PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Existence de faisceaux réflexifs de rang deux sur P^3 à bonne cohomologie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 66 (1987), p. 105-137

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1987__66__105_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXISTENCE DE FAISCEAUX RÉFLEXIFS DE RANG DEUX SUR $\mathbf{P}^3$ À BONNE COHOMOLOGIE

par ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Dans le présent article, on travaille sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle (mais voir § 3.4) et on démontre le :

Théorème **(2.3).** — *Soient* c_1, c_2, c_3 *des entiers vérifiant* $c_1 c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ *et* $0 \leqslant c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - 4$ *avec les restrictions suivantes :*

— *si* $4c_2 - c_1^2$ *vaut* 7 *ou* 15, *alors* c_3 *est non nul,*

— *si* c_1 *est pair et* c_2 *impair, alors* $c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - 6$.

Alors il existe un faisceau réflexif de rang deux « convenable » sur $\mathbf{P}^3$ *de classes de Chern* c_1, c_2, c_3 *et admettant la cohomologie semi-naturelle.*

Rappelons ([HH1] § 1) qu'un faisceau $\mathscr{E}$ de rang deux sur $\mathbf{P}^3$ de première classe de Chern c_1 a la cohomologie naturelle (resp. semi-naturelle) si pour tout entier ℓ (resp. vérifiant $\ell \geqslant -2 - c_1/2$), trois au moins des quatre groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathscr{E}(\ell))$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, sont nuls. En quoi la cohomologie semi-naturelle est-elle « naturelle » ? Cette notion a été introduite dans [HH1] après celle de cohomologie naturelle et pour une raison technique bien simple : pour qu'un fibré de rang deux sur $\mathbf{P}^3$ ait la cohomologie naturelle, il suffit que ce fibré et son dual aient tous deux la cohomologie semi-naturelle; lorsqu'on a commencé à chercher des faisceaux non localement libres à bonne cohomologie, on s'est aperçu qu'aucun d'eux n'avait la cohomologie naturelle ([HH1] 1.1) et on s'est rabattu sur la cohomologie semi-naturelle. En fait on peut, comme en [HH1] 1.4, en utilisant [*r*H1] 2.5, calculer toutes les dimensions $h^i(\mathscr{F}(\ell))$, $\ell \in \mathbf{Z}$, pour les faisceaux du théorème (ce n'est pas le cas en général pour les faisceaux réflexifs de rang deux à cohomologie semi-naturelle, cf. [*g*B1]). La propriété essentielle de ces dimensions est qu'elles sont minimales au sens suivant : il n'existe aucun faisceau $\mathscr{G}$ réflexif de rang deux sur $\mathbf{P}^3$ de mêmes classes de Chern que $\mathscr{F}$ et vérifiant, pour l'ordre produit, $h^*(\mathscr{G}(*)) < h^*(\mathscr{F}(*))$.

Les faisceaux construits dans le théorème sont convenables, ce qui signifie qu'ils ont les singularités les plus simples possible. Cela assure en particulier qu'on peut construire à partir de ces faisceaux des courbes lisses.

Expliquons maintenant les hypothèses portant sur les classes de Chern. De fait, la question a été posée plus généralement par Hartshorne en 1984 de déterminer les classes de Chern possibles des faisceaux réflexifs de rang deux sur $\mathbf{P}^3$ à cohomologie semi-naturelle. Ce problème a été étudié par G. Bolondi qui calcule, pour c_1 et c_2 fixés, la plus grande valeur de c_3 (elle est, pour $c_1 = 0, -1$, de l'ordre de $(4/3)\, c_2^{3/2}$), conjecture que le théorème est vrai pour toutes les valeurs intermédiaires (de bonne parité) [*g*B1] et démontre sa conjecture pour $c_1 = 0, -1$ et $c_2 \leqslant 10$ [*g*B2]. Mais à l'origine on voulait seulement construire les faisceaux « primitifs » (cf. [HH4]) dont l'existence était conjecturée par Hartshorne depuis 1980. Ces faisceaux primitifs, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle, ne forment qu'une petite partie des faisceaux donnés par le théorème, mais lorsque c_1 et c_2 varient, leur c_3 oscille entre 0 et $4c_2 - c_1^2 - \varepsilon$, où ε est négligeable devant c_2 mais tend vers l'infini avec lui. C'est pourquoi on a démontré le théorème dans un secteur défini par des inégalités de la forme $0 \leqslant c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - \varepsilon'$, et la valeur prise en fin de compte par ε' n'est en aucun cas significative. On pourrait d'ailleurs vraisemblablement étendre le résultat à un secteur du genre $0 \leqslant c_3 \leqslant 5c_2 - c_1^2$ ou $0 \leqslant c_3 \leqslant 6c_2 - c_1^2$ sans changer sensiblement les méthodes.

La démonstration du théorème est parallèle à celle de [HH1] et sa partie délicate est la preuve de quatre énoncés de position générale pour des courbes dans certains fibrés géométriques. Ces énoncés sont démontrés par la méthode introduite dans [HH5] et [Hi1] et baptisée méthode d'Horace dans [Hi2]. Signalons cependant que l'un des quatre énoncés de position générale (§ 3) se traite par réduction à un théorème de postulation ([HH3], voir aussi [eB]) dont le présent travail était la motivation initiale. Signalons également qu'on manipule ici des courbes qui ne sont plus toujours rationnelles. En particulier on a besoin de résultats de lissification ([HH2], voir aussi [S]) dont le présent travail était là encore la motivation initiale. On utilise aussi des résultats de Perrin [P] sur le nombre de points généraux qu'on peut imposer à une courbe.

Mentionnons pour finir quelques applications du théorème : outre la construction de courbes ayant un genre maximum ou présumé maximum pour une postulation donnée ([HH4]), il permet dans [HH4] de construire des faisceaux réflexifs $\mathscr{E}$ de rang 2 sur $\mathbf{P}^3$ de classes de Chern c_1 et c_2 données, avec $H^0(\mathscr{E}) = 0$, et pour lesquels le c_3 est maximum d'après [rH2]. Il est encore utilisé dans [pE] pour construire des courbes et dans [HM] pour construire des surfaces nodales (voir aussi [cB] à ce sujet).

Remerciements. — Bien qu'il paraisse avec une seule signature, ce travail fait partie d'un projet de recherches en cours avec mon ami Robin Hartshorne de l'Université de Berkeley. C'est avec grand plaisir que je saisis l'occasion de le remercier pour l'influence décisive qu'il a exercée sur le cours de mes recherches, bien au-delà de nos projets communs : en un mot, si je suis passé professionnel, c'est grâce à lui. Je remercie aussi Nicole Mestrano pour sa lecture critique du manuscrit. Enfin, je remercie Jean-Marc Lacroix qui a réalisé les figures avec tout le soin adéquat.

1. Faisceaux convenables
2. Réduction
3. Le cas $b = 0$
4. Démonstration de 2.5.1
5. Démonstration de 2.5.2
6. Démonstration de 2.5.3

1. Faisceaux convenables

1.1. *Définition.* — Nous dirons qu'un faisceau $\mathscr{F}$ réflexif de rang deux sur $\mathbf{P}^3$ est *convenable* si, au voisinage de chacun de ses points singuliers, il est conoyau d'un morphisme $\sigma : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^3$ dont les composantes σ_1, σ_2, σ_3 engendrent l'idéal maximal (pour la notion voisine de faisceau curviligne et la relation avec $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathscr{O})$, cf. [HH4]).

1.2. *Exemples.* — Soit Y une courbe réduite de $\mathbf{P}^3$. On se donne une section ξ du faisceau dualisant tordu $\omega_Y(4 - \ell)$ engendrant ce faisceau au voisinage du lieu singulier de Y et n'ayant que des zéros simples dans la partie lisse. Alors le faisceau réflexif $\mathscr{F}$ associé au couple (Y, ξ) (cf. [H1] 4.1) est convenable. En effet : d'une part on sait (cf. [H1] p. 137) que si $S \subset Y$ désigne le lieu des zéros de ξ, alors le faisceau $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathscr{O})$ est isomorphe à $\mathscr{O}_S$; d'autre part, au voisinage de chaque point singulier, on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{F} \to I_Y \to 0.$$

Comme I_Y est localement un quotient de $\mathscr{O}^2$ (car Y est lisse en tout point singulier de $\mathscr{F}$), $\mathscr{F}$ est localement quotient de $\mathscr{O}^3$. Le noyau de la surjection $\mathscr{O}^3 \to \mathscr{F}$ est réflexif de rang 1 donc libre (cf. [wB] 1.1 et 1.2). On a donc la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{s} \mathscr{O}^3 \to \mathscr{F} \to 0.$$

En appliquant à cette suite le foncteur $\mathscr{H}om\,(., \mathscr{O})$, on voit que $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathscr{O})$ est isomorphe à $\mathscr{O}_S$ si et seulement si s a un zéro simple, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ est convenable.

1.3. *Proposition.* — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau convenable au voisinage d'un point* O *de* $\mathbf{P}^3$ *et* E *un k-sous-espace vectoriel de dimension finie de la fibre $\mathscr{F}_0$. Si* E *engendre la fibre réduite $\mathscr{F}_0/\mathscr{M}_0\mathscr{F}_0$, alors pour e général dans* E, *le lieu des zéros de e est une courbe lisse.*

Preuve. — On considère la suite exacte donnée

$$0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{s} \mathscr{O}^3 \xrightarrow{p} \mathscr{F} \to 0.$$

On peut relever E en un espace vectoriel E′ de sections de $\mathscr{O}^3$ engendrant la fibre spéciale. Le lieu des zéros de $p(e')$ est égal au lieu des zéros de $s \wedge e'$. Celui-ci est lisse dès que e' est non nulle au point spécial.

1.4. *Remarque.* — La proposition précédente motive la définition des faisceaux convenables mais ne sera pas utilisée dans le présent travail. On démontrerait plus

généralement l'énoncé précédent dès que le lieu des zéros du morphisme s est (de dimension zéro et) curviligne, c'est-à-dire de dimension de plongement un; et donc pour les faisceaux associés aux couples (Y, ξ) où ξ engendre $\omega_Y(4-\ell)$ au voisinage du lieu singulier de Y (cf. [BC] prop. 4).

1.5. *Proposition.* — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent réflexif de rang deux* T-plat *sur $\mathbf{P}^3_T$. Alors l'ensemble des points t tels que $\mathcal{F}(t)$ soit convenable est ouvert dans* T.

Preuve. — Comme $\mathbf{P}^3_T$ est T-propre, l'affirmation est locale dans $\mathbf{P}^3_T$. Soit

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_{k(t)}} \xrightarrow{s} \mathcal{O}^3_{\mathbf{P}^3_{k(t)}} \xrightarrow{p} \mathcal{F}(t) \to 0$$

une présentation locale de $\mathcal{F}(t)$. On peut localement relever p en un morphisme $\tilde{p}: \mathcal{O}^3_{\mathbf{P}^3_T} \to \mathcal{F}$ surjectif dont le noyau N a pour restriction à $\mathbf{P}^3_{k(t)}$ le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_{k(t)}}$ parce que $\mathcal{F}$ est T-plat (on dit que les relations entre les sections de $\mathcal{F}(t)$ se prolongent en relations entre les sections de $\mathcal{F}$). On a donc une présentation

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_T} \xrightarrow{\tilde{s}} \mathcal{O}^3_{\mathbf{P}^3_T} \xrightarrow{\tilde{p}} \mathcal{F} \to 0.$$

Le schéma des zéros de $\tilde{s}$ est localement intersection complète et lisse à cause de l'hypothèse sur s. Ses traces sur les fibres voisines de $\mathbf{P}^3_{k(t)}$ sont encore lisses connexes dans un voisinage étale. Cela signifie que $\mathcal{F}(t')$ est convenable dans un voisinage.

2. Réduction

Dans ce paragraphe, on ramène notre problème à un (en fait à quatre) problème(s) de position générale. La démarche est identique à celle de [HH1]. En 2.1, on donne des conditions suffisantes portant sur la courbe Y de $\mathbf{P}^3$ et l'entier b pour que le faisceau $\mathcal{O} \oplus \mathrm{I}_Y(b)$ se généralise en faisceau réflexif convenable à cohomologie seminaturelle. En 2.2 on énonce l'existence de telles courbes Y pour $b = 0, 1, 2, 3$. En 2.3 on déduit de ces énoncés notre théorème principal. Enfin en 2.5 et comme dans [HH1], on réduit les énoncés de rang maximum de 2.2 à des énoncés de bijectivité dans certains fibrés géométriques.

2.1. *Proposition.* — *Soit* Y *une courbe lisse de $\mathbf{P}^3$, de degré d et de genre arithmétique g et b un entier vérifiant $0 \leqslant b \leqslant 3$ et les conditions suivantes (où η désigne le fibré normal)* :

i) $\mathrm{H}^1(\eta_Y) = 0$,
ii) $\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_Y(b)) = 0$,
iii) $\mathrm{H}^1(\mathrm{I}_Y(b-4)) = 0$,
iv) $\omega_Y(4-b)$ *a une section n'ayant que des zéros simples,*
v) *pour $\beta : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-b) \to \mathcal{O}_Y$ générique et pour tout n dans* **Z**, *l'application linéaire*

$$\mathrm{H}^0(\alpha(n)) : \mathrm{H}^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(n-b) \oplus \mathcal{O}(n)) \to \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$$

déduite de $\alpha := (\beta, 1) : \mathcal{O}(-b) \oplus \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y$, est de rang maximum,
vi) *si g est positif alors* Y *est connexe et non spéciale, sinon* Y *est une réunion de courbes rationnelles*

Alors $\mathcal{O} \oplus I_Y(b)$ *se généralise en faisceau réflexif convenable de classes de Chern* $c_1 = b$, $c_2 = d$, $c_3 = (4 - b)\,d + 2g - 2$ *à cohomologie semi-naturelle.*

Preuve. — On montre comme dans [HH1] que la déformation semi-universelle de $\mathcal{O} \oplus I_Y(b)$ est à base lisse (grâce à i), ii), iii), d'après [HH1] 4.1, 4.2), qu'on y trouve des faisceaux réflexifs convenables (grâce à iv), cp. [HH1] 2.1, 3.1), et des faisceaux à cohomologie semi-naturelle, et enfin que ces deux propriétés sont ouvertes (cf. 1.5 et [HH1] 1.6). La généralisation à cohomologie semi-naturelle de $\mathcal{O} \oplus I_Y(b)$ est le noyau $\mathscr{E}$ du morphisme $\alpha(b) : \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(b) \to \mathcal{O}_Y(b)$ avec $\alpha = (\beta, 1)$ et β générique comme en v). On observe en effet que pour $\ell \geqslant -2 - b/2 > -4$, au moins un des deux groupes $H^0(\mathscr{E}(\ell))$ et $H^1(\mathscr{E}(\ell))$ est nul, d'après v); par ailleurs $H^3(\mathscr{E}(\ell))$ est nul. Et $H^2(\mathscr{E}(\ell))$ est isomorphe à $H^1(\mathcal{O}_Y(b + \ell))$. Pour $b + \ell \geqslant 1$, il est nul d'après vi). Si $b + \ell = 0$, sa dimension est g et s'il est non nul, d'après vi), Y est connexe, d'où on déduit grâce à ii) que $H^0(\mathscr{E}(\ell))$ et $H^1(\mathscr{E}(\ell))$ sont nuls. Enfin pour $b + \ell < 0$, $H^0(\mathscr{E}(\ell))$ et $H^1(\mathscr{E}(\ell))$ sont nuls.

2.2. *Enoncés de position générale.* — Dans cet alinéa, on énonce les propositions qui seront démontrées dans les paragraphes suivants. Il y en a quatre, correspondant aux quatre valeurs de b.

2.2.0. *Proposition* ($b = 0$, g *est négatif, on pose* $g' = -g$). — *Il existe une réunion disjointe de* $1 + g'$ *courbes rationnelles lisses de* $\mathbf{P}^3$ *de degré total d et vérifiant* v), *dès que d et g' vérifient* $1 \leqslant g' \leqslant d - 1$ *si d est pair et* $2 \leqslant g' \leqslant d - 1$ *si d est impair.*

2.2.1. *Proposition* ($b = 1$). — *Si d et g vérifient* $1 - d \leqslant g \leqslant (d - 3)/2$, *alors il existe une courbe lisse de degré d et genre g vérifiant* v) *et* vi).

2.2.2. *Proposition* ($b = 2$, $g' = -g$). — *Si d et g' vérifient* $0 \leqslant g' \leqslant d - 1$, *il existe une réunion disjointe de* $1 + g'$ *courbes rationnelles lisses de* $\mathbf{P}^3$ *de degré total d et vérifiant* v).

2.2.3. *Proposition* ($b = 3$, $g' = -g$). — *Si d et g' vérifient* $0 \leqslant g' \leqslant (d - 2)/2$, *alors, sauf pour* $(d, g') = (4, 1)$ *et* $(d, g') = (6, 2)$, *il existe une réunion disjointe de* $1 + g'$ *courbes rationnelles lisses de degré au moins deux dans* $\mathbf{P}^3$, *de degré total d, et vérifiant* v).

Maintenant on va déduire notre théorème des énoncés précédents.

2.3. *Théorème.* — *Soient* c_1, c_2, c_3 *des entiers relatifs vérifiant* $c_1 c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ *et* $0 \leqslant c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - 4$ *avec les restrictions suivantes :*

— *si* $4c_2 - c_1^2$ *vaut* 7 *ou* 15, *alors* c_3 *est non nul,*

— *si* c_1 *est pair et* c_2 *impair, alors* c_3 *est différent de* $4c_2 - c_1^2 - 4$.

Alors il existe un faisceau réflexif de rang 2 *convenable sur* $\mathbf{P}^3$ *et admettant la cohomologie semi-naturelle.*

Preuve. — Rappelons que pour un faisceau de rang deux sur $\mathbf{P}^3$, c_3 et $4c_2 - c_1^2$ sont invariants par tensorisation par un fibré en droites. Il suffit donc de prouver le théorème pour $0 \leqslant c_1 \leqslant 1$ ou $2 \leqslant c_1 \leqslant 3$. Commençons par le cas où c_1 est pair et $0 \leqslant c_3 \leqslant 2c_2 - c_1^2/2$. On choisit $b = c_1 = 2$ et on applique 2.2.2 et 2.1. Si maintenant c_1 est pair et $2c_2 - c_1^2/2 \leqslant c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - 4$, on choisit $b = c_1 = 0$ et on applique 2.2.0 et 2.1. Si c_1 est impair et $0 \leqslant c_3 \leqslant c_2 - c_1^2/4 + 1/4$, on choisit $c_1 = b = 3$ et on applique 2.2.3 et 2.1. Enfin si c_1 est impair et $c_2 - c_1^2/4 + 1/4 \leqslant c_3 \leqslant 4c_2 - c_1^2 - 4$, on choisit $c_1 = b = 1$ et on applique 2.2.1 et 2.1 : pour i), on remarque que η_Y est quotient de $\mathcal{O}_Y(1)^4$.

2.4. *Remarque.* — La première restriction de l'énoncé correspond à des exceptions déjà signalées dans [HH1]. La seconde semble au contraire pouvoir être levée.

2.5. *Reformulation.* — L'énoncé 2.2.0 fera l'objet d'une démonstration spéciale au § 3. Comme dans [HH1] § 5, § 6, on déduit les autres énoncés 2.2 d'énoncés de *bijectivité* concernant des réunions de courbes *et de points*, non dans $\mathbf{P}^3$ mais dans les fibrés géométriques $\mathbf{V}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-a))$ qu'on notera $\mathbf{V}_a$ avec $a = 1, 2, 3$. Rappelons que si $p : \mathbf{V}_a \to \mathbf{P}^3$ désigne la projection on note encore $\mathcal{O}(1)$ le fibré $p^*\mathcal{O}(1)$ et que le degré des courbes dans $\mathbf{V}_a$ est défini par ce fibré $\mathcal{O}(1)$. Rappelons aussi qu'il existe un morphisme tautologique τ sur $\mathbf{V}_a$ du fibré $\mathcal{O}(-a)$ vers le fibré $\mathcal{O}$. Si Y est un sous-schéma de $\mathbf{V}_a$ on considère les applications

$$\rho_Y(n) : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n-a)) \oplus \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_Y(n))$$

obtenues en composant $p^* : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{V}_a}(n))$ avec $\mathrm{H}^0((\tau \oplus \mathrm{id})(n))$ et avec la restriction de $\mathbf{V}_a$ à Y.

2.5.1. *Proposition.* — *Soient d, g, ℓ, e, s des entiers vérifiant* $s \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $g \geqslant 0$, *si* $g > 0$ *alors* $d \geqslant 2g + 3$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$ *et*

$$s\,d + 1 - g + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+2}{3}.$$

Si Y *désigne la réunion générique dans* $\mathbf{V}_1$ *d'une courbe lisse connexe de genre g et degré d avec ℓ droites et e points alignés (sur une droite rencontrant la courbe si ℓ est nul) alors* $\rho_Y(s)$ *est bijectif.*

2.5.2. *Proposition.* — *Soient d, ℓ, e, s des entiers vérifiant* $s \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$ *et*

$$s\,d + 1 + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+1}{3}.$$

Si Y *désigne la réunion générique dans* $\mathbf{V}_2$ *d'une courbe rationnelle de degré d avec ℓ droites et e points alignés sur une droite rencontrant la courbe, alors* $\rho_Y(s)$ *est bijectif.*

2.5.3. *Proposition.* — *Soient d, c, e, s des entiers vérifiant* $s \geqslant 1$, $d \geqslant 2$, $c \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$ *et*

$$s\,d + 1 + c(2s+1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s}{3}.$$

On exclut en outre les quadruplets $(d, c, e, s) = (2, 1, 0, 2)$ *et* $(2, 2, 0, 3)$. *Si* Y *désigne la réunion générique dans* $\mathbf{V}_3$ *d'une courbe rationnelle* C *de degré* $d - 1$ *avec une droite* L *rencontrant* C, *c coniques et e points alignés sur une droite rencontrant* L, *alors* $\rho_Y(s)$ *est bijectif.*

2.6. *Réduction de* 2.2 *à* 2.5. — Les énoncés 2.5.1-3 impliquent les énoncés 2.2.1-3 comme dans [HH1] § 5 et § 6. Le seul élément nouveau est que la réunion Y′ d'une courbe C lisse de genre g et degré d avec e points d'une droite L rencontrant C n'est pas contenue dans une courbe lisse de genre g et degré $d' > d$. Mais on sait que pour $g = 0$ ou $d \geqslant 2g + 3$, Y′ est contenue dans une courbe singulière de genre g et degré d' qui se déforme en courbe lisse non spéciale (cf. *e.g.* [HH2]). Montrons par exemple comment 2.2.3 se déduit de 2.5.3. Posons $c = g'$, $d' = d - 2g' \geqslant 2$ et montrons que la réunion générique d'une courbe rationnelle de degré d' avec c coniques vérifie v). Soit donc $s \geqslant 1$ et supposons d'abord

$$d's + 1 + c(2s + 1) \leqslant \binom{s+3}{3} + \binom{s}{3} = \frac{2s^3 + 3s^2 + 13s + 6}{6}.$$

Dans ce cas, il existe (d'', c'', e'') vérifiant les hypothèses de 2.5.3 avec $d' \leqslant d'' \leqslant d' + 1$ et $c'' \geqslant c$ (sauf, à cause des exceptions, si $d' = 2$ et $s = 2$ ou 3, auquel cas l'hypothèse de 2.2.3 impose à c d'être nul et la surjectivité à démontrer est évidente). Il y correspond un schéma Y qui contient la réunion R d'une courbe rationnelle de degré d' avec c coniques et l'injection $R \to Y$ est telle que $H^0(\mathcal{O}_Y(s)) \to H^0(\mathcal{O}_R(s))$ soit surjectif ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant

$$d's + 1 + c(2s + 1) > \frac{2s^3 + 3s^2 + 13s + 6}{6}.$$

Alors il existe (d'', c'', e'') vérifiant les hypothèses de 2.5.3 avec $d'' \leqslant d'$, $c'' \leqslant c$, l'une des deux inégalités étant stricte (avec à nouveau quelques exceptions : pour $s = 2$, $d' = 2$, $c \geqslant 3$, ou $d' = 3$, $c \geqslant 2$; mais il est clair que la réunion générique de quatre coniques n'est pas contenue dans une surface cubique *a fortiori* pas dans une quadrique, que la réunion générique d'une cubique gauche et d'une conique n'est pas sur une quadrique et que la réunion générique d'une cubique gauche avec deux coniques n'est pas sur une surface cubique). Il y correspond un schéma Y réunion d'une courbe C, d'une droite L, de c'' coniques et d'un schéma fini F. Si d'' diffère de d', alors la réunion $C \cup L \cup F$ est contenue dans une courbe singulière qui se déforme en courbe rationnelle lisse de degré d' (cf. *e.g.* [Hi1] 2.5 ou [HH2]). Cette courbe réunie avec les c'' coniques de Y et au besoin $c - c''$ autres coniques, a la propriété requise. Si maintenant d' et d'' sont égaux, alors c est plus grand que c''; dans ce cas $C \cup L$ se déforme en courbe rationnelle lisse de degré d' et F est contenu dans une conique dégénérée. Quitte à déformer, on peut supposer que F est dans l'une des $c - c''$ coniques dont on a le libre choix.

3. Le cas $b = 0$

Ce paragraphe est consacré à la preuve de la proposition 2.2.0. Dans ce cas on reformule l'énoncé non pas dans $\mathbf{V}_0$ mais dans $\mathbf{V}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}) = \mathbf{P}^3 \times \mathbf{A}^2$ où la démonstration s'exprime un peu plus clairement. On a aussi sur $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{A}^2$ un morphisme tautologique encore noté $\tau : \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ et cette fois $\rho_Y(s)$ est le morphisme associé

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(s)).$$

Dans le produit $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{A}^2$, les courbes (complètes connexes) sont « horizontales », c'est-à-dire se projettent sur un point de $\mathbf{A}^2$. L'idée de la démonstration est que si pour $i = 1, 2$, Y_i est une courbe non spéciale de $\mathbf{P}^3$ ayant la postulation naturelle et si Y_1 et Y_2 ont mêmes degré et genre, alors

$$Y := (Y_1 \times \{(1, 0)\}) \amalg (Y_2 \times \{(0, 1)\})$$

est telle que $\rho_Y(n)$ soit de rang maximum pour tout n. Autrement dit, on va chercher Y comme réunion de deux courbes de même degré et même genre. Ce n'est pas tout à fait possible mais en la modifiant un peu, on parvient à faire aboutir cette idée.

Posons $\ell = -g - 1$ et $d = \ell + d_1 + d_2$ avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_1 + 1$. On va montrer qu'il existe dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{A}^2$ deux courbes rationnelles C_1 et C_2 de degrés respectifs d_1 et d_2, et ℓ droites dont la réunion Y est telle que pour tout s, $\rho_Y(s)$ soit de rang maximum. Comme dans [HH1] § 5, il suffit de traiter une seule valeur de s. Si $d_2 s + 1$ majore $\binom{s+3}{3}$, alors il en est de même de $d_1 s + 1 + \ell(s + 1)$ et il suffit de choisir $C_1 = C_1' \times \{(1, 0)\}$, $C_2 = C_2' \times \{(0, 1)\}$, $L_i = L_i' \times \{(1, 0)\}$, avec C_2' d'une part et $C_1' \cup L_1' \cup \ldots \cup L_\ell'$ de rang maximum (cf. [HH3]). On peut donc supposer

$$d_2 s + 1 < \binom{s+3}{3}, \quad \text{et } a \textit{ fortiori } d_1 s + 1 < \binom{s+3}{3}.$$

Définissons ℓ_i et e par

$$d_i s + 1 + \ell_i(s + 1) + e_i = \binom{s+3}{3}, \quad 0 \leqslant e_i \leqslant s.$$

Supposons d'abord $\ell \leqslant \ell_1 + \ell_2$. Alors on peut prendre Y contenu dans une réunion $Y_1 \cup Y_2$, où $Y_1 = Y_1' \times \{(1, 0)\}$, $Y_2 = Y_2' \times \{(0, 1)\}$ et où Y_i', réunion d'une courbe rationnelle de degré d_i avec ℓ_i droites, est de rang maximum ([HH3]).

Supposons maintenant $\ell \geqslant \ell_1 + \ell_2 + 2$. On prend cette fois Y contenant une réunion $Y_1 \cup Y_2$, avec $Y_1 = Y_1' \times \{(1, 0)\}$, $Y_2 = Y_2' \times \{(0, 1)\}$, où Y_i', réunion d'une courbe rationnelle de degré d_i avec $(\ell_i + 1)$ droites, est de rang maximum.

Il reste le cas délicat où ℓ est égal à $\ell_1 + \ell_2 + 1$. Soit Y_i un sous-schéma de $\mathbf{P}^3$ réunion d'une courbe rationnelle de degré d_i, de ℓ_i droites et de e_i points alignés sur une droite Δ_i avec Y_i de rang maximum. On peut supposer que Δ_1 et Δ_2 sont égales à une

même droite Δ. Soit f une transformation projective générale laissant Δ globalement invariante. On prend pour Y la partie de dimension un de

$$(Y_1 \times \{(1, 0)\}) \cup (fY_2 \times \{(0, 1)\}) \cup \{\Delta \times (1, -1)\}.$$

Il nous faut montrer que le noyau N de $\rho_Y(s)$ a pour dimension la partie positive de $e_1 + e_2 - s - 1$. Si on note Y_i' la partie de dimension 1 de Y_i, on a :

$$N = \{(\varphi, \psi) \in H^0(I_{Y_i'}(s)) \times H^0(I_{fY_i'}(s)) \mid \varphi/\Delta = \psi/\Delta\}.$$

De plus, si on note r la restriction à Δ, comme Y_1 et Y_2 sont de rang maximum, r est injective sur $H^0(I_{Y_i'}(s))$ et $H^0(I_{fY_i'}(s))$. Par suite N a même dimension que l'intersection $rH^0(I_{Y_i'}(s)) \cap rH^0(I_{fY_i'}(s))$, qui est égale à $rH^0(I_{Y_i'}(s)) \cap frH^0(I_{Y_i'}(s))$.

Posons $A = rH^0(I_{Y_i'}(s))$, $B = rH^0(I_{Y_i'}(s))$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $H^0(\mathcal{O}_\Delta(s))$ de dimensions e_1 et e_2. Comme toute transformation projective de Δ provient d'une transformation projective de $\mathbf{P}^3$, il nous suffit de prouver le lemme suivant concernant $\mathbf{P}^1$.

3.1. *Lemme.* — *Soit* V *un espace vectoriel de dimension deux sur le corps k de caractéristique nulle. Soient* A *et* B *deux sous-espaces vectoriels de* $S^s V$. *Alors pour h général dans* GL(V), A *et* hB *sont quasi-transverses* (i.e. *si* $\dim A + \dim B \geqslant s + 1$, *alors* $S^s V = A + hB$, *sinon* $A \cap hB = \{0\}$).

Preuve. — On peut évidemment supposer que $\dim A + \dim B$ est égal à $s + 1$. Soit G la composante de la grassmannienne de $S^s V$ qui contient A et G′ celle qui contient B. Pour X dans G, soit D_X le diviseur dans G′ des sous-espaces rencontrant non trivialement X. On considère l'ensemble

$$W = \{(X, Y) \in G \times G' \mid GL(V).Y \subset D_X\}.$$

C'est un fermé puisque c'est l'intersection des

$$W_h = \{(X, Y) \mid hY \in D_X\}.$$

De plus W est invariant sous l'action naturelle de GL(V). Soit T un sous-groupe triangulaire de GL(V) fixant une droite L de V. D'après le théorème de Borel ([aB] p. 140), si W est non vide alors T_Y admet un point fixe. On va donc montrer que T n'a pas de point fixe dans W. Pour cela on cherche d'abord les points fixes dans G et G′.

3.2. *Lemme.* — *Si* $\dim A = a$, *alors le seul point fixe de* G *sous l'action de* T *est l'image dans* $S^s V$ *de* $S^{a-1} V \otimes S^{s-a+1} L$.

Preuve. — On considère G comme variété de systèmes de diviseurs sur $\mathbf{P}(V)$, et on note 0 le point de $\mathbf{P}(V)$ correspondant à L. Comme le diviseur de base d'un système T-invariant est un diviseur T-invariant (c'est-à-dire un multiple de 0), il nous suffit de montrer que tout système T-invariant sans point de base est complet. Soit S un tel

système de degré d et choisissons un point P dans $\mathbf{P}(V)$, distinct de 0. Soit T' le sous-groupe de T fixant P et soit D un diviseur de S ne contenant pas 0. Alors l'orbite T' D contient dP dans son adhérence, comme le montre un calcul facile en coordonnées. Par suite S contient, pour tout P, le diviseur dP. La preuve du lemme 3.2 est ainsi réduite au résultat suivant.

3.3. *Lemme (car $k = 0$).* — *Le seul système de degré d contenant dP pour tout* P *est le système complet.*

Preuve. — Dans le projectif $\mathbf{P}^d$ des diviseurs de degré d, soit Γ la courbe des diviseurs de la forme dP. Au point dP, sa tangente est le pinceau des diviseurs de la forme $(d-1)\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}$. On conclut donc par récurrence sur d, le cas $d = 1$ étant évident.

Pour achever la preuve de (3.1), il reste à observer que l'unique point T-invariant, soit (F, F'), dans $G \times G'$, n'est pas dans W : en effet, pour h hors de T, (F, F') n'est pas dans W_h.

3.4. *Remarque.* — Comme me l'a indiqué Hartshorne, le lemme 3.1 est faux en caractéristique positive. Nous pensons cependant que la proposition 2.2.0 et plus encore le théorème 2.3 sont vrais en toute caractéristique. En fait les méthodes utilisées dans les paragraphes suivants devraient permettre de prouver 2.2.0 en toute caractéristique.

4. Démonstration de 2.5.1

4.0. *Notations et plan du paragraphe.* — Dans ce paragraphe, $Q(s)$ désigne l'ensemble des quadruplets (d, g, ℓ, e) vérifiant $d \geqslant 1$, $g \geqslant 0$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$, et

$$ds + 1 - g + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+2}{3}.$$

On note $Q^+(s)$ l'ensemble de ceux qui vérifient en outre la condition :

$$\text{si } g > 0 \quad \text{alors } d \geqslant 2g + 3$$

et $P(s)$ l'ensemble des quadruplets de $Q(s)$ qui vérifient la conclusion de 2.5.1. On doit donc montrer que $P(s)$ contient $Q^+(s)$. Dans l'alinéa 4.1 on rassemble divers résultats sur les courbes de $\mathbf{P}^3$ et $\mathbf{P}^4$ (parce que $\mathbf{V}_1$ est un ouvert de $\mathbf{P}^4$). Dans l'alinéa 4.2, on traite le problème analogue en dimension inférieure. Les alinéas 4.3, 4.4 et 4.5 sont consacrés aux constructions géométriques sur lesquelles repose la démonstration par récurrence. Il reste alors à surmonter des difficultés ne relevant que de l'arithmétique élémentaire; c'est l'objet de 4.6.

4.1. *Courbes de* $\mathbf{P}^3$. — Soit $d \geqslant g + 3 \geqslant 3$. On note $Z^3_{d,g}$ la composante irréductible dans le schéma de Hilbert de l'ouvert des courbes lisses connexes non spéciales (en fait il n'y en a pas d'autre [lE]) de $\mathbf{P}^3$ de genre g et degré d.

4.1.1. *Proposition.* — *Soient* $L_1, \ldots, L_d$ *des droites telles que pour* $i \geqslant 2$, L_i *rencontre exactement une ou deux non coplanaires parmi les droites* $L_1, \ldots, L_{i-1}$. *Alors la réunion* $X := L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *est dans* $Z^3_{d,g}$ *où* g *est le nombre des droites qui rencontrent deux droites antérieures. En outre* X *est non spéciale et vérifie* $H^1(X, N_X(-1)) = 0$ *où* N_X *désigne le fibré normal à* X.

Preuve. — L'énoncé est évident pour $d = 1$ et se démontre par récurrence, suivant les méthodes exposées dans [HH2]. La nullité de $H^1(X, N_X(-1))$ résulte de la suite exacte

$$0 \to N_X(-1) \to N_{X|L_d}(-1) \oplus N_{X|C}(-1) \to N_{X|S}(-1) \to 0$$

avec $C = L_1 \cup \ldots \cup L_{d-1}$ et $S = C \cap L_d$ et aussi du fait que $N_{X|L_d}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{L_d}(2) \oplus \mathcal{O}_{L_d}(1)$ si $\sharp S = 1$ et à $\mathcal{O}_{L_d}(2) \oplus \mathcal{O}_{L_d}(2)$ si $\sharp S = 2$.

4.1.2. *Proposition* (*cp* [P] 6.24). — *Soient* $d \geqslant g + 3 \geqslant 3$. *Par* $2d - 1$ *points suffisamment généraux de* $\mathbf{P}^3$ *passe au moins une courbe lisse de* $Z^3_{d,g}$.

Preuve. — Dans [P], Perrin démontre que, pour $(d, g) \neq (5, 2)$, par $2d$ points suffisamment généraux passe une courbe lisse de $Z^3_{d,g}$. Il reste à traiter le cas exceptionnel. Or neuf points généraux sont sur une quadrique lisse et par neuf points généraux sur une quadrique lisse passe une courbe de bidegré (3, 2).

4.2. *Courbes de* $\mathbf{P}^4$. — Soit maintenant $d \geqslant 2g + 3 \geqslant 3$. On note $Z^4_{d,g}$ la composante irréductible dans le schéma de Hilbert de l'ouvert des courbes lisses connexes de $\mathbf{P}^4$ de genre g et degré d (cf. *e.g.* [jH] p. 61).

4.2.1. *Lemme.* — *Soit* C *une courbe lisse générale de genre* g *et degré* $d - g$ *dans* $\mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^4$ *et* $L_1, \ldots, L_g$ *des droites disjointes coupant* $\mathbf{P}^3$ *en des points généraux de* C. *Alors* $X := C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_g$ *est dans* $Z^4_{d,g}$ *et vérifie* $H^1(X, N_X(-1)) = 0$.

Preuve. — Notons N^3_C et N^4_C les fibrés normaux à C dans $\mathbf{P}^3$ et $\mathbf{P}^4$. On a la suite exacte

$$0 \to N^3_C \to N^4_C \to \mathcal{O}_C(1) \to 0.$$

Posons $D = L_1 \cup \ldots \cup L_g$. Notons H le diviseur hyperplan, et $P_1, \ldots, P_g$ les points d'intersection de C avec $L_1, \ldots, L_g$. D'après [HH2] 3.2, 3.3 adapté au cas de $\mathbf{P}^4$, on a une suite exacte

$$0 \to N^3_C \to N_{X|C} \to \mathcal{O}_C(H + \Sigma P_i) \to 0$$

d'où $H^1(N_{X|C}(-H)) = 0$, car $H^1(N^3_C(-1))$ est nul (cf. *e.g.* [Hi3]) et $\mathcal{O}_C(\Sigma P_i)$ est non spécial. De la suite exacte

$$0 \to N_X \to N_{X|C} \oplus N_{X|D} \to N_{X|C \cap D} \to 0$$

on déduit $H^1(N_X(-1)) = 0$ parce que la restriction

$$H^0(N_{X|D}(-1)) \to H^0(N_{X|C\cap D}(-1))$$

est surjective.

Le fait que X se déforme en courbe lisse résulte par exemple de [HH2] 4.1 adapté au cas de $\mathbf{P}^4$.

4.2.2. *Proposition* (*cp* [P]). — a) *Par d points généraux de* $\mathbf{P}^3$ *passe une courbe lisse de* $Z^4_{d,g}$. b) *Plus précisément si* C *est suffisamment générale dans* $Z^4_{d,g}$, *le morphisme de* $Z^4_{d,g}$ *vers* $\mathrm{Hilb}^d\,\mathbf{P}^3$ *qui à* C′ *associe* $C' \cap \mathbf{P}^3$ *est une submersion au point* C.

Preuve. — D'après [P] 1.5, cela résulte du fait que la courbe générale X de $Z^4_{d,g}$ vérifie $H^1(X, N_X(-1)) = 0$, ce d'après 4.2.1.

4.2.3. *Proposition.* — *Soient* C *une courbe générale dans* $Z^3_{d'',g''}$, *et* D *une courbe générale dans* $Z^4_{d',g'}$ *coupant* C *transversalement en i points en position générale dans* $\mathbf{P}^3$, *avec* $1 \leqslant i \leqslant 4$. *Soit* $L_1, \ldots, L_\ell$ *des droites générales de* $\mathbf{P}^4$ *coupant chacune* C *en un point. On pose* $d = d' + d'' + \ell$ *et* $g = g' + g'' + i - 1$ *et on suppose* $d \geqslant 2g + 3$. *Alors* $X := C \cup D \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell$ *est dans* $Z^4_{d,g}$.

Preuve. — On a $H^1(C, N_C) = H^1(D, N_D) = 0$, de sorte que $C \cup D$ est lissifiable d'après [HH2] 4.5 adapté au cas de $\mathbf{P}^4$. De même X est lissifiable d'après [HH2] 4.2 adapté au cas de $\mathbf{P}^4$. Du coup X est dans $Z^4_{d,g}$ parce que toute courbe lisse connexe de genre g et degré d est dans $Z^4_{d,g}$.

4.3. *Énoncés en dimension inférieure.* — Ici on considère $\mathbf{V}' = \mathbf{V}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1))$ et $\pi : \mathbf{V}' \to \mathbf{P}^2$.

4.3.1. *Lemme.* — *Soient* s, d, g, ℓ, e, r *des entiers vérifiant* $s \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $g \geqslant 0$, *si* $g > 0$ *alors* $d \geqslant g + 3$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$, $r \geqslant 0$ *et*

$$ds + 1 - g + \ell(s+1) + e + r = (s+1)^2.$$

On suppose de plus $d + \ell \leqslant s + 1$ *et si* $d + \ell = s + 1$ *alors* $e \leqslant 1$.

Soient $L_0, L_1, \ldots, L_d, L_{d+1}, \ldots, L_{d+\ell}$ *des droites de* $\mathbf{V}'$ *telles que*

a) L_0 *rencontre* L_1, *mais non* $L_2, \ldots, L_{d+\ell}$,
b) *pour* $i = 2, \ldots, d$, L_i *rencontre, parmi les droites* $L_1, \ldots, L_{i-1}$ *exactement une ou deux droites non coplanaires,*
c) *pour* $i = d+1, \ldots, d+\ell$, L_i *ne rencontre pas* $L_1, \ldots, L_{i-1}$,
d) *le genre (arithmétique) de* $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *est* g,
e) *les projections dans* $\mathbf{P}^2$ *de* $L_1, \ldots, L_{\ell+d}$ *sont trois à trois disjointes.*

Alors il existe e points alignés sur L_0, *et r autres points dont la réunion* Y *avec* $L_1, \ldots, L_{d+\ell}$ *soit telle que* $\rho_Y(s)$ *soit bijectif, où* $\rho_Y(s)$ *désigne le morphisme naturel de* $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(s)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(s-1))$ *vers* $H^0(\mathcal{O}_Y(s))$.

Preuve. — Si $d+\ell < s$, alors $r \geqslant s+1$. Quitte à choisir $s+1$ des r points alignés, on peut augmenter ℓ en diminuant r. On peut donc supposer $d+\ell \geqslant s$. On a alors $e+r \geqslant s$. Quitte à diminuer r, on peut supposer $e=s$, ou de façon équivalente $e=0$, $d+\ell = s+1$. On a alors $r = d+g-1$. On dispose les r points de la façon suivante : dans $\pi^{-1}\pi(L_i)$ on met autant de ces r points que L_i rencontre de droites parmi $L_1, \ldots, L_{i-1}$. En outre, on impose à ces points d'avoir des projections distinctes entre elles et distinctes des $\pi(L_i) \cap \pi(L_j)$. On vérifie successivement pour $i = d+\ell, \ldots, 1$, que si $\rho_Y(s)$ (σ) s'annule, alors σ s'annule sur $\pi^{-1}\pi(L_i)$. Il s'ensuit que σ est identiquement nul.

4.3.2. *Corollaire.* — *Soient s, d, g, ℓ, e, r comme dans* 4.3.1 *et* C *suffisamment générale dans $Z^3_{d,g}$. Soient L_0 une droite suffisamment générale rencontrant* C, E *une partie à e éléments suffisamment générale dans L_0,* F *une partie suffisamment générale à r éléments dans* $\mathbf{V}'$. *Alors il existe des droites $L_1, \ldots, L_\ell$ telles que, pour $Y = C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell \cup E \cup F$, $\rho_Y(s)$ soit bijectif.*

Preuve. — Dans 4.3.1, on traite le cas où C est la réunion $L_1 \cup \ldots \cup L_d$. D'après [HH2], cette réunion est dans $Z^3_{d,g}$. On conclut en observant que la propriété énoncée est ouverte.

4.4. *Proposition (construction sans nilpotents).* — *Soit $s \geqslant 2$, et soient (d,g,ℓ,e) et (d',g',ℓ',e') respectivement dans $Q^+(s)$ et $Q^+(s-1)$. On suppose qu'il existe (d'',g'',ℓ'',e'') et i,j vérifiant :*

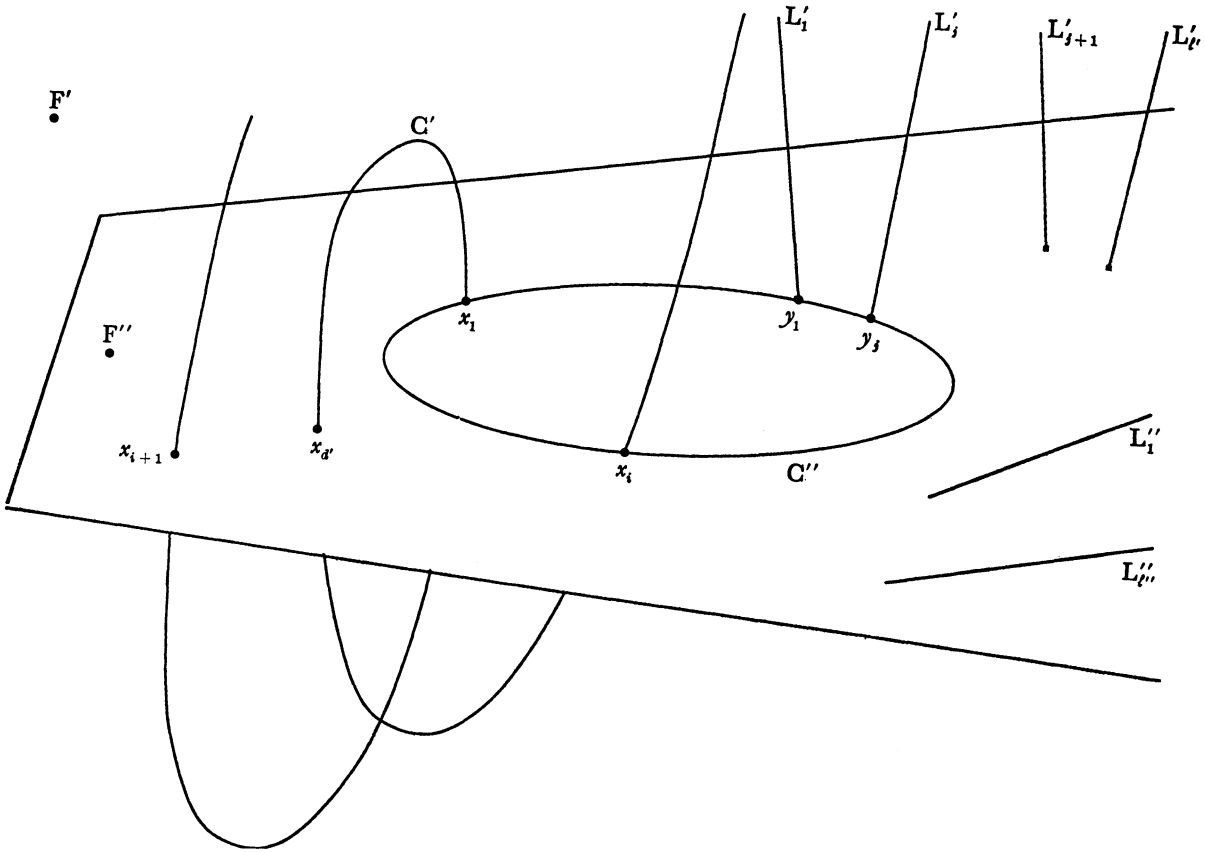
i) $d = d'+d''+j$, $g = g'+g''+i-1$, $\ell = \ell'-j+\ell''$, $e = e'+e''$,
ii) $1 \leqslant i \leqslant 4$, $d' \geqslant i$, $j \geqslant 0$, *si* $d''=1$ *alors* $i+j \leqslant 2$ *sinon* $i+j \leqslant 2d''-1$,
iii) $d'' \geqslant 1$, $d''+\ell'' \leqslant s$, $g'' \geqslant 0$, *si* $g'' > 0$ *alors* $d'' \geqslant g''+3$,
iv) $e'' = 0, 1$ *ou* e,
v) $(\ell-\ell')^+ \leqslant \ell'' \leqslant \ell$.

Si (d',g',ℓ',e') est dans $P(s-1)$, alors (d,g,ℓ,e) est dans $P(s)$.

Preuve. — Soient $C', L'_1, \ldots, L'_{\ell'}, F'$ les constituants du sous-schéma Y' de $\mathbf{V}$ dont l'existence est assurée par l'hypothèse $(d',g',\ell',e') \in P(s-1)$. Soit H un plan de $\mathbf{P}^3$ tel que $\mathbf{V}' = \pi^{-1}(H)$ coupe transversalement Y'. Soient $x_1, \ldots, x_{d'}, y_1, \ldots, y_{e'}$ les points d'intersection de $\mathbf{V}'$ avec C et avec les L'_n. On a bien $0 \leqslant j \leqslant \ell'$. On peut (cf. 4.2.2) supposer que $x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j$ sont en position générale dans $\mathbf{V}'$ de sorte que, d'après (4.1.2), il existe une courbe lisse connexe C'' de genre g'' et degré d'' dans $\mathbf{V}'$ passant par $x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j$ (si $d''=1$ et $i+j \leqslant 2$, c'est encore vrai). Quitte à déformer encore C' et les L'_n, on peut même supposer que C'' est générale au sens de 4.2.2 et 4.3.2 (on déduit facilement de $(d,g,\ell,e) \in Q(s)$ et $(d',g',\ell',e') \in Q(s-1)$ l'égalité

$$d''s + \ell - g'' + \ell''(s+1) + e'' + r'' = (s+1)^2$$

avec $r'' = d' - i + \ell' - j$). D'après 4.2.2 b) et 4.3.2 on peut encore déformer C',



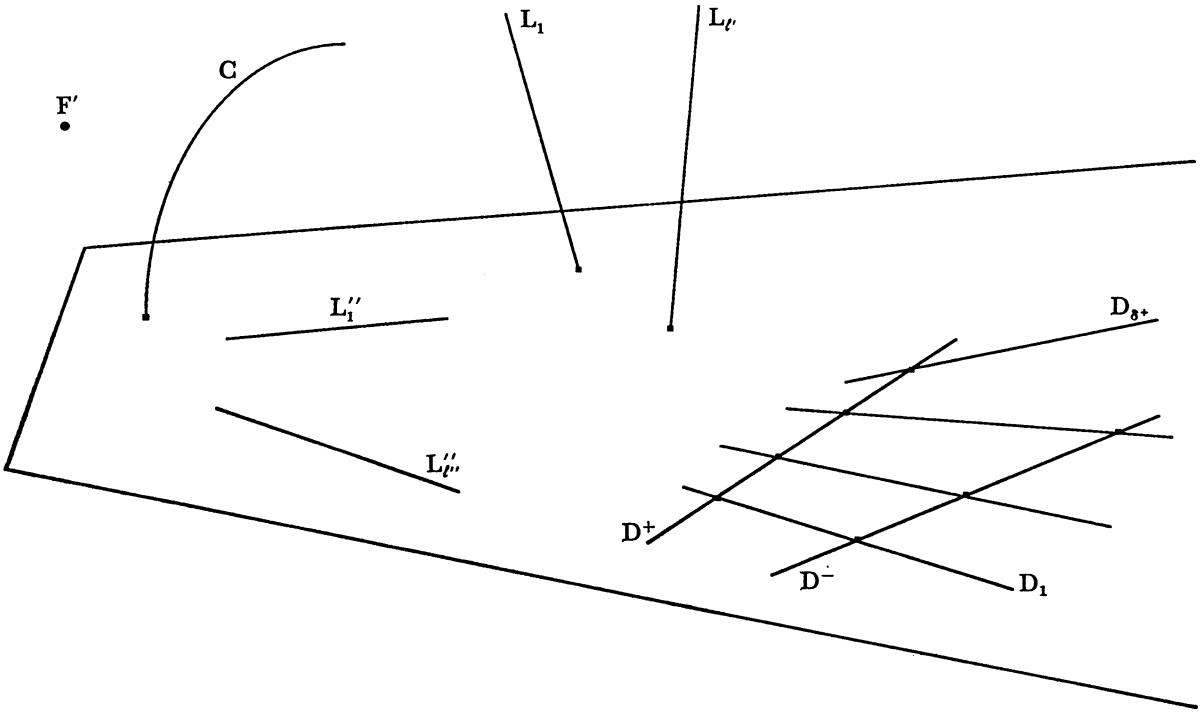
sans bouger $x_1, \ldots, x_i$, déformer $L'_{j+1}, \ldots, L'_{\ell'}$, et déformer F' de façon qu'il existe des droites $L''_1, \ldots, L''_{\ell''}$ et un ensemble F'' de e'' points dans $\mathbf{V}'$ tels que d'une part $C', L''_1, \ldots, L''_{\ell''}$, F'', $x_{i+1}, \ldots, x_{d'}$, $y_{j+1}, \ldots, y_{\ell'}$ vérifient la conclusion de 4.3.2 et d'autre part si $e'' = 1$ alors $F' \cup F''$ est sur une droite rencontrant C' et si $e'' \geqslant 2$ alors F'' est sur une droite rencontrant C''. On conclut par le raisonnement habituel ou lemme d'Horace ([Hi2] 4.2) que le schéma

$$Y = C' \cup C'' \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_j \cup L'_{j+1} \cup \ldots \cup L'_{\ell'} \cup L''_1 \cup \ldots \cup L''_{\ell''} \cup F' \cup F''$$

est tel que $\rho_Y(s)$ soit bijectif. Il reste à observer que d'après 4.2.3, $C' \cup C'' \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_j$ se déforme en courbe lisse.

4.5. *Proposition (construction avec nilpotents).* — *Soient* (d, g, ℓ, e) *dans* $Q^+(s)$ *et* (d, g, ℓ', e') *dans* $Q^+(s-1)$. *Soit* δ *l'entier qui vaut* e' *si* $e \geqslant e' + 2$ *et* $e' - e$ *sinon. On suppose* $2(\ell - \ell') \geqslant \min(\delta + 4, 2\delta + 2)$ *et* $\ell - \ell' \leqslant s$. *Si* (d, g, ℓ', e') *est dans* $P(s-1)$ *alors* (d, g, ℓ, e) *est dans* $P(s)$.

Preuve.



Si $\delta \leqslant 0$, on peut faire une construction sans nilpotents comme en 4.4, avec deux différences : il n'y a plus de courbe C'' et l'ensemble F'' doit être sur une droite rencontrant C'. Nous ne détaillons pas ce cas, d'autant qu'il ressemble aussi beaucoup au suivant.

Si $\delta \geqslant 2$, alors définissons δ^- et δ^+ par $\delta = \delta^- + \delta^+$ et $\delta^- \leqslant \delta^+ \leqslant \delta^- + 1$, et définissons e^- par $e^- = e$ si $e' > e$ et 0 sinon. On a $e' = e^- + \delta^- + \delta^+$. Du fait que (d, g, ℓ', e') est dans $P(s-1)$, on déduit par généralisation qu'il existe une courbe C générale de genre g et degré d, ℓ' droites $L_1, \ldots, L_{\ell'}$, un ensemble F' de e points alignés sur une droite rencontrant C, et deux ensembles $F^\pm$ de $\delta^\pm$ points alignés sur deux droites disjointes $D^\pm$ de projections concourantes, tels que si

$$Y' = C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_{\ell'} \cup F' \cup F^+ \cup F^-$$

alors $\rho_{Y'}(s-1)$ soit bijectif. Soit $\mathbf{V}'$ l'hyperplan de $\mathbf{V}$ contenant D^+ et D^-. On désigne par $\mathbf{P}^2$ sa projection dans $\mathbf{P}^3$. On peut supposer que $\mathbf{V}'$ coupe transversalement $C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_{\ell'} \cup F'$. Posons $F^\pm = \{ x_1^\pm, \ldots, x_{\delta^\pm}^\pm \}$, et choisissons dans $\mathbf{V}'$ des droites disjointes $D_1, \ldots, D_{\delta^+}$ telles que D_i contienne x_i^+ et x_i^- pour $i \leqslant \delta^-$ et si $\delta^- < \delta^+$, alors D_{δ^+} contient $x_{\delta^+}^+$ mais ne rencontre pas D^-.

4.5.1. *Lemme.* — *Il existe un sous-schéma* Γ *de* $\mathbf{V}$ *ayant même support et même lieu singulier que* $D^+ \cup D^- \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{\delta^+}$, *qui se déforme en réunion de* $\delta^+ + 2$ *droites disjointes, et dont le schéma résiduel à* $\mathbf{V}'$ *soit* $F^+ \cup F^-$ (*c'est-à-dire que l'idéal de* $F^+ \cup F^-$ *est le noyau du morphisme de* $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ *dans* $\mathcal{O}_\Gamma$ *défini par un générateur de l'idéal de* $\mathbf{V}'$).

Preuve (cf. [HH4]). — On raisonne par récurrence sur δ^+ en remarquant que pour $\delta^+ = 0$ il n'y a rien à démontrer. Soit Γ' un sous-schéma donné par l'hypothèse de récurrence et soit O un point de $\mathbf{V} - \mathbf{V}'$. Supposons par exemple $\delta^+ = \delta^-$ (l'autre cas est analogue et plus simple). Soit $P^{\pm}$ l'hyperplan contenant O, D_{δ^+} et $D^{\pm}$, et $\chi^{\pm}$ le premier voisinage infinitésimal de $x^{\pm}_{\delta^{\pm}}$ dans $P^{\pm}$. On prend pour Γ le schéma $\Gamma' \cup D_{\delta^+} \cup \chi^+ \cup \chi^-$ et on vérifie que Γ se généralise en $\Gamma' \cup L$ où L est la droite générique du plan contenant O et D_{δ^+}, et que le schéma résiduel à $\mathbf{V}'$ de Γ est égal à celui de Γ' augmenté des points $x^+_{\delta^+}$ et $x^-_{\delta^-}$.

Fin de la preuve de 4.5.

Définissons ℓ'' par $\ell = \ell' + \delta^+ + 2 + \ell''$. De $2\delta^+ \leqslant \delta + 1$ et de l'hypothèse $2(\ell - \ell') \geqslant \delta + 4$, on déduit $2\ell'' \geqslant -1$ et $\ell'' \geqslant 0$. On vérifie que

$$(\delta^+ + 2)\, s + 1 - g'' + \ell''(s+1) + e - e^- + d + \ell' = (s+1)^2$$

où $g'' = \delta^+ - 1$ est le genre arithmétique de $\Gamma_{\text{red}} = D^+ \cup D^- \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{\delta^+}$. On choisit alors des droites générales $L''_1, \ldots, L''_{\ell''}$ dans $\mathbf{V}'$ et on pose

$$Y = C \cup \Gamma \cup L_1 \cup \ldots \cup L_{\ell'} \cup L''_1 \cup \ldots \cup L''_{\ell''} \cup F' \cup F''$$

où F'' est un ensemble de $e - e^-$ points de $\mathbf{V}'$ alignés sur une droite générale rencontrant C. Quitte à déformer C et les L_i, l'hypothèse $\ell - \ell' \leqslant s$ permet d'appliquer 4.3.1 (on aura préalablement déformé $D_1, \ldots, D_{\delta^+}$ de façon à satisfaire l'hypothèse e) de 4.3.1). On peut ainsi conclure par la méthode habituelle.

Il reste à considérer le cas $\delta = 1$ qui se traite comme le précédent à ceci près qu'on prend pour Γ la réunion de deux droites concourantes augmentée d'un nilpotent au point singulier.

4.6. *L'arithmétique.*

4.6.1. *Bilan.* — Dans cet alinéa on va extraire l'essentiel des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents et réduire la démonstration de 2.5.1 à un problème purement arithmétique.

Définition. — Soient (d, g, ℓ, e) dans $Q^+(s)$ et (d', g', ℓ', e') dans $Q^+(s-1)$. Nous dirons que (d, g, ℓ, e) est *réductible* à (d', g', ℓ', e') ou que (d', g', ℓ', e') est *adapté* à (d, g, ℓ, e) dans chacun des trois cas suivants :

a) $d \geqslant d' \geqslant \min(4, 1 + g - g')$, $g \geqslant g'$, $\ell \geqslant \ell'$, $d - d' \geqslant g - g'$, $d - d' + \ell - \ell' \leqslant s + 1$; si $d - d' + \ell - \ell' = s + 1$ alors $e \leqslant e' + 1$; $e' = 0$, $e - 1$ ou e;

b) $d \geqslant d' \geqslant \min(4, 1 + g - g')$, $g \geqslant g'$, $d - d' \geqslant g - g'$, $\ell' > \ell$,
$3(\ell' - \ell) + \min(4, 1 + g - g') + 1 \leqslant 2(d - d')$,
$d - d' + \ell - \ell' \leqslant s$; $e' = 0, e - 1$ ou e;

c) $d = d'$, $g = g'$, $\ell - \ell' \leqslant s$, $2(\ell - \ell') \geqslant \delta + 4$ avec $\delta = e'$ si $e' \leqslant e - 2$, et $\delta = e' - e$ sinon.

Pour rappeler dans quel cas on se trouve, on écrira a-adapté, a-réductible, ... On retient des constructions 4.4 et 4.5 le

Lemme. — *Si* (d, g, ℓ, e) *dans* $Q^+(s)$ *est réductible à* (d', g', ℓ', e') *dans* $P(s-1)$, *alors* (d, g, ℓ, e) *est dans* $P(s)$.

Preuve. — On distingue les trois cas :

a) si $d > d'$, on applique 4.4 avec $d'' = d - d'$, $i = \min(4, 1 + g - g')$, $\ell'' = \ell - \ell'$, $e'' = e - e'$, $g'' = g - g' + 1 - i$. Si $d = d'$, on applique 4.5 (δ est négatif) ;
b) on applique 4.4 avec $\ell'' = 0$, $d'' = d + \ell - d' - \ell'$, $i = \min(4, 1 + g - g')$ $g'' = g - g' + 1 - i$, $e'' = e - e'$;
c) on applique 4.5.

Au vu du lemme précédent, il nous reste à prouver l'énoncé suivant.

4.6.1. *Proposition.*

i) $P(1)$ *contient* $Q^+(1)$.
ii) *Pour tout* $s \geqslant 2$, *tout élément de* $Q^+(s)$ *est réductible.*

C'est l'objet du reste du paragraphe.

4.6.2. *Les cas avec* $s \leqslant 5$.

$s = 1$. Dans ce cas l'énoncé signifie que la restriction $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(1))$ est injective, c'est-à-dire que Y n'est pas contenu dans un plan. La vérification est immédiate pour tous les quadruplets concernés, à savoir (1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (3, 0, 0, 1), (4, 0, 0, 0) et (5, 1, 0, 0).

$s \geqslant 2$. On indique en dessous de chaque quadruplet un quadruplet adapté. On précise le cas d'adaptation quand ce n'est pas a). Les quadruplets sont dans l'ordre croissant des (g, d). Lorsqu'un quadruplet n'est pas mentionné, c'est qu'il est réductible au même quadruplet que le quadruplet précédent :

$s = 2$

(1, 0, 3, 2)	(2, 0, 3, 0)	(3, 0, 2, 1)	(4, 0, 1, 2)...
(1, 0, 1, 1)	(2, 0, 1, 0)	(3, 0, 0, 1)	(4, 0, 0, 0)

$s = 3$

(1, 0, 6, 2)	(2, 0, 5, 3)...	(6, 0, 2, 3)...	(9, 0, 0, 2)
(1, 0, 3, 2)	(2, 0, 3, 0)	(5, 0, 1, 0)	(6, 0, 0, 1)
(5, 1, 3, 3)...	(7, 1, 2, 1)...	(7, 2, 2, 2)	(8, 2, 1, 3)...
(2, 0, 3, 0)	(7, 1, 0, 0)	(5, 0, 1, 0)	(7, 1, 0, 0)

$s = 4$

(1, 0, 10, 0)	(2, 0, 9, 1)	(3, 0, 8, 2)...	(8, 0, 4, 2)...	(12, 0, 1, 1)	(13, 0, 0, 2)
(1, 0, 6, 2) c)	(2, 0, 5, 3) c)	(3, 0, 5, 0)	(7, 0, 2, 0)	(8, 0, 1, 1)	(9, 0, 0, 2)
(5, 1, 7, 0)...	(8, 1, 4, 3)...	(12, 1, 1, 2)...	(7, 2, 5, 3)...	(11, 2, 2, 2)...	(9, 3, 4, 1)...
(3, 0, 5, 0)	(7, 0, 2, 0)	(10, 1, 0, 0)	(6, 1, 3, 0)	(10, 1, 0, 0)	(9, 3, 1, 1)
(11, 3, 2, 3)...	(14, 3, 0, 1)	(11, 4, 2, 4)			
(9, 2, 1, 0)	(10, 2, 0, 1)	(11, 4, 0, 0)			

$s = 5$

(1, 0, 14, 1)...	(7, 0, 9, 1)...	(11, 0, 5, 5)...	(16, 0, 1, 4)...	(5, 1, 11, 0)...	(10, 1, 6, 5)...
(1, 0, 10, 0)	(6, 0, 6, 0)	(11, 0, 2, 0)	(11, 0, 2, 0) b)	(5, 1, 7, 0)	(10, 1, 3, 0)
(15, 1, 2, 4)...	(7, 2, 5, 3)...	(11, 2, 6, 1)...	(14, 2, 3, 4)...	(9, 3, 8, 0)...	(11, 3, 6, 2)...
(10, 1, 3, 0) b)	(5, 1, 7, 0)	(9, 2, 4, 0)	(14, 2, 0, 0)	(5, 1, 7, 0)	(9, 2, 4, 0)
(13, 3, 4, 4)...	(18, 3, 0, 3)	(11, 4, 6, 3)	(12, 4, 5, 4)...	(13, 5, 5, 0)	(15, 5, 3, 2)...
(13, 3, 1, 0)	(13, 0, 0, 2)	(9, 2, 4, 0)	(12, 4, 2, 0)	(9, 2, 4, 0)	(13, 3, 1, 0)
(18, 5, 0, 5)...	(15, 6, 3, 3)...				
(13, 3, 1, 0) b)	(15, 6, 0, 0)				

4.6.3. *Le cas où* $g > g_{\max}(s-1)$.

Dans toute la suite on suppose $s \geqslant 6$ et on note $g_{\max}(s)$ le maximum de g dans $Q^+(s)$. Dans le présent alinéa, on traite le cas où g majore strictement $g_{\max}(s-1)$ et on distingue suivant la congruence de s modulo 3.

$s = 3s' + 1$. On vérifie que $g_{\max}(3s') = (3s'^2 + 5s')/2$ et que

$$(3s'^2 + 5s' + 3, (3s'^2 + 5s')/2, 0, 0)$$

est dans $Q^+(3s')$. On montre que ce quadruplet (d', g', ℓ', e') est a-adapté : on a $d' \geqslant 4$; d'autre part

$$d \geqslant 2g + 3 \geqslant 2g' + 3 + 2 = d' + 2,$$

et

$$d - d' \geqslant 2g + 3 - (2g' + 3) = 2(g - g') \geqslant g - g';$$

il reste à voir que $d + \ell \leqslant 3s'^2 + 8s' + 4$, mais le maximum de $d + \ell$ est celui de d et l'inégalité découle de

$$2\left[(3s'^2 + 8s' + 5)(3s' + 1) + 1 - \binom{3s'+4}{3} - \binom{3s'+3}{3}\right] + 3 > 3s'^2 + 8s' + 5.$$

En fait le maximum de d est $3s'^2 + 7s' + 5$.

$s = 3s' + 2$. On vérifie que $g_{\max}(3s' + 1) = (3s'^2 + 7s' + 2)/2$ et que si l'on pose $d' = 3s'^2 + 7s' + 5$, $\ell' = e' = 0$, alors (d', g', ℓ', e') est dans $Q^+(s - 1)$. On vérifie comme dans le cas précédent que ce quadruplet est a-adapté.

$s = 3s' + 3$. Ici on pose $d' = 3s'^2 + 8s' + 7$, $g' = (3s'^2 + 7s' + 2)/2$, $\ell' = s'$, $e' = 0$ et on montre que $q' = (d', g', \ell', e')$ est a ou b-adapté. Pour cela on observe que $g_{\max}(3s' + 2) = (3s'^2 + 9s' + 4)/2$, tandis que $g_{\max}(3s' + 3) = (3s'^2 + 11s' + 8)/2$. Posons

$$a = (3s'^2 + 11s' + 8)/2 - g \quad \text{et} \quad b = d - (3s'^2 + 11s' + 11 - 2a).$$

On vérifie que $0 \leqslant a \leqslant s' + 1$; si $a > 0$ alors $0 \leqslant b \leqslant 2a - 1$ et on calcule ℓ et e ; si $a = b = 0$, alors $\ell = e = 0$ sinon $\ell = 2a - 1 - b$, $e = 3s' + 4 + b - 3a$. Supposons d'abord $2a - 1 - b \geqslant s'$, et montrons que q' est a-adapté. On a $d - d' = 3s' + 4 - 2a + b$ et $g - g' = 2s' + 3 - a$ et la vérification est immédiate.

Supposons alors $2a - b \leqslant s'$ et montrons que q' est b-adapté. En plus des inégalités obtenues dans le cas précédent, il faut montrer que

$$3(s' - 2a + 1 + b) + 5 \leqslant 2(3s' + 4 - 2a + b),$$

soit $2a - b + 3s' > 0$, ce qui est clair.

4.6.4. *Le quadruplet q_0.*

On suppose désormais $g \leqslant g_{\max}(s - 1)$ et on considère dans $Q^+(s - 1)$ le quadruplet $q_0 = (d_0, g_0, \ell_0, e_0)$ avec $g_0 = g$, $d_0 \leqslant d$ et d_0 maximum. On a soit $d = d_0$ soit $\ell_0 = 0$. C'est autour de ce quadruplet qu'on va chercher un quadruplet adapté. Commençons par établir des inégalités.

Lemme. — *On a* i) $d_0 + \ell_0 \geqslant (2s^2 + 3s - 5)/6$,
ii) $(2s^2 - 2s - 4)/3s \leqslant d - d_0 + \ell - \ell_0 \leqslant s$.

Preuve. — i) On a

$$(d_0 + \ell_0)\, s \geqslant \binom{s+2}{3} + \binom{s+1}{3} - s$$

qui donne l'inégalité voulue.

ii) Pour la minoration, on a

1) $$ds + 1 - g + \ell(s + 1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+2}{3},$$

2) $$d_0(s - 1) + 1 - g + \ell_0 s + e_0 = \binom{s+2}{3} + \binom{s+1}{3},$$

d'où, par différence,

3) $$(d - d_0 + \ell - \ell_0)\, s + \ell + d_0 \geqslant (s + 1)^2 - s.$$

La première égalité donne

$$(\ell + d)\, s \leqslant \binom{s+3}{3} + \binom{s+2}{3} + g - 1$$

et les formules vues pour $g_{\max}$ en 4.6.3 montrent que

$$g \leqslant \frac{s^2 + 3s}{6},$$

d'où $\ell + d_0 \leqslant \ell + d \leqslant \left[\frac{s^2 + 5s + 8}{3}\right] = \left[\frac{s^2 + 5s + 7}{3}\right]$, et, à partir de 3), la minoration voulue.

Pour la majoration, à partir de 1) et 2), on obtient par différence

$$(d - d_0 + \ell - \ell_0)\, s + \ell + d_0 \leqslant (s+1)^2 + s - 1$$

d'où, en utilisant i),

$$d - d_0 + \ell - \ell_0 \leqslant \frac{4s^2 + 15s + 5}{6s}.$$

Il reste à observer que, pour $s \geqslant 6$, on a

$$\frac{4s^2 + 15s + 5}{6s} < s + 1.$$

4.6.5. *Le cas* $e_0 \leqslant 1$.

Si e_0 est nul q_0 est a-adapté.

Si $e_0 = 1$ et $d = d_0$ alors q_0 est c-adapté. En effet d'après 4.6.4, $\ell - \ell_0$ vaut au moins 2.

Si $e_0 = 1$, $d > d_0$ et $g > 0$, alors $(d_0, g-1, \ell_0, 0)$ est a-adapté.

Supposons enfin $e_0 = 1$, $d > d_0$, donc $\ell_0 = 0$, et $g = 0$. On vérifie facilement que le seul quadruplet de la forme $(d_0, 0, 0, 1)$ dans un $Q^+(s)$ est $(23, 0, 0, 1)$ dans $Q^+(6)$. Les quadruplets de $Q^+(7)$ qui y conduisent sont $(23, 0, 5, 2)$... $(28, 0, 0, 7)$ $(29, 0, 0, 0)$. Tous sont a- ou b-réductibles à $(19, 0, 5, 0)$.

4.6.6. *Le cas* $e_0 \geqslant 2$.

On suppose désormais $e_0 \geqslant 2$, et on considère le quadruplet q' défini comme suit $(q' = (d', g', \ell', e'))$.

Si $e_0 \leqslant 2g + 1$, on pose $e_0 = 2p - a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $d' = d_0 - p$, $g' = g - p + a$, $\ell' = \ell_0 + p$, $e' = 0$.

Si $e_0 \geqslant 2g + 2$, on pose $d' = d_0 + g - e_0$, $g' = 0$, $\ell' = \ell_0 + e_0 - g$, $e' = 0$. On vérifie (en utilisant $e_0 \geqslant 2$) que (d', ℓ, g', e') est dans $Q^+(s-1)$.

On va montrer que, dans la plupart des cas, (d', g', ℓ', e') est adapté à (d, g, ℓ, e).

4.6.7. *Lemme.* — *Si* $e_0 \leqslant 2g + 1$, *alors* (d', g', ℓ', e') *est a- ou b-adapté à* (d, g, ℓ, e).

Preuve. — De $e_0 \geqslant 2$ on déduit $g \geqslant 1$. Remarquons que $p \leqslant g + 1$ d'où $d' \geqslant g + 2$, d'où, si $g \geqslant 2$, $d' \geqslant 4$. Si $g = 1$ alors $p = 1$, $a = 0$ et $g - g' = 1$ donc $d' \geqslant 2$ suffit. On voit que si $\ell' \leqslant \ell$, alors q' est adapté. Supposons donc $\ell' > \ell$ et montrons les inégalités requises. On a

$$d - d' + \ell - \ell' + g' - g = d - d_0 + \ell - \ell_0 + a - p$$

et
$$2(d - d') + 3(\ell - \ell') - 5 = 2(d - d_0) + 3(\ell - \ell_0) - p - 5.$$

Il nous suffit donc de prouver que

$$d - d_0 + \ell - \ell_0 \geqslant \max(4, p + 1).$$

Cette inégalité découle de 4.6.4 et de $p \leqslant [s/2]$ (il faut vérifier un par un les cas $6 \leqslant s \leqslant 10$).

4.6.8. *Le cas où* $g \leqslant [(s - 3)/2]$.

Le lemme précédent achève de traiter le cas où $2g \geqslant s - 2$, soit $g \geqslant [(s - 1)/2]$. On peut donc supposer dans la suite $g \leqslant [(s - 3)/2]$, et $e_0 \geqslant 2g + 2$.

Lemme. — *Sous les hypothèses précédentes, si* $d + g \geqslant s + 3$, *alors* q' *est adapté.*

Preuve. — Si $d = d_0$ on a $d' \geqslant 4$ grâce à $d + g \geqslant s + 3$. Si $d \neq d_0$ on a $\ell_0 = 0$ d'où, d'après 4.6.4,

$$d_0 \geqslant \frac{2s^2 + 3s - 5}{6} \geqslant s + 3$$

et on a encore $d' \geqslant 4$. On en déduit que si $\ell' \leqslant \ell$, alors q' est adapté.

Supposons donc $\ell' > \ell$. On a alors

$$(d - d') + \ell - \ell' + g' - g = d - d_0 + \ell - \ell_0 - g$$

et
$$2(d - d') + 3(\ell - \ell') - 5 = 2(d - d_0) + 3(\ell - \ell_0) + g - e_0 - 5.$$

On doit donc vérifier

(*) $$d - d_0 + \ell - \ell_0 \geqslant g \quad \text{et} \quad 2(d - d_0) + 3(\ell - \ell_0) \geqslant e_0 + 5 - g.$$

Si $d = d_0$ ces inégalités découlent de 4.6.4 et des majorations de g et e_0. On peut donc supposer désormais que ℓ_0 est nul et $d_0 < d$. Dans ce cas, le calcul explicite de d_0 et $e_0 - g$ conduit à $e_0 - g \leqslant (2s - 2)/3$. On vérifie alors (*) grâce à 4.6.4, sauf si $s = 7$ auquel cas on observe $e_0 - g = 1$ ce qui permet de conclure encore par 4.6.4.

4.6.9. *Le cas où d est petit.*

Il nous reste à traiter le cas où $g \leqslant [(s - 3)/2]$, $e_0 \geqslant 2g + 2$ et $d + g \leqslant s + 2$. Remarquons d'abord que dans ce cas $d_0 = d$. Cela résulte de

$$(s - 1)(s + 2) + 1 \leqslant \binom{s + 2}{3} + \binom{s + 1}{3}.$$

On va montrer que (d_0, g, ℓ_0, e_0) est c-adapté. Il faut donc montrer que $2(\ell - \ell_0) \geqslant e_0 + 4$ ou, si $e \leqslant e_0 + 1$, $2(\ell - \ell_0) \geqslant e_0 - e + 4$.

Comme $e_0 \leqslant s - 1$, on peut conclure par 4.6.4 pour $s \geqslant 11$ et $s = 9$. Pour $s = 6, 8, 10$, 4.6.4 donne $2(\ell - \ell_0) \geqslant s + 2$. Il reste donc à traiter le cas $e_0 = s - 1$ et $e = 0$. Comme on le voit sur le tableau suivant, la condition requise est remplie.

	d	g	ℓ	e	d_0	g	ℓ_0	e_0
$s = 6$	8	0	13	0	8	0	8	2
	1	0	19	0	1	0	14	1
	7	1	14	0	7	1	9	2
$s = 8$	4	0	28	0	4	0	21	7
$s = 10$	1	0	45	0	1	0	30	6
	12	0	35	0	12	0	20	7
	11	1	36	0	11	1	21	7
	10	2	37	0	10	2	22	7
	9	3	38	0	9	3	23	7

Enfin, pour $s = 7$, 4.6.4 donne seulement $2(\ell - \ell_0) \geqslant s + 1$. Il faut donc vérifier les cas où $(e, e_0) = (0, 6)$ $(0, 5)$, $(1, 6)$ $(7, 5)$. Aucun de ces cas ne se présente, comme le montre le tableau suivant, traitant les quadruplets concernés avec $e = 0, 1, 7$.

	d	g	ℓ	e	d_0	g	ℓ_0	e_0
$s = 7$	5	0	21	0	5	0	15	4
	4	0	21	7	4	0	16	3
	6	0	20	1	6	0	14	5
	5	1	21	1	5	1	15	5

5. Démonstration de 2.5.2

5.0. Ce paragraphe est consacré à la démonstration de 2.5.2. Elle est tout à fait semblable à celle de 2.5.1 mais plus simple puisque g est nul. C'est pourquoi on se borne à signaler les éléments nouveaux. On note, pour $s \geqslant 1$, $T(s)$ l'ensemble des triplets (d, ℓ, e) vérifiant

$$d \geqslant 1, \quad \ell \geqslant 0, \quad 0 \leqslant e \leqslant s$$

et

$$ds + 1 + \ell(s + 1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+1}{3}$$

et $P(s)$ l'ensemble de ceux qui vérifient la conclusion de 2.5.2. On doit donc montrer que $P(s)$ contient $T(s)$ pour $s \geqslant 1$. On note $\mathbf{V}$ le schéma $\mathbf{V}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-2))$, $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{P}^3$ la projection et $\mathbf{V}' \subset \mathbf{V}$ l'image réciproque d'un plan.

5.1. *Courbes de* $\mathbf{V}'$. — On note ici Z_d^3 la composante irréductible dans le schéma de Hilbert de $\mathbf{V}'$ de l'ouvert des courbes rationnelles lisses, de degré d se projetant birationnellement dans $\mathbf{P}^2$. Cet ouvert O est irréductible. En effet soit M la variété lisse connexe des morphismes de degré d de $\mathbf{P}^1$ dans $\mathbf{P}^2$, soit $u : M \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^2$ le morphisme tautologique. Alors O est l'image d'un ouvert du fibré géométrique $\mathbf{V}((p_{1*}\, u^*\, \mathcal{O}(2))^\vee)$.

5.1.1. *Proposition.* — *Soient* $L_1, \ldots, L_d$ *des droites de* $\mathbf{V}'$ *telles que la réunion* $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *soit connexe de genre arithmétique nul. Alors* $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *est contenue dans* Z_d^3.

Preuve. — Soit $X \to S$ une déformation abstraite de $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ en courbe lisse, autrement dit la fibre spéciale $X(s_0)$ est $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ et la fibre générale est une courbe rationnelle lisse ; on peut même supposer que S est une courbe lisse et X une surface lisse. Le schéma des morphismes relatif $\mathrm{Mor}_S(X, \mathbf{P}^2_S)$ est lisse et irréductible au-dessus de S. Si $u : X \times_S \mathrm{Mor}_S(X, \mathbf{P}^2_S) \to \mathbf{P}^2$ est le morphisme tautologique, $p_{2*}\, u^*\, \mathcal{O}(2)$ est localement libre et le fibré géométrique associé $G \to \mathrm{Mor}_S(X, \mathbf{P}^2_S)$ vient avec un morphisme naturel m de $X \times_S G$ vers $\mathbf{V}'$. Soit g le point de G correspondant au plongement de $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ dans $\mathbf{V}'$. On voit alors que $(m, \mathbf{1}_G)$ de $X \times_S G$ vers $\mathbf{V}' \times G$ est un plongement au voisinage de $X(s_0) \times \{ g \}$. Il définit donc un morphisme de $S \times G$ vers Hilb $\mathbf{V}'$ qui constitue une déformation lisse de $X(s_0)$.

5.1.2. *Proposition.* — *Par* $2d$ *points en position générale dans* $\mathbf{V}'$ *passe une courbe rationnelle (générale) de degré* d.

Preuve. — On utilise les méthodes de Perrin ([P]) : il suffit de montrer que si C est une courbe rationnelle générale de degré d, de fibré normal N et si $P_1, \ldots, P_{2d}$ sont des points généraux de C, alors $H^1 N(-\Sigma P_i)$ est nul. Or la projection dans $\mathbf{P}^2$ induit une suite exacte

$$0 \to L \to N \to M \to 0$$

avec L et M inversibles de degrés $2d$ et $3d - 2$, d'où la conclusion.

5.2. *Courbes de* $\mathbf{V}$. — On note ici Z_d^4 la composante irréductible dans le schéma de Hilbert de l'ouvert des courbes rationnelles lisses de degré d dans $\mathbf{V}$ (on montre comme en 5.1 l'irréductibilité).

5.2.1. *Proposition.* — *Soient* $C_1, \ldots, C_e$ *des courbes rationnelles lisses se coupant quasi-transversalement dans* $\mathbf{V}$. *On suppose que leur réunion* X *est connexe et de genre arithmétique nul. Alors* X *est contenue dans* Z_d^4.

Preuve. — On applique ([HH2] 4.5) qui s'adapte au cas d'une telle réunion : dans une variété dont le fibré tangent est engendré par ses sections, la réunion X de deux courbes C et D localement intersections complètes se coupant quasi-transversalement en un seul point et dont les fibrés normaux vérifient $H^1(C, N_C) = H^1(D, N_D) = 0$, cette réunion est lissifiable et vérifie $H^1(X, N_X) = 0$.

5.2.2. *Proposition.*

a) *Par d points généraux de* $\mathbf{V}'$ *passe une courbe (générale) de* Z_d^4.

b) *Plus précisément, si* C *est suffisamment générale dans* Z_d^4, *le morphisme rationnel de* Z_d^4 *vers* $\mathrm{Hilb}^d \mathbf{V}'$ *qui à* C′ *associe* $C' \cap \mathbf{V}'$ *est lisse au point* C.

Preuve. — Suivant les méthodes de Perrin, il suffit de prouver que pour X générale dans Z_d^4, $H^1(X, N_X(-1))$ est nul. Or, $N_X(-1)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(1) \to N_X(-1) \to N'_X(-1) \to 0$$

où $N'_X(-1)$ est le fibré normal à la projection dans $\mathbf{P}^3$. Par suite, si X est lisse, $N_X(-1)$ est engendré par ses sections et n'a pas de cohomologie.

5.3. *Énoncés en dimension inférieure.*

5.3.1. *Lemme plan.* — *Soient* s, d, ℓ, e, r *des entiers vérifiant* $s \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$, $r \geqslant 0$ *et*

$$ds + 1 + \ell(s+1) + e + r = \binom{s+2}{2} + \binom{s}{2} = s^2 + s + 1.$$

Soient $L_0, \ldots, L_d, L_{d+1}, \ldots, L_{d+\ell}$ *des droites de* $\mathbf{V}'$ *telles que*

a) L_1 *rencontre* L_0,

b) *pour* $i = 2, \ldots, d$, L_i *rencontre, parmi les droites* $L_0 L_1, \ldots, L_{i-1}$ *exactement une droite, distincte de* L_0,

c) *pour* $i = d+1, \ldots, d+\ell$, L_i *ne rencontre pas* $L_0, \ldots, L_{i-1}$,

d) *les projections dans* $\mathbf{P}^2$ *de* $L_0, \ldots, L_{d+\ell}$ *sont trois à trois disjointes.*

Alors il existe e points sur L_0 *et r autres points dont la réunion* Y *avec* $L_1, \ldots, L_{d+\ell}$ *soit telle que* $\rho_Y(s)$ *soit bijectif, où* $\rho_Y(s) : H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(s)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(s-2)) \to H^0(\mathcal{O}_Y(s))$ *désigne le morphisme naturel.*

Preuve. — Analogue à celle de 4.3.1 (ici il n'y a pas d'exceptions).

5.3.2. *Corollaire.* — *Soient* s, d, ℓ, e, r *comme dans* 5.3.1 *et* C *suffisamment générale dans* Z_d^3. *Soient* L_0 *une droite suffisamment générale de* $\mathbf{V}'$ *rencontrant* C, E *une partie à e éléments suffisamment générale dans* L_0, *et* F *une partie suffisamment générale à r éléments dans* $\mathbf{V}'$. *Alors il existe des droites* $L_1, \ldots, L_\ell$ *telles que, pour* $Y = C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell \cup E \cup F$, $\rho_Y(s)$ *soit bijectif.*

Preuve. — Analogue à celle de 4.3.2.

5.3.3. *Lemme.* — *Soit* Γ *dans* $\mathbf{V}'$ *une réunion de droites de degré d et genre g dont la projection dans* $\mathbf{P}^2$ *est encore une réunion de droites. Soit* L *une droite rencontrant* Γ *en au plus un point. Soient* s, e, r *des entiers vérifiant* $0 \leqslant e \leqslant s$, $d \leqslant s$, *et tels que si* $d = s$ *alors* $e \leqslant 1$, *et*

$$ds + 1 - g + e + r = s^2 + s + 1.$$

Alors il existe un ensemble F *de* $e + r$ *points dont e sur* L *tel que le morphisme* $\rho_{\Gamma \cup F}(s)$ *soit injectif.*

Preuve. — Si $d \leqslant s-1$ alors $1-g \leqslant d \leqslant s-1$ donc $e+r \geqslant s+2$. Il suffit donc de traiter le cas $d=s$ et $e=0$. Soit ν le nombre de points singuliers de Γ. On a $g=1-s+\nu$ donc $r=\nu+1$. Si $L_1, \ldots, L_s$ sont les droites formant Γ et si ν_i est le nombre de points d'intersection de L_i avec $L_1 \cup \ldots \cup L_{i-1}$, alors $\nu=\nu_2+\ldots+\nu_s$. On dispose ν_i points dans $\pi^{-1}\pi(L_i)-\pi^{-1}\pi(\Gamma-L_i)$ pour chaque i et le dernier point hors de $\pi^{-1}\pi(\Gamma)$, le tout de façon que la projection de F dans $\mathbf{P}^2$ soit injective, et on constate que si σ est dans le noyau de $\rho_{\Gamma\cup F}(s)$, alors σ s'annule sur $\pi^{-1}\pi(L_s), \ldots, \pi^{-1}\pi(L_1)$, ce qui permet de conclure.

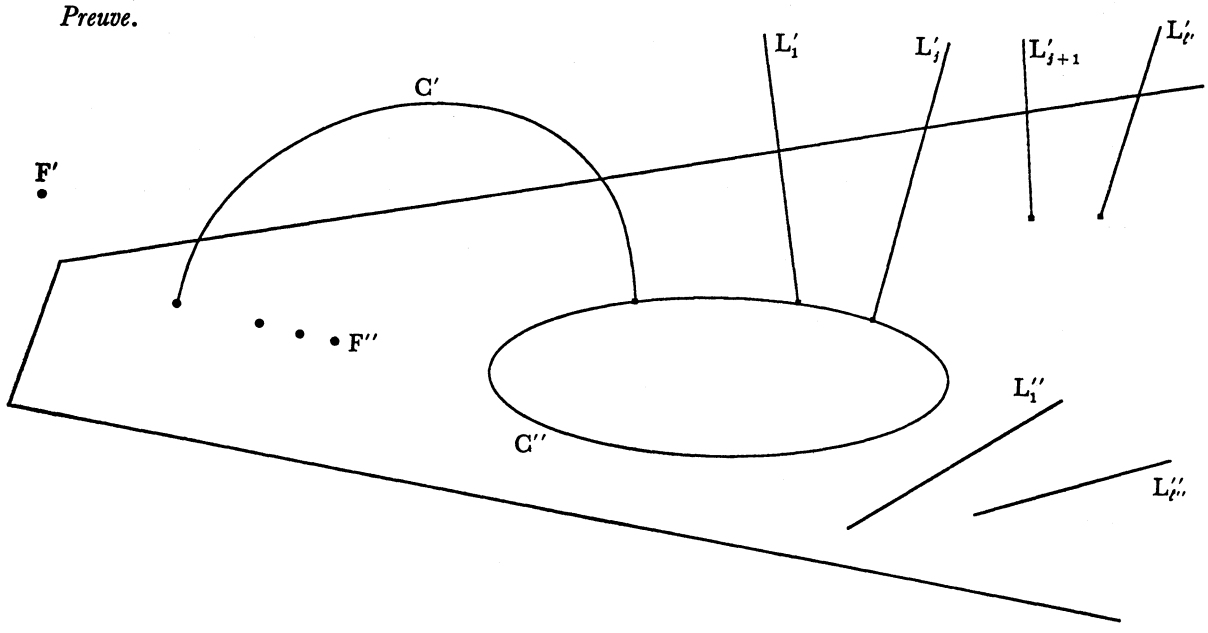
5.4. *Construction sans nilpotents.*

Proposition. — *Soit* $s \geqslant 2$, (d,ℓ,e) *dans* $T(s)$ *et* (d',ℓ',e') *dans* $T(s-1)$. *On suppose*

$$d' \leqslant d, \quad 3(\ell'-\ell)+1 \leqslant 2(d-d'), \quad e'=0, e-1 \text{ ou } e.$$

Si (d',ℓ',e') *est dans* $P(s-1)$ *alors* (d,ℓ,e) *est dans* $P(s)$.

Preuve.



Elle est analogue à celle de 4.4, avec $i=1$ pour le cas $d'<d$ et à celle de 4.5 avec $\delta=0$ pour le cas $d=d'$.

5.5. *Construction avec nilpotents.*

Proposition. — *Soient* $s \geqslant 2$, (d,ℓ,e) *dans* $T(s)$ *et* (d',ℓ',e') *dans* $T(s-1)$. *On suppose* $d=d'$. *Soit* δ *l'entier qui vaut* e' *si* $e \geqslant e'+2$ *et* $e'-e$ *sinon. On suppose* $\ell-\ell' \leqslant s$ *et si* $\ell-\ell'=s$ *alors* $e' \geqslant e-1$, *et aussi*

$$2(\ell-\ell') \geqslant \min(\delta+4, 2\delta+2).$$

Si (d',ℓ',e') *est dans* $P(s-1)$, *alors* (d,ℓ,e) *est dans* $P(s)$.

Preuve. — Identique à celle de 4.5, mais dans la démonstration du lemme, au lieu d'un seul point O, il faut choisir un point général O_0 dans $\mathbf{V}'$ et quatre points généraux $O_1, \ldots, O_4$ dans $\mathbf{V} - \mathbf{V}'$, parce que par deux droites concourantes de $\mathbf{V}'$ et $O_0, O_1, \ldots, O_4$ passe exactement une section de $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{P}^3$.

5.6. *L'arithmétique.*

Ici on dira, pour $s \geqslant 2$, que (d, ℓ, e) est *réductible à* (d', ℓ', e') dans chacun des deux cas suivants :

a) $d \geqslant d'$, $3(\ell' - \ell) + 1 \leqslant 2(d - d')$; $e' = 0$, $e - 1$ ou e,

b) $d' = d$, $2(\ell - \ell') - 4 \geqslant \delta$ où $\delta = e' - e$ si $e' \geqslant e - 1$ et e' sinon; de plus $\ell - \ell' \leqslant s$, et si $\ell - \ell' = s$ alors $e' \geqslant e - 1$.

Il est clair que si (d, ℓ, e) dans $T(s)$ est réductible à (d', ℓ', e') dans $P(s-1)$, alors (d, ℓ, e) est dans $P(s)$. Comme au § 4, il nous faut prouver que $P(1)$ contient $T(1)$ et que pour $s \geqslant 2$, tout élément de $T(s)$ est réductible. On reprend les conventions de 4.6.1.

Pour $s = 1$, il y a trois triplets $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(3, 0, 0)$ dans $T(1)$ et pour chacun on peut trouver un schéma Y non contenu dans un plan (réunion de deux droites disjointes, réunion d'une conique avec un point hors de son plan, cubique gauche).

Pour $s = 2$, les triplets sont $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$, $(4, 0, 2)$, $(5, 0, 0)$. Il suffit de construire un sous-schéma de $\mathbf{P}^3$ correspondant à chaque triplet et non contenu dans une quadrique. On vérifie dans les cinq cas que la construction est possible.

5.6.1. *Lemme.* — *Pour $s \geqslant 3$, et $d \geqslant s$, (d, ℓ, e) est a-réductible.*

Preuve. — Soit (d_0, ℓ_0, e_0) le triplet de $T(s-1)$ avec $d_0 \leqslant d$ et d_0 maximum. On a

$$d_0 = \min\left(d, \left[\frac{1}{s-1}\left(\binom{s+2}{3} + \binom{s}{3} - 1\right)\right]\right)$$

et dans les deux cas, $d_0 \geqslant s$, sauf pour $s = 3$ et $d_0 = 3$ auquel cas $e_0 = 1$. On a de toute façon $d_0 - e_0 \geqslant 1$. On pose $d' = d_0 - e_0$, $\ell' = \ell_0 + e_0$, $e' = 0$. Si $d = d_0$, il nous faut montrer que

$$3(\ell_0 - \ell) + e_0 + 1 \leqslant 2(d - d_0).$$

Il suffit donc de voir que $\ell_0 < \ell - (s-1)/3$.

De $ds + 1 + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3} + \binom{s+1}{3}$, on tire d'une part

1) $$d + \ell \leqslant \frac{s^2 + 3s + 5}{3}$$

et d'autre part

$$ds + 1 + \ell(s+1) \geqslant \binom{s+3}{3} + \binom{s+1}{3} - s.$$

On a donc

$$d(s-1)+1+\left(\ell-\frac{s-1}{3}\right)s\geqslant\binom{s+3}{3}+\binom{s+1}{3}-s-d-\ell-s\frac{s-1}{3}.$$

Et grâce à 1), on a bien

$$\binom{s+3}{3}+\binom{s+1}{3}-s-d-\ell-s\frac{s-1}{3}>\binom{s+2}{3}+\binom{s}{3}.$$

Supposons maintenant $d_0<d$. On a alors $\ell_0=0$ et il nous suffit de montrer que

$$3\ell+2d\geqslant 2d_0+s.$$

Or dans $T(s)$, $3\ell+2d$ atteint son minimum pour $\ell=0$ ou 1. On peut donc se contenter de traiter ce cas, qui découle d'un calcul explicite.

5.6.2. *Lemme.* — *Pour $s\geqslant 3$ et $d\leqslant s-1$, (d,ℓ,e) est réductible.*

Preuve. — On distingue suivant la congruence de s modulo 3.

Si $s=3s'$ alors $\ell=3s'^2+2s'+1-d$ et $e=d-1$.

Si $d\leqslant s'$ alors $(d,3s'^2-d,2s'+d+1)$ est b-adapté.
Si $d\geqslant s'+1$ alors $(s'+1,3s'^2-s'-2,0)$ est a-adapté.

Si $s=3s'+1$ alors $\ell=3s'^2+4s'+2-d$ et $e=d-1$.

Dans ce cas $(d,3s'^2+2s'+1-d,d-1)$ est a-adapté.

Si $s=3s'+2$ alors

si $d\leqslant s'+1$, on a

$$\ell=3s'^2+6s'+3-d,\quad e=2s'+1+d,\quad\text{et}\quad(1,3s'^2+4s'+1,0)$$

est a-adapté;
si $d\geqslant s'+2$, on a

$$\ell=3s'^2+6s'+4-d,\quad e=d-s'-2,$$
$$\text{et}\quad(d-s'-1,3s'^2+5s'+3-d,d-s'-2)$$

est a-adapté.

6. Démonstration de 2.5.3

6.0. Ce paragraphe est consacré à la démonstration de 2.5.3. Elle est analogue à celle de 2.5.2, les éléments nouveaux résultant de la présence des coniques. On note, pour $s\geqslant 1$, $T(s)$ l'ensemble des triplets (d,c,e) vérifiant

$$d\geqslant 2,\quad c\geqslant 0,\quad 0\leqslant e\leqslant s,$$

et

$$ds+1+c(2s+1)+e=\frac{2s^3+3s^2+13s+6}{6},$$

et on note P(s) l'ensemble de ceux qui vérifient la conclusion de 2.5.3. On veut montrer que P(s) contient T(s). Remarquons que dans T(s), d ne prend pas toutes les valeurs entre 2 et son maximum. On note $\mathbf{V}$ le schéma $\mathbf{V}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-3))$, $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{P}^3$ la projection et $\mathbf{V}'$ l'image réciproque d'un plan.

6.1. *Courbes de* $\mathbf{V}'$. — On note Z_d^3 la composante irréductible dans le schéma de Hilbert de $\mathbf{V}'$ de l'ouvert (irréductible comme en 5.1) des courbes rationnelles lisses de degré d se projetant birationnellement dans $\mathbf{P}^2$.

6.1.1. *Proposition.* — *Soient* $L_1, \ldots, L_d$ *des droites de* $\mathbf{V}'$ *telles que la réunion* $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *soit connexe de genre arithmétique nul. Alors* $L_1 \cup \ldots \cup L_d$ *est dans* Z_d^3.

Preuve. — Cf. 5.1.1.

6.1.2. *Proposition.* — *Par* $3d - 1$ *points en position générale dans* $\mathbf{V}'$ *passe une courbe rationnelle générale de degré* d.

Preuve. — Analogue à celle de 5.1.2. Mais ici le sous-fibré L est de degré $3d$.

6.2. *Courbes de* $\mathbf{V}$. — On note Z_d^4 la composante irréductible, dans le schéma de Hilbert, de l'ouvert (irréductible comme en 5.1) des courbes rationnelles lisses de degré d dans $\mathbf{V}$. Les résultats et les démonstrations de 5.2 se transcrivent mot à mot.

6.3. *Énoncés en dimension inférieure.*

On démontre les analogues de 5.3.3 et 5.3.2. Il n'y a pas ici d'énoncé plus fin, analogue à 5.3.1.

6.3.1. *Lemme.* — *Soit* Γ *dans* $\mathbf{V}'$ *une réunion de droites de degré* d *et genre* g *dont la projection dans* $\mathbf{P}^2$ *est encore une réunion de droites. Soit* L *une droite rencontrant* Γ *en au plus un point. Soient* s, e, r *des entiers vérifiant* :

$$0 \leqslant e \leqslant s, \quad d \leqslant s - 1, \quad \text{si } d = s - 1 \text{ alors } e \leqslant 1,$$

et

$$ds + 1 - g + e + r = s^2 + 2.$$

Alors il existe un ensemble F *de* $e + r$ *points dont* e *sur* L *tel que le morphisme* $\rho_{\Gamma \cup F}(s)$ *soit injectif.*

Preuve. — Analogue à celle de 5.3.3.

6.3.2. *Corollaire.* — *Soient* s, d, ℓ, e, r *vérifiant* :

$$s \geqslant 1, \quad d \geqslant 1, \quad \ell \geqslant 0, \quad 0 \leqslant e \leqslant s, \quad r \geqslant 0, \quad d + \ell \leqslant s - 1,$$
$$\text{si } d + \ell = s - 1 \text{ alors } e \leqslant 1,$$

et

$$ds + 1 + \ell(s + 1) + e + r = s^2 + 2,$$

et soit C *suffisamment générale dans* Z_d^3. *Soient* L_0 *une droite suffisamment générale de* $\mathbf{V}'$ *rencontrant* C, E *une partie à e éléments suffisamment générale dans* L_0 *et* F *une partie suffisamment générale à r éléments dans* $\mathbf{V}'$. *Alors il existe des droites* $L_1, \ldots, L_\ell$ *telles que pour* $Y = C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell \cup E \cup F$, $\rho_Y(s)$ *soit injectif.*

Preuve. — Analogue à celle de 4.3.2.

6.4. *Construction sans nilpotents.*

Proposition. — *Soit* $s \geqslant 2$, (d, c, e) *dans* $T(s)$ *et* $(d', c' e')$ *dans* $T(s-1)$. *On suppose que*

$$d' \leqslant d, \quad e' = 0, e-1 \text{ ou } e,$$
$$d - d' + 2c - 2c' \leqslant s-1 \quad \text{et si } d - d' + 2c - 2c' = s-1 \text{ alors } e' \geqslant e-1,$$
$$3(d-d') + 7(c-c') \geqslant 2.$$

Si (d', c', e') *est dans* $P(s-1)$ *alors* (d, c, e) *est dans* $P(s)$.

Preuve. — Analogue à celle de 4.4, compte tenu de 6.1, 6.2, 6.3.

6.5. *Construction avec nilpotents.*

Proposition. — *Soit* $s \geqslant 2$, (d, c, e) *dans* $T(s)$ *et* (d', c', e') *dans* $T(s-1)$. *On suppose* $d = d'$. *Soit* δ *l'entier qui vaut* e' *si* $e \geqslant e' + 2$ *et* $e' - e$ *sinon. On suppose que*

$$2c - 2c' \leqslant s-1, \quad \text{si } 2c - 2c' = s-1 \text{ alors } e' \geqslant e-1,$$

et

$$4(c-c') \geqslant \delta + 4.$$

Si (d', ℓ', e') *est dans* $P(s-1)$ *alors* (d, ℓ, e) *est dans* $T(s)$.

Preuve. — Analogue à celle de 4.5, les droites sont remplacées par $c - c'$ coniques dégénérées, la première contient les ensembles F^+ et F^- qui sont donc ici sur deux droites concourantes. Les $c - c' - 1$ autres coniques rencontrent la première au gré des besoins.

6.6. *L'arithmétique.*

Ici on dira, pour $s \geqslant 2$, que (d, c, e) est *réductible* à (d', c', e') dans chacun des deux cas suivants :

a) $d \geqslant d'$, $3(d-d') + 7(c-c') \geqslant 2$, $d - d' + 2(c-c') \leqslant s-1$ (et si $d - d' + 2(c-c') = s-1$ alors $e' \geqslant e-1$), $e' = 0$, $e-1$ ou e.

b) $d' = d$, $4(c-c') \geqslant \delta + 4$ où $\delta = e' - e$ si $e' = e-1$ et $\delta = e'$ sinon, $2(c-c') \leqslant s-1$ (et si $2(c-c') = s-1$ alors $e' \geqslant e-1$).

6.6.1. *Lemme.* — *Pour $s \geqslant 5$ et $d \geqslant 2s$, (d, c, e) est a-réductible.*

Preuve. — Soit (d_0, c_0, e_0) le triplet de $T(s-1)$ avec $d_0 \leqslant d$ et d_0 maximum. On a

$$d_0 \geqslant \min\left(d-1, \left[\frac{1}{s-1}\left(\binom{s+2}{2} + \binom{s-1}{2} - 1\right)\right]\right).$$

On vérifie que pour $s \geqslant 5$ ceci implique $d_0 \geqslant 2s-1$ et si $d_0 = 2s-1$, alors $e_0 \leqslant s-2$. On pose

$$d' = d_0 - 2e_0, \quad c' = c_0 + e_0, \quad e' = 0.$$

Si $d = d_0$, il nous faut prouver que $7(c-c_0) \geqslant e_0 + 2$ et $2(c-c_0) \leqslant s-2$. On va montrer que

$$c - \frac{s-1}{2} < c_0 < c - \frac{s}{7}.$$

De $ds + 1 + c(2s+1) + e = \dfrac{2s^3+3s^2+13s+6}{6}$ on tire

$$\frac{2s^3+3s^2+7s+6}{6} \leqslant ds + 1 + c(2s+1) \leqslant \frac{2s^3+3s^2+13s+6}{6}$$

et

$$\frac{s^2+s+4}{3} \leqslant d + 2c \leqslant \frac{2s^2+3s+13}{6}.$$

D'où

$$\begin{aligned} d(s-1) + 1 + \left(c - \frac{s}{7}\right)(2s-1) &\geqslant \frac{2s^3+3s^2+7s+6}{6} - d - 2c - \frac{(2s-1)(s-1)}{7} \\ &\geqslant \frac{2s^3+3s^2+7s+6}{6} - \frac{2s^2+3s+13}{6} - \frac{s(2s-1)}{7} \end{aligned}$$

et on vérifie, pour $s \geqslant 5$, que cette quantité majore strictement $\binom{s+2}{3} + \binom{s-1}{3}$.

De façon analogue, on obtient

$$\begin{aligned} d(s-1) + 1 + \left(c - \frac{s-1}{2}\right)(2s-1) &\leqslant \frac{2s^3+3s^2+13s+6}{6} - d - 2c - \frac{(s-1)(2s-1)}{2} \\ &\leqslant \frac{2s^3-5s^2+20s-5}{6} \end{aligned}$$

et, pour $s \geqslant 7$, cette quantité minore strictement $\binom{s+2}{3} + \binom{s-1}{3} - (s-1)$. On vérifie que le cas $d \geqslant 2s$ et $d = d_0$ ne se produit pas avec $s \leqslant 6$.

Si $d = d_0 + 1$, il nous faut prouver que $7(c-c_0) \geqslant e_0 - 2$ et $2(c-c_0) \leqslant s-3$. On va montrer les relations

$$c - \frac{s-2}{2} < c_0 < c - \frac{s-4}{7}.$$

Comme précédemment, on a d'une part

$$d_0(s-1)+1+\left(c-\frac{s-4}{7}\right)(2s-1)$$
$$\geqslant \frac{2s^3+3s^2+7s+6}{6}-s+1-d-2c-\frac{(2s-1)(s-4)}{7}$$
$$\geqslant \frac{2s^3+s^2-2s-1}{6}-\frac{2s^2-9s+4}{7}$$

et on vérifie que, pour $s \geqslant 5$, cette quantité majore strictement $\binom{s+2}{3}+\binom{s-1}{3}$. Et d'autre part

$$d_0(s-1)+1+\left(c-\frac{s-2}{2}\right)(2s-1)$$
$$\leqslant \frac{2s^3+3s^2+13s+6}{6}-s+1-d-2c-\frac{(2s-1)(s-2)}{2}$$
$$\leqslant \frac{2s^3-5s^2+20s-2}{6}$$

et comme plus haut, pour $s \geqslant 7$, cette quantité minore strictement

$$\binom{s+2}{3}+\binom{s-1}{3}-(s-2).$$

Pour $s=6$, on trouve le cas $d=14$, $c=1$, qui conduit à $d_0=13$, $c_0=0$ $\left(\text{donc } c_0 > c-\frac{s-2}{2}\right)$. Et pour $s=5$, on trouve le cas $d=10$, $c=1$ qui conduit à $d_0=9$, $c_0=0$ $\left(\text{donc } c_0 > c-\frac{s-2}{2}\right)$.

Supposons maintenant $d_0=\left[\frac{1}{s-1}\left(\binom{s+2}{3}+\binom{s-1}{3}-1\right)\right]$.

On a alors $c_0=0$. On veut montrer que $7c+3d \geqslant 3d_0+s+1$ et $2c+d-d_0 \leqslant s-2$. Or $7c+3d$ atteint son minimum pour $0 \leqslant c \leqslant 2$ et on vérifie la minoration par un calcul explicite. D'autre part $2c+d$ atteint son maximum pour $c=0$ et on vérifie la majoration par un calcul explicite pour $s \geqslant 6$. Pour $s=5$ on a $d=13$, $c=0$, $d-d_0=4$ mais $e=0$.

6.6.2. *Lemme.* — *Pour $s \geqslant 5$ et $d \leqslant 2s-1$, (d, c, e) est réductible.*

Preuve. — On distingue suivant la congruence de s modulo 3 et celle de d modulo 2.

Si $s=3s'$ alors on a

$$d=2d', \quad c=\frac{3s'^2+s'+2}{2}-d', \quad e=d'-1 \quad \text{et} \quad \left(2, \frac{3s'^2-s'}{2}, 0\right)$$

est a-adapté.

Si $s = 3s' + 1$ alors

si $d \leqslant 2s' + 2$ on a

$$d = 2d', \quad c = \frac{3s'^2 + 3s' + 2}{2} - d', \quad e = 2s' + d'$$

et si $d \geqslant 2s' + 3$ on a

$$d = 2d' + 1 \geqslant 2s' + 3, \quad c = \frac{3s'^2 + 3s' + 2}{2} - d', \quad e = d' - s' - 1.$$

Dans les deux cas, $\left(2, \frac{3s'^2 + s'}{2}, 0\right)$ est a-adapté.

Si $s = 3s' + 2$ alors on a $d = 2d'$, $c = \frac{3s'^2 + 5s' + 4}{2} - d'$ et $e = d' - 1$.

Si $d \geqslant 2s' + 3$, alors $\left(2s' + 3, \frac{3s'^2 + s'}{2}, 0\right)$ est a-adapté.

Si $d = 2d' \leqslant 2s' + 2$ alors $\left(2d', \frac{3s'^2 + 3s' + 2}{2} - d', 2s' + d'\right)$ est b-adapté.

6.6.3. *Les cas avec* $s \leqslant 4$.

Si $s \leqslant 3$, il suffit d'exhiber pour chaque triplet un schéma de $\mathbf{P}^3$ non contenu dans une surface de degré s. Pour $s = 1$, les triplets sont $(3, 0, 0)$ et $(2, 0, 1)$; pour $s = 2$, il reste le triplet $(4, 0, 1)$; pour $s = 3$ il reste $(6, 0, 2)$ et $(4, 1, 1)$. Dans chacun de ces cas les constructions sont faciles et à part pour le dernier, sont possibles d'après [HH3]. Indiquons rapidement comment faire la dernière : soit C une quartique rationnelle (dégénérée), C′ une conique contenue dans un plan H et disjointe de C. Alors toute cubique contenant $C \cup C'$ contient H parce que les points de $C \cap H$ ne sont pas alignés. La seule cubique contenant $C \cup C'$ est donc $H \cup Q$ où Q est la quadrique contenant C. Il reste à choisir un point P hors de cette cubique.

Pour $s = 4$, les triplets $(9, 0, 2)$ et $(7, 1, 1)$ sont a-réductibles à $(6, 0, 2)$ et $(4, 1, 1)$. Restent les triplets $(5, 2, 0)$ et $(2, 3, 3)$.

(5, 2, 0). On peut faire une construction avec nilpotent un peu différente : soient C, C′ et P la quartique, la conique et le point correspondant au triplet $(4, 1, 1)$ dans $\mathbf{V}$. On choisit $\mathbf{V}'$ général contenant P. Si x_1 est un point de $C \cap \mathbf{V}'$, on note L la droite joignant x_1 à P. On choisit dans $\mathbf{V}'$ une droite L′ passant par P et une droite L″ rencontrant L′. On sait qu'il existe un schéma χ porté par P tel que $\Gamma := C \cup C' \cup L \cup L' \cup L'' \cup \chi$ se déforme en $C \cup L \cup C' \cup C''$ où C″ est une conique et tel que le schéma résiduel à $\mathbf{V}'$ de Γ soit $C \cup C' \cup P$. On peut donc raisonner comme dans 6.5.

(2, 3, 3). Soient C une conique dégénérée, L_1, L_2, L_3 trois droites et P un point tels que la projection de leur réunion ne soit pas contenue dans une cubique. Soit $\mathbf{V}'$ coupant C et les L_i transversalement et ne contenant pas P. On choisit trois droites

générales L_1', L_2', L_3' dans $\mathbf{V}'$ avec L_i' rencontrant L_i. On choisit P'' dans $\mathbf{V}'$ tel que PP'' rencontre C et on choisit P' sur la droite PP''. Quitte à déformer C et P, on montre comme dans 4.4.1 que $C \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_1' \cup L_2' \cup L_3' \cup P \cup P' \cup P''$ a la propriété voulue.

BIBLIOGRAPHIE

[eB] E. Ballico, *On the postulation of disjoint rational curves in a projective space*, Rend. Mat. Sem. Univers. Politecn, Torino, **44**, 2 (1986), 207-249.

[cB] C. Banica, On surfaces associated to reflexive sheaves on a projective threefold, *Rev. Roum. Mat. pures appl.*, **31** (1986), 479-488.

[BC] C. Banica, I. Coanda, Existence of rank 3 Vector Bundles..., *Manuscr. Math.*, **51** (1985), 121-143.

[wB] W. Barth, Some properties of stable rank 2 Vector Bundles on $\mathbf{P}_n$, *Math. Ann.*, **226** (1977), 125-150.

[gB1] G. Bolondi, Arithmetically normal sheaves, *Bull. S.M.F.*, **115** (1987), 71-95.

[gB2] G. Bolondi, Reflexive Sheaves with semi-natural cohomology and low c_2, *Boll. U.M.I.*, **7**, 1B (1987) 765-777.

[aB] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, 1969.

[lE] L. Ein, On Hilbert Schemes of smooth space curves, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **19** (1986), 469-478.

[pE] Ph. Ellia, Points rationnels de courbes génériques de $\mathbf{P}^3$, *Boll. U.M.I.*, Serie VI, vol. IV, D.N.1 (1985), 167-172.

[jH] J. Harris, Curves in Projective Space, *Sem. Math. Sup.* (1982), Presses Univ. Montréal.

[rH1] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves, *Math. Ann.*, **254** (1980), 121-176.

[rH2] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves III, *Math. Ann.*, à paraître.

[HH1] R. Hartshorne, A. Hirschowitz, Cohomology of a general instanton bundle, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **15** (1982), 365-390.

[HH2] R. Hartshorne, A. Hirschowitz, Smoothing Algebraic Spaces Curves, in *Algebraic Geometry*, Proc. Sitges, 1983, *Lecture Notes in Math.*, **1124** (1985), 98-131.

[HH3] R. Hartshorne, A. Hirschowitz, Courbes rationnelles et droites en position générale, *Ann. Inst. Fourier*, **35** (4) (1985), 39-58.

[HH4] R. Hartshorne, A. Hirschowitz, Nouvelles courbes de bon genre, *Math. Ann.*, à paraître.

[HH5] R. Hartshorne, A. Hirschowitz, Droites en position générale dans l'espace projectif, in *Algebraic Geometry*, Proc. La Rabida, 1981, *Lectures Notes in Math.*, **961** (1982), 169-189.

[Hi1] A. Hirschowitz, Sur la postulation générique des courbes rationnelles, *Acta Math.*, **146** (1981), 209-230.

[Hi2] A. Hirschowitz, La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, *Manuscr. Math.*, **50** (1985), 337-388.

[Hi3] A. Hirschowitz, Sections planes et multisécantes pour les courbes gauches génériques principales, in *Space Curves*, Proc. Rocca di Papa 1985, *Lecture Notes in Math.*, **1266** (1987), 124-155.

[HM] A. Hirschowitz, R. Marlin, Nouvelles surfaces à nœuds dans $\mathbf{P}^3$, *Math. Ann.*, **267** (1984), 83-89.

[P] D. Perrin, *Courbes passant par m points généraux de* $\mathbf{P}^3$, thèse, Orsay, 1986.

[S] E. Sernesi, On the existence of certain families of curves, *Invent. Math.*, **75** (1984), 25-57.

IMSP,
Université de Nice,
F 06034 Nice Cedex.

Manuscrit reçu le 30 juillet 1986.