^c_{a,b}(u, v) \text{ et } \gamma^c_{b,a}(v, u) \sim \begin{cases} uv & \text{si } c = a + b, \quad \text{d'où } V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L, \\ \theta(u)v & \text{si } c = 2a + b, \quad \text{d'où } V_c = \Pi_{L/K}\mathfrak{D}_L, \\ \mathrm{Nr}(u)v & \text{si } c = 3a + b, \quad \text{d'où } V_c = \mathfrak{D}_K, \\ \mathrm{C}.\mathrm{Nr}(u)v^2 & \text{si } c = 3a + 2b, \quad \text{d'où } V_c = \mathfrak{D}_K, \end{cases}$$

où C est un entier égal à 1 ou 2 suivant l'ordre total choisi sur $(a + b) \cap \Phi$ (et qui n'est pas le même pour $\gamma^c_{a,b}(u, v)$ et $\gamma^c_{b,a}(v, u)$).

Remarque. — Sous la forme où ils ont été énoncés, les résultats de cet Appendice sont valables que l'on pose $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$, comme dans I, ou $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, comme dans [NB] A, chap. I.

Errata et Addenda au chapitre I

E.1. — P. 29, dans le « Tableau des échelonnages irréductibles », ajouter en huitième position l'échelonnage

$$\mathrm{B\text{-}BC_2} \qquad 2 \qquad \mathrm{B_2} \qquad \mathrm{BC_2} \qquad \overset{s}{\circ}\!\!=\!\!\rangle\!\!=\!\!\overset{\times}{\circ}\!\!=\!\!\langle\!\!=\!\!\overset{s}{\circ}$$

E.2. — P. 136, n° 6.4.8, il est préférable de renforcer légèrement la définition des fonctions quasi-concaves en exigeant qu'elles satisfassent en plus de (QC 1) et (QC 2) à la condition

(QC 0) *Pour toute* $a \in \Phi$ *telle que* $2a \in \Phi$, *on a* $f(2a) \leqq \inf \Gamma_{2a} \cap [2f(a), +\infty[$.

Il est clair qu'une fonction concave satisfait à (QC 0), de même que toute fonction f_Ω associée à une partie d'appartement (I, 7.1.1). Remarquons aussi que (QC 0) entraîne que le groupe dérivé de $U_{a,f(a)}$ est contenu dans $U_{2a,f(2a)}$. Bien entendu, tous les résultats démontrés dans I pour les fonctions quasi-concaves restent *a fortiori* valables avec la nouvelle définition.

En fait, cette modification ne change pas grand-chose. Soit en effet $f : \Phi \to \tilde{\mathbf{R}}$; posons $g(a) = f(a)$ pour $a \in \Phi$, $a/2 \notin \Phi$ et $g(2a) = \inf(f(2a), 2f(a))$ pour $a, 2a \in \Phi$. Il est clair que (avec la notation de I, 6.4.9)

$$(1) \qquad X_a = U_{a,f(a)}\, U_{2a,f(2a)} = U_{a,g(a)}\, U_{2a,g(2a)}$$

pour toute $a \in \Phi^{\mathrm{red}}$ (par contre, on peut avoir $U_{2a,g(2a)} \neq U_{2a,f(2a)}$ pour $2a \in \Phi - \Phi^{\mathrm{red}}$). Il en résulte que *les groupes* U_f *et* U_g *sont égaux*, donc aussi leurs intersections $U_{f,a}$ et $U_{g,a}$ avec U_a pour $a \in \Phi$. Montrons que *si* f *satisfait à* (QC 1) *et* (QC 2), *alors* g *satisfait à* (QC 0), (QC 1) *et* (QC 2). C'est évident pour (QC 0). Montrons que g satisfait à (QC 1) : c'est immédiat d'après (1) si $a \in \Phi^{\mathrm{red}}$. Si $a, 2a \in \Phi$, posons

$$h_\pm = \inf\{k \in \Gamma_{\pm 2a} \mid k \geqq g(\pm 2a)\} \in \tilde{\mathbf{R}}$$

(cf. I, 6.4.10), de sorte que $U_{\pm 2a,g(\pm 2a)} = U_{\pm 2a,h_\pm}$. On montre comme en I, 6.4.11 que $h_+ + h_- \geqq 0$, que $h_+ + h_- > 0$ entraîne $N_g^{(2a)} \subset H$ et que $h_+ + h_- = 0$ entraîne $h_\pm \in \Gamma_{\pm 2a}$ et $v(N_g^{(2a)}) = \{1, r_{2a,h_+}\}$. De I, 6.3.2, 6.3.3 et 6.3.4 résulte alors que $U_{-2a,g(-2a)}\, U_{2a,g(2a)}\, N_g^{(2a)}$ est un groupe, c.q.f.d.

Montrons enfin que g satisfait à (QC 2). Comme $U_{a,g(a)} \supset U_{a,f(a)}$ pour tout $a \in \Phi$, avec égalité sauf peut-être si $a \in \Phi - \Phi^{\mathrm{red}}$, on voit aussitôt que le seul cas à examiner est celui du commutateur $Y = (U_{2a,g(2a)}, U_{b,g(b)})$ avec $a, 2a, b \in \Phi$, lequel est nul sauf si $\{a, b\}$ forme une base d'un sous-système de type $\mathrm{BC_2}$ de Φ, composé des

racines a, $2a$, $2a+b$, $a+b$, $2(a+b)$, b et de leurs opposées. Soient V_1 le sous-groupe engendré par U_{a+b} et U_{2a+b}, V_2 celui engendré par $U_{2(a+b)}$ et U_{2a+b} et X celui engendré par X_{a+b} et X_{2a+b}. Comme $U_{2(a+b)}$ et U_{2a+b} sont centraux dans V_1, l'application produit est une bijection de $U_{a+b} \times U_{2a+b}$ sur V_1 (resp. de $U_{2(a+b)} \times U_{2a+b}$ sur V_2, resp. de $X_{a+b} \times X_{2a+b}$ sur X). Or, Y est contenu dans V_2 d'après (DR 2) et dans X puisque f satisfait à (QC 2) et l'injectivité de l'application produit $U_{a+b} \times U_{2a+b} \to V_1$ entraîne que $V_2 \cap X = (U_{2(a+b)} \cap X_{a+b}).(U_{2a+b} \cap X_{2a+b})$, ce qui achève la démonstration puisque $U_{2(a+b)} \cap X_{a+b} = U_{2(a+b),\, g(2(a+b))}$ et $U_{2a+b} \cap X_{2a+b} = X_{2a+b} = U_{2a+b,\, g(2a+b)}$.

E.3. — P. 136, ligne 9, lire « quasi-concave à valeurs dans $\omega(K^\times)$ » au lieu de « quasi-concave ».

E.4. — P. 136, ajouter à la fin du n° 6.4.8 :

Plus généralement, si toutes les racines de Φ sont de même longueur, il résulte facilement de 6.1.8 (6) et 6.2.7 que toute fonction quasi-concave f telle que $f(a) \in \Gamma_a$ pour tout $a \in \Phi$ est nécessairement concave. Si Φ est de type A_n, on peut même montrer que f est de la forme f_Ω, où Ω est une partie bornée non vide de A.

E.5. — P. 136, n° 6.4.9, la proposition 6.4.9 et sa démonstration ne sont exactes que si l'on suppose f quasi-concave au sens renforcé de l'erratum E.2 ci-dessus. Si l'on garde l'ancienne définition de la quasi-concavité, il faut remplacer Φ par Φ^{red} dans l'énoncé de 6.4.9 (i).

E.6. — P. 143, ligne 6 de 6.4.24, lire (6.4.23) au lieu de (6.4.22).

E.7. — P. 178, ligne 1 de 7.4.27, lire $v \in D$ au lieu de $v \in \overline{D}$.

E.8. — P. 179, ligne 9 du bas, lire $h = 1/3$ au lieu de $h = 1/2$. P. 180, lignes 1 et 4, lire $kr/(1 + cr(1-k))$ au lieu de kr et $c = r = 1$ au lieu de $r = 1$.

E.9. — Des lecteurs nous ont fait remarquer que le cas du groupe symplectique sur un corps K de caractéristique 2 semble ne pas être couvert par le § 10, Valuations des groupes classiques : si l'on adhère strictement aux conventions du § 10, on a dans ce cas $\sigma = \mathrm{id}$, $\varepsilon = 1$, d'où $K_{\sigma,\varepsilon} = \{0\}$, et si f est une forme alternée non dégénérée de rang $2r$ sur l'espace vectoriel X et $q : X \to K/K_{\sigma,\varepsilon} = K$ une forme pseudo-quadratique telle que $q(x+y) = q(x) + q(y) + f(x,y)$, le groupe des isométries du couple (f, q), qui est celui considéré dans tout le § 10, est le groupe orthogonal de q et non le groupe symplectique de f.

Cependant, il serait facile de voir que les résultats du § 10 restent valables pour le groupe symplectique de f à condition de prendre $X_0 = \{0\}$, $q = 0$, de remplacer partout $K_{\sigma,\varepsilon}$ par K et de désigner par Z l'ensemble des couples $(0, k)$ pour $k \in K$. L'ensemble Φ des racines est, avec les notations de 10.1.2, l'ensemble $\{2a_i, a_{ij}\}$, de type (C).

En réalité, le cas du groupe symplectique sur un corps K de caractéristique 2 est bel et bien traité dans notre § 10, mais de manière indirecte. On sait en effet (voir J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, Paris, Hermann, 1948, p. 54) que le groupe $Sp_{2r}(K)$ est isomorphe au groupe orthogonal d'une forme quadratique (usuelle) *défective* : si $(e_i)_{1 \leqq \pm i \leqq r}$ est une base symplectique de K^{2r} et $(x_j)_{j \in J}$ une base de K sur K^2, il suffit de considérer l'espace vectoriel X somme directe de $X_1 = K^{2r}$ et de $X_0 = K^{(J)}$ et de poser

$$q(\Sigma \xi_i e_i + \Sigma \eta_j f_j) = \sum_{1 \leqq i \leqq r} \xi_i \xi_{-i} + \sum_{j \in J} x_j \eta_j^2$$

(où $(f_j)_{j \in J}$ est la base canonique de $K^{(J)}$). Tout élément $u \in O(q)$ a pour restriction à X_0 l'identité (*loc. cit.*, p. 53) et définit par passage au quotient un automorphisme $\bar{u}$ de $X_1 \simeq X/X_0$, et l'application $u \mapsto \bar{u}$ est un isomorphisme de $O(q)$ sur $Sp_{2r}(K)$ (*loc. cit.*, p. 54).

On peut faire des remarques analogues pour les autres formes du groupe symplectique. Soit K un corps de caractéristique 2, muni d'une involution σ. On a $K_{\sigma,\varepsilon} = \mathrm{Tr}\, K$. Soit f une forme σ-sesquilinéaire non dégénérée *tracique* sur un espace vectoriel X sur K. On peut toujours choisir une forme pseudo-quadratique $q : X \to K/\mathrm{Tr}\, K$ qui soit associée à f : il suffit de choisir une base (e_i) de X et des $a_{ij} \in K$ tels que $a_{ij} + a_{ji}^{\sigma} = f(e_i, e_j)$ pour tous i, j, et de poser

$$q(\Sigma e_i \xi_i) = \Sigma \xi_i^{\sigma} a_{ij} \xi_j + \mathrm{Tr}\, K.$$

Si la restriction de σ au centre C de K n'est pas l'identité, il est une manière canonique de faire ce choix : dans ce cas, il existe en effet un élément $\lambda \in C$ tel que $\lambda + \lambda^{\sigma} = 1$ et l'on peut prendre $q(x) = \lambda f(x, x) + \mathrm{Tr}\, K$ (cf. I, p. 212); le groupe unitaire de f est alors aussi le groupe $\mathrm{Is}(q, f)$ traité au § 10 de I.

Mais si la restriction de σ au centre C de K est l'identité (involution « de première espèce »), un tel $\lambda \in C$ n'existe pas, il n'y a pas en général de choix canonique pour q et le groupe unitaire $U(f)$ de f est en général strictement plus grand que $\mathrm{Is}(q, f)$ et semble donc non couvert par le § 10 de I.

Comme plus haut, deux réponses sont possibles. Tout d'abord, on peut vérifier que les résultats du § 10 restent valables dans ce cas, à condition de remplacer $K_{\sigma,\varepsilon} = \mathrm{Tr}\, K$ par le groupe $K^{(\sigma)}$ des éléments de K invariants par σ, et de désigner par q l'application $x \mapsto \{k \in K \mid f(x, x) = \mathrm{Tr}\, k\}$ de X dans $K/K^{(\sigma)}$. L'ensemble Z de I, 10.1.1 devient alors $\{(z, k) \in X_0 \times K \mid f(z, z) = \mathrm{Tr}\, k\}$ et l'on pose

$$\omega_q(z) = \frac{1}{2} \sup \{\omega(k) \mid k \in K, \mathrm{Tr}\, k = f(z, z)\}.$$

On peut aussi, comme ci-dessus, se ramener au cas explicitement traité au § 10. On considère le quotient S de $K^{(\sigma)}$ par le sous-groupe Tr K. La loi d'opération $(k, x) \mapsto k^{\sigma} x k$

de K dans $K^{(\sigma)}$ passe au quotient et définit sur S une structure, dite canonique, d'espace vectoriel à droite sur K. On pose alors $\tilde{X} = X \oplus S$,

$$\tilde{f}((x, s), (x', s')) = f(x, x')$$
$$\tilde{q}((x, s) = q(x)) + s + \mathrm{Tr}\, K$$

où q est une forme pseudo-quadratique associée à f choisie arbitrairement. On voit alors que S est le noyau de $\tilde{f}$, que le couple $(\tilde{q}, \tilde{f})$ est non dégénéré, que tout élément $g \in \mathrm{Is}(\tilde{q}, \tilde{f})$ induit l'identité sur S et définit par passage au quotient un automorphisme $\bar{g}$ de $X = \tilde{X}/S$ qui appartient à $U(f)$. Enfin, il résulte de la prop. 8.2.9 de [37], p. 126, que *l'application* $g \mapsto \bar{g}$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Is}(\tilde{q}, \tilde{f})$ *sur* $U(f)$. On le voit d'ailleurs aisément en montrant que l'ensemble des formes pseudo-quadratiques associées à f est en correspondance bijective avec l'ensemble des supplémentaires de S dans $\tilde{X}$, ou encore avec l'ensemble des applications linéaires h de X dans S : à une telle application h correspond la forme $q_h : x \mapsto \tilde{q}((x, h(x))$.

Soient X_+ et X_- deux sous-espaces totalement isotropes maximaux pour f de X, d'intersection $\{0\}$, et soit X_0 l'orthogonal de $X_+ + X_-$ dans X. On peut prendre pour q la forme

$$q(x_+ + x_- + x_0) = f(x_+, x_-) + q_0(x_0) \qquad (x_+ \in X_+,\ x_- \in X_-,\ x_0 \in X_0),$$

où q_0 est une forme pseudo-quadratique sur X_0 associée à la restriction de f à X_0. Pour tout $x_0 \neq 0$ dans X_0, on a $q_0(x_0) + q_0(x_0)^\sigma = f(x_0, x_0) \neq 0$ (I, 10.1.1 (5)), d'où $\tilde{q}(x_0, s) \neq 0$ pour tout $s \in S$. Il en résulte que, si l'on choisit une base $(e_i)_{1 \leqq i \leqq r}$ de X_+ et que l'on note (e_{-i}) la base duale de X_-, les hypothèses de I, 10.1.1 sont satisfaites pour la décomposition $\tilde{X} = \coprod e_i K + \tilde{X}_0$, avec $\tilde{X}_0 = X_0 + S$. De plus, on voit aussitôt que si $\tilde{Z}$ est l'ensemble des $((x_0, s), k) \in \tilde{X}_0 \times K$ tels que $k \in \tilde{q}((x_0, s))$ (cf. I, 10.1.1 *in fine*), alors $((x_0, s), k) \in \tilde{Z}$ si et seulement si $k + k^\sigma = f(x_0, x_0)$. Par suite, l'application $g \mapsto \bar{g}$ envoie les transformations linéaires de $\tilde{X}$ définies par les formules de I, 10.1.2 (en y remplaçant X_0 par $\tilde{X}_0$ et Z par $\tilde{Z}$) sur celles de X définies par les mêmes formules, mais en prenant $Z = \{(x_0, k) \in X_0 \times K \mid k + k^\sigma = f(x_0, x_0)\}$. Ceci démontre la validité de la « première réponse » proposée au début de l'alinéa précédent. Notons que pour $\sigma = \mathrm{id}$, on retrouve le cas du groupe symplectique ordinaire et l'assertion du deuxième alinéa de cet erratum E.9.

Enfin, considérons la famille φ^ω de fonctions définie en I, 10.1.13. Par traduction de I, 10.1.15, on voit que c'est une valuation de la donnée radicielle de $U(f)$ si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) $\omega(f(z, z')) \geqslant \omega_q(z) + \omega_q(z')$ pour $z, z' \in X_0$;

(ii) $\omega(f(z, z')) \geqslant 2 \inf(\omega_q(z), \omega_q(z'))$ pour $z, z' \in X_0$.

En raisonnant comme en I, 10.1.21, et compte tenu de ce que $\omega_q(z) \leqslant \frac{1}{2}\omega(f(z, z)) < +\infty$ pour $z \in X_0$, $z \neq 0$, on montre que (i) et (ii) sont équivalentes à

(iii) ω_q est une norme sur X_0.

Soient alors $\hat{f}$ et $\hat{q}$ les prolongements canoniques de f et q à $\hat{X}_0 = X_0 \otimes \hat{K}$. *Si $\hat{f}$ est anisotrope, alors φ^ω est une valuation de la donnée radicielle de* $U(f)$: sinon, d'après I, 10.1.15 (iii), il existerait $x \in \hat{X}_0 - \{0\}$, $s \in S \otimes \hat{K}$ et $k \in \overline{\mathrm{Tr}\,\hat{K}} \subset \hat{K}^{(\sigma)}$ tels que $k \in \hat{\hat{q}}(x, s)$, d'où $\hat{f}(x, x) = k + k^\sigma = 0$. Inversement, *si* $\hat{K}^{(\sigma)} = \overline{K^{(\sigma)}}$ (condition qui est satisfaite lorsque K est de dimension finie sur son centre) *et si φ^ω est une valuation de la donnée radicielle de* $U(f)$, *alors $\hat{f}$ est anisotrope et $\omega_{\hat{q}}$ est une norme sur $\hat{X}_0$ dont la restriction à X_0 est ω_q*. En effet, on voit aisément que ω_q est la restriction de $\omega_{\hat{q}}$ à X_0 et que $\omega_{\hat{q}}$ est inférieure au prolongement par continuité de ω_q en une semi-norme sur $\hat{X}_0$. Par continuité on déduit de (i) que

$$(\hat{\mathrm{i}}) \qquad \omega(\hat{f}(z, z')) \geqslant \omega_{\hat{q}}(z) + \omega_{\hat{q}}(z') \quad \text{pour } z, z' \in \hat{X}_0.$$

Comme $\hat{f}$ est non dégénérée, (î) entraîne $\omega_{\hat{q}}(z) < +\infty$ pour $z \neq 0$ et $\hat{f}$ est anisotrope. Enfin, l'équivalence de (i) et (iii) montre que $\omega_{\hat{q}}$ est une norme sur $\hat{X}_0$.

Remarquons pour terminer que si f est une forme sesquilinéaire non dégénérée, non nécessairement tracique, alors le groupe unitaire $U(f)$ est extension du groupe unitaire d'une forme f' non dégénérée *tracique* par un sous-groupe nilpotent (J. Dieudonné, On the structure of the unitary group II, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 665-678). Plus précisément il existe une décomposition de X en somme directe $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ telle que la restriction f' de f à X_2 soit non dégénérée tracique et que tout élément $g \in U(f)$ se représente dans cette décomposition par une matrice

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \bar{g} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'application $g \mapsto \bar{g}$ étant un homomorphisme surjectif de $U(f)$ sur $U(f')$. En particulier, $U(f)$ ne peut être « réductif » que s'il est isomorphe à $U(f')$.

E.10. — La « Note ajoutée aux épreuves », pp. 238 et 239, fourmille de fautes d'impression. Nous reviendrons sur les résultats de cette Note et en expliciterons les démonstrations dans un article à paraître. Signalons en attendant quelques corrections à la page 239 :

— ligne 1 : ajouter « décomposables » après « additives »;

— ligne 2 : ajouter « avec $u_i = e_i$ » après « (1) »;

— formule (4) : remplacer « $\sum_{i=1}^{r}$ » par « $\sum_{i \in I}$ »;

— ligne 6 du bas : remplacer « $u_{-i} = u'_{-i} - \varepsilon u_i \lambda_i$ » par « $u_{-i} = u'_{-i} - \sum_{1 \leqq j \leqq r} u_j a_{ij}$, avec $a_{ii} = \varepsilon\lambda_i$, $a_{ij} = \varepsilon f(u'_{-i}, u'_{-j})$ pour $i < j$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ »;

— ligne 5 du bas : remplacer « u_i » par « u_{-i} »;

— ligne 2 du bas : remplacer « ω » par « α ».

INDEX DES NOTATIONS

(voir aussi l'Index des notations du chapitre I)

§ 1. Introd.	K (voir aussi 4.2. Introd.), A.
1.1.1.	G (voir aussi § 3. Introd., 3.7. Introd., 5. Introd.).
	S (voir aussi 3.7. Introd.).
	Z (voir aussi 5. Introd.), N.
1.1.2.	$X^*(S)$, $\Phi(S, G)$, Φ.
1.1.3.	U_a.
1.1.4.	$a + b$.
1.1.5.	Φ^+, Φ^-.
1.1.6.	U_Ψ, G_Ψ.
1.1.8.	$\gamma_{a,b}$.
1.1.10.	W_a, β_a (voir aussi 4.5.8).
1.1.11.	$R_{ud}(G)$.
1.1.12.	q, ${}^qG$.
1.1.14.	P_J.
1.2.1.	$\mathfrak{X}$, $A[\mathfrak{X}]$, $\mathfrak{X}_K$, $K[\mathfrak{X}]$, u^*, u_K.
1.2.7, note (1)	$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.
1.2.10.	$\mathfrak{Add}$, $\mathfrak{Mult}$, $\mathfrak{D}$.
1.2.12.	$\mathfrak{G}^0$.
1.3.1.	${}^s\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$, ${}^s\mathrm{Dist}^+_m \mathfrak{X}$, ${}^s\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$, ${}^s\mathrm{Dist}^+ \mathfrak{X}$.
1.3.6.	$\mathrm{Dist}\, \mathfrak{X}$, $\mathrm{Dist}^+ \mathfrak{X}$, $\mathrm{Dist}_m \mathfrak{X}$, $\mathrm{Lie}\, \mathfrak{X}$.
1.4.1.	$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Add}_\alpha$.
1.4.2.	$\mathfrak{L}(M, N)$, $\mathfrak{L}(M)$, $\mathfrak{GL}(M)$.
1.4.3.	$c^\rho_{m',m}$, c^ρ, ${}^tc^\rho$, $\det \rho$.
1.5.2.	$\Pi_{B/A} \mathfrak{X}$.
1.5.4.	$\Pi_{B/A} f$.
1.6. Introd.	$\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{m}_L$, $\bar{L}$, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{m}$; $f(\omega'/\omega)$, $e(\omega'/\omega)$.
1.6.7.	$L_{ét}$.
1.6.9.	${}^hK$, ${}^{hs}K$.
1.7. Introd.	$\overline{\mathfrak{X}}$.
2.2.3.	$\mathfrak{C}$.
2.2.8.	$\mathfrak{C}^0$.
3.1.1.	$\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}_a$, $\mathfrak{W}_a$, $\gamma_{a,b}$, β_a, $\mathscr{D}$.
3.1.3.	$\mathfrak{G}$.
3.2.1.	x_a, x_{-a}, m_a, ζ_a, $\tilde{a}$, $a^\vee$.
3.2.3.	$C_{a,b;i,j}$, $M_{a,b,i}$.
3.2.4.	e_a, h_a, $N_{a,b}$.
3.3.2.	$\mathfrak{U}_\Psi$.
3.3.6.	$\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_\Psi$.
3.4.1.	$\mathrm{Dist}\, \mathscr{D}$.
3.6.4.	$\mathfrak{U}^\pm$.
3.8.3.	$\mathfrak{G}^1$.
4.1.1.	T.
4.1.2.	$\tilde{K}$ (voir aussi 4.3. Introd.), a, $2a$, Φ, V.
4.1.4.	${}^L_{L_s}\mathfrak{SU}_3$, $\mathfrak{SU}_3$.
4.1.5.	$x_a(u)$, $m_a(u)$, ζ_a (pour $a \in \Phi$ non pluriel).
4.1.8.	L_a.
4.1.9.	$H(L, L_2)$, $x_a(u, v)$, ζ_a (pour $a \in \Phi$ pluriel).
4.1.11.	$m_a(u, v)$, m_a.
4.1.14.	L_a, L_{2a}.
4.1.15.	H^λ.
4.2.2.	φ_a.
4.2.3.	A, φ.
4.2.4.	$\mathscr{I}$.
4.2.5.	$\omega \circ c$.
4.2.7.	ν.
4.2.16.	$X^*_K(G)$, θ, V^1, $\mathscr{I}^1$, G^1, X^1, W^1, N^1.
4.2.19.	$\mathscr{B}(\omega)$, $\mathscr{B}(\varphi)$, $\mathscr{B}^1(\varphi)$.
4.2.20.	Γ_a, Γ'_a, L^0, L^1, L^1_{max}, λ.
4.3.1.	$U_{a,k}$.
4.3.2.	$\mathfrak{U}_{a,k}$ (pour a non pluriel).
4.3.5.	$\mathfrak{U}_{a,(k,\ell)}$, $\mathfrak{U}_{a,k}$ (pour a pluriel).
4.3.7.	$\mathfrak{U}_{2a,\ell}$.
4.4. Introd.	$\tilde{\mathcal{O}}$.
4.4.1.	$T_b(L)$.
4.4.3.	$\mathfrak{T}$ (voir aussi 4.4.8, 4.6.1).
4.4.11.	$\mathfrak{H}_K(T)$.
4.4.12.	$\mathfrak{T}^R$.
4.5.1.	$\mathfrak{U}_{f,a}$.
4.5.2.	f'.
4.5.8.	$\mathfrak{W}_{f,a}$, β_a.
4.6.2.	$\mathfrak{G}_f$, $\mathfrak{G}^0_f$, $\mathfrak{C}_f$, $\mathfrak{C}^0_f$, $\mathfrak{U}^+_f$, $\mathfrak{U}^-_f$, $\mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{U}_{f,\Psi}$.
4.6.3.	H^0, H^1, P^0_f, P^1_f, N^0_f, N^1_f, W_f.
4.6.9.	$\tilde{\mathbf{R}}$, f^*.
4.6.12.	Φ_f.

4.6.17.	$N^{\dagger}$, $W_f^{\dagger}$.
4.6.18.	$\mathfrak{G}_f^{\dagger}$.
4.6.21.	$Y\mathfrak{G}_f$, $Y\mathfrak{G}_f^0$.
4.6.24.	$i_{f,g}$, $i_{f,g}^0$, $i_{f,g}^{Y,Y'}$.
4.6.26.	$f\Omega$, $\mathfrak{G}_\Omega$, $\mathfrak{G}_\Omega^0$, $\mathfrak{U}_\Omega^{\pm}$, $N_\Omega^{\dagger}$, $\hat{N}_\Omega^1$, $\hat{\mathfrak{G}}_\Omega$.
4.6.27.	$i_{\Omega,\Omega'}$, $cl(\Omega)$.
4.6.28.	$\hat{P}_\Omega^1$, P_Ω^0.
4.6.33.	$\mathscr{I}(F)$, $p(F')$.
4.6.35.	$\mathscr{I}_F$.
4.6.39.	P_X^Y, P_X^0, $\hat{P}_X^1$, $P_X^{\dagger}$.
5. Introd.	$K^\natural$, $\mathscr{O}^\natural$, Σ, $S^\natural$, Z, $a^\natural$, Φ_0, $\Phi^\natural$, Φ^b, U_b.
5.1.2.	$U_b^\natural$, $G^\natural$, $V^\natural$.
5.1.4.	$\mathscr{I}_\natural$.
5.1.8.	$\mathfrak{G}^\natural$ (voir aussi 5.1.9).
5.1.15.	$A_\natural$.
5.1.16.	$U_{b,k}$, $\varphi^\natural$, $\varphi_b^\natural$, $U_{b,k}^\natural$, $\Gamma_b^\natural$, $\Gamma_b^{\natural\prime}$.
5.1.20.	$\mathscr{I}^\natural$, $A^\natural$.
5.1.32.	$\mathscr{I}^\natural(F)$.
5.2.1.	$\mathfrak{Z}$.
5.2.2.	$\mathfrak{U}_{b,(k,\ell)}$, $\mathfrak{U}_{b,k}$.
5.2.3.	$\mathfrak{U}_\Omega^{\pm\natural}$.
5.2.4.	$\mathfrak{C}_\Omega^\natural$, $\mathfrak{C}_\Omega^{\natural 0}$.
Annexe Introd.	V_a.
A.1.	$\gamma_{a,b}^c$.
A.5.	Nr, Tr, θ, $*$.

INDEX DES CONDITIONS

(ET) : 1.7.1, (ET 1) et (ET 2) : 1.7.2.
(DRS 0) à (DRS 3) : 3.1.1.
(FI) : 3.2.11.
(C) : 3.5.1, (C′) : 3.5.2.
(S 1) à (S 3) : 3.8.1, (S^0 1) à (S^0 3) : 3.8.2.
(Sch) : 4.5.1.
(QC 0) : 4.5.1.
(C 1) et (C 2) : 4.5.3 (cf. I, 6.4.5).
(QC 1), (QC 2), $(QC\ 1)_a$ et $(QC\ 2)_{a,b}$: 4.5.3 (cf. I, 6.4.7).
(DE) : 5.1.5.

INDEX TERMINOLOGIQUE

(voir aussi l'Index terminologique du Chapitre I)

Adhérence schématique : 1.2.6.
Admissible (extension) : 1.6.1.
Attaché (corps) : 4.1.8.
Attaché (groupe algébrique) : 4.6.41.
Attachée (extension quadratique) : 4.1.14.

Bonne (famille d'idéaux) : 3.2.10.
Bornologie naturelle : 4.2.19.
Bornologies définies par une valuation : 4.2.19.

Chevalley (système de) : 3.2.2.
Chevalley (donnée radicielle schématique de) : 3.2.8.
Chevalley (valuation de) : 4.2.1.
Chevalley-Steinberg (système de) : 4.1.3.
Chevalley-Steinberg (valuation de) : 4.2.10.
Close : 1.1.4, 2.1.2, 4.6.28.
Coaction : 1.4.3.
Coefficient d'une représentation linéaire : 1.4.3.
Cohérent (système d'épinglages) : 4.1.16.
Comodule : 1.4.3.
Composante neutre : 1.2.12.
Compatible (valuation) : 4.2.8, 5.1.22.
Concave (fonction) : 4.5.3.
Connexe (schéma en groupes) : 1.2.12.
Connexe (fixateur) : 4.6.28, 4.6.39.
Conservateur (changement de base) : 4.2.25.
Corps de définition d'une racine : 4.1.3.

$\mathscr{D}$-module : 3.1.4.
Distribution : 1.3.1.
Donnée radicielle schématique : 3.1.1.
Droite : 1.2.10.

Élargi (immeuble) : 4.2.16.
Enclos : 4.6.27.
Épaississement : 4.6.37.
Épinglage : 3.2.1 et 2, 4.1.5, 4.1.9.
Épinglage associé : 3.2.1, 4.1.5, 4.1.11.
Épinglage de Steinberg : 4.1.3.
Étale (extension) : 1.6.2.
Étoffé (schéma) : 1.7.1.
Étoile : 4.6.33.

Fidèle ($\mathscr{D}$-module) : 3.1.4.
Fidèle (représentation linéaire) : 1.4.4.
Fidèlement (opérer) : 1.4.6.
Fixateur connexe : 4.6.28, 4.6.39.

Grignotant (ordre) : 3.1.2.

Hensélisé strict : 1.6.9.

Image fermée : 1.2.6.
Immeuble élargi : 4.2.16.
Induit (tore) : 1.5.17.
Iwahori (sous-groupe d') : 5.2.6.

Linéairement disjointes (extensions) : 1.6.8 ([1]).
Lisse (schéma) : 1.2.9.
Lissifié : 4.4.12.

Module (schéma associé à un) : 1.4.1.

Non ramifiée (extension) : 1.6-Introd.

Opérer : 1.4.6.
Opérer fidèlement : 1.4.6.
Optimale, optimisée : 4.5.2.

Parahorique (sous-groupe) : 5.2.6.
Plat (schéma) : 1.2.3.
Pluriel (rayon radiciel) : 4.1.2.
Positivement close : 1.1.4.
Positivement quasi-close : 1.1.6.
Prolongement : 1.2.4.
Prüférien (anneau) : 2.2.2.
Pseudo-parabolique (sous-groupe) : 1.1.14.

Quasi-close : 1.1.6.
Quasi-concave (fonction) : 4.5.3.
Quasi-déployé : 4.1.1.
Quasi-réductif : 1.1.12.

Racine : 1.1.2.
Radical unipotent déployé : 1.1.11.
Radiciel (rayon) : 1.1.2.
Radiciel (sous-groupe) : 1.1.3.
Radicielle (donnée schématique) : 3.1.1.
Représentation linéaire : 1.4.3.
Représentation linéaire fidèle : 1.4.5.
Restriction des scalaires : 1.5.2.

Schéma : 1.2-Introd.
Schéma canonique de fibre générique un tore : 1.2.11, 4.4.5, 4.4.8.
Schématique (adhérence) : 1.2.6.
Schématique (donnée radicielle) : 3.1.1.
Steinberg (épinglage de) : 4.1.3.

Tore induit : 1.5.17.

Univalente (extension) : 1.6.1.

Valuation d'un corps : 1-Introd.
Valuation d'une donnée radicielle : 4.2.1.
Valuation de Chevalley : 4.2.1.

BIBLIOGRAPHIE

Les références au chapitre I de ce travail (F. BRUHAT et J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local, I : Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **41**, 1972, 5-251) sont données par le numéro triple précédé de I : par exemple I, 7.2.

Un traitement spécial a été réservé à quatre références très utilisées :

— Le traité de Nicolas BOURBAKI (*Éléments de Mathématiques*, Paris), auquel il est référé sous le sigle [NB], suivi de la référence canonique aux différents livres, notamment A *(Algèbre)*, AC *(Algèbre Commutative)*, LIE *(Groupes et Algèbre de Lie)* et aux chapitres de ces livres; ces références renvoient aux éditions suivantes :

A : *Algèbre*, chap. I à III, Hermann, 1970; chap. IV à VII, Masson, 1981;

AC : *Algèbre Commutative*, chap. I et II, Hermann, 1961; chap. III et IV, Hermann, 1961; chap. V et VI, Hermann, 1964; chap. VII, Hermann, 1965;

LIE : *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. I, Hermann, 1971; chap. II et III, Hermann, 1972; chap. IV à VI, Hermann, 1968; chap. VII et VIII, Hermann, 1975;

— Le livre de M. DEMAZURE et P. GABRIEL (*Groupes algébriques*, t. I, Paris, Masson, 1970), noté par le sigle [DG];

— Le Séminaire de Géométrie algébrique de M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, de 1962-1964 (*Lecture Notes in Math.*, **151, 152, 153**, Springer, 1970) noté par le sigle [SGAD];

— Les Éléments de Géométrie algébrique de A. GROTHENDIECK (*Publ. Math. I.H.E.S.*, **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28** et **32**) notés par le sigle [EGA] suivi du numéro de la Partie.

[1] A. BOREL, Groupes algébriques linéaires, *Ann. of Math.*, **62** (1956), 20-80.

[2] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, New York, Benjamin, 1969.

[3] A. BOREL and T. A. SPRINGER, Rationality properties of linear algebraic groups II, *Tôhoku Math. J.*, **20** (1968), 443-497.

[4] A. BOREL et J. TITS, Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **27** (1965), 55-150.

[5] A. BOREL et J. TITS, Compléments à l'article « Groupes réductifs », *Publ. Math. I.H.E.S.*, **41** (1972), 253-276,

[6] A. BOREL et J. TITS, Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques simples, *Ann. of Math.*, **97** (1973). 499-571.

[7] A. BOREL et J. TITS, Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, *C. R. Acad. Sci.*, **287** (1978), 55-57.

[8] F. BRUHAT, Groupes semi-simples sur un corps local, *Actes du Congrès international des Mathématiciens* (Nice, 1970). Paris, Gauthier-Villars, 1971.

[9] F. BRUHAT et J. TITS, BN-paires de type affine et données radicielles affines, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 598-601.

[10] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 766-768.

[11] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes algébriques simples sur un corps local, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 822-825.

[12] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes algébriques simples sur un corps local, cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 867-869.

[13] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on local fields* (Driebergen, 1966), Springer, 1967, 23-36.

[14] C. CHEVALLEY, Sur certains groupes simples, *Tohôku Math. J.* (2), **7** (1955), 14-66.

[15] C. CHEVALLEY, *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vol., Paris, Inst. H. Poincaré, 1958 (multigraphié).

[16] C. CHEVALLEY, Certains schémas de groupes semi-simples, *Séminaire N. Bourbaki*, **13**, exposé 219 (1960-1961), New York, Benjamin, 1966.

[17] M. DEMAZURE, Schémas en groupes réductifs, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **93** (1965), 369-413.
[18] H. HIJIKATA, *On the arithmetic of p-adic Steinberg groups*, Yale University, 1964 (multigraphié).
[19] H. HIJIKATA, *Maximal compact subgroups of some p-adic classical groups*, Yale University, 1964 (multigraphié).
[20] H. HIJIKATA, On the structure of semi-simple algebraic groups over valuation fields I, *Japan J. Math.*, **1** (1975), 225-300.
[21] N. IWAHORI and H. MATSUMOTO, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **25** (1965), 5-48.
[22] M. KNESER, Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, *Math. Z.*, **88** (1965), 40-47, et **89** (1965), 250-272.
[23] G. PRASAD, Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits and Rousseau and of a theorem of Tits, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **110** (1982), 197-202.
[24] M. RAYNAUD, Modèles de Néron, *C. R. Acad. Sci.*, **262** (1966), 345-347.
[25] M. RAYNAUD, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, *Lecture Notes in Math.*, **119**, Springer, 1970.
[26] M. RAYNAUD et L. GRUSON, Critères de platitude et de projectivité, *Inv. Math.*, **13** (1971), 1-89.
[27] G. ROUSSEAU, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse, Université Paris XI, 1977 (multigraphié).
[28] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Paris, Herman, 1962.
[29] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.*, **5**, Springer, 1964.
[30] J.-P. SERRE, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **34** (1968), 37-52.
[31] R. STEINBERG, Variations on a theme of Chevalley, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 875-891.
[32] R. STEINBERG, Regular elements of semi-simple algebraic groups, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **27** (1965), 49-80.
[33] R. STEINBERG, *Lecture on Chevalley groups*, Yale University lecture notes, 1967.
[34] J. TITS, Classification of algebraic semisimple groups, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **9** (1966), 33-62.
[35] J. TITS, Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **31** (1966), 525-562.
[36] J. TITS, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. für die reine und angew. Math.*, **247** (1971), 196-220.
[37] J. TITS, Buildings of spherical type and finite BN-pairs, *Lecture Notes in Math.*, **386**, Springer, 1974.
[38] J. TITS, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France*, 1975-1976, 49-56.
[39] J. TITS, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France*, 1979-1980, 75-80.
[40] J. TITS, Reductive groups over local fields, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **33** (1979), 29-69.
[41] J. TITS, Classification of buildings of spherical type and Moufang polygons : a survey, *Coll. Intern. sulle Teorie Combinatorie*, Rome, 1973, Accad. Naz. dei Lincei, 1976, t. 1, 229-246.

Université Paris 7,
U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cédex 05.

Collège de France,
11, place Marcelin-Berthelot,
75231 Paris Cédex 05.

Manuscrit reçu le 1er janvier 1983.