PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

LAURENT CLOZEL

Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 73 (1991), p. 97-145
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1991__73__97_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES AUX REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES AUTODUALES DE GL(n)

par LAURENT CLOZEL

SOMMAIRE

1. Introduction 97
   1. Introduction 97
   2. Notations et conventions 101
2. Certains groupes unitaires 101
3. Changement de base : préliminaires 106
   1. La construction fondamentale 106
   2. Préliminaires archimédiens : construction de fonctions associées 108
   3. Préliminaires archimédiens : descente 116
   4. Correspondance des fonctions d'Euler-Poincaré 118
4. Changement de base : comparaison globale 119
   1. Instabilité 119
   2. La formule des traces pour U 120
   3. La formule des traces tordue pour $D^\times$ 122
   4. Descente 125
5. Représentations galoisiennes 130
   1. Résultats : corps totalement réels 130
   2. Démonstration : corps totalement réels 133
   3. Cas des corps CM. Application à la cohomologie de $GL(n, F_c)$ 142

1. Introduction

1.1. Dans cet article, nous associons à certaines formes automorphes pour des sous-groupes arithmétiques de $GL(n, F)$, F étant un corps totalement réel ou un corps de multiplication complexe (corps CM), des représentations galoisiennes. Les formes automorphes considérées sont formes propres des opérateurs de Hecke, et les valeurs propres de ceux-ci sont liées à celles des éléments de Frobenius dans les représentations galoisiennes. Le théorème de pureté de Deligne implique alors la conjecture de Ramanujan.

Pour décrire plus précisément notre résultat, considérons le cas où $F = \mathbf{Q}$. Soit $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, et considérons une représentation cuspidale de $GL(n, \mathbf{A})$ — une représentation irréductible qui intervient dans l'espace des formes paraboliques sur $GL(n, \mathbf{Q})\backslash GL(n, \mathbf{A})$. On peut écrire π comme un produit tensoriel $\pi = \bigotimes_v \pi_v = \pi_\infty \otimes (\bigotimes_p \pi_p)$ selon les places de $\mathbf{Q}$. Nous supposons que la représentation π_∞ a de la cohomologie continue (peut-être à coefficients non triviaux). Nous supposons aussi que π_{p_0}, pour un nombre premier p_0, appartient à la série discrète du groupe $GL(n, \mathbf{Q}_{p_0})$. (Si $2 \mid n$ et $4 \nmid n$, nous supposons en outre qu'il en est de même à une place $p_1 \neq p_0$.) Enfin, nous supposons que la représentation π est *autoduale, i.e.* isomorphe à sa contragrédiente.

A presque toutes les places, la représentation π_p est non ramifiée, et Langlands lui associe une représentation $r_p : W_{\mathbf{Q}_p} \to GL(n, \mathbf{C})$, où $W_{\mathbf{Q}_p}$ est le groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$: r_p exprime l'action des opérateurs de Hecke à la place p sur une forme automorphe associée à π_p. Pour des raisons de rationalité, nous posons

$$r_p^{\mathrm{T}} = r_p \mid \ \mid_p^{(1-n)/2}$$

où $\mid \ \mid_p$ est la valeur absolue sur $W_{\mathbf{Q}_p}$, normalisée de telle sorte que $\mid \mathscr{F}_p \mid_p = p$, $\mathscr{F}_p$ étant un élément de Frobenius géométrique. Les représentations r_p^{T} sont alors définies sur un corps de nombres $L(\pi)$ indépendant de p.

Par ailleurs, soit F_c un corps quadratique imaginaire déployé en p_0 (et p_1 s'il y a lieu). Si w est une place finie de F_c divisant p, on peut considérer un élément de Frobenius $\mathscr{F}_w \in W_{\mathbf{Q}_p}$. Soit q_w le nombre d'éléments du corps résiduel de $F_{c,w}$.

Théorème **1.1.** — *Il existe*

(i) *un corps de nombres* $L \subset \mathbf{C}$ *contenant* $L(\pi)$,

(ii) *un ensemble fini* S *de nombres premiers,*

(iii) *un entier* $a > 0$,

(iv) *un système compatible* $W = (W_\lambda, r_\lambda)$ *de représentations* λ*-adiques de* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_c)$, λ *parcourant les places finies de* L, *non ramifié en dehors de* S, *pur de poids* $(n-1)$, *tel que, si* $p \notin S$ *et* $\lambda \nmid p$, *on ait, pour toute place* w *de* F_c *divisant* p,

$$\mathrm{trace}\, r_\lambda(\mathscr{F}_w^m) = a\, \mathrm{trace}\, r_p^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w^m)\, q_w^{m(n-1)}$$

pour tout $m \geqslant 0$.

Des résultats beaucoup plus complets sont connus pour GL(2) et pour GL(3) : nous renvoyons à Blasius [4] pour un exposé, et à Rogawski [31] pour le cas de GL(3).

Donnons une idée de la démonstration. Dans le cas où $n = 2$ (et toujours pour le corps des rationnels), ce théorème est dû à Eichler-Shimura (pour π associée à une forme de poids 2) et Deligne. On obtient en fait, dans ce cas, des représentations λ-adiques de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et l'entier a est égal à 1. Le théorème résulte de la relation entre valeurs propres des opérateurs de Hecke et de Frobenius opérant sur la cohomologie des courbes modulaires.

Si $n > 2$, le groupe $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{R})$ n'est pas le groupe de symétries d'un espace hermitien symétrique, et il paraît *a priori* difficile d'obtenir une interprétation (en termes de géométrie algébrique) des opérateurs de Hecke ou de leurs valeurs propres. L'hypothèse d'autodualité est déterminante. Elle permet d'utiliser une variante arithmétique de l' « astuce unitaire » de Weyl. Plus précisément, nous considérons un groupe unitaire U (en n variables) défini sur $\mathbf{Q}$; on peut alors montrer, à l'aide d'un double changement de base de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ à $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}_c})$, puis de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}_c})$ à $\mathrm{U}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$, que les valeurs propres des opérateurs de Hecke associées à π sont reliées (à presque toutes les places) avec celles d'une représentation cuspidale τ de $\mathrm{U}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$.

Il suffit alors d'exploiter deux résultats récents et importants de Kottwitz [23, 24]. Tout d'abord, il a obtenu, résolvant une conjecture de Langlands, une expression explicite pour les traces des opérateurs de Frobenius opérant dans la cohomologie des variétés de Shimura, au moins pour celles qui sont des variétés de modules de variétés abéliennes. Par ailleurs, pour des groupes unitaires associés à des involutions de seconde espèce sur des algèbres à division sur des corps CM, il a montré que cette expression s'identifiait à la trace d'une certaine fonction dans l'espace des formes automorphes [24] : ceci lui permet, pour ces groupes, d'obtenir l'identification entre valeurs propres de Hecke et de Frobenius.

C'est à de tels groupes U que nous transportons, à l'aide du principe de fonctorialité, la représentation π. Il suffit alors d'expliciter le résultat de Kottwitz. Pour obtenir (au multiple a près, hélas!) le système de représentations ℓ-adiques qui revient de droit à π, plutôt qu'une puissance tensorielle de celui-ci, il nous faut supposer que le groupe U est, à l'infini, de type $(n-1, 1)$. Par ailleurs, le groupe U provient d'une involution sur une algèbre à division D sur F_c; pour construire la représentation τ, on doit donc d'abord utiliser la fonctorialité « de Langlands » entre $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F}_c)$ et $\mathrm{D}^\times$, dont l'existence a été prouvée par Vignéras. Ceci impose des conditions de ramification à la fois à la représentation π et au groupe U, d'où les hypothèses locales faites sur π. Enfin, remarquons que la descente de $\mathrm{D}^\times$ à U elle-même n'est possible que grâce aux propriétés remarquables des groupes issus des involutions de seconde espèce (absence de « L-indiscernabilité » : cf. § 4) et découvertes par Rapoport et Zink, dans le cas de U(3).

Nous donnons maintenant une description plus explicite du contenu de l'article. Dans ce travail, nous considérons en fait un corps totalement réel arbitraire F, et une extension CM, F_c, de F. Nos résultats concernent les représentations de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}})$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}_c})$ vérifiant des conditions analogues à celles imposées ci-dessus (Hypothèse 3.1). Considérons d'abord le cas totalement réel : π est une représentation de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}})$. Dans le § 2, nous construisons des groupes unitaires qui permettent de minimiser les conditions de ramification imposées à π. Il s'agit de déterminer quelles formes locales peuvent être obtenues compte tenu de la trivialité de l'invariant de Hasse. De tels résultats sont classiques, et nous ont été expliqués par J. Tits : ici, nous utilisons la description de la cohomologie galoisienne des groupes réductifs donnée par Kottwitz. Dans le § 3, nous décrivons d'abord le passage de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}})$ à $\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_{\mathrm{F}})$ à l'aide du

changement de base pour $GL(n)$, dû à Arthur et l'auteur, et du résultat de Vignéras. Le reste du paragraphe est consacré à la théorie archimédienne, en préparation à la descente de $D^\times$ à U. Celle-ci se fait à l'aide d'une comparaison de formules des traces, qui nécessite des relations entre intégrales orbitales (tordues) de fonctions C^∞ à support compact sur les groupes unitaires réels et $GL(n, \mathbf{C})$. De telles relations résulteraient, à l'aide du travail de Bouaziz, d'un « théorème de Paley-Wiener tordu » pour $GL(n, \mathbf{C})$ et la conjugaison complexe par rapport à un groupe unitaire (cf. avant la Prop. 3.6). Comme ce résultat, qui a été démontré par Delorme, n'était pas écrit lors de la rédaction de cet article, nous utilisons une autre méthode, celle des « pseudo-coefficients » (§ 3.2), due à Wallach et, dans le cas tordu, à Labesse [25]. Elle conduit au calcul d'une caractéristique d'Euler-Poincaré tordue (Prop. 3.5), qui devrait être liée aux résultats d'Adams-Vogan [1]. Le § 3.3 est consacré à la détermination des représentations de $U(F_\infty)$ qui seront obtenues par descente.

Dans le § 4, nous construisons, par descente, la représentation τ du groupe unitaire associée à π. Un problème technique apparaît, l'instabilité de la formule des traces tordue par l'action du groupe de Galois. Il est expliqué dans le § 4.1 (qu'on pourra omettre) et exorcisé dans le § 4.3 à l'aide d'un argument introduit par Kottwitz dans son étude des nombres de Tamagawa. Le § 4.4 décrit alors la descente à U de la représentation donnée par Kottwitz.

Enfin, le § 5 relie la représentation τ de $G(\mathbf{A}_F)$ à des représentations galoisiennes : il s'agit essentiellement d'expliciter le résultat de Kottwitz [24]. On obtient des représentations de $Gal(\bar{E}/E)$, où E est un certain corps reflex (au sens de Shimura) défini dans le § 5.1; E contient F_c mais peut être strictement plus grand si $F/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisien. Le résultat principal est le théorème 5.3; il implique la conjecture de Ramanujan pour π, à presque toutes les places (Th. 5.5). Enfin, le § 5.3 est consacré aux corps CM : si π_c est une représentation de $GL(n, \mathbf{A}_{F_c})$ telle que $\tilde{\pi} \cong {}^\sigma\pi_c$, σ étant le générateur de $Gal(F_c/F)$, on a pour π_c des résultats analogues à ceux décrits dans le cas réel. A la fin du § 5.3, on explique comment les constructions de cet article permettent de démontrer l'existence de cohomologie cuspidale pour les sous-groupes arithmétiques de $GL(n, F_c)$, F_c étant un corps CM. Nous n'avons pas explicité les résultats : J.-P. Labesse peut les démontrer dans des cas plus généraux.

Le théorème 5.3 a été annoncé (dans le cas rationnel, et avec une erreur de parité!) dans [11], où nous avions exprimé l'intention de l'étendre au cas des représentations autoduales modulo torsion par un caractère ([11, 5.2.1]) Nous ne l'avons pas fait dans cet article, car cela supposerait connue la stabilisation de la formule des traces tordue à la fois par l'action de $Gal(F_c/F)$ et par un caractère abélien. Kottwitz et Shelstad devraient inclure ceci dans leur travail en progrès sur la formule des traces tordue : il a paru inutile de les devancer. Par ailleurs, on peut étendre la construction de base de cet article au cas des représentations algébriques autoduales π de $GL(n, \mathbf{A}_F)$ (au sens de [11], cf. Hyp. 3.1) qui sont *singulières*. Dans certains cas, les composantes aux places infinies de la représentation τ de $U(\mathbf{A}_F)$ sont des limites de série discrète.

On peut alors, à l'aide des méthodes de Harris [15], démontrer des résultats d'algébricité sur les valeurs propres de Hecke de π (cf. [11], § 3.4), au moins sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Pour la descente de $D^\times$ à U, les méthodes essentiellement algébriques du § 3 ne sont pas, alors, suffisantes. Nous reviendrons sur cette question dans un article ultérieur.

Je voudrais remercier J. Tits pour des indications précieuses concernant la cohomologie galoisienne des groupes unitaires, et J.-P. Labesse pour m'avoir autorisé à reproduire ici sa démonstration de l'existence de pseudo-coefficients. Il devrait être clair après cette introduction que les résultats décrits ici reposent sur une série de travaux profonds de R. Kottwitz. Je le remercie de me les avoir communiqués, souvent avant leur publication, et de ses nombreuses explications.

Enfin, je voudrais remercier Mme Bonnardel et Mme Le Bronnec du soin apporté à la frappe du manuscrit.

1.2. Notations et conventions

Dans tout l'article, on considère un corps de nombres totalement réel (noté F) et une extension CM de F (dont F est le corps totalement réel maximal) notée F_c. On note E, dans le § 5, un corps reflex; L est en général un corps de coefficients.

On considère des groupes réductifs, définis sur F, F_c ou $\mathbf{Q}$: en particulier les groupes $GL(n)$, le groupe des unités $D^\times$ d'une algèbre à division D sur F_c (§ 2), un groupe unitaire U/F associé (§ 2). Dans le § 4, $\tilde{U}$ désigne le F-groupe obtenu, par restriction des scalaires de F_c à F, à partir du groupe $U \times_F F_c$; U_0 est un F-groupe, forme intérieure quasi déployée de U. Dans le § 5, G_0 désigne le $\mathbf{Q}$-groupe obtenu par restriction des scalaires à partir de U/F, et G une extension du tore $\mathbf{G}_m$ par G_0 sur $\mathbf{Q}$. Dans le § 4, si K/F est une algèbre étale, on note $\mathbf{K}^\times$ *le* F-*groupe* déduit de $K^\times$ par restriction des scalaires.

On note u, v, w... les places de corps de nombres K, K′, K″... Si u est finie, K_u est le complété de K en u, W_{K_u} son groupe de Weil, $\mathscr{F}_u$ un élément de Frobenius géométrique. Jusqu'au § 5, on écrira souvent $\mathbf{A}$ pour l'anneau des adèles du corps totalement réel F, $\mathbf{A}_c$ pour celui de F_c.

Pour les groupes réductifs sur les corps globaux ou locaux, on utilise en général les notations de Borel [5]; pour les L-groupes et la cohomologie galoisienne des groupes réductifs, on s'est en général conformé aux notations de Kottwitz [20, 21]. On a utilisé la notation de Langlands pour les caractères continus des tores complexes : ainsi, si $p - q \in \mathbf{Z}$, $z^p \bar{z}^q$ est le caractère de $\mathbf{C}^\times$ de différentielle $Z \mapsto pZ + q\bar{Z}$.

Enfin, dans le § 5, on supposera que $n > 2$ pour le calcul du corps reflex (cf. § 5.2).

2. Certains groupes unitaires

Dans ce chapitre, nous construisons des groupes unitaires, sur des corps totalement réels, soumis à des contraintes locales et globales. Globalement, ils ne présentent pas de L-indiscernabilité ou, en d'autres termes, leur formule des traces est stable (§ 3).

Localement, ils doivent être de type $(n-1, 1)$ à une place infinie et anisotropes aux autres places infinies : ceci assure que la représentation du L-groupe associée à leur variété de Shimura est la représentation standard. A cause de l'obstruction cohomologique globale (invariant de Hasse), cela implique, à d'autres places, des restrictions que nous cherchons à minimiser.

Si F est un corps totalement réel, F_c une extension quadratique totalement imaginaire de F (un corps CM), un groupe unitaire sur F est défini par une algèbre simple centrale D sur F et une involution de seconde espèce de D (un anti-automorphisme involutif induisant sur le centre l'élément non trivial σ de $\mathrm{Gal}(F_c/F)$).

Nous supposerons que D est une *algèbre à division* de degré n^2 sur F_c. Nous notons $*$ l'involution de seconde espèce, et U le groupe unitaire sur F associé :

$$U(R) = \{ g \in D \otimes_F R : gg^* = 1 \}$$

pour toute F-algèbre R.

Le groupe U est une forme intérieure sur F d'un groupe unitaire quasi déployé, que nous noterons U_0 : il lui est donc associé, pour toute place v de F, un élément de $H^1(F_v, G)$, où l'on note G le groupe adjoint de U_0, et ces invariants locaux sont liés par le fait qu'un certain invariant global est égal à 1. Puisque le groupe adjoint G est le groupe d'automorphismes de la paire $(D_0, *_0)$, où $D_0 = M_n(F_c)$, $*_0 : X \mapsto {}^t\overline{X}$, toute forme intérieure de U_0 est du type indiqué, pour une certaine algèbre à division et une involution de seconde espèce sur celle-ci. Pour décrire simplement ces invariants locaux et la condition globale, nous utilisons le travail de Kottwitz [20, 21] (1).

Dans ces articles, Kottwitz a reformulé la théorie de la cohomologie galoisienne des groupes réductifs à l'aide du groupe dual. Désignons, pour un instant, par G un groupe réductif connexe sur un corps local ou global K et par $\hat{G}$ la composante neutre de son groupe dual. On pose

$$A(G) = A(G/K) = (\pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma))^D$$

où $Z(\hat{G})$ est le centre du groupe $\hat{G}$, sur lequel opère le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, $Z(\hat{G})^\Gamma$ désigne le groupe des invariants, $\pi_0(?)$ est le groupe des composantes connexe d'un groupe ?, et D désigne le dual, pour la dualité des groupes finis abéliens.

On applique ceci à $G = (U_0)_{ad}$; on pose

$$A(G) = A(G/F),$$
$$A_v(G) = A(G/F_v)$$

si v est une place de F.

(1) Ces résultats sont bien sûr antérieurs au travail de Kottwitz et dus essentiellement, dans le cas général, à Kneser. Cf. Scharlau [32].

Pour ce groupe, les résultats de Kottwitz s'expriment ainsi :

(2.1) *Localement, il existe une application naturelle*

$$\alpha_v : \mathrm{H}^1(\mathrm{F}_v, \mathrm{G}) \to \mathrm{A}_v(\mathrm{G}).$$

C'est un isomorphisme si v est finie.

Par restriction, on obtient une application naturelle

$$\mathrm{A}_v(\mathrm{G}) \to \mathrm{A}(\mathrm{G})$$

pour tout v, d'où une application

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mathrm{G}(\bar{\mathbf{A}})) \cong \bigoplus_v \mathrm{H}^1(\mathrm{F}_v, \mathrm{G}) \to \bigoplus_v \mathrm{A}_v(\mathrm{G}) \to \mathrm{A}(\mathrm{G})$$

avec les notations de [21, § 3]. Kottwitz démontre alors :

(2.2) *Le noyau de l'application* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mathrm{G}(\bar{\mathbf{A}})) \to \mathrm{A}(\mathrm{G})$ *ainsi obtenue est égal à l'image de l'application naturelle* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mathrm{G}(\bar{\mathbf{A}}))$.

L'assertion (2.2) décrit donc quand une famille de formes intérieures locales de U_0 peut être obtenue à l'aide d'un groupe unitaire sur F.

Nous calculons maintenant les groupes A(G) et $\mathrm{A}_v(\mathrm{G})$. Quel que soit le corps (local ou global) considéré, on a $\hat{\mathrm{G}} = \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$. Si le groupe considéré est unitaire (F global, ou v inerte dans F_c), le L-groupe de G est le produit semi-direct de $\hat{\mathrm{G}}$ par Γ (qu'on notera Γ_v dans le cas local), celui-ci opérant par le groupe de Galois de l'extension quadratique (F_c ou $\mathrm{F}_c \otimes \mathrm{F}_v$), l'élément non trivial σ agissant par $g \mapsto w_0\, {}^t g^{-1}\, w_0$,

$$w_0 = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ \cdot & & & & & \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $\pi_0(\mathrm{Z}(\hat{\mathrm{G}})^\Gamma) = \mathrm{Z}(\hat{\mathrm{G}})^\Gamma$ est trivial si n est *impair*, et égal au groupe $\mu_2 = \{\pm 1\}$ plongé diagonalement dans $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ si n est *pair*; le calcul est le même dans le cas local. On en déduit donc, à l'aide de (2.2), le résultat classique suivant :

Lemme **2.1.** — *Si n est impair, toute famille (presque partout triviale) de formes intérieures locales de* U_0 *vient d'un groupe unitaire sur* F.

Nous supposerons maintenant *n pair*. Il nous reste à calculer $A_v(G)$ quand v est déployée dans F_c. Dans ce cas, l'action de Γ_v sur $\hat{G}$ est triviale, et $\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma}) = Z(\hat{G})^{\Gamma}$ est égal au groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité plongé diagonalement dans $SL(n, \mathbf{C})$. (Bien sûr, ceci revient, d'après (2.2), au calcul du groupe de Brauer de F_v; noter que v est finie puisque F_c est totalement imaginaire.) En définitive :

$$\begin{aligned} A(G) &= \mu_2^D \\ A_v(G) &= \mu_2^D \quad (v \text{ inerte}) \\ A_v(G) &= \mu_n^D \quad (v \text{ déployée}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les homomorphismes $A_v(G) \to A(G)$ sont les homomorphismes naturels venant de $\mu_2 \hookrightarrow \mu_n$.

Donnés (2.3) et la description des homomorphismes $A_v(G) \to A(G)$, la condition globale de compatibilité sur les invariants locaux est maintenant décrite par (2.2). Pour étudier les groupes particuliers mentionnés au début de ce paragraphe, nous devons encore calculer les invariants, aux places archimédiennes, des groupes unitaires $U(p, q)$ $(p + q = n)$:

Lemme **2.2.** — *Soit* $n = 2m$. *L'invariant de* $U(m + r, m - r)$ $(0 \leqslant r \leqslant m)$ *est égal à* r (mod 2). *En particulier,*

$U(2m)$ *est d'invariant* m (mod 2),
$U(2m - 1, 1)$ *est d'invariant* $(m + 1)$ (mod 2).

Démonstration. — Soit $T \subset G$ un tore maximal elliptique défini sur $\mathbf{R}$. D'après Kottwitz [21, § 2, 10] l'application $H^1(\mathbf{R}, T) \to H^1(\mathbf{R}, G)$ est surjective; il existe une application naturelle, $\Gamma_{\mathbf{R}}$-équivariante, de $Z(\hat{G})$ vers $\hat{T}$ et le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbf{R}, T) & \underset{\approx}{\longrightarrow} & A(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbf{R}, G) & \longrightarrow & A(G) \end{array} \tag{2.4}$$

où la flèche $A(T) \to A(G)$ est déduite par dualité de $Z(\hat{G}) \to Z(\hat{T})$, est commutatif.

On extrait aisément de Kottwitz [20, 21] la description de la flèche $Z(\hat{G}) \to \hat{T}$: si $\mathbf{G}_m^a$ est le tore anisotrope de dimension 1 sur $\mathbf{R}$, on a $T \cong (\mathbf{G}_m^a \times \ldots \times \mathbf{G}_m^a)/\mathbf{G}_m^a$, quotient du produit de n copies de $\mathbf{G}_m^a$ par la diagonale, et donc

$$\hat{T} \cong \{ z = (z_1, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbf{C}^{\times}, \Pi z_i = 1 \}.$$

Le groupe de Galois agit par $\sigma : z \mapsto z^{-1}$. Donc $\hat{T}^{\Gamma_{\mathbf{R}}} \cong \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\} : \varepsilon_i \in \mu_2, \Pi\varepsilon_i = 1$. La flèche $Z(\hat{G}^{\Gamma_{\mathbf{R}}}) = \mu_2 \to \hat{T}^{\Gamma_{\mathbf{R}}}$ est le plongement diagonal.

Soit J_{pq} la matrice $\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$. Le groupe $U(p, q)$ est défini par l'action du

générateur σ de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) : g \mapsto J_{pq}\, {}^t\bar{g}^{-1} J_{pq}$ $(g \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}))$. Notons-la σ_{pq}. On peut considérer le tore elliptique diagonal

$$\widetilde{T}(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix}, \quad |z_i| = 1 \right\},$$

de $U(m, m)$. Un élément de $H^1(\Gamma_{\mathbf{R}}, T)$ s'identifie à la donnée d'un élément d'ordre deux $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de $\widetilde{T}(\mathbf{R})$ modulo les éléments scalaires. Soit

$$\eta^r = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-r}).$$

Si l'on tord le groupe $U(m, m)$ par η^r considéré comme élément de $H^1(\Gamma_{\mathbf{R}}, G)$, on remplace σ_{mm} par $\sigma_{m+r,\, m-r}$.

Il nous suffit donc de calculer l'image de η^r dans $A(G) \cong \mu_2^D$. Dans l'identification $H^1(\Gamma_{\mathbf{R}}, T) \cong (\hat{T}^{\Gamma_{\mathbf{R}}})^D$, l'image de η^r est le caractère $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mapsto \Pi \varepsilon_i^{\eta_i}$, où l'on considère maintenant $\eta^r = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ comme élément de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$. Sa restriction à μ_2 plongé diagonalement est bien la classe de r mod 2.

Nous pouvons maintenant conclure :

Proposition **2.3.** — *Soit* F_c *une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel* F *de degré d sur* $\mathbf{Q}$. *Soit* $n \in \mathbf{N}$. *Il existe alors un groupe unitaire* U *sur* F, *associé à une involution de seconde espèce sur une algèbre simple centrale* D *sur* F_c, *tels que* :

(i) U *est de type* $U(n-1, 1)$ *à une place infinie de* F, *de type* $U(n)$ *aux autres places infinies.*

(ii) *Si n est* impair, *ou si* $4 \mid n$, *ou si n est pair mais non divisible par* 4 *et d est* pair, U *est quasi déployé en toute place finie de* F, *sauf en une place* v_0, *déployée dans* F_c; *le groupe* U_{v_0} *est isomorphe au groupe des unités d'une algèbre à division sur* F_{v_0}.

(iii) *Si* $n = 2m$ *avec m* impair, *et d est* impair, U *est quasi déployé en toute place finie sauf en deux places* v_0, v_1; *la place* v_0 *est déployée et* U_{v_0} *est comme en* (ii); *on peut supposer que* (v_1, U_{v_1}) *vérifient les mêmes conditions, ou que* v_1 *est inerte et* U_{v_1} *est l'unique groupe unitaire non quasi déployé sur* F_{v_1}.

Remarque. — Les places v_0 (v_1 s'il y a lieu) peuvent être choisies arbitrairement.

Démonstration. — Si n est impair, il n'y a pas d'obstruction globale. Il suffit donc de prendre une forme intérieure de U_0 telle que, en une place déployée, on obtienne après extension des scalaires à $(F_c)_{v_0}$ un produit de deux algèbres à division. Supposons maintenant n pair : $n = 2m$. On distingue deux cas :

a) $4 \mid n$: m pair. D'après le lemme 2.2, l'invariant de $U(n)$ est alors égal à $0 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, celui de $U(n-1, 1)$ à 1. La somme des invariants à l'infini est égale à 1. On choisit une place v_0, déployée dans F_c, et l'on suppose que U_{v_0} est le groupe des unités d'une algèbre à division sur F_{v_0}. Son invariant dans $\mu_n^D \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est alors un élément primitif,

dont l'image dans $\mu_2^D \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est 1. Prenant le groupe U quasi déployé à toutes les autres places, on voit que l'invariant global est égal à 0; le groupe U/F correspondant doit bien venir d'une algèbre à division sur F_c à cause de la condition en v_0.

b) $2 \mid n$, $4 \nmid n$: m impair. Dans ce cas l'invariant à l'infini est égal à $d - 1 \pmod 2$ d'après le lemme 2.2. Si d est pair, c'est donc 1 (mod 2) et l'on termine la construction comme en *a)*. Si d est impair, il faut rajouter une place v_1 d'invariant 1 (mod 2), d'où (iii).

3. Changement de base : préliminaires

3.1. La construction fondamentale

Dans ce chapitre, nous supposerons que (F, F_c, D, U) sont des données vérifiant les conditions de la proposition 2.3. Plus précisément, on suppose donc que :

F est un corps de nombres totalement réel.

F_c est une extension quadratique totalement imaginaire de F (et donc un corps CM).

D est une algèbre à division de degré n^2 sur F_c, munie d'une involution de seconde espèce notée $*$.

U est le groupe unitaire défini par $(D, *)$. En particulier, U est quasi déployé en toute place finie de F sauf en une place v_0, déployée dans F_c, et en une autre place v_1 de F dans le cas (iii) de la proposition 2.3 (n pair non divisible par 4, et $d = [F : \mathbf{Q}]$ *impair*). Dans la discussion qui suit, on supposera que v_1 est déployée dans F_c et que U_{v_1} est isomorphe au groupe des unités d'une algèbre à division sur F_{v_1}. (Cette condition peut être affaiblie, ce qui renforce les résultats obtenus : cf. la discussion suivant le théorème 4.1.)

On notera, pour simplifier, $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de F et $\mathbf{A}_c$ celui de F_c.

Soit π une représentation automorphe (irréductible) cuspidale de $GL(n, \mathbf{A}_F)$. Nous supposerons que π vérifie les conditions suivantes :

Hypothèse **3.1.**

(i) π *est* algébrique *et* régulière *au sens de* [11];

(ii) π *est* autoduale : $\pi \cong \tilde{\pi}$, *où* $\tilde{\pi}$ *désigne la représentation contragrédiente*;

(iii) π_{v_0}, *et* π_{v_1} *s'il y a lieu, sont des représentations de carré intégrable de* $GL(n, F_{v_0})$ (*resp.* $GL(n, F_{v_1})$).

Rappelons le sens de la condition (i). Si v est une place infinie de F (de sorte que $F_v \cong \mathbf{R}$), la classification de Langlands associe à π_v une représentation de degré n, r_v, du groupe de Weil $W_{\mathbf{R}}$. On note encore r_v sa restriction à $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\times \subset W_{\mathbf{R}}$. On suppose alors que

(3.1) $r_v \mid\ \mid^{(1-n)/2}$ *est une somme de caractères algébriques de* $\mathbf{C}^\times$:

$$r_v \mid\ \mid^{(1-n)/2} = \eta_1 \oplus \eta_2 \oplus \ldots \oplus \eta_n, \qquad \eta_i = z^{p_i}(\bar{z})^{q_i}, \quad p_i, q_i \in \mathbf{Z};$$

(3.2) *on a* $p_i \neq p_j$ *et* $q_i \neq q_j$ *pour* $i \neq j$.

Nous allons associer à π une représentation (en fait, une famille de représentations L-indiscernables) τ de $U(\mathbf{A})$ à l'aide du diagramme de fonctorialités suivant :

$$\begin{tikzcd}
D^\times/F_c \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & GL(n)/F_c \arrow[d, dash] & \\
U/F \arrow[r, dash] & GL(n)/F \arrow[r, dash] & \\
 & \tau \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & \pi \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales représentent des changements de base; la correspondance horizontale est la correspondance entre $D^\times$ et $GL(n)$, extension au cas général de la correspondance de Jacquet-Langlands.

Nous décrivons d'abord la construction de τ_c, qui repose sur des résultats connus d'Arthur et de l'auteur [3] et de Vignéras [37].

Tout d'abord, la théorie du changement de base pour $GL(n)$ et l'extension F_c/F associe à π une représentation automorphe π_c de $GL(n, \mathbf{A}_c)$. Elle est caractérisée par le fait qu'aux places v de F qui sont non ramifiées pour π et F_c/F, la matrice de Hecke de π_c est donnée par

$$t_{\pi_c, w} = t_{\pi, v} \quad (w \mid v,\ v \text{ déployée}),$$

$$t_{\pi_c, w} = t^2_{\pi, v} \quad (w \mid v,\ v \text{ inerte}).$$

La représentation π_c est *a priori* unitairement induite de cuspidale [3, § III.4]. La description locale du changement de base [3, § III.5] implique en fait que si w_0', w_0'' sont les places de F_c au-dessus de v_0, on a $(\pi_c)_w \cong \pi_{v_0}$ si $w = w_0', w_0''$. Puisque ces composantes locales ne peuvent être induites, on en déduit que π_c est *cuspidale*. De plus, on voit donc que :

Lemme **3.2.** — *Soient v_0, et v_1 s'il y a lieu, les places ramifiées de* $D^\times$. *Alors, si w divise v_0 (ou v_1), la représentation $(\pi_c)_w$ appartient à la série discrète.*

Enfin, notons qu'aux places infinies, les composantes de π_c (toujours à cause de [3, § III.5]) sont décrites par le changement de base local; notons qu'il résulte du lemme 4.9 de [11] et de l'hypothèse d'auto-dualité sur π que celles-ci sont *tempérées*.

L'étape suivante — la construction de τ_c à partir de π_c — résulte du travail de Vignéras [37] et de la comparaison de formule des traces entre $GL(n)/F_c$ et $D^\times$ démontrée dans [3, Th. B, p. 134]. Nous donnons l'énoncé du résultat de Vignéras dans le cas qui nous intéresse. Soit S_D l'ensemble des places ramifiées de D : ainsi $S_D = \{ w_0', w_0'' \}$ ou $S_D = \{ w_0', w_0'', w_1', w_1'' \}$ suivant le cas.

Théorème **3.3** (Vignéras [37], [3]). — (i) *Soit* π_c *une représentation cuspidale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_c)$ *telle que, pour tout* $w \in \mathrm{S}_\mathrm{D}$, $(\pi_c)_w$ *soit de carré intégrable. Alors il existe une représentation automorphe (cuspidale)* τ_c *de* $\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_c)$ *telle que, en toute place* w *de* F_c, τ_c *soit associée à* π_c *par la correspondance locale entre* $\mathrm{D}^\times(\mathrm{F}_{c,w})$ *et* $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F}_{c,w})$.

(ii) *Si* τ'_c *est une représentation automorphe de* $\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_c)$ *telle que* $(\tau'_c)_w \cong (\tau_c)_w$ *pour presque toute place* w *de* F_c, *alors* $\tau'_c \cong \tau_c$, *et la multiplicité de* τ_c *dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{D}^\times(\mathrm{F}_c)\backslash\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_c), \omega)$, ω *étant le caractère central de* τ_c, *est égale à* 1.

La partie (i) est un cas particulier du théorème 1*b* de [37]; la partie (ii) n'est pas explicite dans cet article mais résulte de la démonstration (cf. partie A, p. 10) une fois que l'assertion analogue est connue pour $\mathrm{GL}(n)$: dans le spectre *cuspidal* de GL_n ce « théorème de multiplicité 1 fort » est bien connu; il résulte même du travail récent de Moeglin et Waldspurger [30] qu'il est vrai pour tout le spectre discret, ce que nous n'utiliserons pas ici.

Nous appliquons le théorème 3.3 à la représentation π_c obtenue à partir de π. La partie (ii) du théorème a alors la conséquence suivante :

Corollaire **3.4.** — *Notons* θ *l'automorphisme de* $\mathrm{D}^\times(\mathrm{F}_c)$ *ou* $\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_c)$ *donné par l'action de l'élément non trivial* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{F}_c/\mathrm{F})$ *associé à la forme* U/F *de* $\mathrm{D}^\times$. *Alors*

$$^\theta\tau_c \cong \tau_c.$$

Démonstration. — A cause du théorème de multiplicité 1 fort, il suffit de le vérifier pour presque toutes les composantes locales. A presque toutes les places v de F, on a, avec les notations habituelles, $\mathrm{D}_v^\times = \prod_{w \mid v} \mathrm{D}_w^\times \cong \mathrm{GL}(n, (\mathrm{F}_c)_v)$, et l'action de θ sur $\mathrm{D}_v^\times$ est, à conjugaison intérieure près, le composé de deux automorphismes d'ordre deux σ et α; σ est l'automorphisme de $\mathrm{GL}(n, (\mathrm{F}_c)_v)$ correspondant au changement de base F_c/F pour GL_n, et α est l'automorphisme $g \mapsto {}^\alpha g = {}^t g^{-1}$ de $\mathrm{GL}(n)$. Puisque π_c provient de π par changement de base, on a $\pi_c^\sigma \cong \pi_c$; puisque π, et donc π_c, est autoduale, on a $\tilde{\pi}_c \cong \pi_c$, et comme la duale d'une représentation est isomorphe à sa transformée par l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $\mathrm{GL}(n)$, on en déduit que τ_c est isomorphe, à presque toutes les places, à ${}^{\sigma\alpha}\tau_c = {}^\theta\tau_c$, q.e.d.

3.2. Préliminaires archimédiens : construction de fonctions associées

Le reste de ce chapitre et celui qui suit seront consacrés à la construction par descente, à partir de τ_c, de représentations τ de $\mathrm{U}(\mathbf{A})$ dont la partie finie $\tau_f = \bigotimes_{v \text{ finie}} (\tau_c)_v$ est liée à celle de τ_c, et dont la partie infinie $\tau_\infty = \bigotimes_{v \mid \infty} \tau_v$ présente de la cohomologie à valeurs dans un système de coefficients convenable.

Pour cela, nous commençons par étudier le facteur archimédien $(\tau_c)_\infty = \bigotimes_{w \mid \infty} (\tau_c)_w$ de τ_c. Il coïncide évidemment avec le facteur archimédien de π_c, et celui-ci est déduit

par changement de base local de π_∞ d'après les propriétés de « relèvement fort » du changement de base global [3, Th. III.5.1].

Soit v une place infinie de F, w la place de F_c divisant v. Un choix d'un plongement $\iota : F_c \to \mathbf{C}$ associé à w identifie $(F_c)_w$ à $\mathbf{C}$. Cela étant fixé, la représentation $(\pi_c)_w$ est décrite par la classification de Langlands (3.1) : elle est unitairement induite, à partir du sous-groupe de Borel, de n caractères $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ de $\mathbf{C}^\times$, avec, suivant (3.1),

$$\textbf{(3.3)} \qquad \begin{aligned} \chi_i(z) &= (z\bar{z})^{(n-1)/2}\, z^{p_i}(\bar{z})^{q_i} \\ &= z^{p_i+(n-1)/2}(\bar{z})^{q_i+(n-1)/2}, \quad p_i, q_i \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.9 de [11], le poids $p_i + q_i$ est indépendant de i et de la place w. La représentation $(\pi_c)_w$ est donc essentiellement tempérée; comme elle est autoduale, elle est en fait tempérée, c'est-à-dire que les caractères χ_i sont unitaires. On a donc

$$\textbf{(3.4)} \qquad p_i + q_i = 1 - n.$$

Rappelons aussi la condition de régularité (3.2) :

$$\textbf{(3.5)} \qquad p_i \neq p_j \quad (\text{et donc } q_i \neq q_j) \quad \text{pour } i \neq j.$$

Soit $p = (p_i) \in \mathbf{Z}^n$, $q = (q_i)$. Rappelons [11, § 3.5] que l'on définit, à partir de (p, q), une représentation rationnelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ en posant :

$$\textbf{(3.6)} \qquad m_\iota = (p_1, p_2 + 1, \ldots, p_n + (n-1)) \in \mathbf{Z}^n$$

où l'on a ordonné les p_i de façon que $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$. Si $\bar{\iota}$ est le plongement conjugué de F_c dans $\mathbf{C}$, on pose alors

$$\textbf{(3.7)} \qquad m_{\bar{\iota}} = (q_n, q_{n-1} + 1, \ldots, q_1 + (n-1)).$$

La notation est cohérente, *i.e.*, $m_{\bar{\iota}}$ est bien le vecteur de $\mathbf{Z}^n$ qu'on aurait obtenu en remplaçant ι par $\bar{\iota}$ dans le choix d'un plongement de F_c définissant w. Le couple $(m_\iota, m_{\bar{\iota}})$ est alors le plus haut poids d'une représentation irréductible de dimension finie de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

On définit enfin une représentation (ξ, V) de dimension finie, irréductible, du groupe $L = \mathrm{Res}_{F_c/\mathbf{Q}}\, \mathrm{GL}_n$ par $\xi = \bigotimes_\iota \xi_\iota$, où ι décrit les plongements $F_c \to \mathbf{C}$ et ξ_ι est de plus haut poids m_ι. On peut voir (ξ, V) comme une représentation du groupe de Lie complexe $L(\mathbf{C}) = \prod_\iota \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, et donc aussi de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}_{\mathbf{R}}(L(\mathbf{R})) \otimes \mathbf{C}$, où $L(\mathbf{R})$ est le groupe $\mathrm{GL}(n, (F_c)_\infty) = \prod_w \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Soit $K = \prod_w U(n)$ le sous-groupe compact maximal usuel de $\mathrm{GL}(n, (F_c)_\infty)$. Alors on sait [11, lemme 3.14] (1) que

$$\textbf{(3.8)} \qquad H^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}}, K; (\pi_c)_\infty \otimes \xi) \neq 0;$$

(1) Dans [11], la vérification de ce résultat dans le cas complexe était laissée au lecteur. Nous allons le prouver dans la suite de cette démonstration (et même obtenir la description précise de la cohomologie donnée dans [11]), ce qui complète la lacune de cet article.

ici $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ où $\mathfrak{z} = \mathrm{Lie}_{\mathbf{R}}((\mathbf{R}^\times)^d) \otimes \mathbf{C}$, $(\mathbf{R}^\times)^d$ étant identifié à la composante déployée de $L(\mathbf{R})$. Identifiant $(\tau_c)_\infty$ à $(\pi_c)_\infty$, on réécrit ceci :

$$\mathbf{(3.9)} \qquad H^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}}, K; (\tau_c)_\infty \otimes \xi) \neq 0.$$

Puisque $D^\times = U \times_F F_c$, le groupe $D^\times((F_c)_\infty) = \prod_w GL(n, (F_c)_w)$ acquiert maintenant un automorphisme θ issu de l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_c/F)$: celui-ci s'identifie à la conjugaison complexe du groupe $D^\times((F_c)_\infty)$ par rapport au groupe réel $U(F_\infty)$.

Par construction, la représentation $(\tau_c)_\infty$ est θ-stable, *i.e.*, isomorphe à sa transformée par θ; la relation (3.9) implique alors qu'il en est de même pour ξ, ce qu'on peut aussi déduire aisément des formules (3.4)-(3.7). A partir de maintenant, nous *fixons* un opérateur $\theta_\xi : V \to V$ qui entrelace ξ et $\xi \circ \theta$, et tel que $(\theta_\xi)^2 = 1$. L'existence de θ_ξ résulte du lemme de Schur; celui-ci implique aussi que θ_ξ est unique, à multiplication près par ± 1. Soit de même I_θ un endomorphisme de l'espace de $(\tau_c)_\infty$, entrelaçant $(\tau_c)_\infty$ et $(\tau_c)_\infty \circ \theta$, et de carré 1.

Soit H l'espace des vecteurs K-finis de la représentation $(\tau_c)_\infty$. L'opérateur $I_\theta \otimes \theta_\xi$ sur $H \otimes V$ opère alors sur les espaces $H^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}}, K; ((\tau_c)_\infty \otimes \xi))$. On peut définir cette action naturellement par transport de structure *(vide infra)*, mais nous donnons pour l'instant une description explicite. Rappelons que $H^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}}, K; \rho)$, ρ étant un $(\tilde{\mathfrak{g}}, K)$-module, est défini comme la cohomologie d'un complexe de terme général $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet \tilde{\mathfrak{p}}, \rho)$ avec $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{k}}$, $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathrm{Lie}(K) \otimes \mathbf{C}$. Changeant au besoin K par conjugaison, nous pouvons supposer qu'il est stable par la conjugaison complexe θ. Celle-ci opère alors sur K et sur $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Si $\rho = (\tau_c)_\infty \otimes \xi$, on fait alors agir θ sur $\lambda \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^i \tilde{\mathfrak{p}}, \rho)$ par

$$\theta\lambda(X) = (I_\theta \otimes \theta_\xi)\,(\lambda(\theta X)),$$

où $X \in \Lambda^i \tilde{\mathfrak{p}}$. De plus, la théorie de Hodge implique que la différentielle du complexe est nulle [6], donc θ induit trivialement un automorphisme involutif de la cohomologie.

Proposition **3.5.** — *Soit*

$$ep(\theta; (\tau_c)_\infty \otimes \xi) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{trace}(\theta \mid H^i(\tilde{\mathfrak{g}}, K; (\tau_c)_\infty \otimes \xi)).$$

Alors

$$\mathbf{(3.10)} \qquad ep(\theta; (\tau_c)_\infty \otimes \xi) = \varepsilon 2^{(n-1)d}, \qquad \text{avec } \varepsilon = \pm 1.$$

En particulier, cette caractéristique d'Euler-Poincaré tordue n'est pas nulle.

Démonstration. — La représentation $(\tau_c)_\infty$ se décompose en produit tensoriel suivant les places infinies, ainsi que les données ξ, θ_ξ et I_θ. La formule de Künneth pour la $(\tilde{\mathfrak{g}}, K)$-cohomologie montre alors qu'il suffit de vérifier l'égalité analogue à une place. Nous changeons donc de notations : dans cette démonstration soit $G = GL(n, \mathbf{C})$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ le quotient de $\mathrm{Lie}_{\mathbf{R}}(G) \otimes \mathbf{C}$ par son centre déployé, θ l'involution complexe de G par rapport à un groupe unitaire quelconque (mais on supposera que θ préserve

le groupe unitaire standard $K = U(n) \subset G$), π une représentation algébrique régulière θ-stable de G — de sorte que la description (3.3)-(3.6) s'applique à π, et θ_ξ, I_θ définis comme ci-dessus. Il s'agit alors de vérifier, avec des notations analogues :

$$\textbf{(3.11)} \qquad ep(\theta; \pi \otimes \xi) = \varepsilon 2^{n-1}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Puisque le centre déployé $\mathfrak{z}$ agit trivialement sur $\pi \otimes \xi$, nous pouvons même remplacer $\tilde{\mathfrak{g}}$ par $\mathfrak{g}$ dans la démonstration de (3.11) : cela introduit dans la cohomologie, d'après la formule de Künneth [6], un facteur ($\mathbf{C}$ en degré zéro $\oplus$ $\mathbf{C}$ en degré 1) sur lequel θ agit, comme il est facile de le voir, par $(+1)$ en degré 0 et (-1) en degré 1. Finalement on est donc amené à vérifier, pour $\mathfrak{g}$, l'égalité

$$\textbf{(3.12)} \qquad ep(\theta; \pi \otimes \xi) = \varepsilon 2^{n}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Pour cela, on utilise la description de la représentation π (comme $(\mathfrak{g}, K)$-module) et de sa cohomologie donnée par Vogan-Zuckerman [39]. Puisque θ est, à conjugaison intérieure près dans G, la conjugaison par rapport à $U(n)$, et que les automorphismes intérieurs opèrent trivialement dans la cohomologie, nous pouvons supposer que θ est la conjugaison par rapport à $U(n)$. Posons

$$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}_{\mathbf{R}}(G) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbf{C} \cong \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0,$$

le premier facteur étant l'espace tangent holomorphe et le second l'espace tangent antiholomorphe. De façon générale, on notera $\mathfrak{l}_0$ l'algèbre de Lie réelle d'un sous-groupe de Lie réel de G (vu comme groupe réel), et $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbf{C}$,

$$\mathfrak{h}_0 = \text{l'algèbre de Lie du groupe des matrices diagonales de G, donc } \mathfrak{h}_0 \cong \mathbf{C}^n,$$
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathbf{C} \cong \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0 \cong \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n.$$

On identifie alors $\mathfrak{h}_0$ à une sous-algèbre réelle de $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{h}_0 = \{(H, \overline{H}) : H \in \mathbf{C}^n\} \subset \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0$.

On a la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0,$$

$\mathfrak{k}_0 = \mathrm{Lie}_{\mathbf{R}}\, U(n)$, $\mathfrak{p}_0$ étant l'espace des matrices hermitiennes. Alors,

$$\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 = \{(H, H) : H \in \mathbf{R}^n\}$$
$$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \{(iH, -iH) : H \in \mathbf{R}^n\}.$$

Enfin, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0) \otimes \mathbf{C}$ s'identifie à $\{(H, H) : H \in \mathbf{C}^n\}$. La conjugaison θ par rapport à K (*i.e.*, l'involution de Cartan de $GL(n, \mathbf{C})$) y opère bien sûr par $H \mapsto -H$.

Soit alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ une sous-algèbre de Borel θ-stable de $\mathfrak{g}$, de radical unipotent $\mathfrak{n}$. On peut prendre par exemple $\mathfrak{q} = \mathfrak{b}_0 \times {}^t\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_0$ étant la sous-algèbre de Borel des matrices triangulaires supérieures et t la transposition. Soit $\rho(\mathfrak{n})$ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par la demi-somme des racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{n}$: c'est la diffé-

rentielle d'un caractère unitaire de H, sous-groupe diagonal de $G = GL(n, \mathbf{C})$, aussi noté $\rho(\mathfrak{n})$:

$$\rho(\mathfrak{n}) = ((z/\bar{z})^{(n-1)/2}, (z/\bar{z})^{(n-3)/2}, \ldots, (z/\bar{z})^{(1-n)/2}).$$

Supposons π unitairement induite à partir du caractère $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ de H. On suppose que $\chi_i = z^{p_i+(n-1)/2}(\bar{z})^{q_i+(n-1)/2}$, $p_i + q_i = 1 - n$, les p_i étant ordonnés comme en (3.6). Si λ est un caractère unitaire de H, soit $A_q(\lambda)$ le $(\mathfrak{q}, K)$-module défini par induction *cohomologique* à partir de λ [38, 39]. Vogan et Zuckerman donnent alors la traduction entre la classification de Langlands et l'induction cohomologique [39, Th. 6.16]. Il en résulte que

$$\textbf{(3.13)} \qquad \pi \cong A_q(\lambda), \qquad \lambda = \chi\rho(\mathfrak{n})^{-1}.$$

Cela étant, on a, d'après [39, Th. 5.5],

$$H^i(\mathfrak{g}, K; A_q(\lambda) \otimes \xi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{t}}(\Lambda^{i-R}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}), \mathbf{C}),$$

$\mathfrak{t}$ opérant par l'action adjointe sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, donc trivialement : ainsi

$$\textbf{(3.14)} \qquad H^i(\mathfrak{g}, K; A_q(\lambda) \otimes \xi) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^{i-R}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}), \mathbf{C}).$$

Ici $R = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}) = n(n-1)/2$ (1).

Il nous reste à calculer l'action de θ sur le membre de droite de (3.14). Pour cela, nous rappelons la démonstration de (3.14) par Vogan-Zuckerman, utilisant la réalisation de $A_q(\lambda)$ par induction cohomologique. Rappelons que

$$A_q(\lambda) = \mathscr{R}^S \mathbf{C}_\lambda,$$

où $S = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}) = R$, et $\mathscr{R}^i$ désigne le i-ième foncteur dérivé d'un foncteur $\mathscr{R}^0$ envoyant les $(\mathfrak{h}, K_H)$-modules vers les $(\mathfrak{g}, K)$-modules : $K_H = H \cap K$, et $\mathbf{C}_\lambda$ est le $(\mathfrak{h}, K_H)$-module de dimension 1 défini par λ. Le foncteur $\mathscr{R}^0$ est défini par

$$\mathscr{R}^0(W) = \Gamma^0(\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W)$$

où

$$\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(U(\mathfrak{g}), W)_{K_H},$$

Y_{K_H} désignant l'espace des vecteurs K_H-finis d'un $\mathfrak{h}$-module Y; Γ^0 associe au $(\mathfrak{g}, K_H)$-module X le $(\mathfrak{g}, K)$-module formé des vecteurs K-finis de X. Les foncteurs dérivés sont définis à l'aide de résolutions injectives dans la catégorie des $(\mathfrak{h}, K_H)$-modules.

Puisque $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{h}$ sont θ-stables, on en déduit par transport de structure une action naturelle de θ sur $A_q(\lambda)$. (Dans ce cas, il y a donc un choix *naturel* de l'opérateur I_θ défini précédemment.) Par ailleurs, rappelons qu'on a choisi une action θ_ξ de θ sur l'espace de ξ.

On peut identifier $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; A_q(\lambda) \otimes \xi)$ à $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathfrak{g},K}(\tilde{\xi}, A_q(\lambda))$ où $\tilde{\xi}$ désigne le module dual [6, chap. I]. Donné θ_ξ (et l'action naturelle de θ sur $A_q(\lambda)$), on en déduit de nouveau une action naturelle de θ sur les espaces de cohomologie. Par ailleurs, on sait que

(1) Ceci termine la démonstration du lemme 3.14 de [11] dans le cas complexe.

$\mathscr{R}^i \mathbf{C}_\lambda = 0$ pour $i > S$ [38, 39]; d'après [38, Cor. 6.3.4], joint au théorème de Kostant sur la cohomologie de $\mathfrak{u}$ à valeurs dans la représentation rationnelle $\tilde{\xi}$ (cf. *e.g.* [38]), on en déduit un isomorphisme naturel :

$$\textbf{(3.15)} \qquad \mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{h}, K_H}(H^0(\mathfrak{n}, \tilde{\xi}), \mathbf{C}_\lambda) = \mathrm{Ext}^{p+R}(\tilde{\xi}, A_q(\lambda)).$$

On vérifie aisément (cf. [39, Th. 5.5]) que $H^0(\mathfrak{n}, \tilde{\xi})$ est isomorphe à $\mathbf{C}_\lambda$ comme $(\mathfrak{h}, K_H)$-module. Comme auparavant, θ opère naturellement sur $\mathbf{C}_\lambda$ (trivialement) et sur $H^0(\mathfrak{n}, \tilde{\xi})$ (action déduite de θ_ξ); par naturalité de (3.15), ceci est compatible à l'action sur le membre de gauche. L'action induite sur $H^0(\mathfrak{n}, \tilde{\xi}) \cong \mathbf{C}_\lambda$ est l'action triviale à un signe près. Par ailleurs, on sait que $\mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{h}, K_H}(\mathbf{C}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) \cong \Lambda^p(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})^*$, et il est facile de vérifier que l'action de θ sur $\mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{h}, K_H}(\mathbf{C}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda)$ n'est alors autre que son action naturelle, par transport de structure, sur $\Lambda^p(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})^*$. Puisque θ opère par (-1) sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$, il opère par $(-1)^{i-R}$ sur $\Lambda^{i-R}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})$ et enfin

$$ep(\theta, A_q(\lambda) \otimes \xi) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon \binom{n}{i} (-1)^R = \varepsilon(-1)^R 2^n,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ résulte de l'action de θ sur $H^0(\mathfrak{n}, \tilde{\xi})$. Ceci démontre la proposition 3.5.

Remarque **3.6.** — Si θ (opérant sur $\tilde{\xi}$) est normalisé de façon à agir par 1 sur le vecteur de plus haut poids pour $\mathfrak{u}$, on a donc une formule explicite. Par ailleurs, le facteur 2^n devrait être comparé au Th. 5.1 de [1], suivant lequel la représentation $\pi \cong A_q(\lambda)$ de $GL(n, \mathbf{C})$ est le relèvement (par changement de base) de 2^n représentations de *tous* les groupes $U(p, q)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $p + q = n$.

Nous allons maintenant démontrer l'existence d'une fonction φ sur $D^\times(F_{c,\infty})$ dont la trace, tordue par θ, permet d'isoler $(\tau_c)_\infty$ parmi les représentations tempérées θ-invariantes de $D^\times(F_{c,\infty})$. Puisqu'il s'agit d'un problème local, nous considérons plutôt $GL(n, \mathbf{C})$ muni de son involution de Cartan — notée θ — par rapport à $U(n)$. Nous conservons donc les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 3.5. En particulier, $G = GL(n, \mathbf{C})$ et π est une représentation de G obtenue comme l'une des composantes locales de $(\tau_c)_\infty$.

La représentation π est « θ-discrète » au sens de [3, § I.2.3]. Le théorème de Paley-Wiener scalaire pour le groupe non-connexe $G \rtimes \Theta$, où Θ est le groupe $\{1, \theta\}$ et θ opère sur G par l'involution de Cartan, implique alors l'existence d'une fonction $\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbf{C}))$ telle que

$$\textbf{(3.16)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{trace}(\pi(\varphi)\, I_\theta) &= 1 \\ \mathrm{trace}(\rho(\varphi)\, I_\theta) &= 0 \end{aligned}$$

pour toute représentation tempérée θ-stable ρ de $G(\mathbf{C})$ différente de π.

Les opérateurs I_θ sont les opérateurs entrelaçant π (resp. ρ) et $\pi \circ \theta$ (resp. $\rho \circ \theta$), qu'on peut normaliser de sorte que $I_\theta^2 = 1$.

Une telle fonction est appelée « pseudo-coefficient tordu de π pour θ ». Nous renvoyons le lecteur à [12, Cor. à la prop. 4] pour la relation entre pseudo-coefficients

et théorème de Paley-Wiener dans le cas non tordu, et à [3, § I.7] pour un exemple d'un théorème de Paley-Wiener scalaire, mais pour le groupe $G \rtimes \Sigma$, où $\Sigma = \{1, \sigma\}$ et σ est la conjugaison complexe par rapport à $GL(n, \mathbf{R})$.

P. Delorme a obtenu un tel théorème dans le cas de $G \rtimes \Theta$ [13]. Comme sa démonstration n'était pas complètement rédigée à l'époque de la rédaction de cet article, nous donnons ici une preuve différente de l'existence de φ.

Proposition **3.6.** — *Soit* I_θ *un opérateur entrelaçant* π *et* $\pi \circ \theta$, *normalisé par* $(I_\theta)^2 = 1$. *Il existe alors une fonction* $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ *qui est un pseudo-coefficient tordu de* (π, θ), i.e., *qui vérifie les équations* (3.16).

(On rappelle que $C_c^\infty(G, K)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur G, K-finies à droite et à gauche.)

Démonstration. — D'après la démonstration de la proposition 3.5, on sait que l'on a (après choix d'un opérateur d'entrelacement θ_ξ entre ξ et $\xi \circ \theta$)

$$ep(\theta, \pi \otimes \xi) \neq 0.$$

Par ailleurs, si ρ est une représentation *tempérée* de G telle que $H^\bullet(\mathfrak{g}, K, \rho \otimes \xi) \neq 0$, on sait que ρ est de la forme $A_\mathfrak{q}(\lambda')$ où $\mathfrak{q}$ est l'algèbre de Borel θ-stable décrite ci-dessus (cf. [39, Th. 6.16], ainsi que la discussion suivant le Th. 2.5 de cet article; cela s'ensuit aussi des résultats antérieurs d'Enright [14]). La considération du caractère infinitésimal de ρ — qui doit coïncider avec celui de π d'après le lemme de Wigner [6] — montre alors que $\lambda = \lambda'$. Par conséquent,

$$ep(\theta, \rho \otimes \xi) = 0 \tag{3.17}$$

pour toute représentation tempérée $\rho \neq \pi$. La proposition 3.6 est donc impliquée par le résultat suivant :

Proposition **3.7** (Wallach, Labesse [25]). — *Il existe* $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ *telle que*

$$\operatorname{trace}(\rho(\varphi)\, I_\theta) = ep(\theta, \rho \otimes \xi)$$

pour toute représentation irréductible tempérée ρ *de* G.

Nous rappelons la démonstration de Labesse [25], qui étend au cas tordu une idée de Wallach.

Soit $\tilde{G}$ le groupe $G \rtimes \Theta$, $\tilde{K} \subset \tilde{G}$ le sous-groupe compact maximal $K \rtimes \Theta$. Rappelons qu'on a étendu la représentation ξ à $\tilde{K}$ (par l'opérateur θ_ξ), et ρ à $\tilde{G}$ par I_θ. On a alors, d'après le principe d'Euler-Poincaré,

$$\begin{aligned} ep(\theta, \rho \otimes \xi) &= \sum_i (-1)^i \operatorname{trace}(\theta; \operatorname{Hom}_K(\Lambda^i \mathfrak{p}, \rho \otimes \xi)) \\ &= \sum_i (-1)^i \operatorname{trace}(\theta; \operatorname{Hom}_K(\Lambda^i \mathfrak{p} \otimes \tilde{\xi}, \rho)). \end{aligned}$$

Soit V une représentation de dimension finie de K, et (ρ, W) un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible. On a

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = \mathrm{trace}\, \rho(\xi_V\, dk).$$

Dans l'expression de droite, trace ρ est une fonction généralisée sur G, et $\xi_V\, dk$ est le caractère de V, multiplié par la mesure de Haar normalisée de K (ce qui définit une distribution sur K) puis étendu en une distribution K-finie sur G à support dans K.

Supposons maintenant que V est θ-stable et étendu en une représentation de $\tilde{K}$, et que (ρ, W) est étendu de même à $\tilde{G}$. Soit trace $\tilde{\rho}$ le caractère de $\tilde{\rho}$ sur $\tilde{G}$, et $\tilde{\chi}_V$ le caractère de l'extension de V à $\tilde{K}$. On a alors de même, et pour des raisons formelles :

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(\theta; \mathrm{Hom}_K(V, W)) &= \int_{K \times \theta} \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}(g)\, \tilde{\chi}_V(x)\, dx \\ &= \int_K \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}(k, \theta)\, \tilde{\chi}_V(k, \theta)\, dk\end{aligned}$$

où dk est la mesure de Haar normalisée de K, de sorte que $\tilde{\chi}(x)\, dx$ est une distribution sur $G \times \theta$, à support dans $K \times \theta$.

(On peut obtenir cette expression, par exemple, en appliquant la formule précédente à $\tilde{K}$ pour obtenir

$$\dim \mathrm{Hom}_{\tilde{K}}(V, W) = \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}(\tilde{\chi}_V\, \widetilde{dk}).$$

Le membre de droite est une intégrale sur $\tilde{K} = K \cup K \times \theta$, et $\widetilde{dk} = \frac{1}{2} dk$ sur K. Par ailleurs, $\tilde{K}/K \cong \Theta$ opère sur $\mathrm{Hom}_{\tilde{K}}(V, W)$, et, en notant $h^{\pm}$ la dimension de l'espace propre correspondant à ± 1, on a alors, à cause des normalisations différentes des mesures de Haar,

$$2h^+ = \int_K \mathrm{trace}\, \rho\chi_V\, dk + \int_{K \times \theta} \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}\, \tilde{\chi}_V\, dk.$$

Puisque, d'après la formule précédente dans le cas connexe,

$$h^+ + h^- = \int_K \mathrm{trace}\, \rho\chi_V\, dk,$$

on en déduit l'expression cherchée

$$\mathrm{trace}\, \theta = h^+ - h^- = \int_{K \times \theta} \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}\, \tilde{\chi}_V\, dk.)$$

Appliquant ceci à $V_i = \wedge^i \mathfrak{p} \otimes \tilde{\xi}$, on obtient ainsi

$$ep(\theta, \rho \otimes \xi) = \int_K \mathrm{trace}\, \tilde{\rho}(k, \theta)\, \tilde{\chi}_V(k, \theta)\, dk$$

où V est la combinaison linéaire formelle $\sum_i (-1)^i V_i$. La théorie des multiplicateurs d'Arthur [2] nous permet alors, en convolant $\tilde{\chi}_V$ à gauche par un multiplicateur α sur G, d'obtenir une fonction C^∞ à support compact, K-finie, $\tilde{\varphi} = \alpha * \tilde{\chi}_V$ sur $G \times \theta$ telle que

$$\mathrm{trace}\, \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}) = \hat{\alpha}(X_\rho)\, ep(\theta, \rho \otimes \xi),$$

$X_\rho \in \mathfrak{h}^*$ désignant le caractère infinitésimal de ρ et $\hat{\alpha}$ la fonction holomorphe sur $\mathfrak{h}^*$ transformée de Fourier de α [2]. Puisque, d'après le lemme de Wigner [6], $ep(\theta, \rho \otimes \chi) = 0$ si $X_\rho \neq X_{\tilde{\xi}}$, on conclut en choisissant α tel que $\hat{\alpha}(X_{\tilde{\xi}}) = 1$. La fonction $\tilde{\varphi}$ est de la forme $\tilde{\varphi}(g \times \theta) = \varphi(g)$, φ étant le pseudo-coefficient cherché.

3.3. Préliminaires archimédiens : descente

Nous continuons à nous placer dans la situation locale : π est donc une représentation (tempérée, régulière, algébrique) θ-stable de $GL(n, \mathbf{C})$. Nous désignerons maintenant par U un groupe unitaire *réel* : ainsi $U(\mathbf{R}) \cong U(p, q)$, et nous identifierons $U(\mathbf{C})$ à $GL(n, \mathbf{C})$. Puisque nous allons étudier le changement de base pour $\mathbf{C}/\mathbf{R}$, nous notons maintenant $\pi_{\mathbf{C}}$ la représentation π de $GL(n, \mathbf{C})$. On désignera maintenant par θ la conjugaison complexe par rapport à $U(\mathbf{R})$.

Rappelons que $\pi_{\mathbf{C}}$ est associée par induction unitaire aux caractères χ_i de $\mathbf{C}^\times$, avec $\chi_i = z^{p_i + (n-1)/2}(\bar{z})^{q_i + (n-1)/2}$, $p_i + q_i = 1 - n$, $p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$.

La théorie du changement de base réel [8] associe à un L-paquet $\Pi_{\mathbf{R}}$ de représentations tempérées de $U(\mathbf{R})$ une représentation θ-stable de $U(\mathbf{C})$. En général, il n'est pas vrai qu'une représentation θ-stable descende à $U(\mathbf{R})$ [35]. Dans le cas qui nous intéresse, néanmoins :

Lemme **3.8.** — *Il existe un* L-*paquet* $\Pi_{\mathbf{R}}$ *de représentations de* $U(\mathbf{R})$ *qui se relève par changement de base en* $\pi_{\mathbf{C}}$; $\Pi_{\mathbf{R}}$ *est formé de représentations de la série discrète.*

Notons qu'il s'agit d'un cas particulier d'un résultat de J. Johnson [17] : il a montré, dans le cas général du changement de base $\mathbf{C}/\mathbf{R}$, que les représentations *cohomologiques* d'un groupe complexe stables par $Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ descendent toujours au groupe réel (plutôt qu'à l'un des « groupes endoscopiques du changement de base » de D. Shelstad [35]).

Nous vérifions néanmoins ceci pour la représentation $\pi_{\mathbf{C}}$. Rappelons que le groupe dual ${}^L(U/\mathbf{R})$ s'identifie à $GL(n, \mathbf{C}) \rtimes Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, l'élément non trivial du groupe de Galois opérant par $g \mapsto w_0\, {}^t g^{-1}\, w_0$ sur $GL(n, \mathbf{C})$, w_0 étant la matrice définie dans le § 2. Soit $\hat{T} \subset \hat{B} \subset \hat{U} = GL(n, \mathbf{C})$ (notations de Kottwitz [20]) le tore maximal diagonal, contenu dans le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. A la représentation $\pi_{\mathbf{C}}$ est associé un homomorphisme

$$\psi : W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\times \to \hat{T} \subset \hat{U} \cong {}^L(U/\mathbf{C})$$

qui envoie z sur la matrice diagonale $\psi(z) = (\chi_i(z))$. On doit vérifier que ψ s'étend en un homomorphisme $\varphi : W_{\mathbf{R}} \to {}^L(U/\mathbf{R})$ de façon compatible avec les projections sur $Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$; l'homomorphisme φ est dit *discret* s'il paramètre, *via* Langlands [29], un L-paquet de séries discrètes. Soit $\Delta^\vee \subset \hat{T}$ l'ensemble des racines simples de $\hat{B}$. On dit que ψ est *régulier* si $\alpha^\vee \circ \psi \neq 1$ pour tout $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$. Cela étant, ψ s'étend en un homo-

morphisme discret φ si, et seulement si, il satisfait les conditions suivantes ([29]; [8, Prop. 6.5]) :

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{aligned} &\text{(i)} \ \psi(z) = \psi(\bar{z})^{-1} \\ &\text{(ii)} \ \psi \text{ est régulier} \\ &\text{(iii)} \ \psi(-1) = (-1)^{2\rho}. \end{aligned}$$

La condition (iii) a le sens suivant : soit T le groupe complexe dual de $\hat{T}$; ainsi $X^*(T) = X_*(\hat{T})$. On peut identifier T à un tore maximal de U défini sur $\mathbf{C}$; 2ρ est alors la somme des racines de T pour un ordre quelconque, un caractère de T, donc un élément de $X_*(\hat{T})$. Ainsi $(-1)^{2\rho} \in \hat{T}$ est bien défini, et l'on vérifie qu'il ne dépend pas des choix faits.

Vérifions (3.18) pour ψ. La partie (i) résulte de l'expression de χ_i et de la condition $p_i + q_i = 1 - n$. La partie (ii) se déduit de $p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$. A l'aide de la description ci-dessus de $(-1)^{2\rho}$, on vérifie aisément que $(-1)^{2\rho}$ s'identifie à l'élément $((-1)^{n-1}, \ldots, (-1)^{n-1})$ de $\hat{T} \cong \mathbf{C}^n$. Par ailleurs, $\psi(-1) = (\chi_i(-1))$ avec $\chi_i(-1) = |-1|_{\mathbf{C}}^{(n-1)/2}(-1)^{p_i+q_i} = (-1)^{1-n}$; l'assertion (iii) en résulte. Ceci démontre le lemme 3.8.

On sait qu'en général un L-paquet de représentations de la série discrète est formé de toutes les représentations de la série discrète ayant de la cohomologie dans un certain système de coefficients (absolument irréductible). On peut maintenant déterminer le système de coefficients ξ^ν associé au L-paquet $\Pi_{\mathbf{R}}$. Soit en effet $\chi_i = z^{p_i+(n-1)/2}(\bar{z})^{q_i+(n-1)/2}$. Supposons $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$.

On a donc $\psi(z) = z^\mu(\bar{z})^{-\mu}$, avec les notations habituelles de Langlands [29] (cf. aussi [8, Prop. 6.5]), $\mu = (p_1 + (n-1)/2, \ldots, p_n + (n-1)/2)$ étant un élément de $\frac{1}{2}X_*(\hat{T}) \cong \frac{1}{2}\mathbf{Z}^n$. Soit δ la demi-somme des racines de ${}^L T^0$ associées à μ : d'après nos choix, δ est la demi-somme des racines de $(\hat{T}, \hat{B})$, et donc

$$\delta = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, -\frac{n-1}{2}\right).$$

On en déduit que la représentation rationnelle de U (isomorphe à $GL(n)$ sur $\mathbf{C}$) associée à $\Pi_{\mathbf{R}}$ a pour plus haut poids

$$\nu = \mu - \delta = (p_1, p_2 + 1, \ldots, p_n + (n-1)).$$

On notera que $p_1 \geqslant p_2 + 1 \geqslant \ldots \geqslant p_n + (n-1)$, et donc ν est bien un poids dominant de $GL(n, \mathbf{C})$. (Dans [8, Prop. 6.5], ν est en fait obtenu comme le plus haut poids d'une représentation de dimension finie de la forme compacte $U(n)$ de $U(\mathbf{R})$ associée à φ; c'est aussi le système de coefficients associé à $\Pi_{\mathbf{R}}$, puisqu'il a même caractère central et caractère infinitésimal que celui-ci.) En définitive, et d'après le calcul, connu, de la

cohomologie des séries discrètes [6], on a (en posant $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}\, U(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$, et $K \subset U(\mathbf{R})$ étant un sous-groupe compact maximal) :

Lemme **3.9.** — *Si* $\rho \in \Pi_{\mathbf{R}}$, alors

$$H^i(\mathfrak{u}, K, \rho \otimes \xi^\nu) \cong \begin{cases} \mathbf{C} & i = \frac{1}{2} \dim G/K = pq \\ 0 & i \neq pq, \end{cases}$$

ξ^ν *étant la représentation rationnelle, absolument irréductible, de plus haut poids*

$$\nu = (p_1, p_2 + 1, \ldots, p_n + (n-1)).$$

3.4. Correspondance des fonctions d'Euler-Poincaré

Revenons maintenant, toujours avec les hypothèses et les notations de (3.3), à la fonction φ définie par la Prop. 3.6. Rappelons que si δ est un élément de $U(\mathbf{C}) \cong GL(n, \mathbf{C})$ dont la norme $\mathcal{N}\delta$ est semi-simple régulière [8], on peut définir l'intégrale orbitale tordue stable de φ en δ (cf. Shelstad [34, 35]). On la note $O^{st}_{\delta,\theta}(\varphi)$. D'après Shelstad et Bouaziz [34, 7], on sait qu'il existe alors une fonction $f \in C_c^\infty(U(\mathbf{R}), K)$ — K étant maximal compact dans $U(\mathbf{R})$ — telle que, $\gamma \in U(\mathbf{R})$ étant un élément régulier semi-simple, on ait

$$\textbf{(3.19)} \qquad O^{st}_\gamma(f) = \begin{cases} 0 & \gamma \notin \mathcal{N}(U(\mathbf{R})) \\ O^{st}_{\delta,\theta}(\varphi) & \gamma = \mathcal{N}\delta. \end{cases}$$

Ici $\mathcal{N}$ est la correspondance norme entre éléments de $U(\mathbf{C})$ et de $U(\mathbf{R})$; $O^{st}_\gamma(f)$ est l'intégrale orbitale stable de f. La fonction f n'est pas uniquement définie : seules le sont ses intégrales orbitales stables. On dit que f est *associée* à φ.

Si $\rho \in \Pi_{\mathbf{R}}$, soit f_ρ un pseudo-coefficient de ρ [12]. On a alors :

Lemme **3.10.** — *Soit* $f = \frac{1}{N} \sum_{\rho \in \Pi_{\mathbf{R}}} f_\rho$, *où* $N = |\Pi_{\mathbf{R}}|$. *Alors* f *est associée à* φ.

Corollaire **3.11.** — *Si* ρ *est une représentation (admissible de longueur finie)* quelconque *de* $U(\mathbf{R})$, *on a*

$$\mathrm{trace}\, \rho(f) = \frac{(-1)^{pq}}{N} ep(\mathfrak{u}, K; \rho \otimes \xi^\nu).$$

Ici $ep(\ )$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré pour la $(\mathfrak{u}, K)$-cohomologie.

Le corollaire résulte aisément du lemme, puisque les deux membres ont même expression si ρ est *tempérée* : cf. [12, § 5] pour ce genre d'arguments. Démontrons le lemme. Soit $f_0 \in C_c^\infty(U(\mathbf{R}), K)$ une fonction quelconque associée à φ (son existence résulte des articles de Bouaziz et Shelstad). Soit $\bar{\rho}$ un L-paquet quelconque de représentations tempérées de $U(\mathbf{R})$, $\bar{\pi}$ la représentation de $U(\mathbf{C}) = GL(n, \mathbf{C})$ associée. Les

identités entre caractères et caractères tordus pour $\bar{\rho}$ et $\bar{\pi}$ [8] impliquent alors, à l'aide de la formule d'intégration de Weyl, puisque φ et f_0 sont associées, que

$$\operatorname{trace} \bar{\rho}(f_0) = \operatorname{trace}(\bar{\pi}(\varphi)\, \mathrm{I}_\theta)$$

pour une normalisation convenable de I_θ (cf. [7]). D'après les propriétés de φ, ceci implique que $\operatorname{trace} \bar{\rho}(f_0) = 0$ si $\bar{\rho}$ n'est pas le L-paquet $\Pi_{\mathbf{R}}$, et $\sum_{\rho \in \Pi_{\mathbf{R}}} \operatorname{trace} \rho(f_0) = 1$. La fonction f vérifie les mêmes identités. D'après Shelstad [33], ceci implique que les intégrales orbitales *stables* de f et f_0 coïncident.

4. Changement de base : comparaison globale

4.1. Instabilité

Nous revenons maintenant à la situation, et aux notations, globales. En particulier, $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_c, \mathrm{D}, *, \mathrm{U})$ ont le sens décrit en 3.1. Rappelons qu'à partir de la représentation π de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A})$, on a construit une représentation τ_c de $\mathrm{D}^\times(\mathbf{A}_c)$ suivant le diagramme donné au début de (3.1) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}^\times/\mathrm{F}_c \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathrm{GL}(n)/\mathrm{F}_c \arrow[d, dash] \\
\mathrm{U}/\mathrm{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathrm{GL}(n)/\mathrm{F} \arrow[d, dash] \\
\tau \arrow[r, dash] & \pi
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Il s'agit maintenant de décrire la descente de τ_c en une représentation τ de $\mathrm{U}(\mathbf{A})$. Suivant les méthodes usuelles dans la théorie du changement de base abélien, on le fait en comparant la formule des traces de Selberg pour U et la formule des traces pour $\mathrm{D}^\times$, tordue par l'automorphisme θ.

On sait que pour des groupes autres que $\mathrm{GL}(n)$, le changement de base se complique en général à cause des problèmes dus à la L-indiscernabilité : cf. [27, 20, 21] pour le formalisme général concernant la L-indiscernabilité et la notion de groupes endoscopiques, et [31] pour son application au changement de base dans le cas du groupe U(3).

Il faut donc, *a priori*, stabiliser la formule des traces ainsi que la formule des traces tordue. Dans le cas qui nous intéresse, néanmoins, Rapoport, Zink, Rogawski et Kottwitz ont trouvé que la formule des traces pour le groupe U se stabilisait de façon particulièrement simple; en particulier, les groupes endoscopiques n'apparaissent pas : la formule des traces est « automatiquement stable ».

Kottwitz et Shelstad ont aussi annoncé la stabilisation de la formule des traces tordue dans le cas le plus général. Pour le changement de base, et sous certaines hypo-

thèses simplificatrices, cela nous a été décrit par Kottwitz et se trouve dans [9, § 6]. Lorsqu'on applique ces résultats au cas de $D^\times$ munie de l'automorphisme θ, on se rend compte, cependant, que la formule des traces tordue pour $(D^\times, \theta)$ n'est *pas* stable. Expliquons ce phénomène, en nous basant sur la stabilisation décrite dans [9, § 6]. Soit $T \subset U$ un F-tore maximal elliptique, et soit C le cocentre de U, isomorphe au tore algébrique (1) $(\mathbf{F}_c^\times)_1$ sur F dont le groupe des F-points est $(F_c^\times)_1 = \mathrm{Ker}(N_{F_c/F} : F_c \to F)$. Alors la stabilisation de la formule des traces tordue pour $(D^\times, \theta)$, pour les termes réguliers appartenant à T, est gouvernée par un groupe [9, Def. 6.3]

$$A_\theta(T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma)/\mathrm{Im}\, \pi_0(\hat{\tilde{C}}^\Gamma).$$

Ici $\tilde{C}$ est le F-groupe déduit de C/F_c par restriction des scalaires; $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ opère naturellement sur les groupes duaux. Les notations sont celles de Kottwitz, cf. [9] ainsi que la section 4.3 (2). Il y a une application naturelle, Γ-équivariante, de $\hat{\tilde{C}}$ vers $\hat{T}$, qui se factorise en

$$\hat{\tilde{C}} \to \hat{C} \to \hat{T}$$

[9, § 6.2].

Cela étant, puisque $\tilde{C} = \mathrm{Res}_{F_c/F}(\mathbf{F}_{c,1}^\times)$, on vérifie aisément que $\hat{\tilde{C}}^\Gamma$ est connexe. Donc $A_\theta(T) = \pi_0(\tilde{T}^\Gamma)$.

On vérifie aussi (cf. § 4.2) que $\pi_0(\hat{T}^\Gamma)$ est isomorphe, par l'application naturelle, à $\pi_0(\hat{C}^\Gamma)$, mais celui-ci, et donc $A_\theta(T)$, est égal à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Cette situation pourrait se décrire aisément à l'aide de la théorie des « correction characters for base change » de Shelstad [35, 36]; en fait, il y a *un* seul groupe endoscopique pour le changement de base $(D^\times, \theta)$ — *i.e.*, le L-groupe ${}^LU$ de U/F — mais deux plongements distincts ${}^LU \to {}^L(\tilde{D}^\times)$, $\sim$ désignant toujours la restriction des scalaires : l'un est « stable » et l'autre « instable », associé à l'élément non trivial des groupes $A_\theta(T)$, et celui-là peut être décrit par la torsion de représentations de $D^\times(\mathbf{A}_c)$ par un caractère, venant du cocentre, et décrit par Shelstad [36].

Dans cet article, nous n'aurons pas à considérer le terme instable de la formule des traces tordue : nous allons vérifier, à l'aide d'un argument dû à Kottwitz, qu'il s'annule sur les fonctions d'Euler-Poincaré construites au § 3.

4.2. La formule des traces pour U

Nous commençons par stabiliser, en paraphrasant Kottwitz [24], le terme elliptique régulier de la formule des traces pour U. Nous utilisons une forme simplifiée de la

(1) De façon générale, si E/F est une algèbre étale, nous noterons ici $\mathbf{E}^\times$ *le* F-*groupe* déduit de $E^\times$. Ceci s'applique à F ($\mathbf{F}^\times = G_m/F$) et à F_c.

(2) On a écrit $A_\theta(T)$ au lieu de A(T), car nous aurons aussi besoin de l'analogue non tordu dans la section 4.2.

stabilisation, due à Kottwitz et exposée dans [9, § 6]. Soit T un tore elliptique de U sur F. Rappelons [9, § 6] que

$$\mathbf{(4.1)} \qquad A(T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma)/\mathrm{Im}\,\pi_0(\hat{C}^\Gamma)$$

où $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, et $C \cong \mathbf{F}_{c,1}^\times$ est, comme dans le § 4.1, le cocentre de U. Soit $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

Lemme **4.1.** — *On a* $\pi_0(\hat{C}^\Gamma) \cong \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \cong \mu_2$, $A(T) = \{1\}$.

Démonstration. — Le calcul de $\pi_0(\hat{C}^\Gamma)$ est immédiat. Considérons l'application naturelle, Γ-équivariante, $\hat{C} \hookrightarrow \hat{T}$, et soit $\Gamma_c = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F_c)$. Puisque $T \times_F F_c$ est un tore de $D^\times/F_c$, on vérifie que $\hat{T}^{\Gamma_c} \cong \hat{C}$. On en déduit que $\hat{C}^\Gamma \to \hat{T}^\Gamma$ est un isomorphisme, q.e.d.

Notons maintenant que le principe de Hasse est vérifié par le groupe U, comme il résulte aisément du lemme suivant, indiqué par le rapporteur :

Lemme **4.2.** — *Soit* F *un corps de nombres,* G *un groupe réductif connexe sur* F *tel qu'il existe une extension cyclique* F′ *de* F *ayant la propriété que* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ *opère trivialement sur* $Z(\hat{G})$. *Alors* G *vérifie le principe de Hasse pour* H^1, i.e.,

$$\ker^1(F, G) = \{1\}.$$

(Les notations sont celles de Kottwitz [20]; on aurait pu bien sûr ramener directement le principe de Hasse pour U au cas de son groupe dérivé, mais il a paru intéressant d'inclure ce résultat.)

Démonstration. — D'après Kottwitz [20], $\ker^1(F, G) = \ker^1(F, Z(\hat{G}))^D$. Puisque F′ agit trivialement, on a $H^1(F', Z(\hat{G})) = \mathrm{Hom}(\Gamma_{F'}, Z(\hat{G}))$. La même identité est vraie localement, et la théorie du corps de classes montre alors que $\ker^1(F', Z(\hat{G})) = \{1\}$. On en déduit immédiatement que $\ker^1(F, Z(\hat{G})) = \ker^1(F'/F, Z(\hat{G}))$. Celui-ci est trivial puisque $\mathrm{Gal}(F'/F) \to \mathrm{Gal}(F'_v/F_v)$ est surjectif pour certaines places v, d'après le théorème de Čebotarev.

Soit $f \in C_c^\infty(U(\mathbf{A}))$. Soit $r(f)$ l'opérateur défini par convolution à droite sur $L^2(U(F)\backslash U(\mathbf{A}))$. Il est traçable et

$$\mathbf{(4.2)} \qquad \mathrm{trace}\, r(f) = \sum_\tau \mathrm{trace}\, \tau(f) = \sum_\gamma v(U_\gamma)\, O_\gamma(f),$$

où $\{\tau\}$ désigne une décomposition de $L^2(U(F)\backslash U(\mathbf{A}))$ en irréductibles; on utilise les mesures de Tamagawa sur $U(\mathbf{A})$ et $U_\gamma(\mathbf{A})$ — U_γ étant le centralisateur de $\gamma \in U(F)$ — pour définir trace $r(f)$ et $O_\gamma(f)$; le volume $v(U_\gamma) = \mathrm{vol}(U_\gamma(F)\backslash U_\gamma(\mathbf{A}))$ est donc un nombre de Tamagawa; enfin, γ décrit les classes de conjugaison de U(F).

Nous considérons le terme (elliptique) régulier de (4.2) :

$$\mathbf{(4.3)} \qquad I = \Sigma v(U_\gamma)\, O_\gamma(f),$$

où γ parcourt l'ensemble des éléments (elliptiques) réguliers de U(F) modulo conjugaison.

On le stabilise suivant la méthode de Kottwitz [21, § 9], en tenant compte des propriétés simplificatrices du groupe U (lemmes 4.1 et 4.2). Grâce à elles, le calcul est celui de [9, § 6]; le résultat est

$$\mathbf{(4.4)} \qquad I = \Sigma v(T) \mid \ker^1(F, T) \mid O_\gamma^{st}(f),$$

où γ parcourt l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $U_0(F)$ modulo conjugaison stable. Dans (4.4), U_0 est la forme intérieure quasi déployée de U; la conjugaison stable sur $U_0(F)$ est, bien sur, la conjugaison stable globale ($\equiv$ conjugaison dans $U_0(\bar{F})$). On a noté T le centralisateur de γ. Enfin, $O_\gamma^{st}(f)$ est l'intégrale orbitale stable de f en γ :

$$\mathbf{(4.5)} \qquad O_\gamma^{st}(f) = \Sigma O_\delta(f);$$

la somme porte sur les $\delta \in U(\mathbf{A})$, stablement conjugués à γ à toutes les places (notation : $\delta \underset{st}{\sim} \gamma$), modulo conjugaison dans $U(\mathbf{A})$.

On a, bien sur, $O_\gamma^{st}(f) = 0$ si l'élément $\gamma \in U_0(F)$ n'est pas conjugué (stablement à toutes les places) à un élément de $U(\mathbf{A})$.

4.3. La formule des traces tordue pour $D^\times$

Nous stabilisons maintenant la formule des traces tordue pour le F-groupe $\tilde{U} = \mathrm{Res}_{F_c/F}(U/F_c) = \mathrm{Res}_{F_c/F} D^\times$. Ainsi $\tilde{U}(F) = D^\times(F_c)$, et la conjugaison par rapport à F définie par le choix de la F-forme U sera notée θ : c'est un F-automorphisme de $\tilde{U}$.

Soit R la représentation de $U(\mathbf{A}_c) = \tilde{U}(\mathbf{A})$ sur $L^2(U(F_c)\backslash U(\mathbf{A}_c))$, et I_θ l'opérateur donné par l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(F_c/F)$. On a alors, pour $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{U}(\mathbf{A}))$,

$$\mathbf{(4.6)} \qquad \mathrm{trace}(R(\varphi)\, I_\theta) = \sum_{\tau_c} \mathrm{trace}(\tau_c(\varphi)\, I_\theta) = \sum_\eta v(\tilde{U}_{\eta,\theta})\, O_{\eta,\theta}(\varphi).$$

La première somme porte sur les représentations τ_c de $\tilde{U}(\mathbf{A})$ fixées par θ; $O_{\eta,\theta}(\varphi)$ est l'intégrale orbitale tordue de φ en $\eta \in \tilde{U}(F)$ et η parcourt les classes de θ-conjugaison dans $\tilde{U}(F)$. Le groupe $\tilde{U}_{\eta,\theta}$ est le centralisateur tordu de η [9], et les mesures sont normalisées comme dans le cas non tordu (§ 4.2).

Rappelons que si $\eta \in \tilde{U}(F)$, $\eta.{}^\theta\eta \in \tilde{U}(F) = U(F_c)$ est stablement conjugué [18] à un élément γ de $U_0(F)$, unique à conjugaison stable près. Le centralisateur tordu de η dans $\tilde{U}(F)$ est alors forme intérieure du centralisateur de γ dans $U_0(F)$ [18]. En particulier, si l'on suppose η *θ-régulier* — *i.e.*, $\eta^\theta\,\eta$ (semi-simple) régulier — ce centralisateur tordu est isomorphe à un F-tore maximal de $U_0(F)$, centralisateur de γ. Puisque $\tilde{U} = \mathrm{Res}_{F_c/F} D^\times$ est anisotrope, on voit donc que γ est elliptique.

Considérons alors le terme régulier de (4.6) :

$$\mathbf{(4.7)} \qquad I_\theta = \Sigma v(\tilde{U}_{\eta,\theta})\, O_{\eta,\theta}(\varphi);$$

la somme porte sur les $\eta \in \tilde{U}(F)$ de norme $\eta.{}^\theta\eta$ régulière, modulo conjugaison dans $\tilde{U}(F)$.

On lui applique la stabilisation de [9, § 6.2]. D'après le lemme de Shapiro, $\widetilde{U} = \mathrm{Res}_{F_c/F} D^\times$ vérifie le principe de Hasse pour H^1. Par conséquent, les hypothèses de [9 : Assumptions 6.1] sont vérifiées, à ceci près que le groupe U n'est pas quasi déployé.

Rappelons que $A_\theta(T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma)/\mathrm{Im}\, \pi_0(\widehat{\widetilde{C}}^\Gamma)$, T étant un F-tore maximal elliptique de U.

Lemme **4.3.** — $A_\theta(T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Ceci résulte immédiatement du lemme 4.1, puisque $\widetilde{C} = \mathrm{Res}_{F_c/F}(C/F_c) = \mathbf{F}_c^\times$ est un tore induit, et donc $\pi_0(\widehat{\widetilde{C}}^\Gamma) = \{1\}$.

Rappelons maintenant une partie de [9, § 6]. Soit $\gamma \in U_0(F)$ un élément semi-simple régulier, T son centralisateur, un tore maximal de U_0 sur F. Soit $\eta \in \widetilde{U}(\mathbf{A})$ un élément tel que la norme locale $\mathcal{N}(\eta_v)$ (cf. [18] : $\mathcal{N}(\eta_v)$ est une classe de conjugaison stable dans $U_0(F_v)$) soit égale à la classe de conjugaison stable de $\gamma \in U_0(F_v)$ pour toute place v de F. On associe à η un élément $\mathrm{obs}(\eta) \in H^1(F, T(\bar{\mathbf{A}})/T(\bar{F}))$.

Nous ne répétons pas la construction de $\mathrm{obs}(\eta)$ [9, § 6.2], nous nous contentons de remarquer qu'elle ne nécessite pas le fait, supposé dans [9], que le groupe — ici U — est quasi déployé. L'invariant $\mathrm{obs}(\eta)$ a la propriété suivante :

Lemme **4.4** ([9, lemme 6.2]). — $\mathrm{obs}(\eta) = 1$ *si et seulement si* η *est* θ*-conjugué dans* $\widetilde{U}(\mathbf{A})$ *à un élément de* $\widetilde{U}(F)$.

Dans [9], on exhibe un accouplement naturel entre $H^1(F, T(\bar{\mathbf{A}})/T(\bar{F}))$ et $A_\theta(T)$; il est ici à valeurs dans $\{\pm 1\}$. De plus $\mathrm{obs}(\eta) = 1$ si et seulement si $\langle \mathrm{obs}(\eta), \kappa \rangle = 1$ pour tout $\kappa \in A_\theta(T)$.

Considérons alors l'expression (4.7). A l'aide du principe de Hasse pour $\widetilde{U}$, on la réécrit ([9, (6.13)]) sous la forme

$$\Sigma v(\widetilde{U}_{\eta,\theta}) \mid \ker^1(F, \widetilde{U}_{\eta,\theta}) \mid O_{\eta,\theta}(\varphi), \tag{4.8}$$

la somme portant sur les $\eta \in \widetilde{U}(F)$ de norme régulière, modulo $\widetilde{U}(\mathbf{A})$. La somme porte maintenant sur les classes d'éléments de $\widetilde{U}(F)$ pour la θ-conjugaison locale à toutes les places, plutôt que la θ-conjugaison globale.

A l'aide de la propriété caractéristique de $\mathrm{obs}(\eta)$ — lemme 4.4 et alinéa suivant — on réécrit alors (4.8) sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma \in U_0(F) \\ \gamma \text{ ell. reg} \\ \text{mod conj. stable}}} v(T) \mid \ker^1(F, T) \mid. \\ &\cdot \sum_{\kappa \in A_\theta(T)} \sum_{\substack{\eta \in \widetilde{U}(\mathbf{A}) \\ \mathcal{N}\eta = \gamma \\ \text{mod } \widetilde{U}(\mathbf{A})}} \langle \mathrm{obs}(\eta), \kappa \rangle\, O_{\eta,\theta}(\varphi). \end{aligned} \tag{4.9}$$

On a utilisé le fait que $|A_\theta(T)| = 2$, T désignant le centralisateur de γ. Dans la dernière somme, $\delta \in \tilde{U}(\mathbf{A})$ est pris, bien sûr, modulo θ-conjugaison par $\tilde{U}(\mathbf{A})$. On renvoie à [9, § 6.2] pour la dérivation de (4.9).

Supposons maintenant que $\varphi = \bigotimes_v \varphi_v$ est un produit de fonctions locales.

Lemme **4.5.** — *Soit γ elliptique régulier dans $U_0(F)$. Supposons qu'en au moins une place infinie v_0 de f, φ_{v_0} est une fonction d'Euler-Poincaré tordue pour θ (§ 3). Alors, si $\kappa \neq 1$,*

$$\textbf{(4.10)} \qquad \sum \langle \operatorname{obs}(\eta), \kappa \rangle \, O_{\eta,\theta}(\varphi) = 0,$$

la somme portant sur les $\eta \in \tilde{U}(\mathbf{A})$ de norme $\mathcal{N}\eta = \gamma$, modulo $\tilde{U}(\mathbf{A})$.

Démonstration. — On imite un argument de Kottwitz [9, lemme 6.5]. Rappelons que $\tilde{U}(F_{v_0}) = D^\times(F_{c,v_0}) \cong GL(n, \mathbf{C})$. On se donne une représentation rationnelle, θ-stable, ξ_{v_0} de $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C})$ (§ 3.2), et φ_{v_0} est une fonction d'Euler-Poincaré tordue associée, c'est-à-dire un pseudo-coefficient tordu (Prop. 3.6) de l'unique représentation tempérée π de $GL(n, \mathbf{C})$ telle que $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes \xi_{v_0}) \neq 0$ (notations du § 3.2).

Supposons, c'est le cas le plus simple, que ξ_{v_0} est triviale. Considérons le membre de gauche de (4.10). Si la somme portant sur η est vide, le résultat est trivial. Sinon, il existe $\eta^0 \in \tilde{U}(\mathbf{A})$ tel que $\mathcal{N}\eta^0 = \gamma$. L'argument de [9, lemme 6.5] permet de réécrire (4.10) sous la forme

$$\textbf{(4.11)} \qquad \langle \operatorname{obs} \eta^0, \kappa \rangle \prod_v \sum_{x_v \in \mathcal{D}_\sigma(I_v/F_v)} \langle x_v, \kappa \rangle \, O_{x_v \cdot \eta_v^0, \theta}(\varphi_v).$$

Le produit porte sur toutes les places v de F. Le tore I_v est le centralisateur tordu de η_v^0 dans $\tilde{U}(F_v)$. Le groupe

$$\mathcal{D}_\sigma(I_v/F_v) = \operatorname{Ker}(H^1(F_v, I_v) \to H^1(F_v, \tilde{U}))$$

mesure la conjugaison tordue, modulo conjugaison stable, pour les éléments θ-réguliers de I_v. L'accouplement $\langle x_v, \kappa \rangle$ est déduit de

$$H^1(F_v, I_v) \to H^1(F_v, T) \to H^1(F, T(\bar{\mathbf{A}})/T(\bar{F})),$$

la première flèche étant déduite du fait que I_v est canoniquement isomorphe au centralisateur T de $\mathcal{N}\eta_v = \delta$.

Considérons le facteur de (4.11) relatif à v_0. D'après le lemme 3.10, les intégrales orbitales tordues de φ_{v_0} sont nulles aux points θ-réguliers dont la norme n'est pas elliptique; aux points de normes elliptiques, elles sont égales aux intégrales orbitales de la somme de pseudo-coefficients du L-paquet de séries discrètes de $U(F_{v_0})$ ayant de la cohomologie à coefficients constants : elles sont constantes. Le facteur correspondant est donc zéro ou

$$\textbf{(4.12)} \qquad \sum_{x_{v_0}} \langle x_{v_0}, \kappa \rangle.$$

Par ailleurs, puisque $\widetilde{U}(F_{v_0}) = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\, GL(n)$, on a $H^1(F_{v_0}, \widetilde{U}) = \{ 1 \}$ d'après le lemme de Shapiro. Donc la somme porte sur $H^1(F_{v_0}, I_{v_0})$, et l'on peut supposer que I_{v_0} est isomorphe au tore elliptique T_{v_0} de $U(F_{v_0})$. D'après Kottwitz, $H^1(F_{v_0}, T_{v_0})$ est dual à $\hat{T}^{\Gamma_0} \cong (\mu_2)^n$, $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(\bar{F}_{v_0}/F_{v_0})$; on a $A_\theta(T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \cong \mu_2$. L'application $A_\theta(T) \to \hat{T}^{\Gamma_0}$ est l'injection diagonale, et l'on en déduit que la somme (4.12) est nulle.

Si ξ_{v_0} n'est pas triviale, les intégrales orbitales tordues de φ_{v_0} aux points η de norme elliptique régulière sont égales, à un signe près, à la valeur du caractère de la représentation rationnelle de $U(F_{v_0})$ en laquelle descend ξ_{v_0}, évalué en $\mathcal{N}(\eta)$. En particulier elles sont invariantes par θ-conjugaison stable, et le reste de l'argument est identique.

D'après le lemme 4.5, on peut enfin réécrire (4.9) sous la forme :

$$\textbf{(4.13)} \qquad I_\theta = \frac{1}{2} \Sigma v(T) \mid \ker^1(F, T) \mid O^{st}_\gamma(\varphi)$$

où γ parcourt l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $U_0(F)$ modulo conjugaison stable, et où l'on a posé

$$\textbf{(4.14)} \qquad O^{st}_\gamma(\varphi) = \Sigma O_{\eta, \theta}(\varphi),$$

la somme portant sur les $\eta \in \widetilde{U}(\mathbf{A})$ de norme $\mathcal{N}\eta = \gamma$, modulo $\widetilde{U}(\mathbf{A})$.

$O^{st}_\gamma(\varphi)$ est donc une intégrale orbitale tordue *stable*, sur $\widetilde{U}(\mathbf{A})$, associée à γ. L'égalité $\mathcal{N}\eta = \gamma$ est une égalité de classes stables locales à toutes les places.

4.4. Descente

Nous comparons maintenant les formules (4.4) et (4.13) pour obtenir une identité de formules des traces, les fonctions φ et f sur $\widetilde{U}(\mathbf{A})$ et $U(\mathbf{A})$ étant associées.

Rappelons que si v est une place de F, les fonctions $\varphi_v = \bigotimes_{w \mid v} \varphi_w$ sur $U(F_v \otimes F_c)$ et f_v sur $U(F_v)$ sont associées si, pour $\gamma \in U(F_v)$ régulier,

$$\textbf{(4.15 (i))} \qquad O^{st}_\gamma(f) = \begin{cases} 0 & \gamma \notin \mathcal{N}\widetilde{U}(F_v) \\ O^{st}_{\delta, \theta}(\varphi) & \gamma = \mathcal{N}\,\delta. \end{cases}$$

Comme le groupe U n'est pas quasi-déployé, on doit de plus rajouter la condition

$$\textbf{(4.15 (ii))} \qquad O^{st}_{\delta, \theta}(\varphi) = 0$$

si $\delta \in \widetilde{U}(F_v)$ est θ-régulier et $\mathcal{N}\,\delta$ ne provient pas de $U(F_v)$.

(Rappelons que $\mathcal{N}$ définit *a priori* des classes de conjugaison stables pour $U_0(F_v)$: on leur impose de provenir d'éléments de $U(F_v)$.)

On remarque que la condition (ii) ne concerne que les places archimédiennes, puisque les seules places finies où U n'est pas quasi-déployé sont des places de F décomposées dans F_c. Par conséquent, (ii) est automatiquement vérifié si les fonctions φ_v,

pour $v \mid \infty$, sont des fonctions d'Euler-Poincaré tordues (voir la démonstration du lemme 4.4).

On a alors, d'après (4.2), (4.4), (4.6) et (4.13),

Lemme **4.6.** — *Soit* $\varphi = \bigotimes_w \varphi_w$, $f = \bigotimes f_v$ *des fonctions dans* $C_c^\infty(U(\mathbf{A}_c))$, $C_c^\infty(U(\mathbf{A}))$, *telles que* φ_v *et* f_v *soient associées à toute place* v *de* F. *Supposons de plus que les composantes archimédiennes de* φ *sont des fonctions d'Euler-Poincaré tordues, et qu'il existe une place* v_0 *de* F *telle que*

$$O_{f_{v_0}}(\gamma) = 0 \quad \textit{si } \gamma \textit{ n'est pas elliptique régulier.}$$
$$O_{\varphi_{v_0}\cdot\theta}(\delta) = 0 \quad \textit{si } \mathcal{N}\delta \textit{ n'est pas elliptique régulier.}$$

Alors $\operatorname{trace}(R(\varphi)\, I_\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} r(f)$.

Nous construisons maintenant des fonctions associées φ et f. Soit S l'ensemble des places de F en lesquelles le groupe U est *ramifié* (places archimédiennes, ou non archimédiennes telles que $U \times_F F_v$ ne soit pas un groupe non ramifié au sens de la théorie p-adique, ou en lesquelles la représentation τ_c est ramifiée (*i.e.*, n'a pas de vecteur fixe par $\tilde{U}(\mathcal{O}_v)$).

Si $v \notin S$, on suppose que $\varphi_v = \bigotimes_{w \mid v} \varphi_w$ est dans l'algèbre de Hecke de $\tilde{U}(\mathcal{O}_v)$, et que $f_v = b\varphi_v$ est l'image de φ par changement de base; φ_v et f_v sont alors associées ([9], à compléter par [3, § I.5] quand v n'est pas inerte dans F_c).

Soit $S = S_f \amalg S_\infty$ la partition de S en places finies ou infinies. Si $v \in S_\infty$, la représentation $\tau_{c,v}$ a de la cohomologie à valeurs dans un système de coefficients approprié (§ 3), et l'on prend φ_v égale à une fonction d'Euler-Poincaré tordue correspondante. La fonction f_v est alors la fonction d'Euler-Poincaré sur $U(F_v)$ associée (lemme 3.10).

Considérons maintenant les places de S_f : ce sont donc les places finies ramifiées pour U ou π. La théorie complète du changement de base stable pour $(U, F_c/F)$ suppose connue la comparaison des intégrales orbitales stables de fonctions C^∞ arbitraires (φ_v, f_v) sur $U(F_c \otimes F_v)$ et $U(F_v)$. Comme on le sait, c'est un problème portant sur les « germes de Shalika »; il n'est complètement résolu que pour le groupe $GL(n)$ [3] ou pour le groupe U(3) [31]. Pour obtenir des résultats plus faibles, il suffit de considérer des fonctions dont les intégrales orbitales s'annulent aux points singuliers.

Notons que pour obtenir des représentations λ-adiques associées à la représentation originale π, nous aurions pu supposer l'extension F_c déployée à toutes les places ramifiées de π, ce qui rendrait ce problème de comparaison trivial. Il paraît intéressant de démontrer le résultat plus fort où les restrictions sur F_c ne portent que sur v_0 (et v_1 s'il y a lieu). On va voir que ce n'est pas plus difficile. On a décrit ce point, qui était passé sous silence dans [9], en détail.

Soit donc v une place inerte de F. Pour simplifier, écrivons $\tilde{U}$ pour le groupe $\tilde{U}(F_v)$.

Nous allons rappeler quelques faits simples concernant la θ-conjugaison, cf. [9, après le Th. 2.8].

Soit $\delta \in \widetilde{U}$ un élément θ-régulier. Soit T_0 son θ-centralisateur, défini par

$$x \in T_0 \Leftrightarrow x^{-1}\,\delta^\theta\, x = \delta.$$

C'est un tore de dimension n sur F. La variété $T = T_0\,\delta \subset \widetilde{U}$ est un *tore θ-maximal* de $\widetilde{U}$ [9]. Soit $T_{\theta-\mathrm{reg}}$ l'ensemble des points θ-réguliers de T.

Lemme **4.7.** — *Si $t \in T_{\theta-\mathrm{reg}}$, le θ-centralisateur de t est T_0 et $T = T_0\, t$.*

Démonstration. — Puisque $t = t_0\,\delta$, on a $x^{-1}\,t^\theta\, x = x^{-1}\,t_0\, x . x^{-1}\,\delta^\theta\, x$; donc $x^{-1}\,t^\theta\, x = t$ si $x \in T_0$. Comme t est θ-régulier, son θ-centralisateur est un tore de dimension n [9], donc c'est T_0. On a $T = T_0\,\delta = T_0\, t$ puisque $t \in T_0\,\delta$.

L'application

$$\textbf{(4.16)} \qquad \begin{aligned} T_{\theta-\mathrm{reg}} \times (T_0\backslash\widetilde{U}) &\to \widetilde{U} \\ (t, x) &\mapsto x^{-1}\,t^\theta\, x \end{aligned}$$

est une immersion ouverte [9]. Par ailleurs, soit $t, t' \in T_{\theta-\mathrm{reg}}$ et supposons que $t' = x^{-1}\,t^\theta\, x$, $x \in \widetilde{U}$. Par transport de structure, cela implique que x conjugue les θ-centralisateurs de t et t'. Donc $x \in N_{\widetilde{U}}(T_0)$, et $x^{-1}\,T^\theta\, x = x^{-1}\,T_0\, t^\theta\, x = x^{-1}\,T_0\, xt' = T_0\, t' = T$ d'après le lemme 4.7. Soit $\widetilde{W} = T_0\backslash N_\theta(T)$ le quotient par T_0 du normalisateur de T pour le θ-conjugaison : c'est un groupe d'automorphismes de T.

Lemme **4.8.** — *Les éléments $t, t' \in T_{\theta-\mathrm{reg}}$ ont des images par* (4.16) *θ-conjuguées si et seulement si t, t' sont conjugués par $\widetilde{W}$. Le groupe $\widetilde{W}$ est fini et opère sans point fixe sur $T_{\theta-\mathrm{reg}}$.*

Démonstration. — On vient de démontrer la première assertion. Par ailleurs, soit $t, t' \in T$ des éléments θ-conjugués. Posant $Nx = x^\theta\, x$, et $t' = t_0\, t$, $t_0 \in T_0$, on a $Nt' = t_0^2\, Nt = (Nt)\, t_0^2$, d'après un calcul facile. L'élément $Nt \in \widetilde{U}(F_v) = U(F_{c,v})$ est stablement conjugué à l'élément $\mathcal{N}t \in U(F_v)$, et celui-ci est régulier. Si t, t' sont θ-conjugués, on en déduit que (Nt) et $(Nt)\, t_0^2$ doivent être stablement conjugués, t_0^2 étant dans le tore centralisant Nt. Cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour t_0, donc $\widetilde{W}$ est fini. Enfin, si $t = x^{-1}\,t^\theta\, x$, le calcul précédant le lemme montre que $x \in N_{\widetilde{U}}(T_0)$ et donc, pour tout $t' = t_0\, t \in T$, on a $x^{-1}\,t'^\theta\, x = x^{-1}\,t_0\, t^\theta\, x = t_0 . x^{-1}\,t^\theta\, x = t'$.

D'après le lemme 4.8, l'application (4.16) réalise un revêtement de fibre $\widetilde{W}$ de son image par $T_{\theta-\mathrm{reg}} \times (T_0\backslash\widetilde{U})$. L'application qui associe à $\varphi \in C_c^\infty(\widetilde{U})$ ses intégrales tordues est donnée par l'intégration sur la composante $(T_0\backslash\widetilde{U})$. On en déduit le lemme suivant, α étant la fonction sur $T_{\theta-\mathrm{reg}}$ donnée par les intégrales tordues :

Lemme **4.9.** — *On a $\alpha \in C_c^\infty(T_{\theta-\mathrm{reg}})^{\widetilde{W}}$, et toute fonction de cet espace peut être obtenue comme l'intégrale orbitale d'une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\widetilde{U}_{\theta-\mathrm{reg}})$.*

Il est maintenant facile de se convaincre que l'on peut trouver des fonctions associées sur $\widetilde{U}$ et U, à support dans les éléments réguliers. Il nous suffira de connaître le fait suivant :

Lemme **4.10.** — *Soit* $\delta \in \widetilde{U}_{\theta-\mathrm{reg}}$, *et supposons que* $\mathcal{N}\delta$ *provient de* U : *il existe donc* $\gamma \in U$ *stablement conjugué à* $\mathcal{N}\delta$.

Alors, pour tout voisinage assez petit V *de* δ *dans* $\widetilde{U}$, *et toute fonction* $\varphi \in C_c^\infty(V)$, *il existe* $f \in C_c^\infty(U)$ *associée à* φ.

Donnons une esquisse de démonstration. On associe à φ la fonction $\alpha \in C_c^\infty(T_{\theta-\mathrm{reg}})^{\widetilde{W}}$. Elle donne les *intégrales orbitales* (tordues) de φ, non les intégrales orbitales stables. Pour V assez petit, φ est à support dans l'image de (4.16), et donc ses intégrales orbitales sur les autres tores θ-maximaux (à conjugaison près) s'annulent. Soit $\overline{\widetilde{W}}$ le groupe fini, analogue à $\widetilde{W}$, paramétrant la conjugaison *stable* à l'intérieur de T. Plus précisément, on a $\widetilde{W} = T_0 \backslash N_\theta(T)$, $N_\theta(T) = \{ g \in \widetilde{U}(F) : g^{-1} T^\theta g = T \}$. On pose $\overline{\widetilde{W}} = T_0(\bar{F}) \backslash \bar{N}_\theta(T)$, où $\bar{N}_\theta(T) = \{ g \in \widetilde{U}(\bar{F}) : g^{-1} T^\theta g = T$, et $t \mapsto g^{-1} t^\theta g : T \to T$ est défini sur $F \}$. Les intégrales orbitales stables de φ s'obtiennent en remplaçant α par $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha}(t) = \sum_{w \in \widetilde{W} \backslash \overline{\widetilde{W}}} \alpha(t^w).$$

Choisissons un tore B de U associé par l'application norme à T : c'est le centralisateur d'un représentant $\gamma \in U(F)$ de la norme $\mathcal{N}\delta$. On a $B \cong T_0$ sur F, et $\mathcal{N}(t_0 \delta) \equiv t_0^2 \gamma$ (l'identité est une identité de classes stables, et l'on a utilisé l'isomorphisme canonique $B \cong T_0$).

D'après Kottwitz [18], les éléments $t, t' \in T_{\theta-\mathrm{reg}}$ sont stablement θ-conjugués si, et seulement si, $\mathcal{N}t$ et $\mathcal{N}t'$ (dont on peut prendre des représentants dans B) sont stablement conjugués. Si $\overline{W}$ est l'analogue non tordu de $\overline{\widetilde{W}}$, paramétrant la trace de la conjugaison stable sur B, la fonction $\bar{\alpha}$ est de la forme $\bar{\alpha}(t) = \bar{\beta}(\mathcal{N}t)$, $t \in T$, $\bar{\beta}$ étant une fonction $\overline{W}$ — invariante sur B, à support voisin de $\gamma = \mathcal{N}\delta$. Imitant les arguments précédents, on voit que l'on peut trouver $f \in C_c^\infty(U)$, à support dans $B_{\mathrm{reg}}^U = \{ x B_{\mathrm{reg}} x^{-1} : x \in U \}$, dont l'intégrale orbitale stable est $\bar{\beta}$ sur tous les éléments des conjugués stables de B; on peut même supposer que les intégrales orbitales stables de f sur les éléments qui ne sont pas des normes sont nulles car l'application norme est ouverte (cf. [9, lemme 6.7]). Ceci démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant compléter la description des fonctions φ et f. Aux places finies inertes $v \in S$, on prendra φ_v et f_v associées, à support régulier, suivant le lemme 4.7. Enfin, aux places finies déployées $v \in S$, on prendra $\varphi_v = \varphi_{w'} \otimes \varphi_{w''}$, $f_v = \varphi_{w'} * \varphi_{w''}$ (produit de convolution) si w', w'' sont les deux places de F_c divisant v. Le calcul habituel montre que φ_v et f_v sont associées [3].

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat fondamental de descente de $U(\mathbf{A}_c)$ à $U(\mathbf{A})$.

Notons que pour toute place infinie v de F, on peut définir une représentation rationnelle ξ_v de $U(F_v)$ de la façon suivante : appliquant les constructions des §§ 3.3-3.4 à τ_v (obtenue à partir de $\tau_{c,w}$, $w \mid v$ par changement de base), on obtient un système de coefficients ξ_v pour U_v.

Proposition **4.11.** — *Il existe une représentation automorphe irréductible τ de $U(\mathbf{A})$, sous-module de $L^2(U(F)\backslash U(\mathbf{A}))$ et vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Si $v \notin S$, la représentation τ_v est non ramifiée et associée par changement de base à $(\tau_c)_v$.*

(ii) *Si $v \mid \infty$, on a*

$$ep(\mathfrak{g}_v, K_v; \tau_v \otimes \xi_v) \neq 0.$$

Remarque **4.12.** — On verra au § 5 que pour v réelle, τ_v est en fait une représentation de la série discrète associée par changement de base à τ. On pourrait démontrer ceci directement à l'aide de la formule des traces, si l'on disposait de la comparaison d'intégrales orbitales stables (tordues) de fonctions C_c^∞ sur $U(F_v)$ et $U(F_{c,v})$.

Démonstration. — Cela résulte, de la façon habituelle, de la comparaison des formules des traces. Choisissons des fonctions $\varphi = \varphi_S \otimes \varphi^S$, $f = f_S \otimes f^S$ vérifiant les conditions précisées ci-dessus. On suppose de plus qu'en une place de S — par exemple la place v_0 (cf. hypothèse 3.1) — φ_{v_0} et f_{v_0} sont à support dans les éléments (θ)-elliptiques réguliers. Les fonctions φ et f étant associées, on a, d'après le lemme 4.6,

$$\textbf{(4.17)} \qquad \operatorname{trace}(R(\varphi)\, I_\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} r(f).$$

Ecrivons

$$\textbf{(4.18)} \qquad \operatorname{trace}(R(\varphi)\, I_\theta) = \sum_\eta \operatorname{trace}(\eta(\varphi)\, I_\theta).$$

La somme porte sur les représentations η de $U(\mathbf{A}_c)$ qui apparaissent dans R et sont fixées par θ. Puisque les fonctions φ_v $(v \mid \infty)$ sont des pseudo-coefficients tordus, il résulte du § 3.2 que le caractère infinitésimal d'une représentation η apparaissant dans (4.18) est fixé. Par conséquent, si la ramification de φ est fixée, le membre de droite de (4.18) ne contient qu'un nombre fini de termes (cf. *e.g.* [3, § I.4]).

Fixant φ_S, et faisant varier la fonction φ^S dans l'algèbre de Hecke

$$\mathscr{H}_c^S = \bigotimes_{v \notin S} \bigotimes_{w \mid v} \mathscr{H}(U(F_{c,w}), U(\mathcal{O}_{c,w})),$$

on a l'expression suivante pour (4.18) :

$$\textbf{(4.19)} \qquad \sum_\eta \operatorname{trace}(\eta_S(\varphi_S)\, I_{\theta,S}) \prod_{v \notin S} \prod_{w \mid v} \varphi_w^\vee(t_{\eta,w}).$$

On a désigné par $\varphi_w \mapsto \varphi_w^\vee(t_{\eta,w})$ le caractère de $\mathscr{H}_w = \mathscr{H}(U(F_{c,w}), U(\mathcal{O}_{c,w}))$ donné par l'action de $\varphi_w \in \mathscr{H}_w$ sur le vecteur non ramifié de η_w. (Bien sur, cela s'exprime de la façon habituelle comme la valeur de la transformée de Satake de φ_w sur une classe de conjugaison du L-groupe, mais cela n'est pas nécessaire à notre argument.) La somme

est finie pour φ_S fixée, indépendamment de φ^S, et le théorème de multiplicité 1 fort pour $D^\times$ (§ 3.1) implique que les caractères de $\mathscr{H}_c^S$ figurant dans (4.18) sont distincts. L'opérateur $I_{\theta,S}$ est obtenu par projection sur $\eta_S \simeq \eta^{K^S}$, où $K^S = \prod_{\substack{v \notin S \\ w \mid v}} G(\mathcal{O}_{c,w})$ de l'opérateur I_θ.

De façon analogue, d'après les propriétés des fonctions f_v $(v \mid \infty)$, on a

$$\text{(4.20)} \qquad \operatorname{trace}(r(f)) = \sum_\rho \operatorname{trace}(\rho_S(f_S)) \prod_{v \notin S} f_v^S(t_{\rho,v}).$$

Les notations sont similaires. Par ailleurs, pour tout $v \notin S$, on a l'homomorphisme de changement de base

$$b : \mathscr{H}_{c,v} = \bigotimes_{w \mid v} \mathscr{H}_{c,w} \to \mathscr{H}_v = \mathscr{H}(U(F_v), U(\mathcal{O}_v)).$$

Puisque $f_v = b\varphi_v$ pour $v \notin S$, ceci se réécrit

$$\text{(4.21)} \qquad \sum_\rho \operatorname{trace} \rho_S(f_S) \prod_{v \notin S} b\varphi_v^\vee(t_{\rho,v}).$$

Considérons le terme de (4.19) donné par τ_c. Ecrivons $I_{\theta,S} = \bigotimes_{v \in S} I_{\theta,v}$. On sait que si $w \mid \infty$, $\operatorname{trace}(\tau_{c,w}(\varphi_w)\, I_{\theta,w}) \neq 0$ puisque φ_w est un coefficient tordu associé à la représentation θ-discrète $\tau_{c,w}$ (§ 3.2, § 4.3). Il reste à choisir φ_w pour w finie divisant S, de façon à ce que le terme analogue soit non nul. On peut le faire, d'après le lemme 4.10, tout en prenant $\varphi_v = \bigotimes_{v \mid w} \varphi_w$ à support régulier : cela résulte du fait que le caractère tordu de $\tau_{c,v}$ est une fonction non nulle sur l'ensemble régulier.

D'après (4.17), (4.19) et (4.21), on voit alors qu'il doit y avoir une représentation τ de $G(\mathbf{A})$, sous-module irréductible de r, non ramifiée pour $v \notin S$, et telle que $\operatorname{trace} \tau_S(f_S) \neq 0$ et $b\varphi_v^\vee(t_{\tau,v}) = \prod_{w \mid v} \varphi_w^\vee(t_{\tau_c,w})$. La seconde condition implique la partie (i) de la proposition, et la première appliquée à S_∞ implique (ii) puisque f_v est une fonction d'Euler-Poincaré pour $v \in S_\infty$.

5. Représentations galoisiennes

5.1. Résultats : corps totalement réels

Nous associons maintenant à la représentation π une représentation galoisienne (plus précisément, un système compatible de représentations). A partir de la proposition 4.8, c'est une conséquence facile des travaux de Kottwitz [22, 23, 24].

Nous énonçons d'abord le résultat. Rappelons les données définies au § 2 (F, F_c, D, $*$, U). L'algèbre D est définie sur F_c. Soit I l'ensemble des plongements complexes de F_c; l'ensemble des places archimédiennes de F ou F_c s'identifie au quotient J de I par $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$.

Rappelons que le groupe unitaire associé à $(D, *)$ est de type $(n-1, 1)$ en une place $j_0 \in J$, et de type $(n, 0)$ en toute place $j \neq j_0$. La construction du § 2 ne précise

pas la *signature* de l'involution $*$ de D_w aux différentes places infinies. Pour fixer les idées, nous supposerons en fait :

Hypothèse **5.1.** — (i) *Si* $j \in J$, $j \neq j_0$, *l'involution* $*$ *induite sur* $D(F_w)$ *est positive (w est la place de* F_c *déduite de j).*

(ii) *Si* $j = j_0$, *l'involution* $*$ *en* $D(F_{w_0})$ *est semblable, pour un isomorphisme* $D(F_{w_0}) \overset{\approx}{\to} M_n(\mathbf{C})$, *à* $X \mapsto I^t \overline{X} I$, *où*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cette hypothèse n'est pas nécessaire : on laisse au lecteur les changements évidents, dans les calculs qui suivent, nécessaires si elle n'est pas vérifiée.

Soit Σ un type CM pour le corps F_c, c'est-à-dire un sous-ensemble de I tel que $I = \Sigma \cup {}^c\Sigma$ (union disjointe); c désigne dorénavant la conjugaison complexe sur $\mathbf{C}$ ou $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$. Soit R le corps reflex de (F_c, Σ). (Rappelons que c'est le sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$ engendré par les traces partielles des éléments de F_c obtenues en sommant sur les plongements $F_c \to \overline{\mathbf{Q}}$ appartenant à Σ.) En particulier, R est un corps CM contenu dans la clôture galoisienne de F_c dans $\overline{\mathbf{Q}}$ (R est donc contenu dans $\mathbf{C}$).

Fixons $\iota_0 \in \Sigma$ tel que $j_0 = \{\iota_0, {}^c\iota_0\}$. Le choix de ι_0 identifie F_c à un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Définition **5.2.** — *Le* corps reflex *(de la donnée* $(F, F_c, D, *, \Sigma)$*) est le corps* $E = F_c R \subset \mathbf{C}$. *En particulier, si* F_c *(ou* F*) est une extension* galoisienne *de* $\mathbf{Q}$, $E = F_c$.

Nous considérons maintenant la représentation π de $GL(n, \mathbf{A}_F)$ vérifiant l'hypothèse 3.1. Soit v une place de F telle que π_v soit non ramifiée. Le principe de fonctorialité associe alors à π_v une représentation non ramifiée

$$r_v : W_{F_v} \to GL(n, \mathbf{C}); \tag{5.1}$$

si $t_{\pi, v}$ est la matrice de Hecke de π en v, on a

$$r_v(\mathscr{F}_v) = t_{\pi, v} \tag{5.2}$$

où $\mathscr{F}_v$ est un élément de Frobenius géométrique de W_{F_v}. (On utilise donc la correspondance de Langlands entre représentations de W_{F_v} et représentations non ramifiées, mais avec la normalisation de la loi de réciprocité locale envoyant $\mathscr{F}_v$ sur une uniformisante ϖ_v.)

Soit [11] r_v^{T} la représentation non ramifiée de W_{F_v} qui vérifie

$$r_v^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_v) = q_v^{(1-n)/2}\, t_{\pi, v}, \tag{5.3}$$

q_v étant le cardinal du corps résiduel. On sait alors, π étant algébrique régulière, que le polynôme caractéristique de $r_v^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_v)$ est défini sur un corps de nombres $L(\pi)$ indépendant de v [11, Prop. 3.16, lemme 3.5].

Si w est une place de E divisant v on peut alors considérer la matrice $r_v^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)$, ou pour simplifier $r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)$.

Théorème **5.3.** — *Soit π une représentation cuspidale, algébrique, régulière et autoduale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}})$ *telle que π_{v_0} (et π_{v_1} si $2 \mid n$, $4 \nmid n$, $2 \nmid d$) appartienne à la série discrète, v_0 (et $v_1 \neq v_0$) étant des places finies de* F *déployées dans* F_c. *Soit Σ un type* CM *pour* F_c, *et* $\mathrm{E} = \mathrm{RF}_c$ *le corps reflex associé au choix d'un plongement infini ι_0 de* F_c *et de Σ. Il existe alors*

(i) *un corps de nombres* $\mathrm{L} \subset \mathbf{C}$,

(ii) *un ensemble fini* S *de nombres premiers,*

(iii) *un entier* $a = a(\pi, \mathrm{F}_c, \mathrm{U}, \Sigma) > 0$,

(iv) *un système compatible* $\mathrm{W} = (\mathrm{W}_\lambda, r_\lambda)$ *de représentations λ-adiques de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{E}}/\mathrm{E})$, λ *décrivant les places de* L,

ayant les propriétés suivantes : W *est pur de poids* $n - 1$, *les représentations* W_λ *sont non ramifiées en dehors des places divisant* S *et, pour $p \notin \mathrm{S}$ et $\lambda \nmid p$, on a, pour toute place w de* E *divisant p,*

$$\operatorname{trace} r_\lambda(\mathscr{F}_w^m) = a \operatorname{trace} r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w^m)\, q_w^{m(n-1)}$$

pour tout $m \geqslant 0$.

Le théorème est plus fort dans le cas où l'extension E de F_c est *galoisienne* et *résoluble* — en particulier si F est extension galoisienne de $\mathbf{Q}$. Dans ce cas, il existe [3] une représentation $\pi_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{F} \to \mathrm{E}}\, \pi_{\mathrm{F}}$ de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{E}})$ (automorphe, induite de cuspidale au sens de [3]) dont les matrices de Hecke normalisées $t_{\pi_{\mathrm{E}}, w}^{\mathrm{T}}$ sont égales à conjugaison près, aux $r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)$. On a alors :

Corollaire **5.4.1.** — *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème* 5.3, *et supposant* E/F_c *résoluble, on a*

$$\operatorname{trace} r_\lambda(\mathscr{F}_w^m) = a \operatorname{trace}(t_{\pi_{\mathrm{E}}, w}^{\mathrm{T}})\, q_w^{m(n-1)}.$$

Au contraire, une version *affaiblie* des conclusions du théorème 5.3 est vraie dans le « mauvais » cas ($2 \mid n$, $4 \nmid n$, $2 \nmid d$). En effet, nous pouvons choisir une extension quadratique totalement réelle F′/F. Le degré de F′ est alors pair. Supposons seulement π_{v_0} discrète en *une* place v_0.

On peut choisir l'extension F′/F de façon que la représentation $\rho_{\mathrm{F}_{v_0} \to \mathrm{F}'_{v_0}}\, \pi_{v_0}$ soit discrète (par exemple, en choisissant F′ déployé à la place v_0). Le théorème 5.3 s'applique alors à la représentation $\pi'_{\mathrm{F}} = \rho_{\mathrm{F} \to \mathrm{F}'}\, \pi$. Par conséquent :

Corollaire **5.4.2.** — ($2 \mid n$, $4 \nmid n$, $2 \nmid d$). *Si la représentation π de* $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}})$ *a une composante déployée en* une *place finie, il existe une extension* $\mathrm{E}' = \mathrm{R}'\,\mathrm{F}'_c$ *de* F *telle qu'on ait*

$$\operatorname{trace} r_\lambda(\mathscr{F}_w^m) = a \operatorname{trace} r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w^m)\, q_w^{m(n-1)}$$

pour un système compatible de représentations λ-adiques $(\mathrm{W}_\lambda, r_\lambda)$, *$\lambda$ décrivant les places d'un corps de nombres* L, *et pour presque toute place w de* E′.

Le corps E′ est, bien sûr, construit comme précédemment à partir d'une extension CM de F′. Notons enfin que, si F est extension galoisienne de $\mathbf{Q}$, le changement de base à E′ est disponible et l'on a le résultat plus précis du Cor. 5.4.1.

Le théorème 5.3 et ses corollaires impliquent évidemment la conjecture de Ramanujan, à presque toutes les places, pour π.

Théorème **5.5.** — *Soit π une représentation cuspidale, algébrique régulière et autoduale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_F)$ *telle que π_{v_0} appartienne à la série discrète pour une place finie v_0. Alors, il existe un ensemble fini* S *de nombres premiers tel que, si v ne divise pas* S, π_v *soit tempérée.*

En effet, par pureté, les valeurs propres de $r_\lambda(\mathscr{F}_w)$ sont de longueur $q_w^{(n-1)/2}$, celles de $r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)$ sont de longueur $q_w^{(1-n)/2}$, et donc celles de $r(\mathscr{F}_w)$ sont de longueur 1.

5.2. Démonstration : corps totalement réels

Nous démontrons maintenant le théorème 5.3, suivant Kottwitz [24].

Nous noterons G_0 le groupe $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(\mathrm{U})$, et G le $\mathbf{Q}$-groupe défini par

$$\mathrm{G}(\mathrm{R}) = \{ x \in \mathrm{D} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathrm{R} : xx^* \in \mathrm{R}^\times \} \tag{5.4}$$

pour une $\mathbf{Q}$-algèbre R; c'est donc une extension de $\mathbf{G}_m$ par G_0.

A partir de maintenant nous écrirons (à la différence du § 4) $\mathbf{A}$ pour $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$; on note $\mathbf{A}_F$, $\mathbf{A}_{F_c}$ les adèles de F et F_c.

Pour définir une variété de Shimura à partir de G, on doit se fixer un homomorphisme

$$h : \mathbf{S} \to \mathrm{G}_{\mathbf{R}}$$

défini sur $\mathbf{R}$, où $\mathbf{S} = \mathrm{R}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\, \mathbf{G}_m$. On le fait de la façon suivante. Rappelons que l'on a choisi un type CM Σ pour F_c; on fixe alors un isomorphisme

$$\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \prod_{\iota \in \Sigma} \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$$

compatible avec l'isomorphisme $F_c \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \prod_\iota \mathbf{C}$ donné par Σ et tel que l'involution $*$ s'écrive, sur la composante indexée par ι, $\mathrm{X} \mapsto {}^t\overline{\mathrm{X}}$ $(\iota \neq \iota_0)$ et $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{I}^t\, \overline{\mathrm{X}}\mathrm{I}$, I comme dans l'hypothèse 5.1 $(\iota = \iota_0)$. Soit alors h_0 le morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$h_0 : \mathbf{C} \to \mathrm{D} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

défini par

$$h_{0,\iota}(z) = z_n \quad \text{pour } \iota \neq \iota_0$$

$$h_{0,\iota_0}(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z}_{n-1} \end{pmatrix},$$

z_n désignant la matrice scalaire de degré n associée à $z \in \mathbf{C}$. L'application $x \mapsto h_0(i)^{-1}\, x^*\, h_0(i)$ est alors une involution positive de $\mathrm{D} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Si l'on pose $h(z) = h_0(z)^{-1}$,

$h|_{\mathbf{C}^\times}$ définit un homomorphisme $\mathbf{S} \to G/\mathbf{R}$. Si K_∞ est le centralisateur de h dans $G(\mathbf{R})$, $G(\mathbf{R})/K_\infty$ est un espace hermitien symétrique; pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$, $S_K = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_\mathbf{Q})/K_\infty K$ est une variété de Shimura.

Le corps de définition des modèles canoniques de S_K est décrit par Kottwitz [24, § 1]. Soit $p(\iota)$ la fonction de $\iota \in I$ définie par

$$\begin{array}{ll} p = 1 & \iota = \iota_0 \\ p = n-1 & \iota = c\iota_0 \\ p = n & \iota \in \Sigma - \{\iota_0\} \\ p = 0 & \iota \in c(\Sigma - \{\iota_0\}). \end{array}$$

Le corps reflex $E \subset \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$ est le corps fixé par le stabilisateur de la fonction $p(\iota)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ fixe p, on doit avoir, puisque $n > 2$, $\sigma\iota_0 = \iota_0$, $\sigma\Sigma = \Sigma$. Donc $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/(\iota_0 F_c) R)$. Puisque F_c est CM, on a $c(\iota F_c) = \iota F_c$ pour tout $\iota \in \Sigma$, et l'on en déduit qu'un tel σ, réciproquement, fixe p. Donc $E = F_c R$, F_c étant identifié maintenant à $\iota_0 F_c$.

Le théorème de Kottwitz [24, Th. 1] exprime l'identité entre une certaine fonction L associée à une représentation automorphe τ de $G(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$, et la fonction L de Hasse-Weil (sur E) associée à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ sur une partie de la cohomologie de $S_K(\overline{\mathbf{Q}})$ découpée par l'action des opérateurs de Hecke. Plutôt que comme une identité de fonctions L, on l'exprime comme un isomorphisme de représentations des groupes de Weil à presque toutes les places.

Soit donc τ une représentation de $G(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$ qui intervient dans

$$L^2(G(\mathbf{Q})\, A_G\backslash G(\mathbf{A}_\mathbf{Q})) := \mathscr{A}_G,$$

A_G étant comme d'habitude la composante déployée du centre de $G(\mathbf{R})$.

Supposons que

$$\mathbf{(5.5)} \qquad H^i(\mathfrak{g}, K_\infty; \tau_\infty \otimes \xi_\mathbf{C}) \neq 0$$

($\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G(\mathbf{R})$) pour un i tel que $0 \leqslant i \leqslant \dim(G(\mathbf{R})/K_\infty)$ et une représentation rationnelle irréductible $\xi_\mathbf{C}$ de $G(\mathbf{C})$. La représentation $\tau_f = \bigotimes_{p \neq \infty} \tau_p$ est alors définie sur un corps de nombres (*e.g.* [11, Prop. 3.16]). Choisissons un corps de nombres $L \subset \mathbf{C}$ tel que τ_f et $\xi_\mathbf{C}$ sont définis sur L : on choisit ξ sur L tel que $\xi_\mathbf{C} = \xi \otimes_L \mathbf{C}$. Si $K \subset G(\mathbf{A}_f)$, soit $\mathscr{H}_L = \mathscr{H}_L(K)$ l'algèbre de Hecke, à coefficients dans L, de $G(\mathbf{A}_f)$ par rapport à K. Soit

$$\mathbf{(5.6)} \qquad W^i(\tau_f) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_L}(\tau_f^K, H^i(S_K(\mathbf{C}), \mathscr{L})),$$

$\mathscr{L}$ étant le système local (en L-espaces vectoriels) sur $S_K(\mathbf{C})$ déduit de ξ : c'est un espace vectoriel sur L. Si λ est une place finie de L, $W^i(\tau_f)_\lambda = W^i(\tau_f) \otimes_L L_\lambda$ reçoit une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$.

Par ailleurs, d'après Matsushima (cf. [6]),

$$W^i(\tau_f) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{\tau'_\infty} \mathrm{Hom}(\tau'_\infty \otimes \tau_f^K, \mathscr{A}_G^K) \otimes H^i(\mathfrak{g}, K_\infty; \tau'_\infty \otimes \xi_\mathbf{C}).$$

L'espace Hom est l'espace des homomorphismes pour l'action de $G(\mathbf{R}) \times \mathscr{H}$, où $\mathscr{H} = \mathscr{H}_L \otimes \mathbf{C}$. La représentation τ'_∞ décrit les classes d'isomorphisme de représentations de $G(\mathbf{R})$. En particulier, sous l'hypothèse (5.5), $W^i(\tau_f) \otimes \mathbf{C} \neq 0$ pour K assez petit.

La classification de Langlands associe à toute composante non ramifiée τ_p de τ un homomorphisme

$$\varphi(\tau_p) : W_{\mathbf{Q}_p} \to {}^L(G_{\mathbf{Q}_p}).$$

Si w est une place de E divisant p, on a par restriction

$$\varphi_w(\tau_p) : W_{\mathbf{E}_w} \to {}^L(G_{\mathbf{E}_w}).$$

Par ailleurs Langlands [28] associe à la donnée $h : \mathbf{S} \to G/\mathbf{R}$ une représentation r de ${}^LG$. Elle est décrite par Kottwitz [24, § 1] dans le cas qui nous intéresse. Il est facile de traduire sa construction pour notre choix particulier de h : nous donnons seulement le résultat.

Soit $\hat{G}$ la composante neutre du L-groupe de G. D'après la description de G, il est clair que $G(\mathbf{C})$ s'identifie à

$$G(\mathbf{C}) \cong \{(g_\iota \in GL(n, \mathbf{C}))_{\iota \in I} : g_\iota^t\, g_{\bar\iota} = z \in \mathbf{C}^\times\}$$

où z ne dépend pas de ι. Par conséquent

$$G(\mathbf{C}) \cong \prod_{\iota \in \Sigma \cong J} GL(n, \mathbf{C}) \times GL(1, \mathbf{C}), \tag{5.7}$$

$$\hat{G} \cong GL(n, \mathbf{C})^J \times GL(1, \mathbf{C}). \tag{5.8}$$

De h, on déduit par restriction à la première composante de $\mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ un homomorphisme $\mu : \mathbf{G}_m \to G$, que l'on peut considérer, à conjugaison près, comme défini sur $\mathbf{C}$ ou sur tout corps k tel que $G \times_{\mathbf{Q}} k$ est quasi-déployé [19, lemme 1.1.3]. On considère alors la représentation r de $\hat{G}$ de poids extrémal $-\mu$; ici on a choisi un tore maximal $\hat{T} \subset \hat{G}$, et $\mu : \mathbf{G}_m \to G$ définit par dualité de Langlands un caractère de $\hat{T}$.

Dans notre cas, dans la description (5.7), on trouve que

$$\mu : z \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & \\ & 1_{n-1} \end{pmatrix}, z_n, \ldots, z_n, z\right)$$

où x_m désigne la matrice scalaire d'ordre m et de coefficients x; dualement, on trouve, en prenant pour $\hat{T}$ le produit des tores diagonaux :

$$\mu : (\mathbf{C}^\times)^n \times \prod_{J - \{j_0\}} (\mathbf{C}^\times)^n \times \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times$$

$$\left(\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, (s_j)_{j \in J - \{j_0\}}, z\right) \mapsto t_1\Big(\prod_{j \neq j_0} \det s_j\Big)\, z.$$

On en déduit que r est la représentation de $\hat{G}$:

$$r = St^* \otimes \bigotimes_{j \neq j_0} \det{}^{-1} \otimes z^{-1} \tag{5.9}$$

suivant la décomposition (5.8), St^* étant la représentation duale de la représentation standard de $GL(n, \mathbf{C})$. D'après Kottwitz [19, 24], r s'étend en une représentation de ${}^L G_{E_w}$, W_{E_w} opérant trivialement sur l'espace du poids extrémal. Kottwitz définit alors $P(\tau_p, E_w)$ comme le polynôme caractéristique de

$$[(r \circ \varphi_w(\tau_p))\ (\mathscr{F}_w)]\ q_w^{(n-1)/2}. \tag{5.10}$$

Par ailleurs, $h : \mathbf{S} \to G$ détermine un morphisme poids $\mathbf{G}_m \to Z_G$; composé avec ξ, on obtient alors d'après le lemme de Schur un morphisme $\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$, de la forme $x \mapsto x^m$ pour un poids m (le poids du système de coefficients associé à ξ). Avec les choix précisés ci-dessous pour τ (et donc ξ), on vérifiera que $m = 0$.

D'après Kottwitz [24, Th. 1], on peut alors écrire, sous l'hypothèse (5.5) et pour tout p en dehors d'un ensemble fini S,

$$P(\tau_p, E_w) = \prod_{i=0}^{2(n-1)} P^i(\tau_p, E_w). \tag{5.11}$$

Les P^i sont des polynômes normalisés à coefficients dans L, dont toute racine α est de poids i (*i.e.*, $|\alpha| = q_w^{i/2}$ pour tout plongement $\mathbf{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbf{C}$); seuls les P^i de degré pair, ou seuls ceux de degré impair, interviennent. La représentation $W^i(\tau_f)_\lambda$ est, pour tout $p \notin S_\mathbf{Q}$ et $\lambda \nmid p$, une représentation non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\bar{E}_w/E_w)$ et le polynôme caractéristique de $\mathscr{F}_w$ y est égal à

$$P(\mathscr{F}_w, W^i) = (P^i(\tau_p, E_w))^a, \tag{5.12}$$

où $a = a(\tau_f)$ est un entier positif ne dépendant que de τ_f.

Considérons maintenant la représentation τ de $U(\mathbf{A}_F) = G_0(\mathbf{A})$ obtenue dans la proposition 4.11. Nous la noterons désormais τ_0. Nous allons l'étendre en une représentation automorphe τ de $G(\mathbf{A})$ à laquelle nous appliquons les résultats de Kottwitz.

Nous utilisons une construction de Labesse et Schwermer [26], qu'il sera utile de décrire avec quelque soin. Considérons les $\mathbf{Q}$-groupes G et G_0, liés par la suite exacte

$$1 \to G_0 \to G \to \mathbf{G}_m \to 1, \tag{5.13}$$

et soit S la composante déployée de G sur $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire le tore déployé central maximal de G. On a $S \cong \mathbf{G}_m$; dans la description (5.4) de G, on a $S(R) = R^\times \subset (D \otimes_\mathbf{Q} R)^\times$. Le groupe $S(\mathbf{R})^+$ (composante neutre) est le groupe noté A_G plus haut. Notons ψ l'homomorphisme $G \to \mathbf{G}_m$, donné dans (5.4) par $x \mapsto xx^*$. On voit que si $j : S \cong \mathbf{G}_m \hookrightarrow G$, $\psi \circ j$ est l'application carré de $\mathbf{G}_m$.

Par conséquent, le groupe $M = G_0 \cap S$ s'identifie à $\mu_2 \subset \mathbf{G}_m$. On a donc la suite exacte :

$$1 \to \mu_2 \to G_0 \times S \to G \to 1. \tag{5.14}$$

Notons ω le caractère central de la représentation originale π de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathbf{F}})$, $\omega_c = \omega \circ \mathrm{N}_{\mathbf{F}_c/\mathbf{F}}$ celui de π_c ou τ_c, ω_{τ_0} celui de τ_0 : ω_{τ_0} est donc un caractère de $\mathrm{F}_{c,1}^{\times}\backslash\mathbf{A}_{\mathbf{F}_c,1}$ qui vérifie l'identité $\omega_{\tau_0}(z/{}^{\sigma}z) = \omega_c(z)$ pour $z \in \mathbf{A}_{\mathbf{F}_c}^{\times}$. Par restriction, ω_{τ_0} donne un caractère ε de $\mathrm{M}(\mathbf{A}) \cong \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{A})$, invariant par $\mathrm{M}(\mathbf{Q})$.

Notons que ω_{τ_0} (et donc ε) sont triviaux aux places finies. En effet, π étant autoduale, on a $\omega^2 = 1$, donc ω_c est trivial aux places infinies de F_c puisque celles-ci sont complexes. L'application $z \mapsto z/\bar{z}$ ($z \in \mathbf{C}$) étant surjective, la composante archimédienne de ω_{τ_0} est triviale.

Soit alors χ un caractère de $\mathrm{S}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{A}^{\times}$, invariant par $\mathrm{S}(\mathbf{Q})\,\mathbf{R}^{\times}$ — un caractère de Dirichlet — et coïncidant avec ε sur $\mathrm{M}(\mathbf{A})$.

Lemme **5.6.** — *Il existe une représentation irréductible admissible τ de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$, apparaissant dans $\mathscr{A}_{\mathrm{G}}$, de caractère central χ sous $\mathrm{S}(\mathbf{A})$, et telle que $\tau|_{\mathrm{G}_0(\mathbf{A})}$ soit une somme discrète de représentations admissibles de $\mathrm{G}_0(\mathbf{A})$, contenant la représentation τ_0.*

La démonstration utilisera les lemmes préliminaires suivants. Soit

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{S}(\mathbf{A})\,\mathrm{G}(\mathbf{Q})\,\mathrm{G}_0(\mathbf{A}). \tag{5.15}$$

Lemme **5.7.** — *G_1 est un sous-groupe fermé de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$, et $\mathrm{G}_1\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A})$ est compact.*

Démonstration. — $\mathrm{G}(\mathbf{Q})$ normalise $\mathrm{G}_0(\mathbf{A})$, donc G_1 est un sous-groupe. Soit $g_n = s_n\,\gamma_n\,h_n \in \mathrm{G}_1$, écrit suivant la décomposition (5.15), et supposons que $g_n \to g \in \mathrm{G}(\mathbf{A})$. On a alors $|\,\psi(g_n)\,| = |\,\psi(s_n)\,| \to |\,\psi(g)\,|$, la valeur absolue étant la norme d'idèle. On en déduit que s_n reste dans un compact de $\mathrm{S}(\mathbf{A})$ modulo $\mathrm{S}(\mathbf{Q})$; quitte à changer γ_n, on peut supposer que s_n reste dans un compact. Par ailleurs, $\mathrm{G}_0(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{G}_0(\mathbf{A})$ est compact, et l'on peut donc écrire $h_n = \gamma_n^0\,h_n'$, $\gamma_n^0 \in \mathrm{G}_0(\mathbf{Q})$, h_n' restant dans un compact. On est ramené au cas où $g_n = \gamma_n\,s_n\,h_n \to g$, s_n et h_n tendant vers des limites S, h. Ceci implique que γ_n est constant pour n assez grand. Par ailleurs, G/S étant anisotrope, il est bien connu que $\mathrm{A}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A})$ est compact ($\mathrm{A}_{\mathrm{G}} = \mathrm{S}(\mathbf{R})^{+}$), donc *a fortiori* $\mathrm{G}_1\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A})$ est compact.

Lemme **5.8.** — *On a* $\mathrm{S}(\mathbf{A})\,\mathrm{G}_0(\mathbf{A}) \cap \mathrm{G}(\mathbf{Q}) = \mathrm{S}(\mathbf{Q})\,\mathrm{G}_0(\mathbf{Q})$.

Démonstration. — Soit x un élément de l'intersection, et soit $\alpha = \psi(x) \in \mathbf{Q}^{\times}$. Ecrivons $x = sx_0$, $s \in \mathrm{S}(\mathbf{A})$, $x \in \mathrm{G}_0(\mathbf{A})$. Alors $\psi(x) = \psi(s) = s^2$, s étant identifié à un élément de $\mathbf{A}^{\times}$. Donc α est un élément de $\mathbf{Q}^{\times}$ qui est un carré à toutes les places : donc $\alpha = \beta^2$, $\beta \in \mathbf{Q}^{\times}$: si on considère β comme un élément de $\mathrm{S}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\times}$, on a alors $\psi(\beta^{-1}x) = 1$ d'où $x = \beta y$ avec $\beta \in \mathrm{S}(\mathbf{Q})$ et $y \in \mathrm{G}_0(\mathbf{Q})$.

Nous démontrons maintenant le lemme 5.6 [26]. Soit ρ_0 la représentation de $\mathrm{G}_0(\mathbf{A})$ sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{G}_0(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{G}_0(\mathbf{A}), \varepsilon)$ des fonctions se transformant sous $\mathrm{M}(\mathbf{A})$ selon ε. Soit χ

le caractère choisi avant le lemme 5.6. On étend la représentation ρ_0 en une représentation ρ_1 de G_1 en posant :

$$\rho_1(z\gamma x)f(y) = \chi(z)f(\gamma^{-1}y\gamma x) \tag{5.16}$$

pour $z \in S(\mathbf{A})$, $\gamma \in G(\mathbf{Q})$, $x \in G_0(\mathbf{A})$, $y \in G_0(\mathbf{A})$.

On vérifie que ρ_1 est bien définie : on voit aisément qu'il suffit de vérifier que $\rho_1(z\gamma x)f(y) \equiv f(y)$ si $z\gamma x = 1$. Dans ce cas, on a alors, d'après le lemme 5.8, $\zeta\gamma\xi = 1$ avec $\zeta \in S(\mathbf{Q})$, $\xi \in G_0(\mathbf{Q})$. Puisque ζ est central, $\gamma^{-1}y\gamma = \xi y\xi^{-1}$ pour $y \in G_0(\mathbf{A})$. Donc $\rho_1(z\gamma x)f(y) = \chi(z)f(\gamma^{-1}y\gamma x) = \chi(z)f(\xi y\xi^{-1}x) = \chi(z)f(y\xi^{-1}x)$. Mais l'identité $\zeta\xi = zx$ implique $\xi^{-1}x = z^{-1}\zeta$: leur valeur commune est un élément de $S(\mathbf{A}) \cap G_0(\mathbf{A}) = M(\mathbf{A})$. Par conséquent, $f(y\xi^{-1}x) = \varepsilon(\xi^{-1}x)f(y) = \varepsilon(z^{-1}\zeta)f(y) = \chi(z^{-1})f(y)$, S étant rationnel, d'où $\rho_1(z\gamma x)f(y) = f(y)$.

L'expression (5.16) définit bien une action de G_1 sur l'espace considéré; on vérifie aisément que c'est une représentation continue.

On considère maintenant la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G(\mathbf{A})}\rho_1$ de $G(\mathbf{A})$, l'induction étant possible, bien sûr, grâce au lemme 5.7. Un calcul simple montre que ρ est isomorphe à la représentation à droite de $G(\mathbf{A})$ sur l'espace $L^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}), \chi)$ des fonctions sur $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ se transformant sous $S(\mathbf{A})$ selon χ.

Terminons la démonstration du lemme 5.6. Partant de la représentation τ_0, sous-module de ρ_0, on voit que τ_0 est une sous-représentation d'une représentation irréductible τ_1 de G_1 apparaissant dans ρ_1. Donc $\tau' = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G(\mathbf{A})}\tau_1$ est une sous-représentation de ρ. Puisque ρ admet une décomposition discrète, il en est de même de τ'. Puisque $G(\mathbf{A})/G_1$ est compact, la réciprocité de Mackey implique que τ_1 apparaît discrètement dans τ'. On choisit un constituant τ de τ' contenant τ_1 : τ se décompose discrètement sous $G_0(\mathbf{A})$ [26, lemme 3.2] et contient τ_0. Enfin τ apparaît dans ρ et donc *a fortiori* dans $\mathscr{A}_G$.

Nous aurons besoin des propriétés de la proposition 4.11 (i-ii) pour τ. Considérons d'abord les places finies, non ramifiées pour toutes les données. La suite exacte (5.13) donne une suite exacte de L-groupes sur $\mathbf{Q}$:

$$1 \to \mathbf{C}^\times \to {}^LG \to {}^LG_0 \to 1. \tag{5.17}$$

En une place finie non ramifiée p, on en déduit un homomorphisme naturel $\lambda : \mathscr{H}_{G_0,p} \to \mathscr{H}_{G,p}$ entre les algèbres de Hecke correspondantes. Il est compatible avec la restriction de représentations du lemme 5.6.

Considérons maintenant la place réelle. Le groupe $G(\mathbf{R})$ est le sous-groupe de $\prod_{v|\infty} GU(p(\iota), p(c\iota))$ défini par l'égalité des rapports de similitude. (Pour tout v, on a choisi un représentant ι.) Comme $p(\iota) \neq p(c\iota)$, on vérifie que chacune des composantes du produit est connexe, égale à $\mathbf{R}^\times U(p(\iota), p(c\iota))$. Par conséquent $G(\mathbf{R}) = S(\mathbf{R})\, G_0(\mathbf{R})$. On étend la représentation rationnelle ξ_0 de G_0 associée à τ_0 (Prop. 4.11 : c'est la

représentation $\bigotimes_v \xi_v$ avec les notations du § 4, et les identifications naturelles) en une représentation ξ de G, le centre opérant trivialement. On déduit alors du lemme 5.6 que

(5.18) $$ep(\mathfrak{g}, K_\infty; \tau \otimes \xi) \neq 0.$$

Revenons aux places finies non ramifiées.

Pour déduire le théorème 5.3 du résultat de Kottwitz, il nous faut tout d'abord expliciter l'expression (5.10). Considérons la tour d'extensions

$$\begin{array}{c} E \\ | \\ F_c \\ | \\ \mathbf{Q} \end{array}$$

et soit $w \mid u \mid p$ des places de E, F_c et $\mathbf{Q}$. Nous aurons besoin de la structure des groupes $G_0 \times_{\mathbf{Q}} F_c$ et $G \times_{\mathbf{Q}} F_c$. Nous donnons la description quand F est extension galoisienne de $\mathbf{Q}$; le cas général est un peu plus compliqué, mais le résultat final (5.31) est le même. Tout d'abord, puisque $G_0 = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}} U$, on a

$$G_0 \times_{\mathbf{Q}} F \cong U \times \ldots \times U$$

(d facteurs, correspondant aux plongements $F \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$). Par conséquent,

(5.19 i) $$G_0 \times_{\mathbf{Q}} F_c \cong D^\times \times \ldots \times D^\times,$$

où l'on a considéré $D^\times$ comme un groupe sur F_c. Par ailleurs, on vérifie aisément (pour simplifier, on décrit G(F) plutôt que $G \times_{\mathbf{Q}} F$) que

$$G(F) \cong \{(g_1, \ldots, g_d; z) : g_i^* g_i = z\}$$

où $g_i \in D^\times$, $z \in F^\times$. Il se plonge dans $G(F_c)$, que l'on peut écrire sous forme symétrique comme

$$G(F_c) = \{(g_1, g_1', \ldots, g_d, g_d'; z) : g_i g_i' = z\}$$

où $g_i \in D^\times$, $z \in F_c^\times$. L'automorphisme $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_c/F)$, $\sigma \neq 1$ opère alors sur $G(F_c)$ par $(g_i, g_i') \mapsto (g_i'^*, g_i^*)$ et $z \mapsto {}^\sigma z$. En particulier, on voit donc que

(5.19 ii) $$G \times_{\mathbf{Q}} F_c \cong D^\times \times \ldots \times D^\times \times \mathbf{G}_m,$$

l'isomorphisme envoyant (g_i, g_i') sur g_i. L'injection $G_0 \to G$ est, sur les formules (5.19), l'injection évidente.

Dualement à (5.19), on a

(5.20 i) $$(G \times F_c)^\wedge = GL(n, \mathbf{C})^d \times \mathbf{C}^\times$$

$$\downarrow$$

(5.20 ii) $$(G_0 \times F_c)^\wedge = GL(n, \mathbf{C})^d,$$

l'application oubliant le facteur $\mathbf{C}^\times$. Dans (5.19), (5.20), les d facteurs correspondent aux plongements $F \to \mathbf{R}$, et l'on supposera toujours que le premier facteur correspond à j_0.

En particulier, si $\varphi_u(\tau_p)$ est déduit de $\varphi(\tau_p)$ par restriction, on peut considérer que l'image de $\varphi_u(\tau_p)$ est contenue dans $\hat{G}$, puisque sa projection sur le deuxième facteur $\mathrm{Gal}(\bar{F}_{c,u}/F_{c,u})$ du L-groupe est triviale.

Cela étant, $\varphi_u(\tau_p) : W_{F_c,u} \to \hat{G} = (G \times F_c)^\wedge$ correspond, par la fonctorialité de Langlands, à la représentation τ_u de $G(F_{c,u})$ obtenue à partir de τ_p par changement de base. Puisque ceci est compatible avec l'inclusion (5.19), cette représentation s'obtient en étendant la représentation $\tau_{0,u}$ de $G_0(F_{c,u})$ obtenue par changement de base à partir de $\tau_{0,p}$.

Il s'agit donc de déterminer cette représentation de $G_0(F_{c,u}) \cong GL(n, F_{c,u})^d$. Rappelons que τ_0, vue comme représentation de $U(\mathbf{A}_F)$, est obtenue par descente à partir d'une représentation τ_c de $U(\mathbf{A}_{F_c}) = GL(n, \mathbf{A}_{F_c})$. C'est alors un exercice simple sur l'extension et la restriction des scalaires de vérifier que, via l'isomorphisme (5.19), $\tau_{0,u}$ s'écrit

$$\tau_{0,u} = (\tau_{c,u}, \tau_{c,u}, \ldots, \tau_{c,u}), \tag{5.21}$$

c'est-à-dire, puisque nous considérons seulement les places où toutes les données sont non ramifiées,

$$\tau_{0,u} = (\pi_{c,u}, \pi_{c,u}, \ldots, \pi_{c,u}). \tag{5.22}$$

Par ailleurs, d'après l'isomorphisme (5.19), on a

$$G \times_{\mathbf{Q}} F_c \cong (G_0 \times_{\mathbf{Q}} F_c) \times \mathbf{G}_m. \tag{5.23}$$

Considérons la représentation τ de $G(\mathbf{A})$: elle se relève — au moins formellement, aux places non ramifiées — en une représentation $\rho_{\mathbf{Q}/F_c}\tau$ de $G(\mathbf{A}_{F_c})$ obtenue par restriction des scalaires. En une place finie non ramifiée u, celle-ci s'écrit alors

$$(\rho_{\mathbf{Q}/F_c}\tau)_u \underset{\text{def}}{=} \tau_u = (\pi_{c,u}, \ldots, \pi_{c,u}; \beta_u) \tag{5.24}$$

où β_u est la composante en u d'un caractère β_{F_c} de $F_c^\times \backslash \mathbf{Q}_{F_c}^\times$. Dans (5.24), on prendra garde que la représentation τ_u est donc obtenue formellement, par changement de base non ramifié, à partir de τ_p : elle diffère de la composante en u de la représentation notée τ au § 4, qui était bien sûr égale à $\pi_{c,u}$.

Notons que, bien que nous ayons utilisé le changement de base pour $F_c/\mathbf{Q}$ formellement, le *caractère central* ω_τ de τ se relève bien en un caractère de $Z(F_c)\backslash Z(\mathbf{A}_c)$, Z étant le centre de G. On a évidemment $Z \times_{\mathbf{Q}} F_c \cong \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ suivant (5.20 i), et β_{F_c} est la deuxième composante de $\omega_\tau \circ N_{F_c/\mathbf{Q}}$.

Il est facile de préciser la relation entre le caractère β_{F_c} de $\mathbf{A}_{F_c}^\times$ et le caractère χ choisi précédemment. Dans (5.19 ii), le groupe $S(F_c)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de la forme $(x_n, x_n, \ldots, x_n, x^2)$, avec $x \in F_c^\times$ et x_n égal à la matrice scalaire $x.\mathrm{Id}_n$.

Donc le caractère central de $\rho_{\mathbf{Q}/\mathbf{F}_c}\tau$ en $x \in \mathrm{S}(\mathbf{A}_{\mathbf{F}_c}) \cong \mathbf{A}_{\mathbf{F}_c}^{\times}$ est égal, d'après (5.24), à $\omega_c(x)^d\,\beta_{\mathbf{F}_c}(x^2)$. Par conséquent :

(5.25) $$\omega_c^d\,\beta_{\mathbf{F}_c}^2 = \chi \circ \mathrm{N}_{\mathbf{F}_c/\mathbf{Q}}.$$

En particulier, on voit que $\beta_{\mathbf{F}_c}$ est un caractère d'Artin.

D'après (5.24), l'image de $\mathscr{F}_u$ par $\varphi_u(\tau_p)$ est donc l'élément diagonal de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})^d \times \mathbf{C}^{\times}$ suivant :

(5.26) $$(t_{\pi_c,u}, \ldots, t_{\pi_c,u};\ \beta_u(\varpi_u)).$$

Son image par l'application (5.10), où l'on remplace φ_w par φ_u, est alors, compte tenu de (5.9),

(5.27) $$t_{\pi_c,u}^{-1}\,\det(t_{\pi_c,u})^{-(d-1)}\,\beta_u(\varpi_u)^{-1},$$

c'est-à-dire, à l'aide du caractère central ω_c de π_c,

(5.28) $$t_{\pi_c,u}^{-1}\,\omega_{c,u}(\varpi_u)^{-(d-1)}\,\beta_u(\varpi_u)^{-1}.$$

Puisque π_c est auto-duale, cela n'est d'ailleurs autre, à permutation près, que

(5.29) $$t_{\pi_c,u}\,\omega_{c,u}(\varpi_u)^{-(d-1)}\,\beta_u(\varpi_u)^{-1}.$$

Si on veut écrire ceci à l'aide de la représentation r^{T} associée à la représentation originale π de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathbf{F}})$, on obtient, vu les propriétés du changement de base [3],

(5.30) $$r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_u)\,q_u^{(n-1)/2}\,\omega_{c,u}(\varpi_u)^{-(d-1)}\,\beta_u(\varpi_u)^{-1}.$$

C'est cependant $\varphi_w(\tau_p)\,(\mathscr{F}_w)$, et non $\varphi_u(\tau_p)\,(\mathscr{F}_u)$ que l'on veut obtenir : par restriction à $\mathrm{W}_{\mathbf{E}_w} \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathbf{F}_c,u}$, on voit alors que cette matrice est

(5.31) $$r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)\,q_w^{(n-1)/2}\,\alpha_{\mathbf{E},w}(\varpi_w),$$

où $\alpha_{\mathbf{E}}$ est le caractère d'Artin de $\mathbf{A}_{\mathbf{E}}^{\times}$, produit de $\omega^{-(d-1)} \circ \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{Q}}$ et de $\beta_{\mathbf{F}_c}^{-1} \circ \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}_c}$.

Nous exploitons maintenant l'égalité (5.11). La représentation π étant cuspidale, algébrique et régulière, de poids $1 - n$ (§ 3.2, formule (3.4)), on sait que les valeurs propres de $r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_p)$ sont des nombres algébriques α dont la valeur absolue pour tout (1) plongement $\overline{\mathbf{Q}} \to \mathbf{C}$ vérifie

$$p^{-n/2} < |\alpha| < p^{(2-n)/2}$$

([11, Th. 3.13 et lemme 4.10]). Par restriction à $\mathrm{W}_{\mathbf{E}_w}$, des encadrements analogues sont vrais pour les valeurs propres de $r^{\mathrm{T}}(\mathscr{F}_w)$. D'après (5.11), et la pureté des P^i, on en déduit, tenant compte du facteur q_w^{n-1} et du fait que le caractère abélien de (5.31) est un caractère d'Artin, que

$$\mathrm{P}(\tau_p, \mathrm{E}_w) = \mathrm{P}^{n-1}(\tau_p, \mathrm{E}_w),$$

les autres P^i étant égaux à 1. (Cet argument est originalement dû à Laumon, dans le cas des corps de fonctions.)

---

(1) Il suffirait du reste d'en considérer un; le recours à [11, Th. 3.13] n'est donc pas nécessaire.

On a enfin, d'après (5.12),

$$P(\mathscr{F}_w, W^{n-1}) = P(\tau_p, E_w)^a$$

et cela implique évidemment le théorème 5.3. Le système compatible de représentations λ-adiques figurant dans l'assertion du théorème est donc

$$W = W^{n-1} \otimes \alpha_E,$$

où le caractère d'Artin détermine des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ par la théorie du corps de classes. Le corps L figurant dans l'énoncé du théorème 5.3 doit être pris égal au composé du corps noté L précédemment, et du corps des valeurs de α_E.

Notons le corollaire suivant de la démonstration :

Corollaire **5.6.** — *Si* τ_0 *est une représentation quelconque de* $G_0(\mathbf{A})$ *obtenue par descente à partir de* τ_c, i.e., *vérifiant les conditions de la proposition* 4.8, τ_∞ *appartient au* L-*paquet de séries discrètes de* $G_0(\mathbf{R}) = U(F_\infty)$ *obtenu par descente à partir de* τ_c.

En effet, les arguments qui précèdent impliquent que la cohomologie de τ est concentrée en degré $(n-1)$; cela implique [39] que τ_∞ appartient à la série discrète (*i.e.*, que τ_{v_0} appartient à la série discrète, $U(F_v)$ étant compact aux autres places).

5.3. Cas des corps CM

Nous donnons maintenant l'énoncé du théorème, analogue au théorème 5.3, que l'on peut démontrer par les mêmes méthodes pour les corps de multiplication complexe.

Soit donc F_c un corps CM, F son sous-corps réel maximal. Si π_c est une représentation automorphe de $GL(n, \mathbf{A}_{F_c})$, on écrit, comme d'habitude,

$$(\pi_c)_v = \bigotimes_{\substack{w \mid v \\ w \text{ place de } F_c}} \pi_{c,w}$$

pour v une place de F.

Supposons que $\pi_c \cong {}^\sigma\tilde{\pi}_c$, $\tilde{\pi}_c$ désignant la duale et σ désignant l'action de l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_c/F)$.

Nous choisissons, comme dans le § 5.1, un type CM Σ pour F_c; soit E le corps reflex, $E = RF_c$, associé à la situation (§ 5.1).

Théorème **5.7.** — *Soit* π_c *une représentation cuspidale, algébrique, régulière, de* $GL(n, \mathbf{A}_{F_c})$ *vérifiant les conditions suivantes* :

(i) $\pi_c \cong {}^\sigma\tilde{\pi}_c$;

(ii) *il existe une place* v_0 *de* F *(et une seconde place* $v_1 \neq v_0$ *si* $2 \mid n$, $4 \nmid n$ *et d est impair) déployée(s) dans* F_c *telle(s) que* $(\pi_c)_{v_0}$ *(et* $(\pi_c)_{v_1}$ *s'il y a lieu) appartienne à la série discrète. Alors les conclusions* (i)-(iv) *du théorème* 5.3 *sont vraies pour* π_c.

Bien sûr, les représentations $r^T : W_{F_{c,u}} \to GL(n, \mathbf{C})$ sont alors les représentations associées, presque partout, à π_c par la correspondance de Langlands normalisée comme dans le § 5.1.

Corollaire **5.8.** — *La conjecture de Ramanujan est vraie, à presque toutes les places, pour* π_c.

Le théorème 5.7 se démontre comme le théorème 5.3; indiquons rapidement les quelques changements. Les constructions du § 4 se répètent à l'identique. Pour la démonstration du lemme 5.6, on doit remplacer les arguments utilisant la représentation originale π de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_F)$ — et son caractère central — par des arguments portant directement sur π_c.

Soit u une place archimédienne de F_c. La représentation π_u est alors unitairement induite à partir de caractères χ_i de $\mathbf{C}^\times$ décrits par la formule (3.3). L'argument donné après cette formule montre encore que π_u est tempérée.

De plus son caractère central $\omega_{c,u}$ s'écrit

$$\omega_{c,u} = z^{P_u} \bar{z}^{Q_u}, \tag{5.32}$$

avec

$$\begin{aligned} P_u &= \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{n(n-1)}{2} \\ Q_u &= \sum_{i=1}^{n} q_i + \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

D'après (3.4), $P_u = -Q_u$; P_u et Q_u sont *entiers*.

Soit τ_0 la représentation de $G_0(\mathbf{A}_\mathbf{Q}) = U(\mathbf{A}_F)$ obtenu par descente à partir de τ_c (§ 4). Son caractère central ω_{τ_0} est un caractère de $F_{c,1}^\times \backslash \mathbf{A}_{F_c,1}$ — voir la description suivant la formule (5.14). Si v est une place archimédienne de F, le centre de $U(F_v)$ peut être identifié au tore anisotrope $\mathbf{G}_m^a$ de dimension 1 sur $\mathbf{R}$, et le caractère central de τ_0 à la place v s'écrit (1) $x \mapsto x^{P_u}$, P_u étant l'entier défini par (5.33) pour la place u divisant v.

Le caractère χ choisi avant le lemme 5.6 doit alors satisfaire, à la place archimédienne, la condition $\chi_\infty(-1) = (-1)^P$ où $P = \sum_{u \mid \infty} P_u$. Nous pouvons supposer que $\chi_\infty = 1$ si P est pair, $\chi_\infty(x) = x$ si P est impair. Le lemme 5.6 se démontre alors de la même façon. Pour construire la représentation ξ de G (cf. avant (5.18)), on écrit $G(\mathbf{C}) = S(\mathbf{C})\, G_0(\mathbf{C})$ avec $S(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^\times$, $S(\mathbf{C}) \cap G_0(\mathbf{C}) = \{\pm 1\}$. Le caractère central de ξ_0 vaut alors $(-1)^P$ sur l'élément (-1) de l'intersection.

Nous étendons alors ξ_0 en une représentation de ξ en faisant agir $\mathbf{C}^\times \cong S(\mathbf{C})$ trivialement (P pair) et par le caractère $z \mapsto z^{-1}$ de $\mathbf{C}^\times$ (P impair). La restriction du caractère central à $S(\mathbf{R})$ est alors χ_∞^{-1}. Les arguments donnés avant (5.18) montrent que

$$ep(\mathfrak{g}, K_\infty; \tau \otimes \xi) \neq 0$$

avec les notations de cette section.

Le reste de la démonstration est identique, à la différence suivante près : si P est impair, le caractère χ n'est plus un caractère d'Artin. De même, le poids du système

(1) On identifie $\mathbf{G}_m^a(\mathbf{R})$ et $\{z \in \mathbf{C}^\times : |z| = 1\}$.

de coefficients associé à ξ (cf. après (5.10)) n'est plus zéro : pour notre choix de χ, il est égal à 1. On vérifie alors que les arguments de pureté (ainsi que le résultat concernant le poids de W) restent corrects, en tenant compte de la translation introduite dans les formules (5.11), (5.12) par le poids de ξ (cf. [24]).

Notons qu'à la différence du cas réel, la condition $\pi_c \cong {}^{\sigma}\tilde{\pi}_c$ n'introduit aucune condition particulière sur le type à l'infini de π_c : en effet, à torsion près par un caractère abélien, toute représentation algébrique cuspidale est tempérée à l'infini [11, lemme 4.9]. Cela implique que ses composantes archimédiennes vérifient cette condition.

Réciproquement, on peut alors obtenir par changement de base, et en partant des représentations cuspidales du groupe unitaire, des représentations de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{A}_{\mathrm{F}_c})$ (cuspidales, algébriques, régulières) de type arbitraire à l'infini. Cela implique que la cohomologie cuspidale, dans les dimensions données par le lemme 3.14 de [11] (cf. (3.14)), de sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F}_c)$ assez profonds est non nulle pour tout système de coefficients venant d'une représentation rationnelle de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F}_{c,\infty})$. Des résultats plus complets ont été obtenus par J.-P. Labesse (cf. [25]) ; si n est *pair*, l'existence de cohomologie cuspidale était démontrée dans [10], dans le cas de coefficients triviaux, mais pour un corps de nombres arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[C] *Automorphic Forms, Representations, and* L-*functions*, Proceedings of the Corvallis Conference, A. Borel et W. Casselman eds, *Proc. Symp. Pure Math.*, **33**, A.M.S., Providence, 1979, I, II.

[AA] *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and* L-*functions*, Proceedings of the Ann Arbor Conference, L. Clozel et J. S. Milne eds, Academic Press, 1990, I, II.

[1] J. Adams, D. Vogan, *Lifting of characters and Harish-Chandra's method of descent*, preprint.

[2] J. Arthur, A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, *Acta Math.*, **150** (1983), 1-89.

[3] J. Arthur, L. Clozel, *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1989.

[4] D. Blasius, Automorphic forms and Galois representations : some examples, *in* [AA], II, 1-13.

[5] A. Borel, Automorphic L-functions, *in* [C], II, 27-62.

[6] A. Borel, N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1980.

[7] A. Bouaziz, Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base **C**/**R**, *Astérisque*, **171-172** (1989), 163-194.

[8] L. Clozel, Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels, *Ann. Sc. E.N.S.* (4e sér.), **15** (1982), 45-115.

[9] L. Clozel, The fundamental lemma for stable base change, *Duke Math. J.*, **61** (1990), 255-302.

[10] L. Clozel, On the cuspidal cohomology of arithmetic subgroups of GL(2*n*)..., *Duke Math. J.*, **55** (1987), 475-486.

[11] L. Clozel, Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité, *in* [AA], I, 77-159.

[12] L. Clozel, P. Delorme, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II, *Ann. Sc. E.N.S.* (4e sér.), **23** (1990), 193-228.

[13] P. Delorme, Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base **C**/**R**, preprint.

[14] T. Enright, Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complex Lie groups, *Duke Math. J.*, **46** (1979), 513-525.

[15] M. Harris, Automorphic forms of $\bar{\partial}$-cohomology type as coherent cohomology classes, *J. Diff. Geom.*, **32** (1990), 1-63.

[16] G. HARDER, Ueber die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen II, *Math. Zeitschrift*, **92** (1966), 396-415.
[17] J. JOHNSON, Stable base change **C**/**R** of certain derived functor modules, *Math. Ann.*, **287** (1990), 467-493.
[18] R. KOTTWITZ, Rational conjugacy classes in reductive groups, *Duke Math. J.*, **49** (1982), 785-806.
[19] R. KOTTWITZ, Shimura varieties and twisted orbital integrals, *Math. Ann.*, **269** (1984), 287-300.
[20] R. KOTTWITZ, Stable trace formula : cuspidal tempered terms, *Duke Math. J.*, **51** (1984), 611-650.
[21] R. KOTTWITZ, Stable trace formula : elliptic singular terms, *Math. Ann.*, **275** (1986), 365-399.
[22] R. KOTTWITZ, Shimura varieties and λ-adic representations, *in* [AA], I, 161-209.
[23] R. KOTTWITZ, en préparation.
[24] R. KOTTWITZ, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, preprint, 1989.
[25] J.-P. LABESSE, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et* K-*théorie*, preprint.
[26] J.-P. LABESSE, J. SCHWERMER, On liftings and cusp cohomology of arithmetic groups, *Inv. Math.*, **83** (1983), 383-401.
[27] R. P. LANGLANDS, *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris 7, Paris, s.d.
[28] R. P. LANGLANDS, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives, Ein Märchen, *in* [C], II, 205-246.
[29] R. P. LANGLANDS, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1973.
[30] C. MOEGLIN, J.-L. WALDSPURGER, Le spectre résiduel de GL(n), *Ann. Sc. E.N.S.* (4e sér.), **22** (1989), 605-674.
[31] J. ROGAWSKI, *Automorphic representations of unitary groups of three variables*, Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1989.
[32] W. SCHARLAU, *Quadratic and Hermitian Forms*, Springer-Verlag, 1985.
[33] D. SHELSTAD, Characters and inner forms of quasi-split groups over **R**, *Compositio Math.*, **39** (1979), 11-45.
[34] D. SHELSTAD, Base change and a matching theorem for real groups, in *Non commutative Harmonic Analysis and Lie Groups*, Springer Lecture Notes, **880** (1981), 425-482.
[35] D. SHELSTAD, Endoscopic groups and base change **C**/**R**, *Pacific J. Math.*, **110** (1984), 397-415.
[36] D. SHELSTAD, *Twisted endoscopic groups in the abelian case*, non publié.
[37] M.-F. VIGNÉRAS, *On the global correspondence between* GL(n) *and division algebras*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1984.
[38] D. VOGAN, *Representations of real reductive Lie groups*, Birkhäuser, 1981.
[39] D. VOGAN, G. ZUCKERMAN, Unitary representations with non-zero cohomology, *Compositio Math.*, **53** (1984), 51-90.

U.R.A. D0752 du C.N.R.S.
Université de Paris-Sud
Mathématique, bât. 425
91405 Orsay

Manuscrit reçu le 6 avril 1990.