PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE DELIGNE

Le symbole modéré

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 73 (1991), p. 147-181
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1991__73__147_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE SYMBOLE MODÉRÉ

par P. DELIGNE

Si f et g sont deux fonctions méromorphes sur une surface de Riemann Σ, le symbole modéré de f et g en $x \in \Sigma$ est

$$(1.1) \qquad (f, g)_x = (-1)^{v(f)\,v(g)}\,[g^{v(f)}/f^{v(g)}]\,(x),$$

où $v(f)$ est la valuation de f en x : l'ordre du zéro, l'opposé de l'ordre du pôle. Le rapport $g^{v(f)}/f^{v(g)}$ est de valuation 0, donc peut être évalué en x. La définition (1.1) est due à J. Tate (cf. [3], p. 65) et, dans [3], III, n° 4, $(f, g)_x$ apparaît comme le symbole local pour le groupe multiplicatif. En tant que tel, pour Σ compacte, il donne lieu à une formule du produit

$$(1.2) \qquad \prod_{x \in \Sigma} (f, g)_x = 1$$

(presque tous les facteurs sont égaux à 1) qui généralise la loi de réciprocité de Weil $f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f))$ pour f et g à diviseurs disjoints. Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète de corps résiduel k, la définition (1.1) garde un sens pour définir $(\ ,\ ) : \mathrm{K}^* \otimes \mathrm{K}^* \to k^*$ et (au signe près) ce morphisme s'interprète en K-théorie comme le composé du produit $\mathrm{K}_1(\mathrm{K}) \otimes \mathrm{K}_1(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}_2(\mathrm{K})$ avec le cobord $\mathrm{K}_2(\mathrm{K}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{K}_1(k)$.

Soient D la région de $\mathbf{C}$ bordée par une courbe C^∞ Γ et f, g deux fonctions méromorphes sur un voisinage de D, sans zéro ni pôle sur Γ. Le point de départ de cet article a été une formule exprimant le produit des $(f, g)_x$ $(x \in \mathrm{D})$ comme la monodromie sur Γ d'un fibré en droites plat sur Γ défini par les restrictions de f et g à Γ. Concrètement c'est une formule exprimant ce produit par une intégrale sur Γ.

Selon une suggestion de O. Gabber, le point essentiel est la construction, dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur une surface de Riemann Σ, d'un morphisme de degré 1 de $\mathcal{O}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}^*$ dans $\mathbf{C}^*$:

$$(1.3) \qquad \mathcal{O}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}^* \to \mathbf{C}^*[1].$$

Ce morphisme est donné par une formule explicite au niveau de complexes résolvant $\mathcal{O}^*$ et $\mathbf{C}^*$. Ceci permet d'en donner une interprétation locale, comme loi qui à deux fonctions holomorphes inversibles f et g attache un $\mathbf{C}^*$-torseur (= espace principal homogène, voir 5.2) (f, g) ou, ce qui revient au même, un fibré en droites plat.

En dimension quelconque, on dispose encore d'un morphisme analogue, à valeurs dans le complexe $\mathcal{O}^* \xrightarrow{d \log} \Omega^1$, quasi-isomorphe à $\mathbf{C}^*$ en dimension 1 mais non en dimension > 1. Ce morphisme fournit une loi qui, à f et g holomorphes inversibles, attache

un fibré en droites (f, g) à connexion (en général non intégrable). En fait, ce morphisme est simplement celui qui donne le produit en cohomologie de Beilinson-Deligne ($\mathbf{Z}(1)$, $\mathbf{Z}(1)$ vers $\mathbf{Z}(2)$) et nous donnons une interprétation correspondante de (f, g) en termes de théorie de Hodge au § 3.

On dispose de constructions analogues sur les variétés C^∞, $\mathcal{O}^*$ étant remplacé par le faisceau des fonctions inversibles C^∞ et $\mathcal{O}^* \to \Omega^1$ par son analogue C^∞. Moins de régularité est possible (cf. 4.6).

Pour G un groupe analytique complexe commutatif, (1.3) admet une généralisation

$$\mathcal{O}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes} G(\mathcal{O}) \to G[1] \tag{1.4}$$

permettant d'attacher un G-torseur plat $(f, g]$ à f holomorphe inversible et g holomorphe à valeurs dans G sur une surface de Riemann Σ. La monodromie de $(f, g]$ est analogue aux symboles locaux de [3], chap. III, et (1.4) donne lieu à des analogues analytiques complexes du corps de classe géométrique. Ainsi, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible trivialisé à l'infini et g une fonction holomorphe à valeurs dans G on déduit de (1.4) un symbole $(\mathcal{L}, g] \in G$ avec $(\mathcal{O}(x), g] = g(x)$. C'est un analogue de [3], III, § 3, Th. 1.

Dans le cas du cercle $S^1, f, g \mapsto$ monodromie de $(f, g) \in \mathbf{C}^*$ identifie, en un sens à préciser, le groupe multiplicatif des fonctions inversibles sur S^1 à son propre dual « de Cartier » (4.4, 4.7).

Pour avoir un énoncé propre, il faut veiller à la régularité des fonctions utilisées. Dans la suite de l'introduction, nous prétendrons, à tort, qu'il s'agit simplement du groupe $\mathcal{O}^*_\infty(S^1)$ des fonctions C^∞ inversibles, à valeurs complexes, sur S^1.

Cette autodualité est antisymétrique. Elle fournit un analogue analytique du résultat de Contou-Carrère selon lequel le foncteur en groupes qui, à chaque anneau commutatif A attache le groupe multiplicatif $(A[[T]]\,[T^{-1}])^*$, est son propre dual de Cartier. Nous prouvons aussi une variante tordue par un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini sur S^1.

Si Σ est une surface de Riemann à bord, de bord un cercle S, les valeurs au bord de fonctions holomorphes inversibles sur Σ forment un sous-espace isotrope maximal, en un sens à préciser, de $\mathcal{O}^*_\infty(S)$. Nous prouvons aussi une variante quand le bord de Σ est la somme disjointe de plusieurs cercles, et une variante tordue par un système local sur Σ. On peut voir ces résultats comme parallèles à l'autodualité de la jacobienne, ou des variétés de Prym.

Dans tout ce qui précède, nous avons omis des twists à la Tate (= produits tensoriels avec $\mathbf{Z}(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$) nécessaires pour rendre les résultats plus naturels et indépendants du choix de la racine carrée i de -1 dans $\mathbf{C}$.

Au dernier paragraphe, nous utilisons ces outils pour une construction préliminaire à celle de théories conformes des champs holomorphes attachées à certaines orbifoldes du type quotient d'un tore par un groupe fini. Soient B une forme bilinéaire paire et définie positive sur $\mathbf{Z}^n$ et S un cercle orienté. À B, plus une donnée auxiliaire (voir 5.1), nous attachons une extension centrale $\mathcal{H}$ de $\mathcal{O}^*_\infty(S)^n$ par $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{C}^*$ étant d'indice fini dans

le centre, et égal au centre si B est de discriminant 1. Il y a lieu de regarder $\mathscr{H}$ comme un groupe de Heisenberg complexe de dimension infinie. On dispose sur $\mathscr{H}$, ou en tout cas sur $\mathscr{H}/\mathbf{C}^*$, d'une structure réelle, celle pour laquelle les f « réels » sont ceux à valeurs dans U^1. Si S est le bord de Σ, et que la « donnée auxiliaire » est donnée sur Σ, nous construisons un relèvement canonique de $\mathcal{O}^*(\Sigma)^n \subset \mathcal{O}^*_\infty(S)^n$ dans $\mathscr{H}$. Le sous-espace $\mathcal{O}^*(\Sigma)^n$ jouit, vis-à-vis du commutateur et de la structure réelle, d'une propriété de positivité qui permet de considérer son relèvement comme une polarisation complexe de $\mathscr{H}$. On a aussi des variantes pour Σ ayant plusieurs cercles au bord, et $\mathbf{Z}^n$ remplacé par un système local sur Σ.

L'application aux théories conformes des champs se fait *via* le formalisme des représentations de tels groupes de Heisenberg. Ce sera le sujet d'un autre article.

Je remercie A. A. Beilinson de conversations très instructives. En particulier, c'est de lui que j'ai appris l'interprétation du symbole modéré comme produit en cohomologie de Beilinson-Deligne et la définition des « données auxiliaires » mentionnées ci-dessus suit une de ses suggestions.

2. La construction principale

2.1. Soit X une variété analytique complexe. Nous noterons $\mathcal{O}$ le faisceau de ses fonctions holomorphes et $\mathcal{O}^*$ celui des fonctions holomorphes inversibles. Si G est un groupe analytique complexe commutatif, on note $G(\mathcal{O})$ le faisceau des fonctions holomorphes de X dans G et $G(\mathbf{C})$ le faisceau constant G : celui des fonctions localement constantes. Pour G le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$, noté $\mathbf{G}_m$, $G(\mathcal{O})$ est $\mathcal{O}^*$. On notera G multiplicativement. Pour X de dimension 1, on a une suite exacte de faisceaux

$$\textbf{(2.1.1)} \qquad 0 \to G(\mathbf{C}) \to G(\mathcal{O}) \xrightarrow{g^{-1}dg} \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}(G) \to 0 \quad (\dim X = 1).$$

On pose $\mathbf{Z}(n) := (2\pi i)^n \mathbf{Z}$ et l'on écrit (n) pour un produit tensoriel avec $\mathbf{Z}(n)$. Souvent, nous choisirons une racine carrée i de -1. Ceci définit une orientation de $\mathbf{C}$, donc de X, et un isomorphisme $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}(n) : 1 \mapsto (2\pi i)^n$, par lequel nous identifierons G et $G(n)$.

2.2. Notons $[A \xrightarrow{f} B]_{n,n+1}$ le complexe réduit à A et B en degrés n et $n+1$, de différentielle f. Nous construirons, dans la catégorie dérivée, un morphisme

$$\textbf{(2.2.1)} \qquad \mathcal{O}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes} G(\mathcal{O}) \to [G(\mathcal{O}) \xrightarrow{g^{-1}dg} \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}(G)]_{-1,0}(1).$$

Il suffit pour cela de construire un complexe de faisceaux K, un quasi-isomorphisme $a : K \to \mathcal{O}^*$ de K avec le complexe réduit à $\mathcal{O}^*$ en degré 0 et un morphisme de complexes

$$K \otimes G(\mathcal{O}) \to [G(\mathcal{O}) \to \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}(G)]\,(1).$$

On prend pour K le complexe $[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0}$ de différentielle l'inclusion de $\mathbf{Z}(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$ dans $\mathcal{O}$, et pour a en degré 0, $a^0 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ l'exponentielle. Le fait que a est un quasi-isomorphisme traduit l'exactitude de

$$0 \to \mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0.$$

Reste à définir

(2.2.2) $$[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0} \otimes \mathrm{G}(\mathcal{O}) \to [\mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \otimes \Omega^1]_{-1,0}(1).$$

Pour F un faisceau d'espaces vectoriels complexes, par exemple $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \otimes \Omega^1$, on identifie F à F(1) par $f \otimes n \mapsto nf$ ($n \in 2\pi i\mathbf{Z}$). On prend pour composantes de (2.2.2)

$$\text{l'identité} : \mathbf{Z}(1) \otimes \mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \mathrm{G}(\mathcal{O})(1)$$

$$f.(g^{-1}\,dg) : \mathcal{O} \otimes \mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Lie}\,\mathrm{G} \otimes \Omega^1 \simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \otimes \Omega^1(1).$$

Si l'on choisit $i \in \mathbf{C}$, d'où une identification de $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}(1)$ pour tout faisceau $\mathcal{G}$, ces flèches s'identifient plutôt, respectivement, à l'identité et à

$$f \otimes g \mapsto \frac{1}{2\pi i} f.(g^{-1}\,dg).$$

2.3. Par passage à la cohomologie, (2.2.1) définit

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathcal{O}^*) \otimes \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{G}(\mathcal{O})) \to \mathbf{H}^{i+j}(\mathrm{X}, [\mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}]_{-1,0}(1)).$$

Pour $i = j = 0$, le membre de droite est le groupe des classes d'isomorphie de G(1)-torseurs holomorphes sur X, munis d'une connexion (non supposée intégrable). Parce que (2.2.1) est donné par une formule explicite, au niveau des complexes, l'application se précise en une loi locale qui, à f holomorphe inversible et à g fonction holomorphe à valeurs dans G, attache un G(1)-torseur holomorphe à connexion $(f, g]$ bien défini à isomorphisme unique près.

Il nous sera commode de choisir $i \in \mathbf{C}$ de sorte que G s'identifie à G(1). Il s'agit alors de construire un G-torseur à connexion.

La construction sera locale. Localement, sur un ouvert U, on aura à choisir une donnée auxiliaire k, section sur U d'un faisceau $\mathcal{K}$. Le faisceau $\mathcal{K}$ n'aura pas en général de section globale, mais il est localement non vide. On construira un G-torseur à connexion $(f, g]\,(k)$ sur U ($k \in \mathcal{K}(\mathrm{U})$) et un système transitif d'isomorphismes entre les $(f, g]\,(k)$.

Ceci définira $(f, g]$ sur U à isomorphisme unique près, dès que $\mathcal{K}(\mathrm{U}) \neq \emptyset$. La construction est en outre compatible à la restriction à un ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$: les $(f, g]$ définis localement se recollent en le $(f, g]$ voulu.

Le faisceau des données auxiliaires est celui des logarithmes de f. Si $k = \log f$ est un logarithme de $f : f = \exp(\log f)$, on prend pour $(f, g]\,(k)$ le torseur trivial $\mathrm{G}(\mathcal{O})$ muni de la connexion ∇ pour laquelle

$$\nabla s = s^{-1}\,ds + \frac{1}{2\pi i} \log f . g^{-1}\,dg.$$

Si l'on remplace $k = \log f$ par $k' = \log f + n.2\pi i$, l'isomorphisme

$$(f, g]\,(k_1) \to (f, g]\,(k_2)$$

est $\mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \mathrm{G}(\mathcal{O}) : s \mapsto sg^{-n}$.

En d'autres termes, le choix de $\log f$ définit une trivialisation $\{\log f, g\}$ de $(f, g]$, et

(2.3.1) $$\nabla\{\log f, g\} = \frac{1}{2\pi i}\log f . g^{-1}\, dg,$$

(2.3.2) $$\{\log f + n.2\pi i, g\} = \{\log f, g\}.g^n.$$

La courbure $d\nabla\{\log f, g\}$ de $(f, g]$ est

(2.3.3) $$\mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i}\, df/f \wedge g^{-1}\, dg \in \Omega^2 \otimes \mathrm{Lie}(\mathrm{G}).$$

2.4. Le lecteur plus à l'aise avec le langage des cocycles de Čech qu'avec celui de 2.3 peut traduire 2.3 comme suit. Soit $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de Σ, tel que, sur chaque U_i, f admette un logarithme $(\log f)_i$. Le G-torseur $(f, g]$ est alors défini par le cocycle

$$c_{ij} = g^{(\log(f)_j - \log(f)_i)/2\pi i},$$

et sa connexion par les 1-formes, à valeurs dans Lie G, $\frac{1}{2\pi i}\log_i(f).g^{-1}\, dg$.

2.5. *Variante.* — Sur une variété C^∞, on attache de même à une fonction inversible f et à une application g à valeurs dans G un torseur à connexion $(f, g]$. En dimension réelle 1, la connexion est automatiquement intégrable et $(f, g]$ est un G-torseur plat.

2.6. Prenons pour X une surface de Riemann Σ. On est en dimension 1 et, composant (2.2.1) avec l'inverse du quasi-isomorphisme

$$\mathrm{G}(\mathbf{C})[1] \xrightarrow{\sim} [\mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}\ \mathrm{G}]_{-1,0}$$

déduit de (2.1.1), tordu par $\mathbf{Z}(1)$, on obtient

(2.6.1) $$\mathcal{O}^* \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{G}(\mathcal{O}) \to \mathrm{G}(\mathbf{C})(1)[1].$$

Par passage à la cohomologie, (2.6.1) induit des morphismes

(2.6.2) $$\mathrm{H}^i(\Sigma, \mathcal{O}^*) \otimes \mathrm{H}^j(\Sigma, \mathrm{G}(\mathcal{O})) \to \mathrm{H}^{i+j+1}(\Sigma, \mathrm{G}(\mathbf{C})(1)).$$

Pour $i = j = 0$, le membre de droite $\mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbf{G}(\mathbf{C})(1))$ est le groupe des classes d'isomorphie de $\mathrm{G}(\mathbf{C})(1)$-torseurs et (2.6.2) attache à f et g la classe d'isomorphie du $\mathrm{G}(\mathbf{C})(1)$-torseur des sections horizontales de $(f, g]$. Ce $\mathrm{G}(\mathbf{C})(1)$-torseur sera encore noté $(f, g]$.

Pour des familles de supports Φ et Ψ, on peut remplacer H^i par H^i_Φ, H^j par H^j_Ψ et H^{i+j+1} par $\mathrm{H}^{i+j+1}_{\Phi\cap\Psi}$. On peut aussi composer le morphisme obtenu avec un « morphisme trace » :

(A) Pour un groupe abélien A, on dispose de

(2.6.3) $$\mathrm{Tr} : \mathrm{H}^2_c(\Sigma, \mathrm{A}(1)) \to \mathrm{A} :$$

le choix d'une racine carrée i de -1 oriente Σ, identifie A à A(1) et transforme Tr en le cap-produit avec le cycle fondamental. Le morphisme Tr ne dépend pas du choix de i.

(B) Pour $x \in \Sigma$, on en déduit

(2.6.4) $$\mathrm{Res}_x : \mathrm{H}^1(\Sigma - \{x\}, \mathrm{A}(1)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^2_{\{x\}}(\Sigma, \mathrm{A}(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathrm{A}.$$

Passons en revue quelques morphismes ainsi déduits de (2.6.1). Nous ne précisons pas nos conventions de signe et les énoncés sont donc à prendre au signe près.

2.7. Soient $x \in \Sigma$, f inversible sur $\Sigma - \{x\}$ et $g : \Sigma - \{x\} \to \mathrm{G}$. Il suffirait que f et g soient définis dans un voisinage de x (moins $\{x\}$). Composant (2.6.2) pour $i = j = 0$ avec le résidu (2.6.4) en x, on obtient

(2.7.1) $$(f, g]_x \in \mathrm{G}(\mathbf{C}).$$

Soit S un cercle tracé autour de x. Le choix de i oriente S, comme bord d'un disque contenant x, identifie $\mathrm{G}(\mathbf{C})$ (1) à $\mathrm{G}(\mathbf{C})$, et $(f, g)_x$ est la monodromie $(f, g]_\mathrm{S}$ de $(f, g]$ sur S.

Plus généralement, soient S un cercle orienté, f une fonction C^∞ sur S à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, g une fonction C^∞ sur S à valeurs dans G, et calculons la monodromie $(f, g]_\mathrm{S}$ du G-torseur plat $(f, g]$ sur S.

Soit $v(f)$ le degré de l'application $\arg(f) : \mathrm{S} \to \mathrm{U}^1$. C'est l'entier n tel que $\log f(x)$ s'accroisse de $n.2\pi i$ quand $x \in \mathrm{S}$ accomplit un tour positif. Pour $x_0 \in \mathrm{S}$ fixé, une section locale horizontale de $(f, g]$ s'écrit

$$\{\log f, g\}.\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} \log f.g^{-1}\, dg\right).$$

Pour la monodromie, on en déduit :

(2.7.2) $$(f, g]_\mathrm{S} = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0} \log f.g^{-1}\, dg\right).g(x_0)^{v(f)}$$

(intégrale sur S, $\log f$ étant une branche du logarithme sur $\mathrm{S} - \{x_0\}$).

2.8. *Exemples.* — (i) Si G est le groupe additif, on a

$$\begin{aligned}(f, g]_x &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0} \log f.dg + v(f)\, g(x_0)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{df}{f}\, g = \mathrm{Res}\left(\frac{df}{f}.g\right).\end{aligned}$$

Plus généralement, pour G quelconque, si g admet un logarithme à valeurs dans Lie G, on a

$$(f, g]_x = \exp\left(\mathrm{Res}\left(\frac{df}{f}\log g\right)\right).$$

Si g est holomorphe en x et si f est méromorphe (de sorte que df/f a un pôle simple de résidu $v(f)$) ou que g est constant, on a donc $(f, g]_x = g(x)^{v(f)}$.

(ii) Si G est le groupe multiplicatif et si f et g sont méromorphes en x, montrons que $(f, g]_x$ est le symbole modéré (1.1) :

$$(f, g]_x = (-1)^{v(f)\,v(g)}[g^{v(f)} f^{-v(g)}]\,(x).$$

Si g est holomorphe inversible en x, on applique (i). Une intégration par parties dans (2.7.2) donne $(f, g)_x = (g, f)_x^{-1}$ et la formule est donc encore vraie pour f holomorphe inversible en x. Soit z une coordonnée locale. Par bimultiplicativité, il reste à traiter le cas $f = g = z$, *i.e.* à calculer $\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_1^1 \log z . \frac{dz}{z}\right)$, où l'intégrale est prise sur le cercle $|z| = 1$, de 1 à 1; on a

$$\int_1^1 \log z . \frac{dz}{z} = \int_1^1 \frac{1}{2}\, d(\log z)^2 = \frac{1}{2}\,(2\pi i)^2$$

et, comme requis, $(z, z]_0 = -1$.

2.9. Pour G le groupe multiplicatif, nous écrirons (,) au lieu de (,]. Le symbole $(f, g)_x$ — et son analogue $(f, g)_S$ sur un cercle — sont l'analogue analytique complexe d'une construction algébrique de Contou-Carrère.

Plutôt qu'un germe en x de fonction holomorphe inversible sur $\Sigma - x$ (qui, en terme d'une coordonnée locale T, s'écrit $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{T}^n$), Contou-Carrère considère pour tout anneau commutatif A le groupe multiplicatif des éléments inversibles de

$$\mathrm{A}((\mathrm{T})) := \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]\,(\mathrm{T}^{-1}).$$

Si l'on suppose, pour simplifier, que A n'est pas un produit d'anneaux, il s'agit des séries de Laurent $f = \sum_{-\mathrm{N}}^{\infty} a_n \mathrm{T}^n$ telles que, pour un m (la *valuation* de f), a_m soit inversible et que les $a_\ell (-\mathrm{N} \leqslant \ell < m)$ soient nilpotents. « Nilpotent » : $a^{\mathrm{M}} = 0$ pour M grand est la façon algébrique de dire « petit ». En général, si $f \in \mathrm{A}((\mathrm{T}))^*$, il existe une décomposition de A en un produit fini d'anneaux telle que la description précédente s'applique à chaque facteur. Le symbole $(f, g)_x$ est remplacé par un accouplement

(2.9.1) $$\mathrm{A}((\mathrm{T}))^* \otimes \mathrm{A}((\mathrm{T}))^* \to \mathrm{A}^*,$$

invariant par les changements de coordonnées $\mathrm{T} \mapsto \sum_{-\mathrm{N}}^{\infty} b_n \mathrm{T}^n$ (b_1 inversible, b_n nilpotent pour $n \leqslant 0$).

Si $f = \Sigma a_n \mathrm{T}^n$ et $g = \Sigma b_n \mathrm{T}^n$ sont de valuations fixées $v(f)$ et $v(g)$, on a

$$(f, g) = b_{v(g)}^{v(f)}\, a_{v(f)}^{-v(g)} (a_{v(f)}^{-1} f,\, b_{v(g)}^{-1} g)$$

et $(a_{v(f)}^{-1} f,\, b_{v(g)}^{-1} g)$ est donné par une série formelle universelle à coefficients entiers isobare de poids 0, en les $a_{v(f)}^{-1} a_n (n \neq v(f))$ et les $b_{v(g)}^{-1} b_m (m \neq v(g))$, de poids respectifs $n - v(f)$ et $m - v(g)$. Etant isobare, la série se réduit à un nombre fini de termes quand on impose $a_i = b_i = 0$ pour $i < -\mathrm{N}$ et $a_i^{\mathrm{M}} = b_j^{\mathrm{M}} = 0$ pour $-\mathrm{N} \leqslant i < v(f)$, $-\mathrm{N} \leqslant j < v(g)$. L'existence d'une série formelle universelle exprime la fonctorialité en A de 2.9.1.

Qu'elle soit isobare exprime l'invariance par les changements de coordonnées $T \mapsto \lambda T$. Supposons que $\mathbf{Q} \subset A$. Si $v(g) = 0$ et $b_0 = 1$, $\log g$ est défini, $\operatorname{Res}\left(\frac{df}{f} \log g\right)$ est nilpotent et

$$(f, g) = \exp\left(\operatorname{Res}\left(\frac{df}{f} . \log g\right)\right).$$

C'est une formule pour (f, g), mais il n'est pas évident qu'elle soit à coefficients entiers. Elle l'est, et le prouver est essentiellement équivalent à construire (2.9.1).

2.10. Soient $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur Σ, trivialisé à l'infini, *i.e.* en dehors d'un compact, et $g : \Sigma \to G$. Le morphisme (2.6.2), pour $i = 1, j = 0$ et H^1 à support compact, composé avec la trace (2.6.3)

$$H^1_c(\Sigma, \mathcal{O}^*) \otimes H^0(\Sigma, G(\mathcal{O})) \to H^2_c(\Sigma, G(\mathbf{C})(1)) \to G(\mathbf{C}),$$

définit

$$(\mathscr{L}, g] \in G(\mathbf{C}).$$

Pour $x \in \Sigma$ et $\mathscr{L} = \mathcal{O}(x)$, on a simplement

$$(\mathcal{O}(x), g] = g(x)$$

et $(\mathscr{L}, g)$ apparaît ainsi comme un analogue analytique d'une construction de Rosenlicht ([3], chap. I).

2.11. Le cas $i = 1$ (cohomologie à support compact), $j = 1$ est aussi intéressant. A un faisceau inversible $\mathscr{L}$ trivialisé à l'infini et à un $G(\mathcal{O})$-torseur T sur Σ, on associe un G-torseur $(\mathscr{L}, T]$, bien défini à isomorphisme unique près. Par exemple,

$$(\mathcal{O}(x), T] = \text{fibre de T en } x.$$

C'est un analogue analytique de S.G.A. 4, XVIII, 1.3.

2.12. La construction (2.6.1) admet une variante relative. Considérons une famille de surfaces de Riemann paramétrée par un espace analytique S, *i.e.* un morphisme lisse $f : X \to S$ (les géomètres différentiels diraient « submersif ») à fibres de dimension 1. Soit G un groupe analytique commutatif lisse sur S (une famille de groupes paramétrée par S) et $f^* G$ son image inverse sur X. On note de même leurs faisceaux de sections holomorphes et l'on note $f^\bullet G$ l'image inverse sur X du faisceau G (sections de $f^* G$ localement constantes dans le sens des fibres). Le morphisme (2.6.1) se généralise en

$$\mathcal{O}^* \overset{L}{\otimes} f^* G \to f^\bullet G(1). \tag{2.12.1}$$

Comme en 2.2, 2.6, 2.7 à 2.12.1 correspond une construction qui, à f holomorphe inversible sur X et g section de $f^* G$, attache un $f^*(G)$ (1)-torseur $(f, g]$ muni d'une connexion relative.

Pour x une section de X/S, f holomorphe inversible sur $X - x(S)$ et g une section de $f^* G$ sur $X - x(S)$, on en déduit

(2.12.2) $$(f, g]_x \in H^0(S, G).$$

3. Le cas du groupe multiplicatif

3.1. Prenons pour G le groupe multiplicatif : $G = \mathbf{C}^*$. Le produit (2.2.1)

(3.1.1) $$\mathcal{O}^* \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}^* \longrightarrow [\mathcal{O}^* \xrightarrow{df/f} \Omega^1]\ (1),$$

et aussi celui qui définit le produit en cohomologie de Beilinson-Deligne ($\mathbf{Z}(1), \mathbf{Z}(1)$ vers $\mathbf{Z}(2)$). Ceci correspond à l'interprétation suivante de (f, g) en termes de structures de Hodge mixtes.

Il nous sera commode d'identifier $\mathbf{C}^*(1)$ à $\mathbf{C}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$ par l'exponentielle et d'utiliser la notation additive. Avec cette identification, (f, g) est un $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$-torseur à connexion, un choix de $\log f$ définit une section $\{\log f, g\}$, et

$$\nabla(\{\log f, g\} + h) = \log f \frac{dg}{g} + dh,$$

$$\{\log f + n, g\} = \{\log f, g\} + n \log g \quad (n \in 2\pi i\mathbf{Z}).$$

Plaçons-nous tout d'abord sur un espace réduit à un point : pour $a, b \in \mathbf{C}^*$, (a, b) est un $\mathbf{C}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$-torseur.

Notons encore $\mathbf{Z}(n)$ la structure de Hodge de réseau entier $(2\pi i)^n\,\mathbf{Z}$ de type de Hodge $(-n, -n)$. A $a \in \mathbf{C}^*$ correspond une structure de Hodge mixte $[a]$ extension de $\mathbf{Z}(0)$ par $\mathbf{Z}(1)$: réseau entier

$$[a]_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \log a & 2\pi i \end{pmatrix} \mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{C}^2,$$

filtration de Hodge (resp. par le poids) définie par le sous-espace F^0 (resp. W_{-2}), premier (resp. deuxième) facteur de $\mathbf{C}^2$. Le réseau entier $[a]_{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}^2$ ne dépend pas de la détermination choisie de $\log a$.

Décrivons les structures de Hodge mixtes E de type $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(-2, -2)$, munies d'isomorphismes $\mathrm{Gr}^W_{-2i}(E) = \mathbf{Z}(i)$ pour $i = 0, 1, 2$. Il existe une unique base e_0, e_1, e_2 de l'espace vectoriel complexe sous-jacent, identifiant $E_{\mathbf{C}}$ à $\mathbf{C}^{[0,2]}$, telle que la filtration par le poids soit par les $\mathbf{C}^{[i,2]}$, de Hodge par les $\mathbf{C}^{[0,i]}$, et que e_i définisse l'isomorphisme de $\mathrm{Gr}^W_{-2i}(E)$ avec $\mathbf{Z}(i)$. Le réseau entier est $A\mathbf{Z}^{[0,2]}$ pour A une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2\pi i & 0 \\ \gamma & \beta & (2\pi i)^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\tau(2\pi i)$ est la matrice diagonale $(1, 2\pi i, (2\pi i)^2)$ et U le groupe des matrices triangulaires inférieures à coefficients entiers avec 1 sur la diagonale, la donnée de E équivaut à celle de la classe latérale $A\tau(2\pi i)\, U\, \tau(2\pi i)^{-1}$. Noter que E, muni des $\mathrm{Gr}^{W}_{-2i} E \simeq \mathbf{Z}(i)$, n'a pas d'automorphisme.

Les extensions itérées E, pour lesquelles l'extension $E/W_{-4} E$ de $\mathbf{Z}(0)$ par $\mathbf{Z}(1)$ est $[a]$, et l'extension $W_{-2} E$ de $\mathbf{Z}(1)$ par $\mathbf{Z}(2)$ est $[b]$ (1), forment un torseur sous

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbf{Z}(0), \mathbf{Z}(2)) = \mathbf{C}/(2\pi i)^2 \mathbf{Z}.$$

Construction **3.2.** — *Le* $\mathbf{C}/(2\pi i)^2 \mathbf{Z}$*-torseur* (a, b) *est l'opposé de celui des classes d'isomorphie d'extensions itérées* E de $\mathbf{Z}(0)$ *par* $\mathbf{Z}(1)$ *par* $\mathbf{Z}(2)$, *induisant les extensions* $[a]$ *de* $\mathbf{Z}(0)$ *par* $\mathbf{Z}(1)$ *et* $[b]$ (1) *de* $\mathbf{Z}(1)$ *par* $\mathbf{Z}(2)$.

Choisir $\log a$ fournit une trivialisation $\{\log a, b\}$ de (a, b). Ce choix fournit aussi une extension itérée $E(\log a, b)$, celle définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log a & 2\pi i & 0 \\ 0 & \log b & (2\pi i)^2 \end{pmatrix}$$

pour un choix quelconque de $\log b$. Si l'on change $\log a$ en $\log a + n$ $(n \in 2\pi i\mathbf{Z})$ on a, dans le $\mathbf{C}/(2\pi i)^2 \mathbf{Z}$-torseur (a, b),

$$\{\log a + n, b\} = \{\log a, b\} + n \log b,$$

tandis que l'extension $E(\log a + n, b)$, définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log a + n & 2\pi i & 0 \\ 0 & \log b & (2\pi i)^2 \end{pmatrix},$$

est aussi définie par le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log a & 2\pi i & 0 \\ -n \log b & \log b & (2\pi i)^2 \end{pmatrix}$$

de cette matrice avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la somme de $E(\log a, b)$ et de $-n \log b \in \mathbf{C}/(2\pi i)^2 \mathbf{Z}$. L'isomorphisme 3.2 est celui faisant se correspondre $\{\log a, b\}$ et $E(\log a, b)$. Il est indépendant du choix de $\log a$.

3.3. Avec paramètres, le $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\mathbf{Z}$-torseur (f, g) est de même l'opposé de celui des familles holomorphes de structures de Hodge mixtes sur X extensions itérées de $\mathbf{Z}(0)$ par $\mathbf{Z}(1)$ par $\mathbf{Z}(2)$, induisant $[f]$ et $[g]$ (1). Choisissons $\log f$, ce qui trivialise (f, g). L'extension itérée E définie par la section h de $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\mathbf{Z}$ correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log f & 2\pi i & 0 \\ -h & \log g & (2\pi i)^2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$e_0 = (e_0 + \log f e_1 - h e_2) - \log f(e_1 + \log g e_2) + (\log f \log g + h)\, e_2$$

et la connexion ∇ pour laquelle le réseau entier est horizontal vérifie donc

$$\nabla e_0 = -\frac{df}{f} e_1 + \left(\log f \frac{dg}{g} + dh\right) e_2.$$

Pour que E soit une variation de structures de Hodge mixtes : $\nabla e_0 \in \Omega^1 \otimes \langle e_0, e_1 \rangle$, il faut et il suffit donc que $\log f \dfrac{dg}{g} + dh = 0$, *i.e.* que h soit horizontal comme section du torseur à connexion (f, g). Dans le dictionnaire (3.3), la connexion de (f, g) est donc caractérisée par la propriété que, après restriction à toute sous-variété, une section est horizontale si et seulement si elle correspond à une variation. En particulier :

Construction **3.4.** — *Une variation de structures de Hodge mixtes, extensions itérées de* $\mathbf{Z}(0)$ *par* $\mathbf{Z}(1)$, *par* $\mathbf{Z}(2)$, *induisant* $[f]$ *et* $[g]$ (1), *définit une section horizontale de* (f, g) *et réciproquement.*

Exemple **3.5.** — Sur la droite projective moins $\{0, 1, \infty\}$, la fonction $\mathrm{Li}_2(z) = \Sigma z^n/n^2$ définit une variation de structures de Hodge extension itérée de $\mathbf{Z}(0)$ par $\mathbf{Z}(1)$ par $\mathbf{Z}(2)$, de matrice

$$\mathrm{A}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log(1-z) & 2\pi i & 0 \\ -\mathrm{Li}_2(z) & \log z & (2\pi i)^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{A}(z)$ est multivaluée, définie par prolongement analytique à partir de ses valeurs sur $]0, 1[$, mais deux déterminations de $\mathrm{A}(z)$ définissent la même extension itérée. En particulier, la détermination de $\log(1-z)$ détermine celle de $\mathrm{Li}_2(z)$ à $(2\pi i)^2\mathbf{Z}$ près.

Sur $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, ceci définit une trivialisation de $(1-z, z)$. La section horizontale trivialisante est

$$\{\log(1-z), z\} + \mathrm{Li}_2(z);$$

elle est indépendante du choix de $\log(1-z)$, qui détermine celui de $\mathrm{Li}_2(z)$ à $(2\pi i)^2\mathbf{Z}$ près.

Sur X quelconque, si f ne prend pas les valeurs 0, 1, ∞, on en déduit une trivialisation de $(1-f,f)$.

3.6. Notre symbole (f, g) est un analogue du symbole (x, y) à valeurs dans K_2, et chaque identité pour ce dernier doit avoir sa contrepartie. Le cas de $(1-x, x) = 1$ est 3.5. Chaque contrepartie est un isomorphisme canonique entre $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$-torseurs à connexion, et un problème nouveau est celui des compatibilités entre ces isomorphismes. Nous allons passer quelques cas en revue.

3.7. *Bimultiplicativité.* — La définition de (f, g) fournit aussitôt des isomorphismes

$$\begin{aligned}(f_1 f_2, g) &\xrightarrow{\sim} (f_1, g) + (f_2, g),\\ (f, g_1 g_2) &\xrightarrow{\sim} (f, g_1) + (f g_2),\end{aligned} \tag{3.7.1}$$

associatifs, commutatifs et distributifs : combinant les isomorphismes (3.7.1), on obtient un seul isomorphisme

$$(\Pi f_i, \Pi g_j) \to \Sigma(f_i, g_j).$$

La somme à droite désigne une somme de $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$-torseurs.

3.8. *Symétrie.* — Le torseur

$$(f, g) + (g, f) \tag{3.8.1}$$

est trivialisé par $\{\log f, g\} + \{\log g, f\} - \log f \log g$, indépendant des choix de $\log f$ et $\log g$. Cette trivialisation est symétrique en f et g. Elle définit

$$(f, g) \to -(g, f) \tag{3.8.2}$$

compatible aux isomorphismes (3.7.1) et involutif.

On définit

$$(f, f) \xrightarrow{\sim} (f, -1) \tag{3.8.3}$$

par $\{\log f, f\} \mapsto \{\log f, -1\} + \dfrac{(\log f)^2}{2}$, indépendant du choix de $\log f$.

Le double de (3.8.3) : $(f,f) + (f,f) \to (f, -1) + (f, -1) =$ torseur trivial 0, est la trivialisation (3.8.1) de $(f,f) + (f,f)$.

3.9. On prendra garde que, pour $f = -1$, l'isomorphisme (3.8.3) n'est pas l'identité de $(-1, -1)$ mais est d'ordre 8 : c'est l'addition de $(\pi i)^2/2$.

Si $f + g = 1$ sur X, on a $(f, g) = (1-g, g)$ et 3.5 trivialise (f, g). De même, 3.5 trivialise $(g, f) = (1-f, f)$. La somme de ces trivialisations est une trivialisation $(f, g) + (g, f)$. C'est la somme de la trivialisation 3.8.1 et de $-(2\pi i)^2/24$, car

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) + \log(z)\log(1-z) = \zeta(2) = -(2\pi i)^2/24.$$

3.10. Par bilinéarité, on peut étendre la construction de (f, g) à des sections de familles de tores (groupes isomorphes à $(\mathbf{C}^*)^n$) sur X.

Soit donc Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini. Il définit une famille de tores paramétrée par X, de groupe de caractères le dual de Λ. Le faisceau de ses sections holomorphes est simplement $\Lambda \otimes \mathcal{O}^*$. Etant donné Λ_1, Λ_2 et une forme bilinéaire $B : \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \to \mathbf{Z}$, on déduit de B un morphisme

$$(\Lambda_1 \otimes \mathcal{O}^*) \overset{L}{\otimes} (\Lambda_2 \otimes \mathcal{O}^*) \to \mathcal{O}^* \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}^*$$

qui, composé avec (3.1.1), définit

$$(\Lambda_1 \otimes \mathcal{O}^*) \overset{L}{\otimes} (\Lambda_2 \otimes \mathcal{O}^*) \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]\ (1).$$

A ce morphisme correspond une construction qui, à f section de $\Lambda_1 \otimes \mathcal{O}^*$ et g section de $\Lambda_2 \otimes \mathcal{O}^*$, associe un $\mathcal{O}^*(1)$-torseur à connexion $B(f, g)$, noté simplement (f, g) s'il n'y a pas d'ambiguïté sur B. On peut, soit la déduire de la bimultiplicativité 3.7, soit, ce qui est sans doute plus rapide, reprendre 2.2 : un logarithme $\log f \in \Lambda_1 \otimes \mathcal{O}$ de f détermine une section $\{\log f, g\}_B$ de (f, g), avec une variance en $\log f$ et une connexion que l'on écrit en terme de B. Si l'on traite (f, g) comme un $\mathcal{O}/(2\pi i)^2\,\mathbf{Z}$-torseur, on a

(3.10.1) $$\{\log f + n, g\}_B = \{f, g\}_B + B(n, \log g)$$
$$(n \in \Lambda_1(1), \log g \in \Lambda_2 \otimes \mathcal{O}),$$

(3.10.2) $$\nabla\{\log f, g\}_B = B\left(\log f, \frac{dg}{g}\right)$$
$$\left(\log f \in \Lambda_1 \otimes \mathcal{O}, \frac{dg}{g} \in \Lambda_2 \otimes \Omega^1\right).$$

Il est clair sur ces formules que $B(f, g)$ est bimultiplicatif en f, g (cf. 3.7) et que $B(f, g)$ est additif en B : pour $B = B_1 + B_2$, on a $B_1(f, g) + B_2(f, g) \xrightarrow{\sim} B(f, g)$, associatif pour $B = B_1 + B_2 + B_3$ et compatible à la bimultiplicativité.

Faisons $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$. Un analogue de 3.8.1 est que pour une forme bilinéaire symétrique *paire* B, on a une trivialisation canonique de $B(f,f)$:

(3.10.3) $$B(f,f) = 0 \quad \text{(B symétrique paire).}$$

Le plus simple est d'écrire la section trivialisante

(3.10.4) $$\{\log f, f\}_B - \tfrac{1}{2} B(\log f, \log f).$$

Cette trivialisation est additive en B et, pour C une forme bilinéaire, $C(f,f)$ ne dépend donc, à isomorphisme unique près, que de C modulo les formes bilinéaires symétriques paires.

Rappel. — Sur un $\mathbf{Z}$*-module de type fini* L, *le quotient* {*formes bilinéaires*}/{*formes bilinéaires symétriques paires*} *est celui des paires* (A, q) *où* A *est une forme alternée et* q *une forme quadratique* mod 2 *sur* L/2L, *avec* $q(x + y) - q(x) - q(y) =$ *parité de* $A(x, y)$.

L'application est $C \mapsto (A, q)$ avec

$$A(x,y) = C(x,y) - C(y,x),$$
$$q(x) = C(x,x) \bmod 2.$$

A isomorphisme unique près, le torseur $C(f,f)$ ne dépend donc que de (A, q). On le notera

$$(A, q)\,(f).$$

3.11. Si B est symétrique, non nécessairement paire, $B(x, x) \bmod 2$ est additif : dans $\Lambda^\vee \otimes \mathbf{Z}/(2)$, il existe un unique w, fonction additive de B, tel que

$$B(x, x) \equiv B(x, w) \mod 2.$$

On identifie $\mathbf{Z}/(2)$ à $\{\pm 1\}$ et l'on regarde w comme une section de $\Lambda^\vee \otimes \mathcal{O}^*$. L'analogue de (3.8.3) est un isomorphisme canonique, additif en B,

(3.11.1) $$B(f,f) \xrightarrow{\sim} (f, w) : \{\log f, f\}_B \mapsto \{\log f, w\} + \tfrac{1}{2} B(\log f, \log f).$$

Pour ℓ une forme linéaire mod 2 sur Λ, correspondant à un élément d'ordre 2 encore noté ℓ de $\Lambda^\vee \otimes \mathcal{O}^*$, on a donc un isomorphisme

$$(A, q + \ell)\,(f) = (A, q)\,(f) + (f, \ell).$$

Ceci permet la définition suivante.

3.12. *Définition.* — *Soient Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini sux X, A une forme alternée sur Λ, q une application $\Lambda \to \mathcal{O}^*$ qui vérifie*

$$q(x + y)\, q(x)^{-1}\, q(y)^{-1} = (-1)^{A(x,y)}$$

et f une section de $\Lambda \otimes \mathcal{O}^*$. Localement, on peut écrire $q = (-1)^{q_0}\ell$ avec q_0 quadratique mod 2 *et ℓ un homomorphisme : $\ell \in \Lambda^\vee \otimes \mathcal{O}^*$. On définit le $\mathcal{O}^*(1)$-torseur $(A, q)\,(f)$ par*

$$(A, q)\,(f) := (A, q_0)\,(f) + (f, \ell).$$

Cette définition est justifiée par 3.11, qui fournit un système transitif d'isomorphismes entre les seconds membres, pour (q_0, ℓ) parcourant les décompositions $q = (-1)^{q_0}\ell$ de q.

3.13. Choisissons $i \in \mathbf{C}$ d'où $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}(1)$, $1 \mapsto 2\pi i$. Soient S un cercle orienté, Λ_1 et Λ_2 deux systèmes locaux de $\mathbf{Z}$-modules libres sur S, $B : \Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \to \mathbf{Z}$ un accouplement et calculons la monodromie $(f, g)_S \in \mathbf{C}^*$ de (f, g) défini en 3.10.

Soit $x_0 \in S$. Chaque Λ_i est déterminé par sa fibre $\Lambda_{i(x_0)}$ en x_0 et sa monodromie T. Soit $(\tilde{S}, x_0)$ un revêtement universel de (S, x_0) et soit encore $T : \tilde{S} \to \tilde{S}$ sa monodromie

(effet d'un tour positif sur S). L'image inverse sur $\widetilde{S}$ d'une section f de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda$ sur S s'identifie à $f : \widetilde{S} \to \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_{(x_0)}$ vérifiant

$$T(f(Tx)) = f(x).$$

Sur $\widetilde{S}$, une section horizontale de (f, g) est donnée par

$$\{\log f, g\}.\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} \log f \frac{dg}{g}\right).$$

La monodromie est donc

$$(f, g)_S = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{Tx_0} \log f \frac{dg}{g}\right).B\left(\frac{\log f(Tx_0) - \log f(x_0)}{2\pi i}, g(x_0)\right) \tag{3.13.1}$$

(cf. 2.7.2).

On voit sur cette formule que $(f, g)^- = \overline{(f, g)}^{-1}$, donc que $(\bar{f}^{-1}, \bar{g}^{-1}) = \overline{(f, g)}^{-1}$.

Les sections localement constantes de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda$ sur S forment le groupe

$$\mathrm{Ker}(T - 1 : \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_{(x_0)} \to \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_{(x_0)}).$$

Si T n'admet pas la valeur propre 1, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda_{(x_0)} & \longrightarrow & \mathbf{C} \otimes \Lambda_{(x_0)} & \xrightarrow{\exp(2\pi i z)} & \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_{(x_0)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle T-1} & & \downarrow{\scriptstyle T-1} & & \downarrow{\scriptstyle T-1} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda_{(x_0)} & \longrightarrow & \mathbf{C} \otimes \Lambda_{(x_0)} & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_{(x_0)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

montre que ce noyau s'identifie à coker $(T - 1 : \Lambda_{(x_0)} \to \Lambda_{(x_0)})$ par $f \mapsto (T - 1) \log f/2\pi i$; c'est un groupe fini.

Si f et g sont des sections localement constantes de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda_1$ et $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda_2$, la formule se réduit à

$$(f, g)_S = \exp(2\pi i B((T - 1) \log f/2\pi i, \log g/2\pi i)). \tag{3.13.2}$$

Corollaire **3.14.** — *Si Λ_1 et Λ_2 sont en dualité, et que* T *n'a pas la valeur propre* 1, *les sections globales localement constantes de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda_i$ sur* S *forment un groupe fini* $(i = 1, 2)$, *et le symbole $(f, g)_S$ met ces groupes finis en dualité de Pontrjagin.*

Preuve. — Pour alléger la notation, désignons encore par Λ_i la fibre $\Lambda_{i(x_0)}$. Appliquons le foncteur exact « dualité de Pontrjagin » : $H \mapsto \mathrm{Hom}(H, U^1)$ à la suite exacte

$$0 \to \Lambda_1 \xrightarrow{T-1} \Lambda_1 \to \Lambda_1/(T - 1)\Lambda_1 \to 0.$$

On obtient une suite exacte

$$0 \to (\Lambda_1/(T - 1)\Lambda_1)^\vee \to \Lambda_2 \otimes U_1 \xrightarrow{T^{-1}-1} \Lambda_2 \otimes U_1 \to 0,$$

où le noyau de $T^{-1} - 1 : \Lambda_2 \otimes U^1 \to \Lambda_2 \otimes U^1$ coïncide avec celui de

$$T - 1 : \Lambda_2 \otimes \mathbf{C}^* \to \Lambda_2 \otimes \mathbf{C}^*.$$

Les groupes

$$\mathrm{Ker}(T-1 : \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_1 \to \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_1) \xrightarrow{\sim} \Lambda_1/(T-1)\,\Lambda_1$$

et

$$\mathrm{Ker}(T-1 : \mathbf{C}^* \otimes \Lambda_2 \to \mathbf{C} \otimes \Lambda_2)$$

sont donc en dualité de Pontrjagin. Par (3.13.2), l'accouplement coïncide avec $(f, g)_S$.

4. Dualité

4.1. Dans ce paragraphe, nous exposons des analogues de l'autodualité de la jacobienne, et de l'autodualité de Cartier du foncteur $A \mapsto A((T))^*$ étudiée par Contou-Carrère (cf. 2.9).

Le principe est que sur une surface de Riemann Σ le faisceau $\mathcal{O}^*$ est autodual, pour une dualité combinant deux types de dualité :

a) La dualité entre les faisceaux constants $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{C}^*$, s'exprimant par des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(H^i_c(\Sigma, \mathbf{Z}), \mathbf{C}^*) = H^{2-i}(\Sigma, \mathbf{C}^*),$$

b) La dualité entre les faisceaux $\mathcal{O}$ et Ω^1, s'exprimant par une dualité vectorielle topologique

$$\mathrm{Hom}(H^i_c(\Sigma, \mathcal{O}), \mathbf{C}) = H^{1-i}(\Sigma, \Omega^1).$$

On combine ces dualités en traitant comme duales les suites exactes de faisceaux

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

et

$$0 \to \mathbf{C}^* \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{d\log} \Omega^1 \to 0.$$

Plus précisément, on considère, dans la catégorie dérivée, les triangles distingués déduits de ces suites exactes courtes. Ecrivons le premier en terme de $\mathbf{Z}(1)$. Faisons tourner le deuxième et écrivons-le de droite à gauche :

(4.1.1) $\to \mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to$

(4.1.2) $\leftarrow \mathbf{C}^*[1] \leftarrow \Omega^1 \leftarrow \mathcal{O}^* \leftarrow$

Dans ces triangles, les termes en regard sont accouplés, pour un accouplement à valeurs dans $\mathbf{C}^*[1]$ (1).

Lemme **4.2.** — *Ces accouplements sont compatibles aux morphismes* (4.1.1) (4.1.2), i.e. *pour des flèches en regard u, v, les accouplements (ux, y) et (x, vy) sont égaux.*

Pour écrire les morphismes (4.1.1) (4.1.2) et les accouplements comme morphismes de complexes, il faut remplacer certains termes par des complexes quasi isomorphes. Dans (4.1.1), on remplace $\mathcal{O}^*$ par $[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0}$ (notation de 2.2). Dans 4.1.2, on remplace $\mathbf{C}^*[1]$ par $[\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}$. Les accouplements sont à valeur dans $[\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1)$, quasi-isomorphe à $\mathbf{C}^*(1)\,[1]$, et l'on identifie $\Omega^1(1)$ à Ω^1 par $\alpha \otimes n \mapsto n\alpha$ $(n \in 2\pi i\mathbf{Z})$.

Les morphismes et accouplements sont comme suit. Un signe — indique l'opposé d'un morphisme évident (inclusion, identité, $d\log$).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Z}(1) & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & [\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0} & \xrightarrow{-} & \mathbf{Z}(1)\,[1] \\
 & ① & & ② & & ③ & \\
[\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0} & \longleftarrow & \Omega^1 & \longleftarrow & \mathcal{O}^* & \xleftarrow{-} & [\mathcal{O}^* \xrightarrow{-} \Omega^1]_{0,1}
\end{array}$$

$$\mathbf{Z}(1) \otimes [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0} \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1) \ : \text{identité}$$

$$\mathcal{O} \otimes \Omega^1 \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1) \ : f \otimes \alpha \mapsto f\alpha$$

$$[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0} \otimes \mathcal{O}^* \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1) \ : n \otimes u \mapsto n \otimes u, f \otimes u \to f\frac{du}{u}$$

d'où $$\mathbf{Z}(1)\,[1] \otimes [\mathcal{O}^* \xrightarrow{-} \Omega^1]_{0,1} \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1) \ : \text{évident en chaque degré.}$$

Pour les flèches ① et ②, la compatibilité aux accouplements s'exprime par une égalité de morphismes de complexes. Pour ③, il s'agit de comparer deux morphismes

$$[\mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}]_{-1,0} \otimes [\mathcal{O}^* \xrightarrow{-} \Omega^1]_{0,1} \to [\mathcal{O}^* \to \Omega^1]_{-1,0}(1) \ :$$

$$\begin{array}{ccccc}
(n, f) \otimes (u, \alpha) & \longmapsto & (-n) \otimes (u, \alpha) & \longmapsto & (-n \otimes u, -n\alpha) \\
 & \searrow & (n, f) \otimes (u^{-1}) & \longrightarrow & \left(-n \otimes u, -f\dfrac{du}{u}\right).
\end{array}$$

Leur différence n'a une composante non nulle qu'en degré 0 : $n \otimes \alpha + f \otimes u \mapsto n\alpha - f\dfrac{du}{u}$ et est homotope à zéro, l'homotopie : degré 1 $\to$ degré 0 étant $f \otimes \alpha \mapsto f\alpha$.

4.3. *Variantes.* (i) Pour Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules de type fini, l'autodualité de $\mathcal{O}^*$ donne lieu à une dualité entre $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda$ et $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee$, qu'on dévissera en terme des triangles (4.1.1) et (4.1.2) tensorisés avec Λ et $\Lambda^\vee$ respectivement.

(ii) Nous aurons aussi à considérer le cas de variétés réelles de dimension 1. Le formalisme 4.1, 4.2 reste valable, si l'on remplace les faisceaux de fonctions holomorphes par des faisceaux de fonctions C^∞. Pour moins de régularité (nécessaire si l'on veut avoir des énoncés de dualité propres), voir 4.6.

(iii) Nous aurons aussi à considérer le cas de surfaces de Riemann à bord. Il faudra veiller aux conditions de régularité au bord.

4.4. Les groupes de cohomologie à considérer seront traités comme des groupes analytiques complexes de dimension infinie, modelés sur un espace vectoriel topologique localement convexe (en général un Hilbert). Ils seront toujours extensions d'un $\mathbf{Z}$-module de type fini M par un quotient V/Γ où V est un espace vectoriel topologique et Γ un $\mathbf{Z}$-module de type fini discret dans V :

$$0 \to V/\Gamma \to G \to M \to 0.$$

Soit $\langle \Gamma \rangle$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par Γ. Si l'on choisit un supplémentaire W de $\langle \Gamma \rangle$ dans V et un relèvement de M dans G (il en existe car V/Γ est divisible), on obtient une décomposition non canonique

$$\textbf{(4.4.1)} \qquad G \sim \langle \Gamma \rangle/\Gamma \times W \times M.$$

La dualité sera celle de Cartier : $G \mapsto$ groupe G^* des homomorphismes analytiques complexes de G dans $\mathbf{C}^*$.

Un homomorphisme de V/Γ dans $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}/2\pi i\mathbf{Z}$ se relève en une application linéaire de V dans $\mathbf{C}$ qui envoie Γ dans $2\pi i\mathbf{Z}$. En terme d'une décomposition (4.2.1), on a donc

$$G^* = (\langle \Gamma \rangle/\Gamma)^* \times W^* \times M^*,$$
$$(\langle \Gamma \rangle/\Gamma)^* \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma, 2\pi i\mathbf{Z}),$$
$$W^* = \text{dual vectoriel topologique de } W.$$

Supposons que G vérifie :

(C) G *est modelé sur un Hilbert, et une* $\mathbf{Z}$*-base de* Γ *est* $\mathbf{C}$*-linéairement indépendante dans* V :

$$\Gamma \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \langle \Gamma \rangle.$$

Si l'on choisit une base de Γ et une décomposition $M \sim \mathbf{Z}^m \times$ torsion, on a alors

$$\textbf{(4.4.2)} \qquad G \sim \mathbf{C}^{*n} \times \text{Hilbert} \times \mathbf{Z}^m \times \text{groupe fini}.$$

La dualité de Cartier transforme $\mathbf{C}^{*n}$ en $\mathbf{Z}^n$, le Hilbert en son dual, $\mathbf{Z}^m$ en $\mathbf{C}^{*m}$ et le groupe fini en son dual de Pontrjagin. On en déduit que G^* vérifie encore (C) et que $G \xrightarrow{\sim} G^{**}$.

Proposition **4.5.** — *Si* $\Xi : 0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ *est une suite exacte de groupes vérifiant* 4.4 (C), *sa duale de Cartier* Ξ^* *est exacte.*

Cas 1. — Les groupes G_i sont discrets : le groupe abélien $\mathbf{C}^*$ est divisible, donc injectif.

Cas 2. — Les groupes G_i sont des espaces vectoriels : exactitude du dual pour les espaces vectoriels topologiques. Parce que G_i est supposé Hilbert, la suite est en fait scindée.

Cas 3. — La composante connexe de G_i est vectorielle : les algèbres de Lie (= composantes neutres G_i^0) forment une suite exacte, et $0 \to G_i^0 \to G_i \to \pi_0(G_i) \to 0$ est une suite exacte scindée. La suite exacte courte de suite exacte $0 \to \Xi^0 \to \Xi \to \pi_0(\Xi) \to 0$ se dualise donc en une suite exacte, et l'on applique les cas 1 et 2 aux suites exactes $(\Xi^0)^*$ et $\pi_0(\Xi)^*$.

Cas 4. — Cas de la suite $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbf{C} \to \mathbf{C}^* \to 0$. Cette suite exacte est autoduale. Plus généralement, $0 \to \Gamma \to V \to V/\Gamma \to 0$ (pour $\Gamma \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \langle \Gamma \rangle$) se dualise en une suite exacte.

Cas 5. — Le groupe G_2^0 est revêtement universel de G_3^0 : c'est une extension du cas 1 par le cas 4, l'extension étant scindée en degrés 2 et 3, couverte par le cas 1 en degré 1.

Traitons le cas général. On commence par construire une suite exacte courte $\tilde{\Xi}$ s'envoyant sur Ξ, avec $\tilde{G}_i^0$ le revêtement universel de G_i^0 : on écrit $G_3 = V/\Gamma \times M$, et l'on prend $\tilde{G}_3 = V \times M$. On écrit $G_2 \times_{G_3} \tilde{G}_3$ comme $V_2/\Gamma_2 \times M_2$, et l'on prend $\tilde{G}_2 = V_2 \times M_2$. Enfin, $\tilde{G}_1 = \mathrm{Ker}(\tilde{G}_2 \to \tilde{G}_3)$. Soit N_i le noyau de $\tilde{G}_i \to G_i$. Quand on dualise le carré exact

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[u] & G_2 \arrow[r] \arrow[u] & G_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{G}_1 \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{G}_2 \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{G}_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[u] & N_2 \arrow[r] \arrow[u] & N_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

le dual de chaque colonne est exact (cas 5), celui de la 2e ligne est exact (cas 3), et celui de la 3e aussi (cas 1). Le dual de la première ligne est donc exact.

4.6. Soit S un cercle C^∞. On le suppose orienté et l'on suppose choisi $i \in \mathbf{C}$, d'où $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}(1) : 1 \mapsto 2\pi i$. En fait, seule compte la $\mathbf{Z}(1)$-orientation de S résultant de ces deux choix.

Jusqu'ici, nous n'avons défini le $\mathbf{C}^*$-torseur (f, g) et sa monodromie $(f, g)_S$ que pour f et g de classe C^∞. Tant de régularité n'est pas nécessaire : l'essentiel est que $\log f$ et $d \log g$ soient assez régulières pour qu'on puisse intégrer $\log f \, d \log g$.

Que ce soit la régularité des logarithmes qui importe suggère la convention suivante. Si R est une condition de régularité sur des fonctions (généralisées) complexes sur S, définissant un sous-faisceau $\mathcal{O}_R$ du faisceau $\mathcal{O}_{-\infty}$ des fonctions généralisées (distributions), contenant le faisceau $\mathcal{O}_\infty$ des fonctions C^∞, nous *définissons* $\mathcal{O}_R^*$ par la suite exacte exponentielle

$$0 \to 2\pi i\mathbf{Z} \to \mathcal{O}_R \to \mathcal{O}_R^* \to 0,$$

i.e. comme étant le faisceau quotient $\mathcal{O}_R/2\pi i\mathbf{Z}$. Sa loi de groupe est notée multiplicativement, $\mathcal{O}_R \to \mathcal{O}_R^*$ est noté exp et l'on identifie le faisceau $\mathcal{O}_\infty^*$ des fonctions inversibles C^∞ à un sous-faisceau :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 2\pi i\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_\infty \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_\infty^* \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & 2\pi i\mathbf{Z} \arrow[r] & \mathcal{O}_R \arrow[r, "\exp"] & \mathcal{O}_R^* \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pour f une section locale de $\mathcal{O}^*_{\mathbf{R}}$, on note $\log f$ une section locale de $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ dont elle est l'image. Prendre garde que, même si R n'implique pas la continuité, sur un intervalle, $\log f$ est défini à un multiple *constant* de $2\pi i$ près.

Comme condition de régularité, nous prendrons l'échelle des espaces de Sobolev d'indice $s (s \in \mathbf{R})$: les sections globales de $\mathcal{O}_s$ sur le cercle standard $U^1 \subset \mathbf{C}^*$ forment l'espace des fonctions généralisées dont la série de Fourier $\Sigma a_n z^n$ vérifie $\Sigma \| n |^s a_n |^2 < \infty$. Si $s > \frac{1}{2}$, les sections locales de $\mathcal{O}_s$ sont continues et $\mathcal{O}^*_s$ s'identifie au faisceau des sections de $\mathcal{O}_s$ qui ne s'annulent pas.

La suite exacte

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{O}_s \to \Omega^1_{s-1} \to 0$$

fournit une suite exacte

$$0 \to \mathbf{C}^* \to \mathcal{O}^*_s \to \Omega^1_{s-1} \to 0.$$

Par ailleurs, si $s + t \geqslant 0$, le produit de f dans $\mathcal{O}_s$ et de g dans $\mathcal{O}_t$ est défini en tant que distribution. On en déduit que, pour $s + t \geqslant 1$, la construction (2.2) continue de fournir un accouplement

$$\mathcal{O}^*_s \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}^*_t \to \mathbf{C}^*[1],$$

le faisceau $\mathbf{C}^*$ étant, dans la construction, à remplacer par sa résolution par le complexe de distributions $\mathcal{O}^*_{-\infty} \to \Omega^1_{-\infty}$: pour f et g des sections de $\mathcal{O}^*_s$ et $\mathcal{O}^*_t$ avec $s + t \geqslant 1$, le torseur (f, g) est défini, ainsi que sa monodromie $(f, g)_S$.

La formule (2.7.2)

$$(f, g)_S = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0} \log f . d \log g\right) g(x_0)^{v(f)}$$

doit toutefois être amollie. Prenons $S = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Soient $\log f$ et $\log g$ des déterminations de $\log f$ et $\log g$ sur le revêtement universel $\mathbf{R}$ de S. Posons $\Delta \log f = \log f(x + 1) - \log f(x)$, indépendant de x. Dans la formule $(f, g)_S = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \mathrm{I}\right)$ avec

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}(x) = \int_x^{x+1} \log f \, d \log g - \Delta \log f . \log g,$$

indépendant de x, il s'agit de remplacer I par $\int \mathrm{I}(x)\, \varphi(x)\, dx$ avec φ C^∞ à support compact d'intégrale 1 : si $\Psi(x) := \int_{x=1}^{x} \varphi(t)\, dt$, on pose

$$\mathrm{I} = \int \Psi(x) \log f \, d \log g - \varphi(x)\, \Delta \log f . \log g \, dx,$$

indépendant du choix de φ.

Pour Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules de type fini sur S, de dual $\Lambda^\vee$, et $s + t \geqslant 1$, on dispose de même d'une version tordue $\mathcal{O}^*_s \otimes \Lambda$ de $\mathcal{O}^*_s$ et, pour les sections globales, d'un accouplement

$$(\mathcal{O}^*_s \otimes \Lambda)\,(S) \otimes (\mathcal{O}^*_t \otimes \Lambda)\,(S) \to \mathbf{C}^*.$$

Le faisceau $\mathcal{O}_s$, ainsi que son produit tensoriel avec Λ, est mou. Tensorisant la suite exacte exponentielle par Λ, on obtient donc par la suite exacte longue de cohomologie une suite exacte

$$0 \to H^0(S, \Lambda) \to H^0(S, \mathcal{O}_s \otimes \Lambda) \to H^0(S, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda) \to H^1(S, \Lambda) \to 0.$$

Cette suite montre que $(\mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$ (S) est un groupe analytique complexe de dimension infinie, modelé sur l'espace hilbertien $H^0(S, \mathcal{O}_s \otimes \Lambda)$, et appartient à la classe (C) de 4.4.

Proposition **4.7.** — *Pour $s + t = 1$, l'accouplement $(f, g)_S$ se prolonge en un accouplement*

$$(\mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)\ (S) \otimes (\mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)\ (S) \to \mathbf{C}^*$$

faisant de chaque facteur le dual de Cartier de l'autre.

Comparons les suites exactes longues de cohomologie déduites des suites exactes courtes

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_s \otimes \Lambda \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda \to 0$$

et

$$0 \to \mathbf{C}^* \otimes \Lambda \to \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee \to \Omega^1_{t-1} \otimes \Lambda^\vee \to 0 :$$

(4.7.1) $$0 \to H^0(S, \Lambda) \to H^0(S, \mathcal{O}_s \otimes \Lambda) \to H^0(S, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda) \to H^1(S, \Lambda) \to 0$$

(4.7.2) $$0 \to H^0(S, \mathbf{C}^* \otimes \Lambda^\vee) \to H^0(S, \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee) \to H^0(S, \Omega^1_{t-1} \otimes \Lambda^\vee) \to H^1(S, \mathbf{C}^* \otimes \Lambda^\vee) \to 0.$$

On dispose d'accouplements entre les termes de ces suites et, par 4.2 amplifié par 4.3 (i) (ii), ces accouplements sont compatibles aux morphismes, *i.e.* définissent un morphisme du dual de Cartier de (4.7.1) (exact par 4.5) vers (4.7.2). Sauf peut-être pour $(\mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)^* \to (\mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)$, les composantes de ce morphisme de suites exactes longues sont des isomorphismes. Cette dernière composante l'est donc aussi.

4.8. *Exemple.* — Prenons pour S le cercle $U^1 \subset \mathbf{C}^*$ et $\Lambda = \mathbf{Z}$. Le groupe $\mathcal{O}_s^*(S)$ admet alors une décomposition

$$\mathcal{O}_s^*(S) = \mathbf{C}^* \times \operatorname{Ker}\left(\int : \mathcal{O}_s(S) \to \mathbf{C}\right) \times \mathbf{Z}.$$

A f d'intégrale 0 on associe $\exp(f)$ et à n la fonction z^n. La dualité de Cartier de $\mathcal{O}_s^*(S)$ avec $\mathcal{O}_t^*(S)$ échange les composantes $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{Z}$ et induit la dualité vectorielle topologique $\int f\,dg$ entre $\operatorname{Ker}\left(\int \mathcal{O}_s(S) \to \mathbf{C}\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(\int : \mathcal{O}_t(S) \to \mathbf{C}\right)$.

4.9. *Exemple.* — Supposons que $H^0(S, \Lambda) = 0$. Le groupe $(\mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$ (S) est alors le produit du sous-groupe fini $H^0(S, \mathbf{C}^* \otimes \Lambda)$ des sections localement constantes avec $H^0(S, \mathcal{O}_s \otimes \Lambda)$, identifié à un sous-groupe par l'exponentielle. La dualité 4.7 se décompose en un produit de deux dualités, la première étant celle considérée en 3.14.

4.10. Une surface de Riemann à bord Σ est donnée par des cartes locales à valeurs dans des ouverts de régions de $\mathbf{C}$ bordées par une courbe $\mathbf{C}^\infty$, les changements de cartes étant holomorphes à l'intérieur et $\mathbf{C}^\infty$ au bord. Si, parmi les cartes possibles, on se limite à considérer celles à valeurs dans un ouvert du demi-plan $\mathrm{R}(z) \geqslant 0$, on obtient encore un atlas. Par le principe de symétrie de Schwarz, pour ces cartes particulières, les changements de cartes sont holomorphes jusqu'au bord, induisant une structure analytique réelle sur Σ (la même que celle obtenue en plongeant Σ dans son double).

Soit Σ^0 l'intérieur de Σ et $j : \Sigma^0 \hookrightarrow \Sigma$. Nous noterons $\mathcal{O}_s$ le faisceau sur Σ, sous-faisceau de $j_* \mathcal{O}$ formé des fonctions holomorphes ayant une valeur au bord dans $\mathcal{O}_s$. Comme en 4.6, nous définissons $\mathcal{O}_s^*$ par la suite exacte exponentielle

$$0 \to 2\pi i\mathbf{Z} \to \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_s^* \to 0.$$

A nouveau, ce n'est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_s$ (pas un sous-faisceau en groupes!) que pour $s > \frac{1}{2}$. Prendre garde que le faisceau $\mathcal{O}_s$ sur le bord $\partial\Sigma$ de Σ (fonctions généralisées dans l'espace de Sobolev d'indice s) n'est pas la restriction du faisceau $\mathcal{O}_s$ au bord. Il ne le deviendrait que pour $s = \omega$: cas analytique réel. Sur le bord, on pose encore

$$\mathcal{O}_s^* := \mathcal{O}_s / 2\pi i\mathbf{Z}.$$

Proposition **4.11.** — *Soient Σ une surface de Riemann à bord compacte, Λ un système local sur Σ, $s \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathrm{H}^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$. Pour que f soit valeur au bord d'une section de $\mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda$ sur Σ, il faut et il suffit que pour toute section u de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee$ sur Σ, holomorphe jusqu'au bord, on ait*

$$(f, u)_{\partial\Sigma} = 1.$$

L'accouplement est la somme des accouplements (4.6) sur les composantes connexes de $\partial\Sigma$, orientées par l'orientation de Σ.

Preuve. Nécessité. — Si f est valeur au bord de $v \in \mathrm{H}^0(\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$, les $\mathbf{C}^*(1)$-torseurs (f, u) sur les composantes connexes de Σ proviennent d'un $\mathbf{C}^*(1)$-torseur (v, u) sur Σ. Pour tout $\mathbf{C}^*$-torseur sur Σ, le produit des monodromies sur les composantes connexes du bord est trivial. La condition $(f, u)_{\partial\Sigma} = 1$ est donc nécessaire.

Suffisance. — Pour prouver 4.11, il est loisible d'ôter au préalable de Σ ses composantes connexes sans bord. Supposons donc que $\partial\Sigma$ rencontre toutes les composantes connexes de Σ : un voisinage Σ_1 de Σ dans son double est de Stein. Prenons pour Σ_1 un petit voisinage de Σ, et prolongeons Λ à Σ_1.

Soit $x \in \Sigma_1$. Les sections inversibles de $\mathcal{O}(x)$ forment un $\mathcal{O}^*$-torseur trivialisé en dehors de x. Pour μ une section de $\Lambda^\vee$ près de x, on en déduit un $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee$-torseur $\mu\mathcal{O}(x)$, trivialisé en dehors de x. Sur Σ (ou sur Σ_1 plus grand), ce torseur est trivial :

$$\mathrm{H}^1(\Sigma_1, \mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee) = 0 \quad \text{car } \mathrm{H}^1(\Sigma_1, \mathcal{O} \otimes \Lambda) = \mathrm{H}^2(\Sigma_1, \Lambda) = 0.$$

Une trivialisation s_x^μ est unique à $\mathrm{H}^0(\Sigma_1, \mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee)$ près. En dehors de x, c'est une section de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee$. En x, elle a une singularité du type $z^{-1} \otimes \mu$, pour z une coordonnée locale.

Lemme **4.12.** — *Si f est la valeur au bord de v, on a pour $x \in \Sigma^0 = \Sigma - \partial\Sigma$*

$$\mu v(x) = (f, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}.$$

Soit D un petit disque autour de x, de bord S orienté par l'orientation de D. Appliquant la nécessité à $\Sigma - \mathrm{D}$, on obtient $(v, s_x^\mu)_{\partial(\Sigma - \mathrm{D})} = 1$, *i.e.*

$$(v, s_x^\mu)_{\mathrm{S}} = (f, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}.$$

Le problème est devenu local autour de x; localement, Λ est $\mathbf{Z}^n$ pour n convenable, et l'on se ramène à supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}$. La formule se ramène à

$$(v, g)_x = v(x)$$

pour v inversible en x et g ayant un pôle simple en x.

Sous l'hypothèse que f est orthogonal à $\mathrm{H}^0(\Sigma_n, \mathcal{O}^* \otimes \Lambda^\vee)$, il nous faut trouver v dont f soit valeur au bord. Le lemme suggère de définir

$$v^\mu(x) := (f, s_x^\mu)_{\partial\Sigma} \in \mathbf{C}^*$$

pour $x \in \Sigma^0$. L'hypothèse assure que ce nombre ne dépend pas du choix de s_x^μ. Pour μ variable, il provient de $v(x) \in \mathbf{C}^* \otimes \Lambda$. Pour x variable, on peut choisir s_x^μ dépendant holomorphiquement de x (repéter la construction de s_x^μ avec paramètres) et v est donc une section de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda$ sur Σ^0. Il reste à montrer :

Lemme **4.13.** — *f est la valeur au bord de v.*

Montrons-le au voisinage de $y \in \partial\Sigma$. Près de y, choisissons s_x^μ dépendant holomorphiquement de x proche de y. Pour $x \in \Sigma_1 - \Sigma$, l'hypothèse assure que $(f, s_x^\mu)_{\partial, \Sigma} = 1$. On peut reformuler le lemme : μf est le rapport des valeurs au bord de $x \mapsto (f, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}$ pour $x \in \Sigma^0$ et $x \in \Sigma_1 - \Sigma$. Sous cette forme, le problème devient local près de y : si on écrit $f = f_1 f_2$, avec $f_1 = 1$ près de y, $(f_2, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}$ est holomorphe en x quand x traverse $\partial\Sigma$ et le rapport des valeurs au bord est le même pour $(f, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}$ et $(f_2, s_x^\mu)_{\partial\Sigma}$. On prendra f_2 de la forme $\exp(g_2)$, avec g_2 à support dans un petit voisinage de y. Changer s_x^μ en $s_x^\mu t_x$ avec t_x holomorphe au voisinage de y ne change pas non plus le saut le long de Σ. En coordonnées locales, le problème se ramène alors au lemme connu suivant

Lemme **4.14.** — *Soit g à support compact sur* $\mathbf{R}$. *Posons*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} g(t) \frac{dt}{x - t}.$$

Alors, sur $\mathbf{R}$, *g est différence des valeurs au bord de* F :

$$g(t) = \mathrm{F}(t + i0) - \mathrm{F}(t - i0).$$

4.15. Il résulte de 4.11 que l'image de

$$\mathrm{H}^0(\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda) \to \mathrm{H}^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda) \tag{4.15.1}$$

est fermée. Le conoyau est modelé sur un Hilbert. Si l'on écrit la composante neutre du noyau comme V/Γ, on a $\Gamma \otimes \mathbf{C} \hookrightarrow V$ car, par 4.11, les homomorphismes $V/\Gamma \to \mathbf{C}^*$ séparent les points de V/Γ, et en particulier ceux de $\langle \Gamma \rangle/\Gamma$. Le conoyau de (4.15.1) appartient donc encore à la classe (C).

Scholie. — Supposons que $\partial\Sigma$ rencontre toutes les composantes connexes de Σ, de sorte que (4.15.1) est injectif. Dans la dualité de Cartier 4.7 entre $H^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$ et $H^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)$ pour $s + t = 1$, les sous-espaces $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$ et $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)$ sont orthogonaux : si f et g sont valeurs au bord, (f, g) est la restriction au bord d'un $\mathbf{C}^*$-torseur sur Σ. D'après 4.11, ils sont l'orthogonal l'un de l'autre. Il résulte alors de 4.5 que $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_s^* \otimes \Lambda)$ est le dual de Cartier de $H^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)/H^0(\Sigma, \mathcal{O}_t^* \otimes \Lambda^\vee)$.

4.16. Soient Σ une surface de Riemann connexe à bord, de bord non vide, Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini sur Σ et B une forme bilinéaire définie positive sur Λ. Soient

$$f \in H^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_{1/2}^* \otimes \Lambda)$$

et $\bar{f}$ le complexe conjugué de f.

Proposition. — Si f est valeur au bord d'une section holomorphe u de $\mathcal{O}^* \otimes \Lambda$ sur Σ^0, alors le nombre réel $(f, \bar{f})_B$ vérifie

$$1 \leqslant (f, \bar{f})_B$$

et la borne 1 *est atteinte si et seulement si u est localement constante.*

Sur Σ, vu comme variété C^∞ à bord de dimension 2, considérons le fibré en droites à connexion $(u, \bar{u})$. Calculons sa courbure R. Localement, si e_i est une base de Λ, que $B(x, y) = \Sigma b_{ij} x^i y^j$ et que u a pour coordonnées des $u^i \in \mathcal{O}^*$, on a par (2.3.3)

$$R = \frac{1}{2\pi i} \Sigma b_{ij} \frac{du_i}{u_i} \wedge \left(\frac{du_j}{u_j}\right)^- .$$

Cette forme est négative, ne s'annulant que pour des u_i constants. Par Stokes on a

$$(f, \bar{f})_B = \exp\left(-\int_\Sigma R\right),$$

et la proposition en résulte.

4.17. *Remarque.* — La preuve montre que $\log(f, \bar{f})_B$ est la norme L^2 de $\frac{du}{u}$. Il est bien connu que la norme L^2 de dv sur Σ est comparable à la norme de Sobolev d'ordre 1/2 de v au bord — quand on néglige les constantes. On en déduit que sur

$$\frac{\{f \in H^0(\partial\Sigma, \mathcal{O}_{1/2}^* \otimes \Lambda) \mid f \text{ valeur au bord}\}}{\{\text{valeurs au bord de } u \text{ localement constant}\}}$$

les ouverts $-\log(f, f)_B < \varepsilon$ forment un système fondamental de voisinages. La composante neutre est un Hilbert.

4.18. *Exemple.* — Prenons pour Σ la couronne

$$a \leqslant |z| \leqslant b.$$

Une section de $\mathcal{O}^*_{1/2}$ sur Σ s'écrit $u = z^{\mathbf{N}} \exp(v)$ avec

$$v = \Sigma a_n z^n,$$

$$\sum_{n>0} n \,|\, a_n \,|^2 b^{2n}, \qquad \sum_{n<0} -n \,|\, a_n \,|^2 a^{2n} < \infty.$$

On vérifie que

$$(u, \bar{u})_{\partial\Sigma} = (b/a)^{2\mathbf{N}^2} . \exp(\Sigma n(b^{2n} - a^{2n}) \,|\, a_n \,|^2).$$

5. Construction d'extensions centrales

5.1. Soit Σ une surface de Riemann compacte à bord (4.10), Λ un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini sur Σ et B une forme bilinéaire symétrique paire sur Λ :

$$\mathrm{B} : \Lambda \otimes \Lambda \to \mathbf{Z}.$$

Soit $\mathcal{O}^*_\infty$ comme en 4.10 (fonctions holomorphes à l'intérieur, C^∞ jusqu'au bord, inversibles). Nous supposons donnée la « donnée auxiliaire » d'une extension centrale E du faisceau localement constant Λ par $\mathcal{O}^*_\infty$. L'application commutateur :

$$(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$$

se factorise par une application, encore notée

$$(\ ,\ ) : \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{O}^*_\infty.$$

Nous supposons que, pour deux sections locales λ, μ de Λ, on a

(5.1.1) $$(\lambda, \mu) = (-1)^{\mathrm{B}(\lambda, \mu)}.$$

Cette condition implique que la forme bilinéaire B est paire, puisque $(\lambda, \lambda) = 1$.

Soit L le faisceau $\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2}$ sur Σ. La notation est celle de 4.10. Sur le bord, par abus de notation, on note encore L le faisceau $\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2}$ où $\mathcal{O}^*_{1/2}$ est comme en 4.10. On dispose d'une inclusion

$$(\text{restriction à } \partial\Sigma \text{ de L sur } \Sigma) \hookrightarrow (\text{L sur } \partial\Sigma).$$

Ce n'est pas un isomorphisme.

Tant sur Σ que sur $\partial\Sigma$, localement, si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de Λ, une section f de L s'identifie à la donnée de n sections $f^1, \ldots, f^n$ de $\mathcal{O}^*_{1/2}$:

$$f = \Sigma e_i \otimes f^i.$$

Notre but est le suivant :

(A) Pour S une composante connexe de $\partial\Sigma$, construire une extension centrale $\mathrm{L}(\mathrm{S})^\sim$ de L(S) par $\mathbf{C}^*$.

De (A), on déduit une extension centrale de $L(\partial\Sigma)$ par $\mathbf{C}^*$: si les $S_\alpha(\alpha \in J)$ sont les composantes connexes de $\partial\Sigma$, le produit des $L(S_\alpha)^\sim$ est une extension centrale de $L(\partial\Sigma)$ par $\mathbf{C}^{*A}$ et on pousse par l'application produit

$$\text{prod} : \mathbf{C}^{*A} \to \mathbf{C}^* : (z_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto \prod_{\alpha \in A} z_\alpha,$$

i.e. on divise par Ker(prod).

(B) Construire une trivialisation sur $L(\Sigma)$ de l'extension centrale (A) de $L(\partial\Sigma)$ par $\mathbf{C}^*$:

$$\begin{tikzcd} L(\Sigma) \arrow[r, "\text{restriction}"] \arrow[dr, dashed] & L(\partial\Sigma) \\ & L(\partial\Sigma)^\sim \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Les constructions (A) et (B) seront déduites d'une construction *locale* sur Σ et sur $\partial\Sigma$. La déduction est expliquée, dans un cadre plus général, aux n°s 5.2 à 5.11. La construction locale est faite aux n°s 5.12 à 5.16. Le commutateur pour $L(\partial\Sigma)^\sim$ est calculé en 5.17.

5.2. Nous utiliserons le langage des torseurs et des gerbes de Giraud [2], dont nous rappelons quelques définitions. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau en groupes sur un espace topologique X, un *$\mathscr{F}$-torseur* est un faisceau $\mathscr{E}$ sur X, muni d'une action à droite de $\mathscr{F}$: $\rho : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to \mathscr{E}$, telle que localement sur X, $(\mathscr{E}, \rho)$ soit isomorphe à ($\mathscr{F}$, action $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$). On dit aussi : « espace principal homogène ». Les torseurs fournissent une interprétation locale de $H^1(X, \mathscr{F})$ et de sa fonctorialité : $H^1(X, \mathscr{F})$ est l'ensemble de classes d'isomorphie de $\mathscr{F}$-torseurs. Si $\mathscr{E}_i$ est un $\mathscr{F}_i$-torseur $(i = 1, 2)$, $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ est un $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-torseur : ceci définit $H^1(X, \mathscr{F}_i) \times H^1(X, \mathscr{F}_2) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$. Si $\mathscr{E}_1$ est un $\mathscr{F}_1$-torseur et $f : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ un morphisme, $f(\mathscr{E}_1)$ est défini. C'est un $\mathscr{F}_2$-torseur $\mathscr{E}_2$ muni de $f : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ vérifiant $f(tg) = f(t) f(g)$ et ceci le caractérise à isomorphisme unique près. Ceci définit $H^1(X, \mathscr{F}_1) \to H^1(X, \mathscr{F}_2)$. Pour $\mathscr{F}$ commutatif, le produit est un morphisme $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ et définit la somme $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ de deux torseurs : l'addition dans $H^1(X, \mathscr{F})$.

5.3. Les gerbes interprètent de même le H^2. Une *gerbe* sur X est un champ sur X, admettant localement un objet et dont tous les objets sont localement isomorphes. Rappelons qu'un champ sur X est la donnée de :

(C1) Pour chaque ouvert U, la catégorie C(U) des objets de C sur U;

(C2) Pour $V \subset U$, une notion de morphisme d'un objet de C(V) dans un objet de C(U). Les morphismes se composent; pour $U = V$, il s'agit simplement des morphismes dans C(U); chaque objet Q de C(U) admet une « restriction » $Q \mid V$ de Q à V, munie de $Q \mid V \to Q$, avec, pour P dans C(V),

$$\text{Hom}(P, Q \mid V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(P, Q);$$

(C3) En un sens convenable, les objets et les morphismes se recollent : connaître un objet sur U revient à le connaître localement sur U.

Si $\mathscr{G}$ est une gerbe sur X et que, pour tout objet P de $\mathscr{G}$ sur un ouvert U, le faisceau **Aut**(P) sur U des automorphismes de P :

$$\mathbf{Aut}(P)\ (V) = \mathrm{Aut}(P \mid V)$$

est commutatif, ce faisceau **Aut**(P) ne dépend pas du choix de P et les **Aut**(P) se recollent en un faisceau de groupes abéliens sur X, appelé le *lien* de $\mathscr{G}$. Pour $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens, une *gerbe de lien* $\mathscr{F}$, ou *liée par* $\mathscr{F}$ est une gerbe $\mathscr{G}$ munie d'un isomorphisme de son lien avec $\mathscr{F}$.

Exemple. — Le champ des $\mathscr{F}$-torseurs est une gerbe de lien $\mathscr{F}$. On l'appelle la *gerbe triviale* de lien $\mathscr{F}$.

Mise en garde. — Les gerbes liées par $\mathscr{F}$ forment une 2-catégorie. Ceci correspond au fait qu'on interprète un H^2.

Continuons à supposer $\mathscr{F}$ commutatif; $H^2(X, \mathscr{F})$ s'interprète comme l'ensemble des classes d'équivalence de gerbes liées par $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{G}_i$ est une gerbe liée par $\mathscr{F}_i$ ($i = 1, 2$), $\mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_2$ est une gerbe liée par $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$. Ceci définit

$$H^2(X, \mathscr{F}_i) \times H^2(X, \mathscr{F}_2) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2).$$

Si $\mathscr{G}_1$ est une gerbe liée par $\mathscr{F}_1$ et $f : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ un morphisme, $f(\mathscr{G}_1)$ est défini : c'est une gerbe $\mathscr{G}_2$ de lien $\mathscr{F}_2$ munie de $f : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ induisant f sur les liens, et ceci la caractérise à équivalence unique à isomorphisme unique près. Ceci définit

$$H^2(X, \mathscr{F}_1) \to H^2(X, \mathscr{F}_2).$$

Prenant pour f le produit : $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, on définit la somme $\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2$ de deux gerbes $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ liées par $\mathscr{F}$. Ceci correspond à l'addition dans $H^2(X, \mathscr{F})$. Par définition, on dispose de

(5.3.1) $$+ : \mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_2 \to \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2.$$

Pour cette addition de gerbes, la gerbe triviale est neutre : pour $\mathscr{G}$ une gerbe de lien $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}_0$ la gerbe des $\mathscr{F}$-torseurs, on dispose de

(5.3.2) $$+ : \mathscr{G} \times \mathscr{G}_0 \to \mathscr{G} : P, T \mapsto P + T$$

où la somme de P dans $\mathscr{G}(U)$ et d'un torseur T sur U est un objet muni d'un isomorphisme de $\mathscr{F}$-torseurs

$$T \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P, P + T).$$

Il est uniquement caractérisé par cette propriété, à isomorphisme unique près.

Une *trivialisation* de $\mathscr{G}$ est un objet de $\mathscr{G}(X)$. La catégorie $\mathscr{G}(X)$ des trivialisations de $\mathscr{G}$ est naturellement équivalente avec celle des équivalences de gerbes liées par $\mathscr{F}$

$$F : (\text{gerbe triviale}) \to \mathscr{G}.$$

L'équivalence est donnée par

$$F \mapsto F \text{ (torseur trivial)}$$
$$P \mapsto \text{équivalence } F : F(T) = P + T.$$

Le langage des torseurs et des gerbes est essentiellement équivalent à celui des cocycles de Čech. Il est plus commode et plus intrinsèque si l'on accepte de parler d'objet défini à isomorphisme unique près, de catégorie définie à équivalence unique à isomorphisme unique près, et de recollement de champs. Montrons par exemple comment un 2-cocycle de Čech c_{ijk}, relatif à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$, définit une gerbe $\mathscr{G}((c_{ijk}))$. On définit un objet sur U comme étant la donnée de $\mathscr{F}$-torseurs P_i sur les $U \cap U_i$, et d'isomorphismes de torseurs $p_{ij} : P_i \xrightarrow{\sim} P_j$ sur $U \cap U_i \cap U_j$ vérifiant non pas la condition de cocycle $p_{jk}\, p_{ij} = p_{ik}$, mais plutôt $p_{jk}\, p_{ij} = p_{ik}\, c_{ijk}$. Réciproquement, si $\mathscr{G}$ est une gerbe de lien $\mathscr{F}$, que Q_i est un objet de $\mathscr{G}$ sur U_i, e_{ij} un isomorphisme $Q_i \mid U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} Q_j \mid U_i \cap U_j$ et que c_{ijk} est le 2-cocycle défini par $e_{jk}\, e_{ij} = e_{ik}\, c_{ijk}$, $\mathscr{G}$ s'identifie à $\mathscr{G}(c_{ijk})$: à un objet P sur U associer les torseurs $\mathrm{Hom}(Q_i, P)$ sur les $U \cap U_i$.

Une 1-cochaîne c_{ij} de cobord c_{ijk} définit une trivialisation de $\mathscr{G}((c_{ijk}))$: l'objet global $P(c_{ij})$ défini par les torseurs triviaux P_i et les c_{ij}. Si c'_{ij} et c''_{ij} sont deux 1-cochaînes de cobord c_{ijk}, la donnée d'un isomorphisme de $P(c'_{ij})$ avec $P(c''_{ij})$ équivaut à celle d'une 0-cochaîne de cobord le 1-cocycle $c'_{ij} - c''_{ij}$.

5.4. Selon une idée de A. Grothendieck (S.G.A. 7, exp. VII), la donnée d'une extension centrale E de L par A équivaut à celle de

(E1) pour $h \in L$, un A-torseur $T(h)$ (l'image inverse de h dans E),

(E2) pour $h_1, h_2 \in H$, un isomorphisme $T(h_1) + T(h_2) \xrightarrow{\sim} T(h_1\, h_2)$ (induit par la composition dans E),

(E3) ces isomorphismes vérifient la commutativité

$$\begin{array}{ccc} T(h_1) + T(h_2) + T(h_3) & \longrightarrow & T(h_1) + T(h_2\, h_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(h_1\, h_2) + T(h_3) & \longrightarrow & T(h_1\, h_2\, h_3). \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'associativité de l'opération $+$ sur les torseurs apparaît implicitement.

Montant d'un cran en cohomologie, ceci suggère la définition suivante, où A est un faisceau de groupes abéliens sur X.

5.5. *Définition. — Une extension centrale d'un faisceau de groupes* L *sur* X *par le champ des* A*-torseurs est la donnée de*

(E1) *pour* $h \in L(U)$, *une gerbe* $\mathscr{G}(h)$ *de lien* A *sur* U. *A la restriction de* h *à* $V \subset U$ *doit correspondre celle de* $\mathscr{G}(h)$ *à* V*;*

(E2) *pour* $h_1, h_2 \in \mathrm{L}(\mathrm{U})$, *une équivalence de gerbes*

$$(h_1, h_2) : \mathscr{G}(h_1) + \mathscr{G}(h_2) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}(h_1 h_2)$$

(compatible à la restriction);

(E3) *pour* $h_1, h_2, h_3 \in \mathrm{L}(\mathrm{U})$, *on dispose de deux équivalences composées* $\Sigma\mathscr{G}(h_i) \to \mathscr{G}(h_1 h_2 h_3)$:

$$((h_1 h_2) h_3) : \Sigma\mathscr{G}(h_i) = (\mathscr{G}(h_1) + \mathscr{G}(h_2)) + \mathscr{G}(h_3) \to \mathscr{G}(h_1 h_2 h_3)$$

$$(h_1(h_2 h_3)) : \Sigma\mathscr{G}(h_i) = (\mathscr{G}(h_1) + (\mathscr{G}(h_2) + \mathscr{G}(h_3))) \to \mathscr{G}(h_1 h_2 h_3)$$

et un isomorphisme entre ces équivalences est donné (compatible à la restriction);

(E4) *pour* $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathrm{L}(\mathrm{U})$, *chaque façon de mettre des parenthèses à* $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ *fournit une équivalence* $\Sigma\mathscr{G}(h_i) \to \mathscr{G}(h_1 h_2 h_3 h_4)$ *et l'on demande que les isomorphismes* (E3) *fournissent un diagramme commutatif d'équivalences*

$$\begin{tikzcd}
 & (((h_1 h_2) h_3) h_4) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
((h_1 h_2)(h_3 h_4)) \arrow[d, dash] & & ((h_1(h_2 h_3)) h_4) \arrow[d, dash] \\
(h_1(h_2(h_3 h_4))) \arrow[rr, dash] & & (h_1((h_2 h_3) h_4)).
\end{tikzcd}$$

En pratique, l'essentiel est de définir (E1), et le reste suit de façon évidente. Dans le point de vue čechiste, les formules requises n'apparaissent qu'en allant jusqu'à E4, et c'est ce qui le rend pénible.

5.6. Si $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{L}$ est une extension centrale d'un faisceau en groupes L par un groupe abélien A, l'application commutateur : $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ se factorise par

$$(\ ,\ )_{\mathrm{E}} : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{E}$$

avec $\pi(x,y)_{\mathrm{E}} = (x,y)$ et en particulier pour L commutatif par $(\ ,\ )_{\mathrm{E}} : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{A}$. Voici l'analogue de cette construction pour $h \mapsto \mathscr{G}(h)$ une extension centrale de L par le champ des A-torseurs.

Pour e la section neutre de L, la gerbe $\mathscr{G}(e)$ est la gerbe triviale : on dispose d'une équivalence $\tau : \mathscr{G}(e) \xleftrightarrow{\sim}$ gerbe triviale, unique à isomorphisme unique près, telle que pour tout h l'équivalence (h, e) de (E2) s'identifie par τ à l'addition considérée en 5.3.2.

Pour h^{-1} l'inverse de h, l'équivalence (E2) :

$$(h, h^{-1}) : \mathscr{G}(h) + \mathscr{G}(h^{-1}) \to \mathscr{G}(e) = \text{gerbe triviale}$$

permet d'identifier $\mathscr{G}(h^{-1})$ à la gerbe inverse de $\mathscr{G}(h)$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $n\mathscr{G}(h) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}(h^n)$, $n\mathscr{G}(h)$ étant déduite de $\mathscr{G}(h)$ par $n : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Ces équivalences transforment les équivalences (E2) :

$$\mathscr{G}(h^n) + \mathscr{G}(h^m) \to \mathscr{G}(h^{n+m})$$

en les $\qquad n\mathscr{G}(h) + m\mathscr{G}(h) \to (n + m)\,\mathscr{G}(h)$

de façon compatible à l'associativité.

Soient x et y des sections de L sur U. Si X et Y sont des objets de $\mathscr{G}(x)$ et $\mathscr{G}(y)$, on dispose de $-$ X et $-$ Y dans $\mathscr{G}(-x)$ et $\mathscr{G}(-y)$, avec

$$\mathrm{X} + (-\mathrm{X}) = \text{torseur trivial dans la gerbe triviale}$$
$$\mathscr{G}(e) = \mathscr{G}(x) + \mathscr{G}(-x)$$

et de même pour y. Soit

$$(x,y)_{\mathscr{G}} := \mathrm{X} + \mathrm{Y} + (-\mathrm{X}) + (-\mathrm{Y})$$

l'image de (X, Y, $-$ X, $-$ Y) par

$$\mathscr{G}(x) + \mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(x^{-1}) + \mathscr{G}(y^{-1}) \to \mathscr{G}((x,y)).$$

Les automorphismes de X et Y agissent trivialement sur $(x,y)_{\mathscr{G}}$, et $(x,y)_{\mathscr{G}}$ ne dépend donc, à isomorphisme unique près, que des classes d'isomorphie de X et Y. Si l'on remplace X et Y par X′ et Y′, X et X′ (resp. Y et Y′) sont localement isomorphes et $(x,y)_{\mathscr{G}}$, de formation compatible à la localisation, ne change pas. Enfin, $\mathscr{G}(x)$ et $\mathscr{G}(y)$ sont localement non vides et, recollant des $(x,y)_{\mathscr{G}}$ définis localement, on obtient une construction $(x,y)_{\mathscr{G}}$ attachant à deux sections de L sur U un objet de $\mathscr{G}((x,y))$. On appelle $(x,y)_{\mathscr{G}}$ le *commutateur* de x et y.

Cas particulier. — Si L est commutatif, la construction commutateur attache à x et y un A-torseur $(x,y)_{\mathscr{G}}$. On l'obtient aussi en comparant $\mathscr{G}(x) + \mathscr{G}(y) \to \mathscr{G}(xy)$ et $\mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(x) \to \mathscr{G}(yx) = \mathscr{G}(xy)$: c'est le Hom dans $\mathscr{G}(xy)$:

$$(x,y)_{\mathscr{G}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Y} + \mathrm{X}, \mathrm{X} + \mathrm{Y}).$$

5.7. Soit S un cercle orienté. Pour A un groupe abélien, on a un isomorphisme

$$\int_{\mathrm{S}} : \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{A}) \to \mathrm{A}.$$

A la classe d'isomorphie d'un A-torseur T, on attache sa monodromie. Pour S $= \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et a une section de l'image inverse de A sur $\mathbf{R}$, quel que soit $x \in \mathbf{R}$ d'image $\bar{x}$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on a $a_x, a_{x+1} \in \mathrm{A}_{\bar{x}}$ et la monodromie est $a(x+1) - a(x)$. Elle est indépendante de a et de x.

De même, une gerbe $\mathscr{G}$ de lien A définit un A-torseur $\int_{\mathrm{S}} \mathscr{G}$ (sur le point) : l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets globaux de $\mathscr{G}$. Parce que $\mathrm{H}^2(\mathrm{S}^1, \mathrm{A}) = 0$, toute gerbe de lien A sur S^1 est triviale et l'ensemble des classes d'isomorphie de trivialisations de $\mathscr{G}$ est un torseur sous $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^1, \mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}$. Pour S $= \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et Q une trivialisation de l'image inverse $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}$, quel que soit $x \in \mathbf{R}$, Q_x et Q_{x+1} sont deux objets de la gerbe $\mathscr{G}_x$ sur $\{x\}$ liée par A, et $\int \mathscr{G}$ est le A-torseur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_x, \mathrm{Q}_{x+1})$. À isomorphisme unique près, il ne dépend ni de Q ni de x. En effet, chaque $a \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_x, \mathrm{Q}_{x+1})$ est une donnée de recollement pour déduire de Q un objet de $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \sim [x, x+1]/(\text{recoller } x \text{ à } x+1)$ et par cette construction

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_x, \mathrm{Q}_{x+1}) \xrightarrow{\sim} \{\text{ classes d'isomorphie d'objets globaux de } \mathscr{G}\}.$$

5.8. Soient maintenant Σ une surface de Riemann compacte à bord et $\mathscr{G}$ une gerbe sur Σ de lien le faisceau constant A. Soit $(S_\alpha)_{\alpha \in J}$ l'ensemble des composantes connexes du bord de Σ. Elles sont naturellement orientées, de sorte que le A-torseur

$$\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G} := \sum_\alpha \int_{S_\alpha} \mathscr{G} \mid S_\alpha$$

est défini. Il est canoniquement trivial : ôtant de Σ ses composantes connexes sans bord, on peut supposer que $H^2(\Sigma, A) = 0$. La gerbe $\mathscr{G}$ admet donc des objets globaux P. Un tel objet a une classe dans chaque $\int_{S_\alpha} \mathscr{G}$ et la somme de ces classes dans $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}$ est indépendante du choix de P : si P est remplacé par P + T, pour T un A-torseur sur Σ, sa classe dans $\int_{S_\alpha} \mathscr{G}$ est augmentée par la monodromie de T le long de S_α, et l'on sait que la somme des monodromies sur les S_α d'un A-torseur sur Σ est 0. Le torseur $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}$ est trivialisé par l'élément suivant : la somme dans $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}$ des classes dans les G-torseurs $\int_{S_\alpha} \mathscr{G}$ d'un objet global quelconque P de $\mathscr{G}$.

5.9. Soient S un cercle orienté, L un faisceau en groupes sur S, A un groupe abélien et $\mathscr{G}$ une extension centrale de L par le champ des A-torseurs. Pour toute section globale h de L posons

(5.9.1) $$E(h) := \int_S \mathscr{G}(h).$$

La donnée 5.5 (E2) de $\mathscr{G}$ fournit des isomorphismes de torseurs

(5.9.2) $$E(h_1) + E(h_2) \xrightarrow{\sim} E(h_1 h_2).$$

Par 5.5 (E3), ces isomorphismes (5.9.2) vérifient 5.4 (E3), donc définissent une extension centrale de L(S) par A.

Notation. — On note $\int_S \mathscr{G}$ l'extension centrale de L(S) par A ainsi définie.

5.10. *Proposition. — Le commutateur défini par* $\int_S \mathscr{G}$,

$$L(S) \times L(S) \to \int_S \mathscr{G}$$

attache à h_1, h_2 *la classe d'isomorphie de* $(h_1, h_2)_{\mathscr{G}}$ (5.6) *dans* $\mathscr{G}((h_1 h_2))$.

La vérification est laissée au lecteur.

5.11. Soient Σ une surface de Riemann compacte à bord, L un faisceau en groupes sur Σ, L_b un faisceau en groupes sur $\partial\Sigma$, muni de

(5.11.1) $$b : (\text{restriction de L à } \partial\Sigma) \to L_b,$$

A un groupe abélien, $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}_b$) une extension centrale de L (resp. L_b) par A(1) et supposons donné un morphisme identifiant l'image inverse de $\mathscr{G}_b$ par (5.11.1) à la restriction de $\mathscr{G}$ au bord.

Soient S_α ($\alpha \in J$) les composantes connexes de $\partial\Sigma$. On choisit i de carré -1 pour identifier A et A(1) et pour orienter Σ, donc $\partial\Sigma$ et les S_j. Appliquant 5.9, on obtient des extensions centrales de $L_b(S_j)$ par A. Prenons leur produit et poussons par la somme $A^J \to A$. On obtient une extension centrale $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}_b$ de $H^0(\partial\Sigma, L_b)$ par A.

Pour $h \in H^0(\Sigma, L)$, le A-torseur $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}(h)$ est trivialisé par 5.8. Par hypothèse, sur $\partial\Sigma$, $\mathscr{G}_b(bh)$ s'identifie à $\mathscr{G}(h) \mid \partial\Sigma$ et on obtient une trivialisation de $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}_b(bh)$. Cette trivialisation est additive en h et on obtient donc une trivialisation de l'extension centrale de $H^0(\Sigma, L)$ par A image inverse de $\int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}_b$ par $b : H^0(\Sigma, L) \to H^0(\partial\Sigma, L_b)$:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\Sigma, L) \arrow[r] \arrow[dr] & H^0(\partial\Sigma, L_b) \\
& \int_{\partial\Sigma} \mathscr{G}_b \arrow[u] \\
& A \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Nous utiliserons cette méthode pour construire (A) et (B) promis en 5.1. Il s'agit, sur Σ et sur $\partial\Sigma$, de construire une extension centrale $\mathscr{G}$ de $\Lambda \otimes \mathscr{O}^*_{1/2}$ par le champ des $\mathbf{C}^*(1)$-torseurs.

5.12. Notre construction de $\mathscr{G}$, extension centrale de $\mathscr{O}^*_{1/2}$ par $\mathbf{C}^*(1)$, sera locale. Elle sera la même sur Σ et sur $\partial\Sigma$. On choisit i et on identifie $\mathbf{C}^*$ à $\mathbf{C}^*(1)$. On introduira un faisceau $\mathscr{K}$ de « données auxiliaires » localement non vide. Pour k section locale de $\mathscr{K}$ sur U, une description $\mathscr{G}_k$ de $\mathscr{G}$ sur U sera donnée, compatible à la restriction à un ouvert. Pour k variable, un système transitif d'équivalences entre les $\mathscr{G}_k$ est donné (compatible à la restriction à un ouvert). Ceci permet de définir localement $\mathscr{G}$ comme étant la « valeur commune » des $\mathscr{G}_k$. Il ne reste qu'à recoller.

Plus précisément, la donnée d'une donnée auxiliaire k définit une trivialisation des gerbes $\mathscr{G}(h)$. Dans le langage précédent : une description de $\mathscr{G}(h)$ comme étant la gerbe triviale. La trivialisation de $\mathscr{G}(h)$ est encore la donnée d'un objet $\{k\}_h$ de $\mathscr{G}(h)$. Un système transitif d'équivalences entre ces descriptions de $\mathscr{G}(h)$ est celle de $\mathbf{C}^*$-torseurs

(5.12.1) $$\{k_2, k_1\}_h = \mathrm{Hom}(\{k_1\}_h, \{k_2\}_h)$$

et d'isomorphismes de torseurs

(5.12.2) $$\{k_3, k_1\}_h = \{k_3, k_2\}_h + \{k_2, k_1\}_h$$

vérifiant une condition de cocycle exprimant l'associativité de la composition des morphismes $\{k_1\} \to \{k_2\} \to \{k\}_3 \to \{k\}_4$.

A k donné, l'addition (E2) :

$$\mathscr{G}(h_1) + \mathscr{G}(h_2) \to \mathscr{G}(h_1 h_2)$$

est donnée par des $\mathbf{C}^*$-torseurs $\mathrm{P}_k(h_1, h_2)$ avec

(5.12.3) $$\mathrm{P}_k(h_1, h_2) = \mathrm{Hom}(\{k\}_{h_1} + \{k\}_{h_2}, \{k\}_{h_1 h_2}).$$

L'isomorphisme (E3) est donné par une trivialisation de

(5.12.4) $$\mathrm{P}_k(h_2, h_3) - \mathrm{P}_k(h_1 h_2, h_3) + \mathrm{P}_k(h_1, h_2 h_3) - \mathrm{P}_k(h_1, h_2)$$

et (E4) est une condition de cocycle sur ces trivialisations.

Pour k variable, il faut de plus se donner une compatibilité à l'addition des équivalences entre descriptions de $\mathscr{G}$. Cette compatibilité est un isomorphisme

(5.12.5) $$\{k'', k'\}_{h_1 h_2} + \mathrm{P}_{k'}(h_1, h_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}_{k''}(h_1, h_2) + \{k'', k'\}_{h_1} + \{k'', k'\}_{h_2},$$

reliant les morphismes composés

$$\begin{array}{ccc} \{k'\}_{h_1} + \{k'\}_{h_2} & \xrightarrow{\mathrm{P}} & \{k'\}_{h_1 h_2} \\ \downarrow\{\} & & \downarrow\{\} \\ \{k''\}_{h_1} + \{k''\}_{h_2} & \xrightarrow{\mathrm{P}} & \{k''\}_{h_1 h_2} \end{array}$$

Ces isomorphismes doivent vérifier deux compatibilités :

a) compatibilité de (5.12.5) à la composition (5.12.2);
b) compatibilité de (5.12.5) à l'associativité (5.12.4) de l'addition.

Nous allons décrire successivement :

— en 5.13, le faisceau $\mathscr{K}$ des données auxiliaires,
— en 5.14, l'indépendance (5.12.1) (5.12.2) de la donnée auxiliaire,
— en 5.15, l'additivité (5.12.3) (5.12.4) à k fixé,
— en 5.16, l'indépendance (5.12.5) en k de l'addition.

5.13. Le faisceau $\mathscr{K}$ des données auxiliaires a pour sections sur U les systèmes consistant, sur U, en :

(5.13.1) une forme bilinéaire C sur Λ vérifiant

$$\mathrm{C}(\lambda, \mu) + \mathrm{C}(\mu, \lambda) = \mathrm{B}(\lambda, \mu);$$

(5.13.2) une section s de $\mathrm{E} \to \Lambda$ vérifiant

$$s(\lambda + \mu) = s(\lambda)\, s(\mu) . (-1)^{\mathrm{C}(\lambda, \mu)}.$$

Localement, Λ admet une base $e_1, \ldots, e_n$ et on peut définir C par

$$\mathrm{C}(e_i, e_j) = \begin{cases} \mathrm{B}(e_i, e_j) & \text{si } i < j \\ \frac{1}{2}\mathrm{B}(e_i, e_j) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

On peut choisir librement les $s(e_i)$ et (5.13.1) implique que ce choix se prolonge en un choix unique des s vérifiant (5.13.2).

Si $k_0 = (C, s)$ est une section de $\mathscr{K}$ sur U, toute autre section de $\mathscr{K}$ sur U s'écrit uniquement sous la forme $(C + A, s.q)$ où A est une forme bilinéaire sur Λ, où q est une application de Λ dans $\mathcal{O}_\infty^*$ et où A et q satisfont à

(5.13.3) A est alternée,

(5.13.4) $q(\lambda + \mu) = q(\lambda)\, q(\mu)\, (-1)^{A(\lambda, \mu)}$.

Le faisceau $\mathscr{K}$ est ainsi un torseur sous le faisceau abélien des (A, q) vérifiant (5.13.3) (5.13.4).

5.14. Si $k'' = k' + (A, q)$, on définit (5.12.1) par

$$\{k'', k'\}_h := (A, q)\,(h),$$

(voir 3.10 à 3.12), avec (5.12.2) déduit de l'additivité en (A, q) de $(A, q)\,(h)$.

5.15. Fixons $k = (C, s)$. On définit

$$P_k(h_1, h_2) := C(h_1, h_2),$$

la trivialisation (5.12.4) étant donnée par la bimultiplicativité de $C(h_1, h_2)$ (3.10). La compatibilité (E4) est vérifiée.

5.16. Soient $k' = (C', s')$ et $k'' = (C'', s'') = k' + (A, q)$, et des sections locales h_1, h_2. On a

(5.16.1) $$P_{k''}(h_1, h_2) - P_{k'}(h_1, h_2) = C''(h_1, h_2) - C'(h_1, h_2) = A(h_1, h_2)$$

et

(5.16.2) $$\{k'', k'\}_{h_1 h_2} - \{k'', k'\}_{h_1} - \{k'', k'\}_{h_2} = (A, q)\,(h_1 h_2) - (A, q)\,(h_1) - (A, q)\,(h_2).$$

La définition de (A, q) demande qu'on choisisse une forme bilinéaire D avec $A(x, y) = D(x, y) - D(y, x)$ ainsi que q_0 quadratique à valeurs ± 1 avec

$$q_0(\lambda) = (-1)^{D(\lambda, \lambda)}.$$

On a $$(A, q)\,(h) = D(h, h) + (h, qq_0^{-1}),$$

d'où un isomorphisme

(5.16.3) $$\begin{aligned}(A, q)\,(h_1 h_2) - (A, q)\,(h_1) - (A, q)\,(h_2) &= D(h_1 h_2, h_1 h_2) - D(h_1, h_1) - D(h_2, h_2)\\ &= D(h_1, h_2) + D(h_2, h_1) = A(h_2, h_2).\end{aligned}$$

On définit (5.12.5) comme étant l'isomorphisme

$$P_{k''}(h_1, h_2) - P_{k'}(h_1, h_2) = \{k'', k'\}_{h_1 h_2} - \{k'', k'\}_{h_1} - \{k'', k'\}_{h_2}$$

déduit de (1.9.1) (1.9.2) et (1.9.3). La vérification des compatibilités requises est laissée au lecteur.

5.17. Pour S un cercle au bord de Σ, les données 5.1 fournissent donc en particulier une extension centrale de $(\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2})$ (S) par $\mathbf{C}^*$. Calculons le commutateur. Par 5.10, le problème se ramène à celui du calcul du commutateur (5.6) pour l'extension 5.12 de $\mathcal{O}^*_{1/2}$ par le champ des $\mathbf{C}^*$-torseurs. Calculons ce dernier. Soient h_1, h_2 sections locales de $\mathcal{O}^*_{1/2}$ et choisissons une donnée auxiliaire $k = (\mathrm{C}, \mathrm{S})$ (5.13).

On a

$$(h_1, h_2)_{\mathcal{G}} = \mathrm{Hom}(\{k\}_{h_2} + \{k\}_{h_1}, \{k\}_{h_1} + \{k\}_{h_2})$$

(Hom dans $\mathcal{G}(h_1, h_2)$), *i.e.* avec les notations de 5.12

$$(h_1, h_2)_{\mathcal{G}} = \mathrm{P}_k(h_1, h_2) - \mathrm{P}_k(h_2, h_1),$$

soit par 5.15

$$(h_1, h_2)_{\mathcal{G}} = \mathrm{C}(h_1 h_2) - \mathrm{C}(h_2, h_1) = \mathrm{B}(h_1, h_2).$$

Cet isomorphisme est en fait indépendant de la donnée auxiliaire :

Proposition **5.18.** — (i) *Le commutateur* $(h_1, h_2)_{\mathcal{G}}$ *est* $\mathrm{B}(h_1, h_2)$.

(ii) *Le commutateur*

$$(\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2}(\mathrm{S})) \otimes (\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2}(\mathrm{S})) \to \mathbf{C}^*$$

pour l'extension centrale 5.12 *de* $\Lambda \otimes \mathcal{O}^*_{1/2}(\mathrm{S})$ *par* $\mathbf{C}^*$ *est*

$$(h_1, h_2) = \mathrm{B}(h_1, h_2)_{\mathrm{S}}.$$

Si la forme B est définie positive, que h_1 est la valeur au bord de f holomorphe sur Σ et que h_2 est le complexe conjugué de h_1, la proposition 4.16 fournit donc une « positivité » du commutateur (h_1, h_2) : il est réel $\geqslant 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. E. Contou-Carrère, *Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel et symbole local modéré*, à paraître.

[2] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren, **179**, Springer Verlag, 1971.

[3] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris, Hermann, 1959.

S.G.A. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, dirigé par A. Grothendieck.

S.G.A. 4 *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. III : *Lecture Notes in Mathematics*, **305**, Springer Verlag, 1973.

S.G.A. 7 *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, t. I : *Lecture Notes in Mathematics*, **288**, Springer Verlag, 1972.

Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey 08540

Manuscrit reçu le 25 février 1991.