

C. BONATTI

R. LANGEVIN

R. MOUSSU

Feuilletages de $CP(n)$: de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 75 (1992), p. 123-134

http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__75__123_0

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES DE $\mathbf{CP}(n)$:
DE L'HOLONOMIE HYPERBOLIQUE
POUR LES MINIMAUX EXCEPTIONNELS

par C. BONATTI*, R. LANGEVIN, R. MOUSSU

Abstract. — Let $\mathcal{F}$ be a holomorphic foliation of $\mathbf{CP}(n)$. If $\mathcal{F}$ has a leaf L , the closure $\bar{L}$ of which is disjoint from the singular set of the foliation, we prove that there exists a loop in a leaf contained in $\bar{L}$ with contracting hyperbolic holonomy.

D'après le théorème classique de Poincaré Bendixson, l'adhérence de chaque feuille d'un feuilletage de $\mathbf{RP}(2)$, défini par une équation différentielle polynomiale sur $\mathbf{R}^2$, contient soit une feuille compacte, soit un point singulier. On ne sait pas si un tel résultat est vrai pour les feuilletages holomorphes de $\mathbf{CP}(2)$.

Plus généralement, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 de $\mathbf{CP}(n)$ de lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$. Il est connu que $\mathcal{F}$ n'a pas de feuille compacte, mais on ne sait pas si $\mathcal{F}$ peut posséder une feuille L telle que $\bar{L} \cap \text{Sing } \mathcal{F} = \emptyset$. S'il existe un tel couple $(\mathcal{F}, L)$, alors $\bar{L}$ contient un compact non vide invariant par $\mathcal{F}$, minimal, noté $\mathcal{M}$ et appelé *minimal exceptionnel*. Ainsi se pose le

Problème. — Existe-t-il des feuilletages holomorphes de codimension 1 de $\mathbf{CP}(n)$ qui possèdent des minimaux exceptionnels ?

Supposant que, pour $n = 2$, de tels feuilletages existent, C. Camacho, A. Lins, P. Sad [Ca, Li, Sa] étudient la géométrie des feuilles de leurs minimaux exceptionnels. Dans ce travail, nous prouvons le résultat suivant sur leur structure transverse.

Théorème. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de $\mathbf{CP}(n)$, de codimension 1, qui possède un ensemble minimal exceptionnel $\mathcal{M}$. Il existe une feuille L de $\mathcal{M}$ qui possède un lacet d'holonomie hyperbolique.

Ce théorème et ce problème rappellent les questions qui se posaient pour les feuilletages C^∞ réels de codimension 1 il y a vingt ans : en 1970, R. Sacksteder [Sa] mon-

* Chargé de recherche au C.N.R.S.

trait que leurs minimaux exceptionnels portent de l'holonomie hyperbolique et ce n'est qu'en 1976 que B. Raymond [Ra] prouvait l'existence de feuilletages de la sphère S^3 possédant un minimal exceptionnel.

Rappels. — Soit γ un lacet dans une feuille L d'un feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe de codimension 1 et soit Σ un germe de courbe holomorphe en $a \in \gamma$, transverse à $\mathcal{F}$. L'holonomie de γ , $\text{Hol } \gamma$, est un germe de difféomorphisme holomorphe de Σ . Il est *hyperbolique* si le module de sa dérivée en a est différent de 1. On dit alors que L a une *holonomie hyperbolique*.

Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 de $\mathbf{CP}(n)$ et soit $\text{Sing } \mathcal{F}'$ son lieu singulier. Il existe un unique feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbf{CP}(n)$ du même type dont le lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ est un ensemble algébrique de codimension ≥ 2 tel que $\text{Sing } \mathcal{F} \subset \text{Sing } \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ induisent les mêmes feuilletages sur $\mathbf{CP}(n) \setminus \text{Sing } \mathcal{F}'$ [Ma, Mo]. Pour prouver le théorème pour $\mathcal{F}'$, il suffit de le prouver pour $\mathcal{F}$. Dans toute la suite $\mathcal{F}$ désigne un tel feuilletage de $\mathbf{CP}(n)$ qui possède un ensemble minimal exceptionnel $\mathcal{M}$, et dont le lieu singulier est de codimension ≥ 2 .

Plan. — Lorsque $n = 2$, la preuve du théorème repose sur l'existence d'un champ de droites réelles orientées correspondant aux directions de rapprochement infinitésimal maximal des feuilles de $\mathcal{F}$. L'étude du feuilletage réel $\mathcal{H}$ qu'il définit est l'objet du chapitre I. Dans II nous construisons un lacet dans $L_0 \subset M$ ayant une holonomie hyperbolique. Dans III, nous montrerons que le théorème se réduit pour $n \geq 3$ au cas $n = 2$. Enfin, dans IV, nous signalons comment le théorème peut être généralisé à des feuilletages holomorphes singuliers de variétés holomorphes autres que $\mathbf{CP}(n)$.

L'argument essentiel de la preuve de ce théorème, *direction de rapprochement des feuilles*, est inspiré de l'approche riemannienne de H. Rosenberg (voir [L. R.]). Nos démonstrations sont très « analytiques », elles doivent beaucoup à des conversations avec D. Tischler.

I. — Courbes d'holonomie contractante pour $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{CP}(2)$

1. *Équation de $\mathcal{F}$.* — Le plongement « canonique » de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{CP}(2)$ et les coordonnées des points (x, y) de $\mathbf{C}^2$ sont choisis de telle façon que $\mathbf{CP}(2) \setminus \mathbf{C}^2$ et les droites $x = \text{constante}$ soient transverses à $\mathcal{F}$ sauf en un nombre fini de points. Il existe $P, Q \in \mathbf{C}[x, y]$ premiers entre eux, uniques modulo une constante, tels que $\mathcal{F}|_{\mathbf{C}^2}$ soit défini par l'équation

$$P dx + Q dy = 0 \quad \text{et} \quad \text{Sing } \mathcal{F} = \{P = Q = 0\}.$$

Dans la suite $\mathcal{F}$ est défini par l'équation méromorphe

$$\omega = dy + F dx = 0, \quad F = P/Q.$$

La 1-forme ω s'étend en une 1-forme méromorphe sur $\mathbf{CP}(2)$ notée encore ω . Compte tenu des conditions de transversalité imposées à $\mathcal{F}$, l'ensemble de ses pôles est la courbe algébrique

$$\text{Pol } \omega = (\mathbf{CP}(2) \setminus \mathbf{C}^2) \cup \{Q = 0\},$$

elle contient $\text{Sing } \mathcal{F}$ et son intersection avec une feuille de $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble discret de cette feuille, ou contient cette feuille. La courbe $\text{Pol } \omega$ contient au plus un nombre fini de feuilles et l'union de ces feuilles et de $\text{Sing } \mathcal{F}$ est un compact de $\mathbf{CP}(2)$ disjoint du minimal $\mathcal{M}$.

Notons enfin que l'hypothèse « $\mathcal{F}$ possède un minimal exceptionnel » implique que la forme ω n'est pas fermée.

2. Holonomie linéaire de $\mathcal{F}$. — Tout chemin dans une feuille L de $\mathcal{F}$ est homotope dans L à un chemin dans $L \setminus \text{Pol } \omega$. Pour étudier l'holonomie de L nous utilisons des chemins

$$\gamma : [s_0, s_1] \rightarrow L \setminus \text{Pol } \omega, \quad \gamma(s) = (x(s), y(s)),$$

C^1 -par morceaux et nous les relevons dans les feuilles voisines selon la projection $(x, y) \rightarrow x$ en des chemins

$$\gamma^y : s \rightarrow \gamma^y(s) = (x(s), \tilde{y}(s, y)), \quad \tilde{y}(s_0, y) = y.$$

L'holonomie de γ , évaluée sur les droites verticales (qui servent ici de transversales), est le difféomorphisme

$$\text{Hol } \gamma : y \rightarrow \text{Hol } \gamma(y) = \tilde{y}(s_1, y).$$

D'après la formule de première variation de Poincaré [Po], on a

$$(\text{Hol } \gamma)' = \exp \left(- \int_{\gamma} \omega_1 \right) \quad \text{avec } \omega_1 = F'_y dx.$$

Soit $\text{Ker } \omega$ la restriction à $\mathbf{CP}(2) \setminus \text{Pol } \omega$ du fibré $T\mathcal{F}$ tangent à $\mathcal{F}$. La restriction de ω_1 à $\text{Ker } \omega$ est caractérisée par $d\omega = \omega \wedge \omega_1$. Le fibré $\text{Ker } \omega$ étant considéré comme un fibré de fibre $\mathbf{R}^2 (\equiv \mathbf{C})$, ω_1 se décompose en partie réelle $\text{Re } \omega_1$ et partie imaginaire $\text{Im } \omega_1$. On a

$$|(\text{Hol } \gamma)'| = \exp - \int_{\gamma} \text{Re } \omega_1.$$

3. Feuilletage $\mathcal{H}$ par les courbes réelles d'holonomie contractante. — La 1-forme ω n'étant pas fermée, l'ensemble

$$\text{Zéro } \omega_1 = \{F'_y = 0\}$$

est une courbe algébrique. Le système de Pfaff $\omega = 0, \text{Im } \omega_1 = 0$ définit un feuilletage $\mathcal{H}$ en courbes réelles, tangentes à $\mathcal{F}$, sur

$$\text{Reg } \mathcal{H} = \mathbf{CP}(2) \setminus (\text{Pol } \omega \cup \text{Zéro } \omega_1).$$

Remarquons que sur une feuille de $\mathcal{F}$, aux points réguliers de $\mathcal{H}$, le feuilletage $\mathcal{H}^\perp$, orthogonal à $\mathcal{H}$, est défini par $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$. Les feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^\perp$ peuvent être encore définis de la façon suivante : soit L la feuille de $\mathcal{F}$ passant par un point $a \in \operatorname{Reg} \mathcal{H}$ et soit

$$X : U_a \rightarrow \mathbf{C}, \quad U_a \subset L \cap \operatorname{Reg} \mathcal{H}, \quad X(a) = 0$$

une carte holomorphe en a pour L . Dans cette carte on a $\omega_1 = G'(X) dX$ où G est holomorphe. Les restrictions de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^\perp$ à U_a sont les feuilletages par les courbes $\operatorname{Im} G = \text{constante}$ et $\operatorname{Re} G = \text{constante}$. Nous orientons les feuilles l de $\mathcal{H}$ dans le sens $\operatorname{Re} G$ croissante et nous notons l_a^+ la demi-feuille issue de a .

Plus précisément, l'ouvert $U \subset L$ étant muni de la structure holomorphe induite par celle de L , la fonction $G : U \rightarrow G(U) \subset \mathbf{C}$ est un isomorphisme conforme qui nous permet de définir les notions d'angles de deux vecteurs tangents (réels) à L , ou de deux courbes dans L .

4. Étude de $\mathcal{H}$ au voisinage de $\operatorname{Pol} \omega$. — En $b \in \operatorname{Pol} \omega \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{F}$ il existe une carte holomorphe

$$(X, Y) : V_b \rightarrow \mathbf{C}^2, \quad X(b) = Y(b) = 0$$

et une fonction holomorphe f sur $(X, Y) (V_b)$ telle que

$$\omega = \frac{dY}{f(X, Y)}, \quad f(0, 0) = 0, \quad \omega_1 = \frac{f'_X}{f}(X, Y) dX.$$

Si $0 \in \mathbf{C}$ est un zéro d'ordre m de $f(X, 0)$, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées supplémentaire, on peut choisir X tel que $f(X, 0) = X^m$. On a ainsi

$$\omega_1|_{Y=0} = m \frac{dX}{X}, \quad \operatorname{Im} \omega_1|_{Y=0} = m d(\operatorname{Arg} X).$$

Les feuilles de $\mathcal{H}$ dans la plaque $Y = 0$ sont les demi-droites issues de $X = 0 \in \mathbf{C}$ et b est un répulseur pour $\mathcal{H}$. Il existe $\rho, \rho' > 0$ tels que les feuilles orientées de $\mathcal{H}$ sortent transversalement du polydisque $|X| \leq \rho, |Y| \leq \rho'$ par les points du tore solide $|X| = \rho, |Y| < \rho'$. En utilisant la compacité de $\mathcal{M} \cap \operatorname{Pol} \omega$ on en déduit :

(*) Il existe un voisinage ouvert W de $\operatorname{Pol} \omega$ tel que pour toute feuille $L \subset \mathcal{M}$, $L \setminus W$ est connexe non vide et

$$l_a^+ \subset L \setminus W \quad \text{si } a \in \operatorname{Reg} \mathcal{H} \setminus W.$$

5. Étude de $\mathcal{H}$ au voisinage de $\operatorname{Zéro} \omega_1$. — En un point c de $\operatorname{Zéro} \omega_1 \setminus W$ il existe une carte holomorphe

$$Z = (X, Y) : V_c \rightarrow \mathbf{C}^2, \quad X(c) = Y(c) = 0$$

et une fonction holomorphe f au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$ telles que

$$\omega = f(X, Y) dY, \quad f(0, 0) \neq 0, \quad f'_X(0, 0) = 0, \quad \omega_1 = -\frac{f'_X}{f}(X, Y) dX.$$

Si 0 est un zéro d'ordre $(m - 1)$ de $f'_X(X, 0)$ on peut choisir la coordonnée X telle que

$$\omega_1|_{Y=0} = mX^{m-1} dX = d(X^m).$$

Lorsque $m = 2$, c est un *col ordinaire* de $\mathcal{H}|_Y = 0$, si $m \geq 2$ nous dirons que c'est un *m-col* : il a $2m$ séparatrices. Précisons le comportement de ω_1 dans la carte Z . Il existe une fonction holomorphe G sur un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$ telle que

$$\omega_1 = G'_X(X, Y) dX, \quad G(X, 0) = X^m, \quad G(0, Y) \equiv 0.$$

D'après le théorème de préparation, il existe un polydisque Δ centré en 0, tel que pour $(X, Y) \in \Delta$, on a

$$G(X, Y) = u(X, Y) (X^m + a_1(Y) X^{m-1} + \dots + a_m(Y)),$$

où u et les a_k sont holomorphes, $a_k(0) = 0$. Soit

$$\Delta(r, \rho') = \{(X, Y) \in \Delta \mid |Y| < \rho' \text{ et } |G(X, Y)| < r/2\}.$$

D'après le théorème de Rouché, pour $r > 0$ assez petit, il existe $\rho'(r) > 0$ tel que si

$$(X, Y) \in \Delta(r, \rho'(r)) \setminus \Delta(r/2, \rho'(r)),$$

$G'_X(X, Y)$ est non nul et pour Y fixé, $X \rightarrow G(X, Y)$ est un revêtement à n feuillets de l'anneau $r/2 < |z| < r$. On en déduit :

(**) Soit L une feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ et soit $a \in L \setminus (W \cup \Delta(r, \rho'(r)))$. Supposons que l_a^+ entre dans $\Delta(r, \rho'(r))$ en un point x_0 et en sorte en un point x_1 . Alors il existe un chemin γ , dans la couronne de $L \cap (\Delta(r, \rho'(r)) - \Delta(r/2, \rho'(r)))$ qui contient x_0 et x_1 , tel que γ joint ces points et fait un angle inférieur à $\pi/4$ avec les courbes orientées de $\mathcal{H}$.

Preuve. — Remarquons tout d'abord que les images par G de x_0 et de x_1 ont la même partie imaginaire.

Le chemin γ cherché est le relevé par G de la ligne brisée $G(x_0)SG(x_1)$ représentée sur la figure 1.

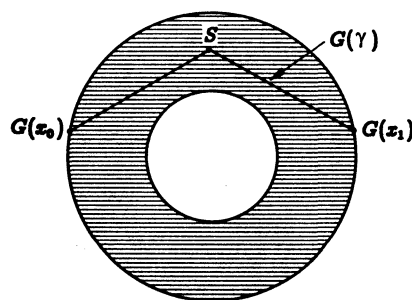


Fig. 1

La condition d'angle est vérifiée puisque G est conforme et que l'angle de la ligne $G(x_0)SG(x_1)$ avec les demi-droites orientées parallèles à l'axe réel est constant inférieur à $\pi/4$.

Maintenant nous allons recouvrir Zéro $\omega_1 \setminus W$ par de tels voisinages : la courbe Zéro ω_1 est lisse et transverse à $\mathcal{F}$ en dehors d'un ensemble fini de points $C_1, \dots, C_p$.

Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$ on fixe une carte (x_k, g_k) et un couple

$$\Delta_k(r_k) = \Delta_k(r_k, \rho'(r_k)), \quad \Delta_k(r_k/2) = \Delta_k(r_k/2, \rho'(r_k)).$$

On choisit les r_k assez petits pour que les $\Delta_k(r_k)$ soient deux à deux disjoints. Ainsi l'intersection d'une feuille avec la réunion des $\Delta_k(r_k)$ est une réunion de « disques » disjoints.

On peut alors faire un choix « global » de l'application G (décrite ci-dessus) sur un voisinage U de Zéro $\omega_1 \setminus (\bigcup_k \Delta_k \cup W)$, de la façon suivante :

En chaque point $C \in \text{Zéro } \omega_1 \setminus (\{C_k\}_{1 \leq k \leq p} \cup \text{Pol } \omega)$, on choisit une plaque P_C contenant C dans la feuille $\mathcal{F}$ passant par C , de telle façon que $P_C \cap P_{C'} \neq \emptyset$ si $C \neq C'$, et que $\bigcup_C P_C$ soit un ouvert. L'application G , sur cet ouvert, est entièrement déterminée par l'équation $dG = \omega_1$ si l'on impose $G \equiv 0$ sur Zéro $\omega_1 \cap \bigcup_C P_C$.

On note $U = \bigcup_{C \in \text{Zéro } \omega_1 - V} P_C$, où V est un petit voisinage de $\{C_k\}_k \cup \text{Pol } \omega$ d'adhérence contenue dans $W \cup \bigcup_k \Delta_k(r_k)$; c'est un voisinage de Zéro $\omega_1 - (\bigcup_k \Delta_k \cup W)$ et G est holomorphe sur U . De la compacité de Zéro $\omega_1 \setminus V$, on déduit que pour tout $r > 0$ assez petit, $\Delta(r) = G^{-1}\{|z| < r\}$ possède les propriétés suivantes :

- 1) pour tout point $C \in \text{Zéro } \omega_1 - V$, $G|_{\Delta(r) \cap P_C}$ est un revêtement ramifié en C du disque $|z| < r$;
- 2) pour tout k , $\Delta(r) \cap \Delta_k(r_k) \subset \Delta_k(r_k/2)$ (voir fig. 2).

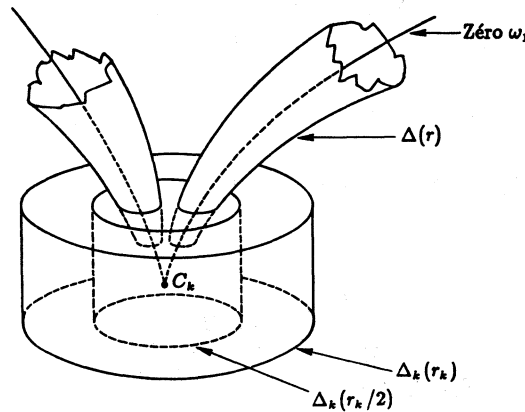


Fig. 2

On pose $W' = \bigcup_k \Delta_k(r_k) \cup \Delta_r$, et l'on fixe W'' au voisinage de Zéro $\omega_1 \setminus W$ tel que

$$\begin{cases} W'' \cap \Delta_k(r_k) \subset \Delta_k(r_k/2) \text{ pour tout } k, \\ W'' \cap \Delta(r) \subset \Delta(r/2). \end{cases}$$

On montre alors :

(***) Soient $x_0, x_1 \in \mathbf{CP}(2) - W \cup W'$ deux points sur la même feuille l de $\mathcal{H}$ (et donc aussi sur la même feuille L de $\mathcal{F}$) et soit $l_{[x_0, x_1]}$ le segment orienté de l qui les joint. Alors il existe un chemin γ sur L , joignant x_0 à x_1 , coïncidant avec $l_{[x_0, x_1]}$ en dehors de W' , disjoint de W'' , et faisant un angle inférieur à $\pi/4$ avec les feuilles du feuilletage orienté $\mathcal{H}$.

Preuve. — Il suffit d'appliquer (**) chaque fois que $l_{[x_0, x_1]}$ entre dans W' .

II. — Démonstration du théorème pour $n = 2$

1. *Construction d'un chemin d'holonomie contractante.* — Dans la suite $\mathbf{C}^2 \equiv \mathbf{R}^4$ est muni de sa norme euclidienne canonique $\| \cdot \|$. On note $u(a)$ le vecteur unitaire tangent en a à l_a^+ , $(u(a), v)$ la valeur absolue de l'angle de $u(a)$ et d'un vecteur $v \in \text{Ker } \omega_{(a)}$, et l'on pose

$$|\text{Re } \omega_1(a)| = \text{Re } \omega_1(u(a)) = \omega_1(u(a)).$$

Soit K le compact $\mathbf{CP}(2) \setminus W \cup W''$. Il existe $k > 0$ tel que

$$|\text{Re } \omega_1(a)| \geq 2k \quad \text{si } a \in K.$$

Soit L_0 une feuille de $\mathcal{M}$ et soit l_0^+ une demi-feuille de $\mathcal{H}$ issue d'un point de $L_0 \cap K$ qui n'aboutit pas en un point de Zéro ω_1 ; il en existe puisque $L_0 \cap \text{Zéro } \omega_1$ est dénombrable. En modifiant légèrement l_0^+ nous allons prouver :

(****) Il existe un arc $\gamma : [0, \infty[\rightarrow L_0 \cap K$, de classe C^1 par morceaux et une suite $\{s_n\} \rightarrow \infty$ tels que, si $\gamma(s) = (x(s), y(s))$,

(i) $\text{Re } \omega_1(\gamma'(s)) \geq k$ avec $\|\gamma'(s)\| = 1$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(s_n) = (x_\infty, y_\infty)$ avec $x(s_n) = x_\infty$ si $n \in \mathbf{N}^+$.

On construit d'abord, grâce à (***), une courbe γ_1 de longueur infinie dans $L_0 \cap K$ telle que $(u(\gamma_1(s)), \gamma_1'(s)) < \pi/4$.

Soit alors $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, une suite de points de γ_1 qui tend vers $a_\infty \in \bar{\gamma}_1 \setminus \gamma_1$ et soit, pour chaque n , $C'_n = a'_n a''_n$ un arc de γ_1 dont a_n est le milieu, de longueur $\varepsilon > 0$ et tel que $C'_n \cap C'_{n-1} = \emptyset$. Pour n assez grand, il existe un arc C_n reliant a'_n à a''_n qui possède les deux propriétés suivantes :

— si $a \in C_n$, l'angle de la tangente à C_n et de $u(a)$ est inférieur à $\pi/12$;

— il existe $b_n = (x_\infty, y_n) \in C_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a_\infty = (x_\infty, y_\infty)$.

Soit γ la courbe obtenue en remplaçant dans γ_1 les arcs C'_n par les C_n . Par construction elle vérifie (ii). D'autre part si $v(a)$ est la tangente unitaire en $a \in \gamma$ on a

$$(u(a), v(a)) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

On en déduit la majoration (i) cherchée :

$$\operatorname{Re} \omega_1(v(a)) \geq \frac{1}{2} \omega_1(u(a)) \geq k.$$

2. Holonomie le long de γ . — Soient δ' la distance de K à $\operatorname{Pol} \omega$, $D_a(r)$ le disque de centre $a = (x_a, y_a)$ de rayon r dans la droite $x = x_a$, et r le fibré des vecteurs unitaires $v_a \in T\mathcal{F}$, $a \in K$. Si $b \in D_a(\delta')$ il existe un unique vecteur $w(v_a, b) \in T_b \mathcal{F}$ tel que

$$\Pi(w(v_a, b)) = v_a \quad \text{où} \quad \Pi : (x, y) \mapsto x.$$

L'application de $\tau \times \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \delta'\}$ définie par

$$(v_a, z) \mapsto \operatorname{Re} \omega_1(w(v_a, y_a + z))$$

est uniformément continue en z pour $v_a \in \tau$. On en déduit, vu l'assertion (i) de (****), l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} \omega_1(w(\gamma'(s), y(s) + z)) \geq \frac{k}{2} \quad \text{si } s \geq 0 \text{ et } |z| \leq \delta.$$

Nous allons déduire de cette majoration que

(*****) pour tout $s_0 < s_1$ le difféomorphisme d'holonomie h_{s_0, s_1} correspondant à $\gamma|_{[s_0, s_1]}$ est défini sur $D_{\gamma(s_0)}(\delta)$ et

$$|h'_{s_0, s_1}(y)| \leq \exp - \frac{k}{2}(s_1 - s_0) \quad \text{si } y \in D_{\gamma(s_0)}(\delta).$$

A priori il existe $r_0 > 0$ tel que h_{s_0, s_1} soit défini sur $D_{\gamma(s_0)}(r_0)$. Rappelons sa construction : il existe une fonction unique $\mathcal{Y}$ définie sur $[s_0, s_1] \times D_{\gamma(s_0)}(r_0)$

$$\mathcal{Y} : (s, y) \rightarrow \mathcal{Y}(s, y) \quad \text{avec} \quad \mathcal{Y}(s_0, y) = y$$

telle que le chemin $\gamma^y(s) = (x(s), \mathcal{Y}(s, y))$ soit tangent à $\mathcal{F}$ et l'on a alors (voir I.2)

$$h_{s_0, s_1}(y) = \mathcal{Y}(s_1, y), \quad h'_{s_0, s_1}(y) = \exp - \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{Re} \omega_1(\gamma^y(s)) ds.$$

Par définition de γ^y on a

$$\gamma^y(s)' = w(\gamma'(s), \mathcal{Y}(s, y)) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \omega_1(\gamma^y(s)') \geq \frac{k}{2}.$$

On en déduit par intégration

$$|h'_{s_0, s_1}(y)| \leq \exp \frac{k}{2}(s_0 - s_1) < 1.$$

L'image de $D_{\gamma(s_0)}(r_0)$ par h_{s_0, s_1} est contenue dans $D_{\gamma(s_0)}(r_1)$, avec

$$r_1 = r_0 \exp - \frac{k}{2}(s_1 - s_0) < r_0.$$

Pour $s_1 - s_2$ assez petit, h_{s_0, s_1} est évidemment défini sur $D_{\gamma(s_0)}(\delta)$ et ce que nous venons de prouver montre en particulier que, pour tout $y \in D_{\gamma(s_0)}(\delta)$, la fonction

$$s_1 \mapsto |h_{s_0, s_1}(y) - y(s_1)| = |\tilde{\gamma}(s_1, y) - y(s_1)|$$

est une fonction strictement décroissante. Ainsi, quel que soit $s_1 > s_0$ et quel que soit $y \in D_{\gamma(s_0)}(\delta)$, le relèvement γ^y de γ reste à l'intérieur du tube

$$T_{\gamma, \delta} = \bigcup_{s \geq 0} x(s) \times D_{\gamma(s)}(\delta).$$

Ceci prouve la première partie de (*****). Quant à la majoration de $|h'_{s_0, s_1}(y)|$ on l'obtient en remplaçant r_0 par δ dans la majoration ci-dessus de $h'_{s_0, s_1}(y)$.

3. Preuve du théorème sur $\mathbf{CP}(2)$. — Avec les notations de (***), fixons n tel que, pour $p > n$, $\gamma(s_p)$ appartienne à $D_{\gamma(s_n)}(\delta/2)$, et soit $q > n$ tel que $\exp - (k/2)(s_q - s_n) < 1/2$. D'après (****) on a

$$h_{s_n, s_q}(D_{\gamma(s_n)}(\delta)) \subset D_{\gamma(s_q)}(\delta/2) \quad \text{et} \quad |h'_{s_n, s_q}(y)| < 1/2.$$

Ainsi h_{s_n, s_q} est un difféomorphisme contractant de $D_{\gamma(s_n)}(\delta)$. Il a un unique point fixe y_0 . Par construction γ^{y_0} , le relèvement de $\gamma|_{[s_n, s_q]}$, est un lacet dans une feuille de $\mathcal{M}$ ayant une holonomie hyperbolique.

III. — Preuve du théorème pour $n > 2$

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{F}$ désigne un feuilletage holomorphe de $\mathbf{CP}(n)$ dont le lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ est de codimension ≥ 2 . Montrons tout d'abord que le théorème se déduit de l'assertion suivante :

Assertion. — Si $\mathcal{F}$ possède un ensemble minimal exceptionnel $\mathcal{M}$ il existe un plongement j de $\mathbf{CP}(n-1)$ dans $\mathbf{CP}(n)$ tel que le lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}'$ du feuilletage $\mathcal{F}' = j^{-1}(\mathcal{F})$ soit encore de codimension ≥ 2 et tel que

$$\text{Sing } \mathcal{F}' \cap j^{-1}(\mathcal{M}) = \emptyset \quad \text{et} \quad j^{-1}(\mathcal{M}) \neq \emptyset.$$

Preuve du théorème. — Soit L une feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans $\mathcal{M}$ et soit L' une feuille de $\mathcal{F}'$ contenue dans $j^{-1}(L)$. Puisque

$$\bar{L}' \cap \text{Sing } \mathcal{F}' \subset \text{Sing } \mathcal{F}' \cap j^{-1}(\mathcal{M}) = \emptyset,$$

$\mathcal{F}'$ possède un ensemble minimal exceptionnel $\mathcal{M}' \subset j^{-1}(\mathcal{M})$.

Supposons le théorème vrai pour les espaces projectifs $\mathbf{CP}(k)$, $k \leq n-1$. Il existe une feuille L'_0 de $\mathcal{F}'$ contenue dans $\mathcal{M}'$ qui a une holonomie hyperbolique. Il en est alors de même pour la feuille L_0 de $\mathcal{F}$ qui la contient.

L'ensemble des plongements « linéaires » de $\mathbf{CP}(n-1)$ dans $\mathbf{CP}(n)$ s'identifie à $\mathbf{CP}(n)$: à $\alpha \in \mathbf{CP}(n)$, représenté par $\alpha^* \in (\mathbf{C}^{n+1})^*$ non nul, on associe le plongement j_α du $\mathbf{CP}(n-1)$ correspondant à l'hyperplan $\text{Ker } \alpha^*$ de $\mathbf{C}^{n+1}$. On note $\mathbf{CP}_\alpha(n-1)$

l'image de j_α et $\mathcal{F}_\alpha$ le feuilletage $j_\alpha^{-1}(\mathcal{F})$. Son lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}_\alpha$ est la réunion (disjointe) de

$$\text{Sing } \mathcal{F}_\alpha \cap \mathbf{CP}_\alpha(n-1) = Z_\alpha$$

et de l'ensemble T_α des points de $\mathbf{CP}_\alpha(n-1) \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est tangent à $\mathbf{CP}_\alpha(n-1)$.

Proposition. — Il existe un ouvert de Zariski U de $\mathbf{CP}(n)$ tel que si α appartient à U alors $\text{Sing } \mathcal{F}_\alpha$ est codimension ≥ 2 et T_α est un ensemble fini uniformément borné.

L'assertion précédente (et donc le théorème) se déduit de la façon suivante de cette proposition. L'ensemble des $\alpha \in U$ tels que $\mathbf{CP}_\alpha(n) \cap \mathcal{M}$ soit non vide est clairement un ouvert U' de $\mathbf{CP}(n)$.

Soit $\alpha \in U'$ tel que $T_\alpha = \{a_k(\alpha)\}$, $k = 1, 2, \dots, r$, où r est la borne supérieure du cardinal $\# T_\alpha$, pour $\alpha' \in U'$. Il s'agit de montrer que l'on peut choisir $\alpha' \in U$ tel que $T_{\alpha'} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Supposons $T_\alpha \cap \mathcal{M}$ non vide,

$$T_\alpha \cap \mathcal{M} = \{a_k(\alpha)\}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad \text{avec } p \leq r.$$

Il existe un voisinage v_α de α dans U' tel que, si $\alpha' \in v_\alpha$, $T_{\alpha'}$ soit un ensemble de points $a_k(\alpha')$, $k = 1, 2, \dots, r$, proches des $a_k(\alpha)$. D'autre part, la condition : « ne pas appartenir à $\mathcal{M}$ » étant ouverte, on choisit v_α tel que $a_k(\alpha') \in \mathcal{M}$ si $k > p$.

Soit $a'_p \in \mathcal{M}$ un point voisin de $a_p(\alpha)$ et soit $\alpha' \in v_\alpha$ tel que $\mathbf{CP}_{\alpha'}(n-1)$ soit tangent à $\mathcal{F}$ en a'_p ; c'est-à-dire que $a'_p = a_p(\alpha')$ par construction. Alors $T_{\alpha'}$ a seulement $p-1$ points dans $\mathcal{M}$. En répétant p fois cette opération on obtient le plongement $j_{\alpha'}$ cherché.

Preuve de la proposition. — Notons (x, α) les points de $\mathbf{CP}(n) \times \mathbf{CP}(n)$. L'ensemble

$$T = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{CP}(n)} T_\alpha \times \{\alpha\} \subset \mathbf{CP}(n) \times \mathbf{CP}(n)$$

des points de tangence de $\mathcal{F}$ avec un $\mathbf{CP}_\alpha(n-1)$, où α décrit $\mathbf{CP}(n)$, est contenu dans l'ouvert de Zariski $(\mathbf{CP}(n) \setminus \text{Sing } \mathcal{F}) \times \mathbf{CP}(n)$. Montrons tout d'abord que T est une sous-variété lisse de codimension n .

Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ des coordonnées affines des points $x, \alpha \in \mathbf{CP}(n)$ dans des cartes affines $\mathbf{C}_x^n$, $\mathbf{C}_\alpha^n$; l'espace projectif $\mathbf{CP}_\alpha(n-1)$ contient l'hyperplan de $\mathbf{C}_x^n$ d'équation

$$f_1(x, \alpha) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n - 1 = 0.$$

Soit $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ une 1-forme holomorphe (algébrique) sur $\mathbf{C}_x^n$ qui définit $\mathcal{F}$ et telle que

$$\text{Sing } \mathcal{F} \cap \mathbf{C}_x^n = \text{Zéro } \omega = \{x \in \mathbf{C}_x^n / a_1(x) = \dots = a_n(x) = 0\}.$$

Une telle forme existe toujours, voir [Ma, Mo]. Par définition $T \cap \mathbf{C}_x^n \times \mathbf{C}_\alpha^n$ est l'ensemble des points (x, α) où les 1-formes ω et $\alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n$ sont colinéaires. En un tel point, ω étant non nul, on peut supposer $a_1(x) \neq 0$. Dans un voisinage V de $(x, \alpha) \in T$, T est le sous-ensemble d'équations

$$\begin{aligned} f_1(x, \alpha) &= 0, \\ \alpha_k a_1(x) - \alpha_1 a_k(x) &= f_k(x, \alpha) = 0 \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

L'application $f = (f_2, f_3, \dots, f_n)$ est clairement une submersion puisque

$$\text{Det} \left(\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \right) (x, \alpha) = \alpha_1 a_0(x)^n$$

avec $a_0(x) \neq 0$ par hypothèse et $\alpha_1 \neq 0$; en effet si $\alpha_1 = 0$ on a $\alpha_k = 0$ pour $k \geq 2$ ce qui est absurde. Ainsi, $T \cap V = f^{-1}(0) \cap V$ est une sous-variété holomorphe lisse de codimension n et T est une sous-variété lisse de codimension n de $(\mathbf{CP}(n) \setminus \text{Sing } \mathcal{F}) \times \mathbf{CP}(n)$.

Puisque $\text{Sing } \mathcal{F} \times \mathbf{CP}(n)$ est un sous-ensemble algébrique de codimension ≥ 2 de $\mathbf{CP}(n) \times \mathbf{CP}(n)$, l'adhérence $\bar{T}$ de T est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{CP}(n) \times \mathbf{CP}(n)$ de codimension n , voir [Na].

D'après le théorème de Bertini-Sard il existe un ouvert de Zariski U de $\mathbf{CP}(n)$ tel que, si $\alpha \in U$,

- la codimension de $\bar{T} \cap \mathbf{CP}(n) \times \{\alpha\}$ dans $\mathbf{CP}(n) \times \{\alpha\}$ soit la même que celle de $\bar{T}$ dans $\mathbf{CP}(n) \times \mathbf{CP}(n)$,
- la codimension de $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \mathbf{CP}_\alpha(n-1)$ soit la même que celle de $\text{Sing } \mathcal{F}$ dans $\mathbf{CP}(n)$.

Ainsi, $T_\alpha = T \cap \mathbf{CP}(n) \times \{\alpha\}$ est de codimension n dans $\mathbf{CP}(n) \times \{\alpha\}$; c'est une union de points isolés. Le lieu singulier, $\text{Sing } \mathcal{F}_\alpha$, de $\mathcal{F}_\alpha$ est la réunion de T_α et de l'ensemble algébrique $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \mathbf{CP}_\alpha(n-1)$ qui est de codimension 2.

Il nous reste à prouver que $\#T_\alpha$ est uniformément borné. Or la restriction ω_α de ω à $\mathbf{CP}_\alpha(n-1) \cap \mathbf{C}_x^n$ définit $\mathcal{F}_\alpha$, et $\#T_\alpha$ est majoré par une constante qui ne dépend que du degré des coefficients de ω_α , c'est-à-dire des degrés des polynômes $a_1, a_2, \dots, a_n$.

IV. — Feuilletages des surfaces

Le théorème se généralise sans difficulté majeure à toute surface complexe (pas nécessairement algébrique), bien que l'on ne dispose plus des nombreuses facilités qu'offre $\mathbf{CP}(2)$, de la façon suivante.

Soit M une $\mathbf{C}$ -variété de dimension 2, compacte. Un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur M est défini par un atlas (U_i, ω_i, f_{ij}) où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M , ω_i est une 1-forme holomorphe sur U_i et $f_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{C} - \{0\}$ est une fonction holomorphe telle que $\omega_i = f_{ij} \omega_j$ sur $U_i \cap U_j$. On pose $\text{Sing } \mathcal{F} = \bigcup_i \text{Zéro}(\omega_i)$; c'est un sous-ensemble analytique de M .

Nous nous limitons aux feuilletages $\mathcal{F}$ vérifiant l'hypothèse H suivante (qui était automatiquement vérifiée sur $\mathbf{CP}(2)$) :

H : « il existe une 1-forme méromorphe ω sur M , non partout nulle, telle que ω définisse $\mathcal{F}$ ».

Cette hypothèse se traduit dans chaque carte U_i par : il existe une fonction méromorphe f_i sur U_i telle que $\omega/U_i = f_i \omega_i$. On pose alors

$$\begin{aligned} \text{Zéro } \omega &= \bigcup_i \text{Zéro}(f_i) \cup \text{Sing } \mathcal{F}, \\ \text{Pol } \omega &= \bigcup_i \text{Pol}(f_i) \cup \text{Sing } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Théorème. — Soit L une feuille de $\mathcal{F}$, dont l'adhérence $\bar{L}$ est disjointe de Zéro ω ou de Pol ω . Alors l'une des propositions suivantes est satisfaite :

- 1) ω est fermée;
- 2) L est une feuille compacte de $\mathcal{F}$;
- 3) il existe un lacet d'holonomie hyperbolique, contenu dans une feuille de $\bar{L}$.

La démonstration copie mot pour mot celle sur $\mathbf{CP}(2)$. Nous la laissons en exercice, avec les indications suivantes :

- (i) On peut encore définir localement une 1-forme ω_1 telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$. Cette forme est définie globalement sur $T\mathcal{F}$. Elle permet encore de définir le feuilletage $\mathcal{H}$ en courbes réelles orientées.
- (ii) La condition $\bar{L} \cap \text{Zéro}(\omega) = \emptyset$ signifie que la dynamique, consistant à suivre les feuilles de $\mathcal{H}$ dans le sens positif, est sans point singulier attracteur. Et la condition $\bar{L} \cap \text{Pol}(\omega) = \emptyset$ signifie que cette dynamique est sans point singulier répulseur.

On construit facilement des feuilletages holomorphes, sur des surfaces complexes, possédant des minimaux exceptionnels : par exemple, en suspendant un homomorphisme du groupe fondamental d'une surface réelle de genre $g \geq 2$ dans le groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathbf{CP}(1)$. Cependant nous ne savons pas si un tel feuilletage vérifie l'hypothèse H, ni si le minimal vérifie les hypothèses du théorème. En d'autres termes, nous ne savons pas si, même sous sa forme la plus générale, notre théorème n'est pas vide.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ca, Li, Sa] C. CAMACHO, A. LINS, P. SAD, Minimal sets of foliations on complex projective spaces, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **68** (1988), 187-203.
- [L. R.] R. LANGEVIN, H. ROSENBERG, Quand deux sous-variétés sont forcées par leur géométrie à se rencontrer (à paraître au *Bulletin de la S.M.F.*).
- [Ma, Mo] J. F. MATTÉI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, Série 4, 13 (1980), 469-523.
- [Na] R. NARASIMHAN, Introduction to the theory of analytic spaces, *Springer Lect. Notes in Math.*, n° 25 (1966).
- [Po] R. POINCARÉ, Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle, *J. Math. Pures et Appl.* (Série 3), 7 (1881), 375-422.
- [Ra] B. RAYMOND, *Ensembles de Cantor et feuilletages*, thèse de doctorat d'Etat, Paris XI (Orsay), 2 juin 1976.
- [Sa] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudo-groups, *American Journal of Math.*, **87** (1965), 79-102.

Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
Faculté des Sciences Mirande
B.P. 138, 21000 Dijon.

Manuscrit reçu le 4 juin 1991.

Révisé le 19 février 1992.