PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS LATOUR

Existence de l-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 80 (1994), p. 135-194

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1994__80__135_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXISTENCE DE 1-FORMES FERMÉES NON SINGULIÈRES DANS UNE CLASSE DE COHOMOLOGIE DE DE RHAM

par FRANÇOIS LATOUR

Soit M une variété différentiable compacte connexe sans bord. On considère le problème suivant : étant donné une 1-forme fermée α_0 sur M, existe-t-il une fonction $g : M \to \mathbf{R}$ telle que $\alpha = \alpha_0 + dg$ ne s'annule pas, ou encore étant donné une classe de cohomologie de de Rham $u \in H^1(M, \mathbf{R})$, existe-t-il dans la classe u une 1-forme fermée non singulière ?

Lorsque u est rationnelle (l'image $u(\pi_1 M)$ est infinie cyclique où on considère u comme un morphisme $\pi_1 M \to \mathbf{R}$), un problème équivalent est de savoir si une application $p : M \to S^1$ est homotope à une fibration. Ce cas a été traité, à la fin des années 60, par Browder-Levine, Farrell, Siebenmann [1, 3, 4, 13]. Leur méthode est de chercher à modifier p de sorte que si on découpe M le long d'un $p^{-1}(\theta)$ régulier, on obtienne un s-cobordisme. Dans le cas général, les feuilles du feuilletage singulier défini par une 1-forme de Morse dans la classe de cohomologie considérée ont tendance à être denses et la méthode précédente ne s'applique pas.

Nous attaquons le problème directement en essayant d'éliminer les points critiques d'une 1-forme de Morse. La philosophie est que la démonstration fonctionnelle du théorème du h- ou s-cobordisme [2, 7] ne fait intervenir que des déformations dans des boules et que, sur une boule, on ne voit pas de différence entre une fonction et une 1-forme fermée; seuls les invariants globaux diffèrent.

On considère les espaces des chemins « allant du point base à l'infini »

$$\mathscr{M}_{\pm u} = \Big\{ \gamma : [0, \infty[\to M \mid \gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \int_0^t \gamma^* \alpha \xrightarrow[t \to +\infty]{} \pm \infty \quad \text{où } \alpha \text{ est dans la classe } u \Big\}$$

munis d'une topologie plus fine que la topologie compacte ouverte qui donne un contrôle à l'infini. Si α est sans point critique, on voit que pousser le long d'un champ de gradient pour α donne la contractibilité de $\mathscr{M}_u$ et de $\mathscr{M}_{-u}$. Posons $\Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1 M]$ et soit $\Lambda_{\pm u} = \{ \Sigma n_k g_k \mid g_k \in \pi_1 M \text{ et } u(g_k) \to \pm \infty \}$ le complété de Novikov de Λ [9, 10]; l'élément $\pm g_0 + \Sigma_{k \geqslant 1} n_k g_k$ de Λ_u, où $u(g_k) > u(g_0)$ pour $k \geqslant 1$, est une unité de Λ_u appelée triviale; on note $\mathrm{Wh}(\pi_1 M, u)$ le quotient de $K_1 \Lambda_u$ par les unités triviales. On pose, pour K, une C^1-triangulation de M, $H_*(M; u) = H_*(\Lambda_u \otimes_\Lambda C_\cdot(\tilde{K}))$ qu'on appelle

homologie de Novikov. Si $\mathscr{M}_u$ est contractile, alors l'homologie de Novikov est nulle et on a une torsion de Whitehead-Franz-Reidemeister $\tau(M, u) \in \mathrm{Wh}(\pi_1 M, u)$.

Théorème 1. — *Si* $\dim M \geqslant 6$, *une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de cohomologie* $u \in H^1(M, \mathbf{R})$ *contienne une* 1*-forme fermée non singulière est que* $\mathscr{M}_u$ *et* $\mathscr{M}_{-u}$ *soient contractiles et que* $\tau(M, u) = 0$.

Remarquons que si $\dim M \geqslant 6$, la condition $\mathscr{M}_u$ et $\mathscr{M}_{-u}$ contractiles et $\tau(M, u) = 0$ est alors une condition ouverte en u; en fait on montre que la condition $\mathscr{M}_u$ contractile (resp. $\mathscr{M}_u$ contractile et $\tau(M, u) = 0$) est une condition ouverte en u sans hypothèse de dimension.

Pour α de Morse et ξ un champ de pseudo-gradient générique, l'espace des liaisons entre points critiques est une variété non compacte en général. On construit une compactification naturelle de la partie formée des liaisons ℓ de longueur $\leqslant L$ $\left(i.e. \int_{\mathbf{R}} \ell^* \alpha \leqslant L\right)$. Il en résulte que si c et d sont deux points critiques d'indices consécutifs, il n'y a qu'un nombre fini de liaisons de c à d de longueur $\leqslant L$ et qu'on a un coefficient d'incidence entre c et d dans l'anneau Λ_u. Les points critiques de α engendrent donc un complexe de Λ_u-modules libres $C_*(\alpha, \xi)$. Ce complexe est indépendant du choix de (α, ξ) à équivalence simple près et est simplement équivalent à $\Lambda_u \otimes_\Lambda C_*(\tilde{K})$.

Le point fondamental qui rend possible la construction, malgré l'infinité de liaisons entre points critiques d'indices consécutifs, est que pour éliminer le point c d'indice q et le point d d'indice $q + 1$, on a besoin d'une liaison ℓ de c à d telle que la nappe descendante de d arrive à c le long de ℓ sans accident, mais d'autres liaisons entre un point d'indice q et d de longueur strictement supérieure à celle de ℓ n'ont pas d'importance. On est donc amené à faire des ajouts de liaisons ou des suppressions de liaisons, mais uniquement jusqu'à une longueur donnée.

Si $\pi_1 \mathscr{M}_u = 0$, $\mathscr{M}_u$ est contractile si et seulement si $H_*(M, u) = 0$. Dans le cas général, on regarde $\pi : \hat{M} \to M$, le revêtement d'intégration de α, et $\hat{f} : \hat{M} \to \mathbf{R}$ avec $\pi^* \alpha = d\hat{f}$; soit $\hat{M}_k$ la composante de $\hat{f}^{-1}([k, \infty[)$ où $\hat{f}$ est non bornée. On montre que le système projectif $\{ \pi_1 \hat{M}_k \}$ ne dépend à pro-isomorphisme près que de $u : \pi_1 M \to \mathbf{R}$; on dit que u est stable si le système $\{ \pi_1 \hat{M}_k \}$ est pro-isomorphe à un système constant (c'est une condition algébrique sur u : par exemple lorsque u est rationnelle u et $-u$ sont stables si et seulement si le noyau de u est de présentation finie). On montre alors que $\mathscr{M}_u$ est contractile si et seulement si u est stable et $H_*(M, u) = 0$. Vu la dualité de Poincaré, le théorème 1 devient

Théorème 1'. — *Si* $\dim M \geqslant 6$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $u \in H^1(M, \mathbf{R})$ *contienne une* 1*-forme fermée non singulière est que* :

1) u *et* $-u$ *soient stables*,
2) $H_*(M, u) = 0$,
3) $\tau(M, u) = 0$.

Citons enfin les travaux de A. V. Pazhitnov sur le nombre minimal de points critiques d'une 1-forme fermée de Morse dans une classe de cohomologie [11] et sur la réalisabilité d'un complexe donné comme complexe $C_\bullet(\alpha, \xi)$ [12]. Mais [12] n'étudie que le cas d'une classe rationnelle et dans [11] est établi un résultat de densité à partir du cas des classes rationnelles.

Voici un résumé par chapitre.

Chapitre 1. — On introduit et étudie les espaces des chemins « allant à l'infini » pour un complexe fini X et $u \in H^1(X, \mathbf{R})$, cette généralité étant nécessaire au chapitre 5. On introduit l'homologie de Novikov et on montre que la condition $H_*(X, u) = 0$ est une condition ouverte en u.

Chapitre 2. — Pour α de Morse et ξ pseudo-gradient pour α, on introduit l'espace des liaisons entre points critiques et on construit une compactification par multiliaisons de l'espace des liaisons de longueur bornée ainsi qu'une compactification des variétés stables et instables des points critiques arrêtées à une longueur donnée. Génériquement, ce sont des variétés à bord anguleux. La construction du complexe des points critiques $C_\bullet(\alpha, \xi)$ en découle immédiatement.

On montre que $C_\bullet(\alpha, \xi_0)$ et $C_\bullet(\alpha, \xi_1)$ sont simplement isomorphes par un avatar de la méthode de Floer [5] : on ne fait même pas varier le pseudo-gradient, il suffit de construire une isotopie α-positive telle que les images des variétés instables pour ξ_0 soient transverses aux variétés stables pour ξ_1. Cela remplace une étude longue des bifurcations homoclines dans une version antérieure qui avait l'avantage d'indiquer la raison géométrique de diviser $K_1(\Lambda_u)$ par les unités triviales. On montre enfin que $C_\bullet(\alpha, \xi)$ est simplement équivalent à $C_\bullet(K, u) = \Lambda_u \otimes_\Lambda C_\bullet(\widetilde{K})$ en construisant un modèle précis de naissance, puis en utilisant une triangulation adaptée à une fonction de Morse sur M.

Chapitre 3. — On rappelle les déformations élémentaires d'une 1-forme de Morse qui sont les mêmes que dans le cas exact; puis les déformations élémentaires du champ de pseudo-gradient : ajout de liaisons et suppression de liaisons entre points critiques d'indices q et $q + 1$ avec $q \geqslant 3$ (le cas $q = 2$ présente une difficulté intrinsèque qui sera abordée au chapitre 5).

Chapitre 4. — On élimine d'abord les points critiques d'indice 0 et n sans hypothèse de dimension. Lorsque $n \geqslant 5$ et $\mathscr{M}_{-u}$ est connexe, on élimine les points d'indice 1 en construisant, pour chaque point critique c d'indice 1, un disque D^2 plongé dans M et α' cohomologue à α ayant les mêmes points critiques que α tels que $D^2 \cap W^u_{\text{loc}}(c) = \{m\}$, ∂D^2 est transverse à $W^u_{\text{loc}}(c)$ et α' induit sur D^2 un feuilletage par cercles, puis en utilisant D^2 on fait naître une paire (d, e) de points critiques d'indice 2 et 3 telle que c et d s'éliminent.

Pour $n \geqslant 7$ et $\mathscr{M}_{-u}$ simplement connexe, on élimine les points d'indice 2 par la même méthode. L'élimination des autres points critiques suit alors la stratégie de démonstration du théorème du s-cobordisme, d'où le théorème 1 si $n \geqslant 7$.

Chapitre 5. — On considère l'application naturelle $h : \pi_{k-1}\mathcal{M}_u(X) \to H_k(X, u)$. Si $\mathcal{M}_u(X)$ est simplement connexe, on montre que h est un isomorphisme sur le premier groupe non nul (ce n'est pas une conséquence du théorème de Hurewicz). On introduit la notion de (semi)-stabilité pour un morphisme $u : G \to \mathbf{R}$ où G est de présentation finie et on montre que si u est stable, alors $h : \pi_1\mathcal{M}_u(X) \to H_2(X, u)$ est un isomorphisme (il en résulte que $\mathcal{M}_u(X)$ est contractile si et seulement si u est stable et $H_*(X, u) = 0$). Pour la démonstration, on peut supposer que X est une variété M de grande dimension et l'ingrédient essentiel est la notion d'équipement pour les points critiques d'indice 2 qui permet aussi de faire fonctionner le procédé de Whitney-Smale pour éliminer des liaisons entre points critiques d'indice 2 et 3, ce qui achève la démonstration du théorème 1 si dim $M = 6$ (on peut bien sûr utiliser cet argument pour éliminer les points critiques d'indice 2 si dim $M \geqslant 6$).

Chapitre 1

CHEMINS ALLANT A L'INFINI

1.1. *Notations.* — Soient X un C. W. complexe fini dont le groupe fondamental est identifié au groupe G, $u : G \to \mathbf{R}$ un homomorphisme, $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel de X, $f : \tilde{X} \to \mathbf{R}$ une application continue telle que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et tout $g \in G$, $\tilde{f}(g\tilde{x}) = u(g) + \tilde{f}(\tilde{x})$. La différence entre deux telles applications provient de la base, donc est bornée; on peut construire une telle application en choisissant un arbre maximal T dans le 1-squelette X^1 de X, en le relevant en $\tilde{T} \subset \tilde{X}^1$ et en imposant $\tilde{f}(\tilde{T}) = 0$, $\tilde{f}(g\tilde{T}) = u(g)$, puis en prolongeant sur les cellules (si X est simplicial, on peut choisir f affine sur chaque simplexe).

Définition **1.2.** — On note $\mathscr{C}_u(X)$ le sous-ensemble de $C^0([0, \infty[, X)$ formé des $\gamma : [0, \infty[\to X$ tels que si $\tilde{\gamma} : [0, \infty[\to \tilde{X}$ est un relevé de γ

$$\tilde{f}\tilde{\gamma}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

On munit $\mathscr{C}_u(X)$ d'une topologie plus fine que la topologie compacte ouverte : on demande un contrôle à l'infini. Pour $a, b \in [0, \infty[$ et U ouvert de X, on pose

$$W(a, b; U) = \{ \gamma \in \mathscr{C}_u(X) \mid \gamma([a, b]) \subset U \}$$

et pour $a, A \in [0, \infty[$, on pose

$$W(a, A) = \{ \gamma \in \mathscr{C}_u(X) \mid \forall\, t \geqslant a\ \tilde{f}\tilde{\gamma}(t) - \tilde{f}\tilde{\gamma}(0) > A \}.$$

Ces ensembles forment une sous-base d'une topologie sur $\mathscr{C}_u(X)$. Il est clair que l'ensemble $\mathscr{C}_u(X)$ est indépendant du choix de $\tilde{f}$ ainsi que sa topologie.

On note $e : \mathscr{C}_u(X) \to X$ l'évaluation $e(\gamma) = \gamma(0)$. L'application e est une fibration de Hurewicz; on note $\mathscr{M}_u(X)$ la fibre de e, $\mathscr{M}_u(X) = \{ \gamma \in \mathscr{C}_u(X) \mid \gamma(0) = x_0 \}$.

1.3. Si $u \neq 0$, $\mathscr{M}_u(X)$ est non vide; on choisit un point base $\gamma_0 \in \mathscr{M}_u(X)$.

Nous allons donner une autre description des groupes d'homotopie de $\mathscr{M}_u(X)$. On considère des applications continues $\varphi : \mathbf{R}^k \to X$ telles que $\varphi(t, 0, \ldots, 0) = \gamma_0(t)$ et $f\tilde{\varphi}(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} +\infty$ où $\tilde{\varphi}$ est le relèvement de φ avec $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$. Une homotopie est une

application $\Phi : \mathbf{R}^k \times [0, 1] \to X$ telle que $\Phi(t, 0, \ldots, 0, s) = \gamma_0(t)$ pour tout $s \in [0, 1]$, et $\tilde{f}\tilde{\Phi}(z, s) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} + \infty$ uniformément en s.

On note $\pi_k(X; u)$ l'ensemble des classes d'homotopie de telles applications.

Si $\Gamma : (S^{k-1}, *) \to (\mathscr{M}_u(X), \gamma_0)$ est une application continue (où $* = (1, 0 \ldots 0)$), on considère $\varphi : \mathbf{R}^k \to X$ définie par $\varphi(z) = \Gamma(\theta)(t)$ si $z = t\theta$ avec $\theta \in S^{k-1}$ et $t \geqslant 0$. Vu la topologie de $\mathscr{M}_u(X)$, il est clair que cela donne une bijection de $\pi_{k-1}(\mathscr{M}_u(X), \gamma_0)$ sur $\pi_k(X; u)$. Pour $k \geqslant 2$, on munit $\pi_k(X; u)$ d'une structure de groupe grâce à cette bijection.

Proposition **1.4.** — *Il y a équivalence entre*

1) $\mathscr{M}_u(X)$ *est contractile*;
2) $\mathscr{M}_u(X)$ *est faiblement contractile*;
3) $e : \mathscr{C}_u(X) \to X$ *a une section*;
4) $e : \mathscr{C}_u(X) \to X$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. — L'implication 1 $\Rightarrow$ 2 est évidente. 2 $\Rightarrow$ 3 est la théorie de l'obstruction nulle. 4 $\Rightarrow$ 3 car e est une fibration : si e possède une section à homotopie près, elle possède une section. Si e a une section σ, on va construire $H : \mathscr{C}_u(X) \times [0, 1] \to \mathscr{C}_u(X)$ tel que

$$H(\gamma, 0) = (\sigma.e)(\gamma)$$
$$H(\gamma, 1) = \gamma$$

et $e.H(\gamma, s) = e(\gamma)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Cela montrera à la fois 3 $\Rightarrow$ 4 et 3 $\Rightarrow$ 1.

Nous considérons la section σ comme une application continue $\Phi : X \times [0, \infty[\to X$, $\Phi(x, t) = \sigma(x)(t)$.

On relève Φ en $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \times [0, \infty[\to \tilde{X}$ avec $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, 0) = \tilde{x}$, donc $\tilde{\Phi}(g\tilde{x}, t) = g\tilde{\Phi}(\tilde{x}, t)$ pour $g \in G$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et $t \geqslant 0$; la fonction $\tilde{f}\tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) - \tilde{f}(\tilde{x})$ est invariante par G et provient d'une fonction continue $\psi : X \times [0, \infty[\to \mathbf{R}$ et pour chaque x, $\psi(x, t) \xrightarrow[t \to \infty]{} + \infty$. La continuité de σ pour la topologie de $\mathscr{C}_u(X)$ se traduit par la propriété suivante : si $\psi(x_1, t) > A$ pour $t \geqslant \alpha$, il existe un voisinage $V(x_1) \subset X$ tel que pour $x \in V(x_1)$ et $t \geqslant \alpha$, $\psi(x, t) > A$. Donc $\psi(x, t) \xrightarrow[t \to \infty]{} + \infty$ uniformément sur X et ψ est minorée par m sur $X \times [0, \infty[$.

Pour $\gamma \in \mathscr{C}_u(X)$, définissons :

pour $s \in [0, 1[$, $H(\gamma, s)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \leqslant \dfrac{s}{1-s} \\ \Phi\left(\gamma\left(\dfrac{s}{1-s}\right), t - \dfrac{s}{1-s}\right) & \text{si } t \geqslant \dfrac{s}{1-s} \end{cases}$

et $H(\gamma; 1)(t) = \gamma(t)$;

donc $H(\gamma, s)(0) = \gamma(0)$ et $H(\gamma, 0) = \sigma.e(\gamma)$.

Vérifions d'abord que $H(\gamma, s) \in \mathscr{C}_u(X)$; c'est clair si $s = 1$ et pour $s < 1$ et $t \geqslant s/(1-s)$, on a

$$\widetilde{f\mathrm{H}(\gamma, s)}\,(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0) = \psi\left(\gamma\left(\frac{s}{1-s}\right), t - \frac{s}{1-s}\right) + \tilde{f}\,\tilde{\gamma}\left(\frac{s}{1-s}\right) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0)$$

et le premier terme tend vers $+\infty$.

Vérifions la continuité de $H : \mathscr{C}_u(X) \times [0, 1] \to \mathscr{C}_u(X)$; le seul ennui ne peut venir que des contraintes à l'infini. Soit $(\gamma_1, s_1) \in H^{-1}\, W(\alpha, A)$.

1) Si $s_1 = 1$, cela signifie simplement que $\tilde{f}\,\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}_1(0) > A$ pour tout $t \geqslant \alpha$. Il existe un voisinage Ω_0 de γ_1 dans $\mathscr{C}_u(X)$ tel que

$$\forall\, \gamma \in \Omega_0, \qquad \forall\, t \geqslant \alpha, \qquad \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0) > A.$$

Comme $\gamma_1 \in \mathscr{C}_u(X)$, il existe β tel que

$$\forall\, \tau \geqslant \beta, \qquad \tilde{f}\,\tilde{\gamma}_1(\tau) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}_1(0) > A - m;$$

donc il existe un voisinage Ω_1 de γ_1 dans $\mathscr{C}_u(X)$ tel que

$$\forall\, \gamma \in \Omega_1, \qquad \forall\, t \geqslant \beta, \qquad \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0) > A - m.$$

Choisissons $s_2 < 1$ avec $s_2/(1-s_2) > \beta$; alors, si $\gamma \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ et $s \in [s_2, 1]$

$$\forall\, t \geqslant \alpha, \qquad \widetilde{f\mathrm{H}(\gamma, s)}\,(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0) > A.$$

2) Si $s_1 = 0$, l'hypothèse est $\psi(x_1, t) > A$ pour tout $t \geqslant \alpha$, où $x_1 = \gamma_1(0)$. Si $\alpha > 0$, on choisit $\alpha_1 \in]0, \alpha[$ tel que l'inégalité soit vraie pour tout $t \geqslant \alpha_1$. D'après les propriétés de ψ, il existe un voisinage ouvert V_0 de x_1 tel que pour $x \in V_0$ et $t \geqslant \alpha_1$, $\psi(x, t) > A$.

Soit V_1 un voisinage compact de x_1 contenu dans V_0; on a $\inf_{V_1 \times [\alpha_1, \infty[} \psi = A_1 > A$. Soit U un voisinage ouvert connexe de x_1 trivialisant pour le revêtement, assez petit pour que $|\tilde{f}(\tilde{y}) - \tilde{f}(\tilde{x}_1)| < \dfrac{A_1 - A}{2}$ pour tout $\tilde{y} \in \tilde{U}$, la composante de $\pi^{-1}\, U$ contenant $\tilde{x}_1$.

Choisissons $s_2 > 0$ assez petit pour que $s_2/(1-s_2) < \alpha - \alpha_1$, $s_2/(1-s_2) < \alpha_1$, et que $\gamma_1([0, s_2/(1-s_2)]) \subset U \cap \operatorname{int} V_1$ et soit Ω un voisinage de γ_1 dans $\mathscr{C}_u(X)$ tel que, si $\gamma \in \Omega$, on ait

$$\gamma\left(\left[0, \frac{s_2}{1-s_2}\right]\right) \subset U \cap \operatorname{int} V_1.$$

Alors, si $\gamma \in \Omega$, $s \in [0, s_2]$ et $t \geqslant \alpha$, on a $t - s/(1-s) > \alpha_1 > 0$ et

$$\widetilde{f\mathrm{H}(\gamma, s)}\,(t) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0) = \psi\left(\gamma\left(\frac{s}{1-s}\right), t - \frac{s}{1-s}\right) + \left(\tilde{f}\,\tilde{\gamma}\left(\frac{s}{1-s}\right) - \tilde{f}\,\tilde{\gamma}(0)\right).$$

Le premier terme est $\geqslant A_1$ et le second $> A - A_1$. Si $\alpha = 0$, donc $A < 0$, on prend $\alpha_1 = \alpha$; mais dans le choix de U, on impose l'inégalité

$$|\tilde{f}(\tilde{y}) - \tilde{f}(\tilde{x}_1)| < \min\left(\frac{A_1 - A}{2}, \frac{-A}{2}\right).$$

3) Si $s_1 \in]0, 1[$, la démonstration est analogue aux précédentes et est laissée en exercice.

Corollaire **1.5.** — *Soit* M *une variété différentiable compacte connexe et soit* $u : \pi_1 M \to \mathbf{R}$. *S'il existe une* 1*-forme fermée* α *sans singularité dans la classe* u, *alors* $\mathscr{M}_u(M)$ *et* $\mathscr{M}_{-u}(M)$ *sont contractiles.*

Démonstration. — Soient ξ un champ de vecteurs sur M tel que

$$\forall\, x \in M, \qquad \langle \alpha_x, \xi_x \rangle = 1$$

et φ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé. Si $\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbf{R}$ est une primitive de $\pi^* \alpha$, on a $\tilde{f}\,\tilde{\varphi}_t(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}) = t$ et φ_t donne une section pour $e_+ : \mathscr{C}_u(M) \to M$ et pour $e_- : \mathscr{C}_{-u}(M) \to M$.

1.6. *Notation.* — On note $\Lambda = \mathbf{Z}[G]$ l'anneau du groupe G; si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, on note

$$v(\lambda) = \inf\{ u(g) \mid g \text{ apparaît avec un coefficient non nul dans } \lambda \}$$

et

$$v(0) = \infty.$$

On a

$$v(\lambda + \lambda') \geqslant \min(v(\lambda), v(\lambda'))$$

$$v(\lambda.\lambda') \geqslant v(\lambda) + v(\lambda')$$

de sorte que $|\lambda|_u = e^{-v(\lambda)}$ est une norme ultramétrique avec $|\lambda\lambda'|_u \leqslant |\lambda|_u |\lambda'|_u$.

On note Λ_u le complété de Λ pour $|\ |_u$ et on désigne encore par $|\ |_u$ le prolongement de la norme sur Λ_u.

L'anneau Λ_u est formé des séries formelles $\Sigma n_i g_i$ avec $u(g_i) \nearrow +\infty$. Si

$$\lambda = \pm g_0 + \sum_{u(g_i) > u(g_0)} n_i g_i \in \Lambda_u,$$

λ est une unité de Λ_u. En effet, il suffit de le vérifier pour

$$\lambda = 1 + \sum_{u(g_i) > 0} n_i g_i = 1 + \mu \in \Lambda_u;$$

alors $|\mu|_u < 1$ et la série $\Sigma(-1)^k \mu^k$ converge dans Λ_u. Ces unités sont appelées *unités triviales de* Λ_u; $\mathrm{Wh}(G; u)$ est le quotient de $K_1(\Lambda_u)$ par ces unités triviales.

Lemme **1.7.** — *Soit* R *une matrice carrée d'ordre n sur l'anneau* Λ_u *tel que* $u(R) > 0$ *(c'est-à-dire* $|r_{ij}|_u < 1$ *pour tous i et j), alors la matrice* $I + R$ *est inversible et sa classe dans* $Wh(G; u)$ *est nulle.*

Preuve. — L'élément $1 + r_{11}$ est une unité de Λ_u, donc par manipulation des lignes, $I + R$ est équivalente à $I + R'$, avec $u(R') > 0$ et $r'_{j1} = 0$ pour $j = 2, \ldots, n$, d'où finalement à une matrice diagonale avec des unités triviales sur la diagonale.

1.8. *Notations.* — On dit qu'un isomorphisme entre deux Λ_u-modules libres de type fini basés est un isomorphisme simple si la classe de sa matrice dans $Wh(G; u)$ est nulle.

On a alors une notion d'isomorphisme simple entre deux complexes finis de Λ_u-modules libres basés [6], une notion de torsion d'une équivalence d'homotopie entre deux tels complexes et une notion d'équivalence simple entre deux tels complexes [6].

1.9. *Notations.* — On écrit $C_\bullet(X; u) = \Lambda_u \otimes C_\bullet(\tilde{X})$, où $C_\bullet(\tilde{X})$ est le complexe des chaînes cellulaires du revêtement universel de X; $C_\bullet(X; u)$ est un complexe fini de Λ_u-modules libres basés. L'homologie du complexe $C_\bullet(X; u)$ est appelée homologie de Novikov de $(X; u)$ et est notée $H_*(X; u)$.

Proposition **1.10.** — *Si* $\mathscr{M}_u(X)$ *est contractile, l'homologie de Novikov* $H_*(X; u)$ *est triviale.*

Preuve. — Il est clair que le type d'homotopie de $\mathscr{M}_u(X)$ ne dépend que du type d'homotopie de X (respectant l'identification $\pi_1 X \simeq G$); de même pour $H_*(X; u)$. On peut donc supposer que les applications d'attache des p-cellules e_i^p de X, $a_i : S^{p-1} \to X^{p-1}$ sont transverses aux centres des $(p - 1)$-cellules de X.

Si $\mathscr{M}_u(X)$ est contractile, on construit comme en 1.4, en grimpant sur les squelettes de X, $\Phi : X \times [0, \infty[\to X$ avec $\Phi(X^p \times [0, \infty[) \subset X^{p+1}$, et si $\chi_\alpha^p : D^p \to X^p$ est l'application caractéristique de la cellule e_α^p, $\Phi \circ (\chi_\alpha^p \times I) : D^p \times [0, \infty[\to X^p \times [0, \infty[\to X^{p+1}$ transverse aux centres des $(p + 1)$-cellules. Une fois choisis des relevés des cellules, on a un coefficient d'incidence $[\tilde{e}_\alpha^p, \tilde{e}_\beta^{p+1}]_\Phi \in \Lambda_u$ avec $[\tilde{e}_\alpha^p, \tilde{e}_\beta^{p+1}]_\Phi = \Sigma n_i g_i$ où n_i compte algébriquement le nombre de points de

$$(\tilde{\Phi} \circ (\tilde{\chi}_\alpha^p \times I))^{-1} \quad \text{(centre de } g_i . \tilde{e}_\beta^{p+1}).$$

Posant $\overline{H}_p(\tilde{e}_\alpha^p) = \Sigma [\tilde{e}_\alpha^p, \tilde{e}_\beta^{p+1}]_\Phi \tilde{e}_\beta^{p+1}$, on a

$$d\overline{H}_p = \overline{H}_{p-1} d + (-1)^{p+1} \mathrm{Id} : C_p(X; u) \to C_p(X; u).$$

En effet, si W est $D^p \times [0, \infty[$ privé de la réunion de petites boules ouvertes autour des contre-images des centres des $(p + 1)$-cellules, $\tilde{\Phi} \circ (\tilde{\chi}_\alpha^p \times I)|_W$ est homotope rel $D^p \times 0 \cup S^{p-1} \times [0, \infty[$ à $\psi : W \to \tilde{X}^p$ transverse aux centres des p-cellules, et

pour tout t, $(\tilde{f}.\psi)^{-1}(]-\infty, t])$ est compact. La restriction de ψ à $\partial(D^p \times [0, \infty[)$ donne $\overline{H}_{p-1} d(\tilde{e}_\alpha^p) + (-1)^{p+1} \tilde{e}_\alpha^p$ et la restriction à l'autre partie du bord de W donne $-d\overline{H}_p(\tilde{e}_\alpha^p)$.

Si on pose $H_p = (-1)^{p+1} \overline{H}_p$, on a alors $dH_p + H_{p-1} d = I$, donc $C_\cdot(X; u)$ est contractile.

1.11. *Notation.* — Lorsque $H_*(X; u) = 0$, on note $\tau(X; u) \in Wh(G; u)$ la torsion du complexe acyclique $C_\cdot(X; u)$.

1.12. Dans la fin de ce chapitre, on veut montrer que les conditions $H_*(X; u) = 0$ ou $C_\cdot(X; u)$ simplement équivalent à 0 sont des conditions ouvertes en

$$u \in \mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{R}) = H^1(X, \mathbf{R}).$$

Jusqu'en 1.15, $G = \mathbf{Z}^k$; Λ est alors commutatif intègre noethérien. Soit $S \subset \Lambda$ la partie multiplicativement stable formée des $\pm g_0 + n_1 g_1 + \ldots + n_p g_p$ avec $u(g_i) > u(g_0)$ $(i \geqslant 1)$; S est exactement l'ensemble des éléments de Λ inversibles dans Λ_u car les unités de Λ sont juste les $\pm g$ et on a des inclusions $\Lambda \subset S^{-1}\Lambda \subset \Lambda_u$.

Lemme **1.13.** — *Soit* F *un* Λ*-module de type fini. Si* $F \otimes_\Lambda \Lambda_u = 0$, *alors*

$$S^{-1}F = F \otimes_\Lambda S^{-1}\Lambda = 0.$$

Démonstration. — Soit $I \subset \Lambda$ l'annulateur de F. Si l'idéal $I\Lambda_u$ engendré par I dans Λ_u n'est pas tout, soit $m \subset \Lambda_u$ un idéal maximal avec $I\Lambda_u \subset m$; posons $\mathscr{P} = \Lambda \cap m$, c'est un idéal premier de Λ contenant I. Localisons en $\mathscr{P}$; $F_\mathscr{P} = F \otimes_\Lambda \Lambda_\mathscr{P}$ est non nul car si $f_1, \ldots, f_\ell$ est un système générateur de F et si $F_\mathscr{P} = 0$, il existerait $s_i \in \Lambda - \mathscr{P}$ avec $s_i f_i = 0$ et alors $s = s_1 \ldots s_\ell \in I \subset \mathscr{P}$. Soit k le corps résiduel $\Lambda_\mathscr{P}/\mathscr{P}\Lambda_\mathscr{P}$; d'après Nakayama $F_\mathscr{P}/\mathscr{P}F_\mathscr{P} = F \otimes_\Lambda k$ est un k-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$. Soit $K = \Lambda_u/m\Lambda_u$ extension de k; le produit tensoriel $(F \otimes_\Lambda k) \otimes_k K$ est non nul, mais c'est aussi $(F \otimes_\Lambda \Lambda_u) \otimes_{\Lambda_u} K$, donc $F \otimes_\Lambda \Lambda_u \neq 0$. Donc, si $F \otimes_\Lambda \Lambda_u = 0$ et si $a_1, \ldots, a_r \in \Lambda$ est un système générateur de I, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda_u$ avec

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = 1;$$

en tronquant assez loin $\lambda_i = \mu_i + \nu_i$ $(\mu_i \in \Lambda)$, on a

$$\Sigma \mu_i a_i = 1 - \Sigma \nu_i a_i = 1 + \sum_{u(g_j) > 0} n_j g_j.$$

Comme $\Sigma \mu_i a_i \in \Lambda$, c'est que les n_j sont nuls à partir d'un certain rang et $\Sigma \mu_i a_i \in S$, donc $I \cap S \neq \emptyset$ et $S^{-1}F = 0$.

Proposition **1.14.** — *Soit* $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ *un complexe de* Λ*-modules libres de type fini. Si* $C_\cdot \otimes \Lambda_u$ *est acyclique, alors* $C_\cdot \otimes S^{-1}\Lambda$ *est déjà acyclique.*

Démonstration. — Comme Λ est noethérien, $Z_k = \ker d_k$ est de type fini ainsi que $B_k = \operatorname{Im} d_{k+1}$ et $H_k = Z_k/B_k$.

Montrons par récurrence sur k l'énoncé :

E_k : $S^{-1} H_j = 0$ pour $j < k$ et $S^{-1} B_j \simeq S^{-1} Z_j$ est projectif sur $S^{-1}\Lambda$ pour $j < k$.

Comme l'homologie de $C_\cdot \otimes S^{-1}\Lambda$ est le localisé de l'homologie de $C_\cdot$, E_{n+1} démontre la proposition.

Si K est un Λ-module, on pose $K^u = K \otimes_\Lambda \Lambda_u = (S^{-1} K) \otimes_{S^{-1}\Lambda} \Lambda_u$. Pour $k = 1$, on a la suite exacte $C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to H_0 \to 0$, donc la suite $C_1^u \xrightarrow{d^u} C_0^u \to H_0^u \to 0$ est exacte. Par conséquent, H_0^u est égal à $H_0(C_\cdot^u)$, qui est nul par hypothèse; d'après 1.13, $S^{-1} H_0 = 0$ et $S^{-1} B_0 = S^{-1} Z_0 = S^{-1} C_0$.

Supposons E_k; comme $S^{-1}\Lambda$ est plat, la suite exacte $0 \to Z_k \to C_k \to B_{k-1} \to 0$ donne la suite exacte $0 \to S^{-1} Z_k \to S^{-1} C_k \to S^{-1} B_{k-1} \to 0$ qui est scindée puisque $S^{-1} B_{k-1}$ est projectif, donc $S^{-1} Z_k$ est projectif et en tensorisant par Λ_u on a la suite exacte $0 \to Z_k^u \to C_k^u \to B_{k-1}^u \to 0$ et l'égalité $B_{k-1}^u = Z_{k-1}^u$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & C_{k+1}^u & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow^{d_{k+1}^u} & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Z_k^u & \longrightarrow & C_k^u & \longrightarrow & Z_{k-1}^u & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & \searrow^{d_k^u} & \downarrow & & \\
 & & H_k^u & & & & C_{k-1}^u & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

La suite verticale de gauche est exacte car $C_{k+1} \to Z_k \to H_k \to 0$ est exacte. On a donc $H_k^u = H_k(C_\cdot^u)$ qui est nul par hypothèse; d'après 1.13, $S^{-1} H_k = 0$ et $S^{-1} B_k = S^{-1} Z_k$ qui est projectif.

1.15. Revenons à la situation générale. On note Γ l'abélianisé de G divisé par sa torsion; le morphisme $\Gamma \to \mathbf{R}$ induit par $u : G \to \mathbf{R}$ sera encore appelé u et l'on notera Λ_u^G et Λ_u^Γ les complétés de $\mathbf{Z}[G] = \Lambda^G$ et $\mathbf{Z}[\Gamma] = \Lambda^\Gamma$ respectivement et $\pi : \Lambda_u^G \to \Lambda_u^\Gamma$ la surjection canonique.

On fixe une norme sur $\Gamma \otimes \mathbf{R}$, on note Λ_{us}^Γ le sous-anneau de Λ_u^Γ formé des $\lambda = \Sigma n_i \gamma_i$ avec $u(\gamma_i) \to +\infty$ tels qu'il existe $\delta_\lambda > 0$, ε_λ avec, pour tout i,

$$u(\gamma_i) \geqslant \delta_\lambda \,||\, \gamma_i \,||\, + \varepsilon_\lambda .$$

Si $\lambda = 1 + \Sigma_{u(\gamma_i)>0} n_i \gamma_i$ est dans Λ_{us}^Γ, on peut prendre $\varepsilon_\lambda = 0$ et il est clair que l'inverse de λ est dans Λ_{us}^Γ et que $S^{-1}\Lambda^\Gamma \subset \Lambda_{us}^\Gamma \subset \Lambda_u^\Gamma$.

On note Λ^G_{us} le sous-anneau de Λ^G_u, image réciproque par π de Λ^Γ_{us}. On a clairement un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^G_{us} & \xrightarrow{j} & \Lambda^\Gamma_{us} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ \Lambda^G_u & \longrightarrow & \Lambda^\Gamma_u \end{array}$$

où les flèches horizontales sont surjectives et les flèches verticales sont injectives.

Proposition **1.16.** — *Soit* $C_.$ *un complexe fini de* Λ^G*-modules libres de type fini basés. Si* $\Lambda^G_u \otimes C_.$ *est acyclique,* $\Lambda^G_{us} \otimes C_.$ *est acyclique. Si* $\Lambda^G_u \otimes C_.$ *est simplement équivalent à zéro,* $\Lambda^G_{us} \otimes C_.$ *l'est aussi.*

Démonstration. — Si $\Lambda^G_u \otimes C_.$ est acyclique, comme $C_.$ est libre, il existe une contraction pour $\Lambda^G_u \otimes C_.$ et, par extension des scalaires, $\Lambda^\Gamma_u \otimes C_.$ est contractile, donc d'après 1.14, $S^{-1}(\Lambda^\Gamma \otimes C_.)$ est acyclique donc contractile et $\Lambda^\Gamma_{us} \otimes C_.$ l'est aussi.

Soit x un cycle de $\Lambda^G_{us} \otimes C_p$. Il existe $y \in \Lambda^G_u \otimes C_{p+1}$ et $z \in \Lambda^\Gamma_{us} \otimes C_{p+1}$ avec $i(x) = dy$ et $j(x) = dz$. Il existe $t \in \Lambda^\Gamma_u \otimes C_{p+2}$ tel que $z - y$, élément de $\Lambda^\Gamma_u \otimes C_{p+1}$, soit égal à dt. Choisissons $\tau \in \Lambda^G_u \otimes C_{p+2}$ au-dessus de t et posons

$$y' = y + d\tau \in \Lambda^G_u \otimes C_{p+1};$$

y' et z ont même image dans $\Lambda^\Gamma_u \otimes C_{p+1}$ et il existe donc $x' \in \Lambda^G_{us} \otimes C_{p+1}$ avec $ix' = y'$ et $jx' = z$. Or $i(x - dx') = dy - d(y + d\tau) = 0$ et $x = dx'$. On construit un opérateur d'homotopie η pour $\Lambda^G_{us} \otimes C_.$ avec $\eta^2 = 0$ et $d + \eta$, allant de la somme des termes pairs vers la somme des termes impairs, représente la torsion de $\Lambda^G_{us} \otimes C_.$ [6]. Si la torsion de $\Lambda^G_u \otimes C_.$ est nulle et si $A \in Gl(n, \Lambda^G_{us})$ est la matrice de $d + \eta$, alors après stabilisation (on ne change pas de notations) il existe des $\lambda_i \in \Lambda^G_u$, des $\mu_j \in \Lambda^G_u$, une matrice diagonale Δ à coefficients dans Λ^G_u avec $u(\Delta) > 0$ et $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que

$$\prod_i E(\lambda_i)\, A \prod_j E(\mu_j) = D(I + \Delta),$$

où $D = \operatorname{diag}(\pm g_1, \ldots, \pm g_n)$.

En tronquant les λ_i et les μ_j assez loin, il existe $\bar\lambda_i \in \Lambda^G$, $\bar\mu_j \in \Lambda^G$ avec

$$\prod_i E(\bar\lambda_i)\, A \prod_j E(\bar\mu_j) = D(I + R),$$

où $u(R) > 0$, et d'après l'égalité R est à coefficients dans Λ^G_{us}. Comme en 1.7, $I + R$ donne donc 0 dans le quotient de $K_1(\Lambda^G_{us})$ par les unités évidentes, et il en est de même de A.

Proposition **1.17.** — *L'ensemble des* $u \in H^1(X, \mathbf{R})$ *pour lesquels* $C_.(X; u)$ *est acyclique (resp.* $C_.(X; u)$ *est simplement équivalent à* 0*) est un ouvert de* $H^1(X, \mathbf{R})$.

Démonstration. — Si $C_.(X; u)$ est simplement équivalent à 0, alors $\Lambda^G_{us} \otimes C_.(\tilde X)$ l'est aussi. Considérons le nombre fini d'éléments de Λ^G_{us} figurant dans la contraction η et la matrice R de 1.18. Il est clair que si u' est assez proche de u, alors tous ces éléments sont dans $\Lambda^G_{u'}$ et assurent la simple équivalence à 0 de $C_.(X; u')$.

Chapitre 2

COMPLEXE DES POINTS CRITIQUES

Soit M une variété différentiable compacte sans bord de dimension n et soit α une 1-forme de Morse sur M.

2.1. Cartes de Morse

Sur $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne standard (la norme est notée $|\ |$), on considère le sous-espace V_- engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique et le sous-espace V_+ engendré par les $n-k$ derniers. On note $Q : \mathbf{R}^n = V_- \oplus V_+ \to \mathbf{R}$ la forme quadratique $Q(x) = -|x_-|^2 + |x_+|^2$, où $x = x_- + x_+$. Pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, on pose

$$
\begin{aligned}
U(\varepsilon, \eta) &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid -\varepsilon \leqslant Q(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |x_-|\,|x_+| \leqslant \sqrt{\eta(\varepsilon+\eta)}\},\\
\partial_+ U &= \{x \in U \mid Q(x) = \varepsilon \quad \text{et} \quad |x_-| \leqslant \sqrt{\eta}\},\\
\partial_- U &= \{x \in U \mid Q(x) = -\varepsilon \quad \text{et} \quad |x_+| \leqslant \sqrt{\eta}\},\\
\partial_0 U &= \{x \in \partial U \mid |x_-|\,|x_+| \leqslant \sqrt{\eta(\varepsilon+\eta)}\}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble $\partial_0 U$ est formé de trajectoires du champ de vecteurs grad Q et

$$\partial U = \partial_+ U \cup \partial_- U \cup \partial_0 U;$$

ε est la taille de U et η son épaisseur. Si c est un point critique d'indice k de α, on sait qu'il existe un plongement $h : U(\varepsilon, \eta) \to M$ avec $h(0) = c$ et $h^* \alpha = dQ|_U$; h s'appelle *carte de Morse* pour le point critique c et $\Omega(c) = h(U)$, *voisinage de Morse* de c.

Définition **2.2.** — On dit qu'un champ de vecteurs ξ sur M est de *pseudo-gradient* pour α si

1) pour chaque point critique c de α, il existe une carte de Morse h telle que $\xi|_{\Omega(c)} = h_*(\text{grad } Q)$;
2) pour tout $x \in M - \text{Crit } \alpha$, $\langle \alpha_x, \xi_x \rangle > 0$.

On fixe les cartes de Morse, on suppose que les voisinages de Morse sont tous disjoints de même taille ε et on note Ω leur réunion.

Remarque 1. — Un champ de pseudo-gradient pour α apparaît alors comme une section d'un fibré sur $M - \mathring{\Omega}$ à fibres convexes dont la restriction à $\partial\Omega$ est imposée, d'où l'existence de pseudo-gradients.

Remarque 2. — Comme M est compacte, l'espace des champs de vecteurs sur M avec la topologie C^∞ est métrisable, le sous-espace des champs vérifiant 1) pour le choix fait des cartes de Morse est fermé et le sous-espace des champs vérifiant en plus 2) est ouvert dans le précédent et est donc de Baire.

2.3. *Notations.* — On note φ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé au champ de pseudo-gradient ξ. Si c est un point critique, on pose

$$W^s_{loc}(c) = h(U \cap V_-),$$

$$W^u_{loc}(c) = h(U \cap V_+),$$

$$\partial W^s_{loc}(c) = h(\partial_- U \cap V_-) \quad \text{noté aussi } S_-(c),$$

$$\partial W^u_{loc}(c) = h(\partial_+ U \cap V_+) \quad \text{noté aussi } S_+(c).$$

La variété stable de c, $W^s(c)$, est obtenue à partir de la réunion de $W^s_{loc}(c)$ et de $\partial W^s_{loc}(c) \times \mathbf{R}$ en identifiant $(a, t) \in S_-(c) \times [0, \infty[$ avec $\varphi_t(a) \in W^s_{loc}(c)$; $W^s(c)$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^{I(c)}$ où $I(c)$ est l'indice de c et $\varphi^s_c : W^s(c) \to M$, définie par $\varphi^s_c(c) = c$ et $\varphi^s_c(a, t) = \varphi_t(a)$, est une immersion injective; on a des définitions analogues pour la variété instable $W^u(c)$ et $\varphi^u_c : W^u(c) \to M$.

Longueur d'un morceau de trajectoire de ξ. — Soit $\gamma : I \to M$ un morceau de trajectoire de ξ; on pose

$$L(\gamma) = \int_I \gamma^* \alpha.$$

On a $L(\gamma) > 0$ si γ n'est pas constante.

On note $W^u(c, L)$ la partie de $W^u(c)$ formée des x tels que la longueur de la trajectoire de c à x, notée $D_c(x)$, est $\leqslant L$. Posons

$$S^u(c, L) = \{ x \in W^u(c) \mid D_c(x) = L \}.$$

On note $\psi^u_c : S^u(c, L) \to M$ la restriction de φ^u_c à $S^u(c, L)$; l'image $\psi^u_c(S^u(c, L))$ est contenue dans une feuille du feuilletage singulier défini par α. On a des définitions analogues pour $W^s(c, L)$ et $S^s(c, L)$.

2.4. Espace des liaisons entre points critiques

Définition. — On appelle *liaison* entre le point critique c et le point critique d toute orbite non triviale de ξ dont l'ensemble α-limite est c et dont l'ensemble ω-limite est d.

On note $\mathscr{L}(c, d)$ l'ensemble des liaisons de c à d. Comme espace topologique, $\mathscr{L}(c, d)$ est par définition le quotient de

$$\{(x, y) \in (W^u(c) - \{c\}) \times (W^s(d) - \{d\}) \mid \varphi_c^u(x) = \varphi_d^s(y)\}$$

par les translations. L'ensemble $\mathscr{L}(c, d)$ s'identifie au sous-espace de $S_+(c) \times S_-(d)$ formé des (x, y) tels que la trajectoire de x passe par y.

Si $\ell \in \mathscr{L}(c, d)$, on note $\ell^- \in S_+(c)$ le premier point de sortie de $\Omega(c)$ et $\ell^+ \in S_-(d)$ le dernier point d'entrée dans $\Omega(d)$ (entre ℓ^- et ℓ^+, l'orbite ℓ peut traverser $\Omega(c)$ ou $\Omega(d)$).

On note $\mathscr{L}(c, d, A)$ la partie formée des $\ell \in \mathscr{L}(c, d)$ de longueur $\leqslant A$ et $\mathscr{L}_A(c, d)$ la partie des ℓ de longueur égale à A. $\mathscr{L}_A(c, d)$ s'identifie donc à $(\psi_c^u)^{-1}(S_-(d))$, où $\psi_c^u : S^u(c, A - \varepsilon) \to M$.

Lemme. — *Soit* $x \in M - \mathrm{Crit}\,\alpha$; *il y a équivalence entre*

1) *l'orbite de* x *est une liaison entre points critiques,*
2) *la longueur de l'orbite de* x *est finie.*

Preuve. — L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est évidente et 2) $\Rightarrow$ 1) résulte de la compacité de M car si $y \in \omega - \lim(x)$ et si y est non critique, chaque passage dans une boîte pour ξ centrée en y donne la même contribution > 0 à la longueur de l'orbite de x; de même chaque passage dans un voisinage de Morse $\Omega(d)$ contribue pour 2ε à la longueur de l'orbite de x sauf si l'orbite est dans la variété stable de d, et on a le même raisonnement pour l'ensemble α-limite.

2.5. Espace des multiliaisons entre points critiques

Définissons

$$\bar{\mathscr{L}}(c, d) = \bigcup_{\substack{d_0, d_1, \ldots, d_k \in \mathrm{Crit}\,\alpha \\ d_0 = c,\ d_k = d}} \mathscr{L}(d_0, d_1) \times \mathscr{L}(d_1, d_2) \times \ldots \times \mathscr{L}(d_{k-1}, d_k).$$

Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, on pose $L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^k L(\lambda_i)$. Remarquons que si $\boldsymbol{\lambda}$ est une k-liaison, $L(\lambda) > 2\varepsilon k$. On pose

$$\bar{\mathscr{L}}(c, d, A) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \bar{\mathscr{L}}(c, d)/L(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant A\},$$
$$\bar{\mathscr{L}}_A(c, d) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \bar{\mathscr{L}}(c, d)/L(\boldsymbol{\lambda}) = A\}.$$

Topologie de $\bar{\mathscr{L}}(c, d)$. — Soient

— $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \bar{\mathscr{L}}(c, d)$ où $\lambda_i \in \mathscr{L}(d_{i-1}, d_i)$,
— $\mathbf{U}^- = (U_1^-, \ldots, U_k^-)$ où U_1^- est un voisinage de λ_i^- dans $\partial_+ \Omega(d_{i-1})$,
— $\mathbf{U}^+ = (U_1^+, \ldots, U_k^+)$ où U_1^+ est un voisinage de λ_i^+ dans $\partial_- \Omega(d_i)$.

On dit que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{k'})$ appartient à $W(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ s'il existe

$$0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'-1} < i_{k'} = k$$

tels que, pour $j \leqslant k'$, $\mu_j \in \mathscr{L}(d_{i_{-1}}, d_i)$, $\mu_j^- \in U_{1+i_{j-1}}^-$, $\mu_j^+ \in U_{i_j}^+$, et μ_j passe par U_r^- et U_r^+ pour $1 + i_{j-1} < r \leqslant i_j$.

Les $W(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ forment une base de voisinage. On munit $\bar{\mathscr{L}}(c, d)$ de la topologie associée, qui est métrisable.

Proposition **2.6.** — *L'ensemble* $\bar{\mathscr{L}}(c, d, A)$ *est compact.*

Démonstration. — 1) Soit d'abord (ℓ_n) une suite de $\mathscr{L}(c, d, A)$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\ell_n^- \to a \in S_+(c)$.

Soit γ la trajectoire de ξ passant par a pour $t = 0$. Je dis que $\int_R \gamma^* \alpha \leqslant A$, car s'il existe t_0 avec $\int_{-\infty}^{t_0} \gamma^* \alpha = A' > A$, alors, pour n assez grand, il existe t_n proche de t_0 avec $\int_{-\infty}^{t_n} \gamma_n^* \alpha = A'$ où γ_n est la trajectoire passant par ℓ_n^- pour $t = 0$; ceci contredit $L(\ell_n) \leqslant A$. La trajectoire γ meurt donc en un point critique d_1.

Supposons $d_1 \neq d$. Soit $b^1 \in S_-(d_1)$ le dernier point d'entrée de γ dans $\Omega(d_1)$; pour n assez grand, γ_n coupe $\partial_- \Omega(d_1)$ en un point b_n^1 et en ressort car $d_1 \neq d$ en un point a_n^1. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $a_n^1 \to a^1 \in \partial_+ \Omega(d_1)$ (en fait $a^1 \in S_+(d_1)$ car $b_n^1 \to b^1 \in S_-(d_1)$) et on regarde la trajectoire γ^1 passant pour $t = 0$ par a^1; on a alors, comme précédemment, $L(\gamma^1) \leqslant A - L(\gamma)$.

Si $d_1 = d$ et s'il y a une infinité d'indices n avec $b_n^1 = \ell_n^+$, alors une sous-suite de (ℓ_n) tend vers l'orbite de a dans $\mathscr{L}(c, d)$. Sinon, à partir d'un certain rang, ℓ_n traverse $\Omega(d)$ et en ressort en un point a_n^1 et on continue comme précédemment. Si

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \bar{\mathscr{L}}(c, d, A),$$

on a $k \leqslant A/2\varepsilon$, donc le processus précédent doit s'arrêter et on trouve une limite dans $\bar{\mathscr{L}}(c, d, A)$ à une sous-suite de ℓ_n.

2) Soit $\boldsymbol{\lambda}_n$ une suite générale de $\bar{\mathscr{L}}(c, d, A)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points critiques, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe des points critiques $d_0 = c, d_1, \ldots, d_k = d$ avec $k \leqslant A/2\varepsilon$ tel que $\boldsymbol{\lambda}_n = (\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^k)$, où $\lambda_n^i \in \mathscr{L}(d_{i-1}, d_i)$; alors la partie 1) et le procédé diagonal donnent le résultat.

Définition **2.7.** — Posons

$$\overline{W}^s(d) = W^s(d) \cup \Big(\bigcup_c W^s(c) \times \bar{\mathscr{L}}(c, d)\Big).$$

On appelle *distance* de d à $(m, \boldsymbol{\lambda}) \in W^s(c) \times \bar{\mathscr{L}}(c, d)$ la somme $D_c(m) + L(\boldsymbol{\lambda}) = D_d(m, \boldsymbol{\lambda})$. On pose encore

$$\overline{W}^s(d, A) = \{ x \in \overline{W}^s(d) \mid D_d(x) \leqslant A \},$$
$$\overline{S}^s(d, A) = \{ x \in \overline{W}^s(d) \mid D_d(x) = A \},$$

$\bar{\varphi}_d^s : \overline{W}^s(d, A) \to M$ avec $\bar{\varphi}_d^s(x) = \varphi_c^s(m)$ si $x = (m, \boldsymbol{\lambda}) \in W^s(c) \times \bar{\mathscr{L}}(c, d)$, et l'on note $\bar{\psi}_d^s : \overline{S}^s(d, A) \to M$ la restriction de $\bar{\varphi}_d^s$ à $\overline{S}^s(d, A)$.

Topologie de $\overline{W}^s(d)$. — Soit $(m, \boldsymbol{\lambda}) \in W^s(c) \times \mathscr{L}(c, c_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(c_{k-1}, d)$. Soit U^0 un voisinage de m dans M et soit $W(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ un voisinage de $\boldsymbol{\lambda}$ dans $\bar{\mathscr{L}}(c; d)$ comme en 2.5. Soit $(m', \boldsymbol{\mu}) \in W^s(c_{i_1}) \times \bar{\mathscr{L}}(c_{i_1}, d)$ avec $i_1 \leqslant k$; on pose $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_{1+i_1}, \ldots, \lambda_k)$

et $\mathbf{U}^{-'}$, $\mathbf{U}^{+'}$ sont les familles de voisinages que l'on pense. On dit que $(m', \boldsymbol{\mu})$ appartient à $W(m, \boldsymbol{\lambda}, U^0, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ si $m' \in U^0$, la trajectoire allant de m' à c_{i_1} passe dans U_j^- pour $j \leqslant i_1$ et dans U_j^+ pour $j < i_1$, et $\boldsymbol{\mu} \in W(\boldsymbol{\lambda}', \mathbf{U}^{-'}, \mathbf{U}^{+'})$.

Ces ensembles forment une base de voisinages d'une topologie métrisable sur $\overline{W}^s(d)$.

On a des définitions analogues pour les variétés instables.

Proposition **2.8.** — *Les ensembles* $\overline{W}^s(d, A)$ *et* $\overline{W}^u(c, A)$ *sont compacts.*

Démonstration. — Soit m_n une suite de $W^u(c, A)$ et soit $a_n \in S_+(c)$ le premier point de sortie de $\Omega(c)$ de la trajectoire γ_n passant par m_n. On peut supposer que $a_n \to a \in S_+(c)$ et que $D_c(m_n) \to D \leqslant A$. Soit γ la trajectoire passant par a. S'il existe t_0 avec $\int_{-\infty}^{t_0} \gamma^* \alpha = D' > D$, alors pour n assez grand il existe t_n proche de t_0 avec

$$\int_{-\infty}^{t_n} \gamma_n^* \alpha = D' > D_c(m_n).$$

Soit s tel que $\int_{-\infty}^{s} \gamma^* \alpha = D$ et soit s_n avec $\gamma_n(s_n) = m_n$; on a $s_n < t_n$ et il est clair que $m_n \to m = \gamma(s) \in W^u(c, A)$. Sinon $\int_R \gamma^* \alpha \leqslant D$, donc γ meurt en un point critique c_1. Si $L(\gamma) = D$, il est clair que $m_n \to c_1$ dans M et que $m_n \to (\gamma, c_1)$ dans $\overline{W}^u(c)$.

Si $L(\gamma) \geqslant D - \varepsilon$, m_n est dans un voisinage compact de $W^u_{loc}(c_1)$, donc on peut supposer que $m_n \to m$. Comme le point d'entrée de γ_n dans $\Omega(c_1)$ tend vers le point d'entrée de γ qui est dans $S_-(c_1)$, $m \in W^u_{loc}(c_1)$ et $m_n \to (\gamma, m) \in \mathscr{L}(c, c_1) \times W^u_{loc}(c_1)$.

Si $L(\gamma) < D - \varepsilon$, à partir d'un certain rang, γ_n ressort de $\Omega(c_1)$ en un point a_n^1 avant d'atteindre m_n. On peut supposer que a_n^1 tend vers a^1, qui est forcément dans $S_+(c_1)$. Soit γ^1 la trajectoire passant par a^1. Si la longueur de γ^1 est trop grande ($> D - L(\gamma)$), on a fini, comme précédemment; sinon, γ^1 meurt en un point c_2 et on recommence. Le processus s'arrête et on a trouvé une limite $(\gamma, m) \in \bar{\mathscr{L}}(c, c_k) \times W^u(c_k)$.

Le cas général se traite comme en 2.6.

2.9. On dit que le pseudo-gradient ξ est *générique* si pour tous points critiques c et d, les applications $\varphi_c^u : W^u(c) \to M$ et $\varphi_d^s : W^s(d) \to M$ sont transverses.

Le théorème de Kupka-Smale assure (les cartes de Morse étant fixées) que l'ensemble des pseudo-gradients génériques est résiduel, donc dense.

Si $I(c) \geqslant I(d)$ et ξ est générique, $\mathscr{L}(c, d) = \bar{\mathscr{L}}(c, d) = \emptyset$; en effet l'intersection de φ_c^u et de φ_d^s est alors une variété de dimension $\leqslant 0$, mais si $\mathscr{L}(c, d) \neq \emptyset$, cette intersection contient un point non critique et toute son orbite.

Si $I(d) = 1 + I(c)$ et si ξ est générique, $\mathscr{L}(c, d, A)$ est un ensemble fini. En effet, si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \bar{\mathscr{L}}(c, d)$, on doit avoir $I(c) = I(d_0) < \ldots < I(d_r) = I(d)$ d'après le résultat précédent, donc $r = 1$ et $\bar{\mathscr{L}}(c, d) = \mathscr{L}(c, d)$; $\mathscr{L}(c, d, A)$ est donc une variété compacte de dimension 0.

Proposition **2.10.** — *Si* ξ *est générique,* $\varphi_c^u : W^u(c, L) \to M$ *et* $\varphi_d^s : W^s(d, L) \to M$ *sont des plongements.*

Démonstration. — Dans le cas exact, le résultat est vrai sans hypothèse sur ξ. Dans le cas général, le résultat peut être faux s'il y a des multiliaisons homoclines.

Nous savons que $\varphi : W^u(c) \to M$ est une immersion injective; nous allons vérifier que $\varphi : W^u(c, L) \to \varphi(W^u(c, L)) \subset M$ est fermée. Soient F un sous-ensemble fermé de $W^u(c, L)$ et $\bar{F}$ son adhérence dans $\overline{W}^u(c, L)$; alors

$$\bar{F} - F \subset \overline{W}^u(c, L) - W^u(c, L) = \bigcup_{d, L' + L'' = L} (\bar{\mathscr{L}}_{L'}(c, d) \times W^u(d, L'')),$$

donc $\varphi(\bar{F} - F) \subset \bigcup_{I(d) > I(c)} \varphi_d(W^u(d, L'))$ puisque $\bar{\mathscr{L}}(c, d) = \emptyset$ si $I(d) \leqslant I(c)$, donc $\varphi(\bar{F} - F) \cap \varphi(W^u(c, L)) = \emptyset$ et $\varphi(F) = \varphi(\bar{F}) \cap \varphi(W^u(c, L))$, mais $\varphi(\bar{F})$ est compact.

Proposition **2.11.** — *Soit ξ un pseudo-gradient générique.*

1) *L'ensemble $\bar{\mathscr{L}}_A(c, d)$ est une variété compacte à bord anguleux de dimension $I(d) - I(c) - 1$; au voisinage de $\lambda \in \mathscr{L}(c, c_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(c_k, d) \subset \bar{\mathscr{L}}_A(c, d)$, $\bar{\mathscr{L}}_A(c; d)$ est modelé sur*

$$\mathscr{L}(c, c_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(c_k, d) \times [0, \infty[^k.$$

2) *Pour L distinct des longueurs des multiliaisons partant de c, $\overline{W}^u(c, L)$ est une variété compacte à bord anguleux dont l'arrondi est difféomorphe à $D^{n - I(c)}$ et $\bar{\varphi}^u_c : \overline{W}^u(c, L) \to M$ est C^∞.*

Au voisinage de $(\lambda, y) \in \bar{\mathscr{L}}_A(c, d) \times W^u(d, L - A)$, $\overline{W}^u(c, L)$ est modelée sur

$$\bar{\mathscr{L}}_A(c, d) \times W^u(d, L - A) \times [0, \infty[$$

et au voisinage de $(\lambda, y) \in \bar{\mathscr{L}}_A(c, d) \times S^u(d, L - A)$, $\overline{S}^u(c, L)$ est modelé sur

$$\bar{\mathscr{L}}_A(c, d) \times S^u(d, L - A) \times [0, \infty[.$$

Si $\lambda \in \bar{\mathscr{L}}_L(c, d)$, $\overline{W}^u(c, L)$ a des singularités coniques le long de $\bar{\mathscr{L}}_L(c, d) \times \{ d \}$.

On a un résultat analogue pour les variétés stables.

Avant de donner la démonstration, énonçons un lemme qui décrit ce qui se passe lorsqu'on pousse une variété par les trajectoires de ξ et qu'on est près d'un point critique.

Lemme **2.12.** — *Soit X une variété compacte à bord anguleux. Soit $f : X \to \partial_- \Omega(d)$ une application C^∞ transverse à $S_-(d)$. On considère la partie $Y_a \subset X \times \Omega(d)$ formée des couples (x, x') où x' est sur l'orbite de $f(x)$ et où la longueur du segment d'orbite de $f(x)$ à x' est $\leqslant a \leqslant 2\varepsilon$; Y_a est une sous-variété de $X \times \Omega(d)$*

— *si $0 < a < \varepsilon$, Y_a est compacte et difféomorphe à $X \times [0, a]$,*

— *si $\varepsilon \leqslant a \leqslant 2\varepsilon$ et si $f^{-1}(S_-(d)) \neq \emptyset$, Y_a n'est plus compacte et*

$$\overline{Y}_a - Y_a = f^{-1}(S_-(d)) \times W^u(d, a - \varepsilon),$$

— *si $a = \varepsilon$, $\overline{Y}_a$ a une singularité conique en $f^{-1}(S_-(d)) \times \{ d \}$ (si $I(d) \neq n$),*

— *si $\varepsilon < a \leqslant 2\varepsilon$, $\overline{Y}_a$ a une structure naturelle de variété à bord anguleux avec une nouvelle arête le long de $f^{-1}(S_-(d)) \times \partial W^u(d, a - \varepsilon)$ et l'arrondi de $\overline{Y}_a$ le long de cette arête est difféomorphe à $X \times [0, a]$.*

Démonstration. — La situation pour $a < \varepsilon$ est claire. Grâce à la carte de Morse, nous supposons que $M = \mathbf{R}^n = V_- \oplus V_+$ et $\Omega = U(\varepsilon, \eta)$ avec les notations 2.1.

Posons $X_0 = f^{-1}(S_-)$; comme le problème est ce qui se passe au voisinage de X_0, on peut supposer, grâce à l'hypothèse de transversalité et quitte à réduire l'épaisseur η du voisinage, que $X = X_0 \times D$ (où D est le disque de V_+, $|y|^2 \leqslant \eta$) et que l'application f est donnée par

$$X_0 \times D \to V_- \times V_+$$
$$(x, y) \mapsto \sqrt{\varepsilon + |y|^2}\, g(x, y), y,$$

où $|g(x, y)| = 1$. Quitte à réduire encore η, on peut supposer que g est en fait définie sur $X_0 \times V_+$ tout entier avec $|g(x, y)| = 1$ pour tout $(x, y) \in X_0 \times V_+$. Considérons les applications C^∞

$b : V_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $b(z, s) = s\sqrt{2}\,[\varepsilon + (\varepsilon^2 + 4s^2 \mid z\mid^2)^{1/2}]^{-1/2}$,

$a : V_+ \times \mathbf{R} \to V_+$ définie par $a(z, s) = b(z, s)\, z$,

$\Phi : X_0 \times V_+ \times \mathbf{R} \to X_0 \times V_+ \times V_- \times V_+$
définie par $\Phi(x, z, s) = (x, a(z, s), sg(x, a(z, s)), z)$,

$\Psi : X_0 \times V_+ \times \mathbf{R} \to X_0 \times V_+ \times V_- \times V_+$
définie par $\Psi(x, y, t) = \left(x, y, e^{-2t}\sqrt{\varepsilon + |y|^2}\, g(x, y), e^{2t} y\right)$,

$\rho : V_+ \times \mathbf{R} \to V_+ \times]0, \infty[$ définie par $\rho(y, t) = \left(e^{2t} y, e^{-2t}\sqrt{\varepsilon + |y|^2}\right)$.

L'application ρ est un difféomorphisme d'inverse

$$\sigma(z, s) = \left(a(z, s), -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(b(z, s))\right).$$

L'application Φ est une immersion car $\dfrac{\partial}{\partial s}(sg(z, a(z, s))) \neq 0$ puisque le produit scalaire de ce vecteur avec $g(z, a(z, s))$ est égal à 1. Soient $Z = \Phi(X_0 \times V_+ \times [0, \infty[)$ et $\pi : X_0 \times V_+ \times V_- \times V_+ \to X_0 \times V_+ \times [0, \infty[$ l'application définie par

$$\pi(x, w, v_-, v_+) = (x, v_+, |v_-|),$$

l'application Φ induit un homéomorphisme de $X_0 \times V_+ \times [0, \infty[$ sur Z d'inverse $\pi|_Z$, donc Z est une sous-variété à bord de $X_0 \times V_+ \times V_- \times V_+$, difféomorphe à $X_0 \times V_+ \times [0, \infty[$.

Or $\Psi = \Phi \circ \rho$; donc si $Y = \Psi(X_0 \times V_+ \times \mathbf{R})$, on a $Y = \Phi(X_0 \times V_+ \times]0, \infty[)$ et $\overline{Y}$, adhérence de Y dans $X_0 \times V_+ \times V_- \times V_+$, est égale à Z. Comme Y_a est la partie de Y formée des $\Psi(x, y, t)$ avec $|y|^2 \leqslant \eta$, $-\varepsilon \leqslant e^{4t}|y|^2 - e^{-4t}(\varepsilon + |y|^2) \leqslant a - \varepsilon$, on a $Y_a = \Phi(X_0 \times K_a)$, où

$$K_a = \{(z, s) \in V_+ \times]0, \infty[\mid s\,|z| \leqslant \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)},\ \varepsilon \leqslant |z|^2 - s^2 \leqslant a - \varepsilon\}.$$

Donc $\overline{Y}_a = \Phi(X_0 \times \overline{K}_a)$, où $\overline{K}_a$ est l'adhérence de K_a dans $V_+ \times [0, \infty[$. L'énoncé découle directement des propriétés (suivant les valeurs de a) de $\overline{K}_a$.

Preuve de la proposition **2.11**, par récurrence sur k.

1) Soit $\ell_0 \in \mathscr{L}(c, d)$ considéré comme élément de $\psi^{-1}(S_-(d))$, où

$$\psi = \psi_c^u : S^u(c, A - \varepsilon) \to M.$$

Le lemme appliqué à X, voisinage de ℓ_0 dans $S^u(c, A - \varepsilon)$, donne la structure de $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon')$ au voisinage de $(\ell_0, y) \in \mathscr{L}_A(c, d) \times W^u(d, \varepsilon')$ pour $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, donc aussi celle de $\overline{W}^u(c, L)$ au voisinage de $(\ell_0, y) \in \mathscr{L}_A(c, d) \times W^u(d, L - A)$ (en effet se déplacer sur la trajectoire négative donne un germe $(\overline{W}^u(c, L), (\ell_0, y)) \to (\overline{W}^u(c, A + \varepsilon), (\ell_0, z))$ qui sert à définir la carte locale de $\overline{W}^u(c, L)$ en (ℓ_0, y)).

2) Soit $\lambda_0 \in \mathscr{L}(c, c_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(c_k, d)$, soit A la longueur de λ_0, soit

$$\lambda_0' \in \mathscr{L}(c, c_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(c_{k-1}, c_k)$$

la partie initiale de λ_0 de longueur B et soit $\ell_0 \in \mathscr{L}_{A-B}(c_k, d)$ tel que $\lambda_0 = (\lambda_0', \ell_0)$.

On considère ℓ_0 dans $S^u(c_k, A - B - \varepsilon)$. Par hypothèse de récurrence, $\overline{S}^u(c, A - \varepsilon)$ est, au voisinage de $(\lambda_0', \ell_0) \in \overline{\mathscr{L}}_B(c, c_k) \times S^u(c_k, A - B - \varepsilon)$, modelé sur

$$\overline{\mathscr{L}}_B(c, c_k) \times S^u(c_k, A - B - \varepsilon) \times [0, \infty[$$

au voisinage de $(\lambda_0', \ell_0, 0)$. L'immersion $\psi_{c_k} : S^u(c_k, A - B - \varepsilon) \to \mathscr{F}$, feuille du feuilletage singulier défini par α qui contient $S_-(d)$, est transverse à $S_-(d) \subset \mathscr{F}$ et l'on a

$$\psi_{c_k}^{-1}(S_-(d)) = \mathscr{L}_{A-B}(c_k, d).$$

Considérons $\bar{\psi}_c : \overline{S}^u(c, A - \varepsilon) \to \mathscr{F}$; on a $\overline{\mathscr{L}}_A(c, d) = (\bar{\psi}_c)^{-1}(S_-(d))$. Comme $\bar{\psi}_c(\lambda', y) = \psi_{c_k}(y)$ si $(\lambda', y) \in \overline{\mathscr{L}}(c, c_k) \times S^u(c_k, A - B - \varepsilon)$, $(\bar{\psi}_c)^{-1}(S_-(d))$ est modelé au voisinage de (λ_0', ℓ_0) sur $\overline{\mathscr{L}}_B(c, c_k) \times \psi_{c_k}^{-1}(S_-(d)) \times [0, \infty[$ au voisinage de $(\lambda_0', \ell_0, 0)$, donc sur $\overline{\mathscr{L}}_B(c, c_k) \times \mathscr{L}_{A-B}(c_k, d) \times [0, \infty[$, d'où le point 1 de l'énoncé d'après l'hypothèse de récurrence sur $\overline{\mathscr{L}}_B(c, c_k)$. Appliquons le lemme à X, voisinage de $\overline{\mathscr{L}}_A(c, c_k)$ dans $\overline{S}^u(c, A - \varepsilon)$, et à la restriction de $\bar{\psi}_c : X \to \partial_- \Omega(d)$. Au voisinage de

$$(\lambda_0, y) \in \overline{\mathscr{L}}_A(c, d) \times W^u(d, \varepsilon),$$

$\overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ est modelé sur $\overline{Y}_{2\varepsilon}$ au voisinage de $(\lambda_0, 0, 0, y)$, donc sur

$$\overline{\mathscr{L}}_A(c, d) \times W^u(d, \varepsilon) \times [0, \infty[$$

au voisinage de $(\lambda_0, y, 0)$.

Le résultat dans le cas général s'obtient en poussant le long des trajectoires comme dans la partie 1).

Il est à remarquer que $\overline{\mathscr{L}}_A(c, d)$ est plongé dans $\overline{S}^u(c, A - \varepsilon)$ avec fibré normal trivial : un voisinage de $\overline{\mathscr{L}}_A(c, d)$ dans $\overline{S}^u(c, \alpha - \varepsilon)$ s'écrit $\overline{\mathscr{L}}_A(c, d) \times W^u_{loc}(d)$ et s'il

n'y a pas d'autres multiliaisons issues de c dont la longueur est dans $[A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, on a

$$\overline{S}^u(c, A + \varepsilon) \simeq \overline{S}^u(c, A - \varepsilon) - (\overline{\mathscr{L}}_A(c, d) \times \operatorname{int} W^u_{loc}(d)).$$

Remarque **2.13.** — Si α est exacte, il résulte de 2.11 et 2.10 que les variétés stables des points critiques sont les cellules ouvertes d'une structure de CW-complexe sur M.

2.14. Orientations. — On choisit des orientations de chaque variété stable $W^s(c)$, donc des co-orientations des variétés instables $W^u(d)$. Les variétés des liaisons entre points critiques sont alors orientées et leurs compactifications le sont aussi. Il faut être plus précis car les $\overline{\psi}^u_d : \overline{W}^u(d, L) \to M$ ne sont pas toujours des immersions et l'orientation d'une intersection multiple n'est pas associative. Comme $W^s(d, L)$ est orientée, $S^s(d, L)$ l'est aussi; la normale sortante s'identifie à $-\xi$ et $(-\xi, \operatorname{Or} S^s(d, L)) = \operatorname{Or} W^s(d)$.

Soit ψ_c l'immersion de $S^u(c, L)$ dans la feuille F qui la contient; on a

$$\operatorname{Coor}_M S^u(c, L) = (\operatorname{Coor}_M F, \operatorname{Coor}_F S^u(c, L))$$
$$= (\operatorname{Coor} W^u(c), \operatorname{Coor}_{W^u(c)} S^u(c, L)),$$

donc si on co-oriente F par ξ, comme la normale sortante à $W^u(c, L)$ en $S^u(c, L)$ est ξ, il vient

$$\operatorname{Coor}_F S^u(c, L) = (-1)^{I(c)} \operatorname{Coor} W^u(c).$$

On oriente $\mathscr{L}_A(c, d)$ comme $\psi_c^{-1}(S_-(d)) \subset S^u(c, A - \varepsilon)$, donc comme intersection de l'immersion co-orientée ψ_c et de la sous-variété orientée $S^s(d, \varepsilon)$, soit

$$(\operatorname{Coor}_F S^u(c, A - \varepsilon), \operatorname{Or} \mathscr{L}_A(c, d)) = \operatorname{Or} S^s(d, \varepsilon),$$

soit $(\xi, \operatorname{Coor}_F S^u(c), \operatorname{Or} \mathscr{L}(c, d)) = -\operatorname{Or} W^s(d)$, soit encore

$$(\operatorname{Coor} W^u(c), \xi, \operatorname{Or} \mathscr{L}(c, d)) = -\operatorname{Or} W^s(d).$$

La variété $W^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d)$ est de codimension 0 dans le bord de $\overline{W}^s(d, A + \varepsilon)$ et la normale sortante n_0 à $\overline{W}^s(d, A + \varepsilon)$ en $(c, \ell) \in W^s(c) \times \mathscr{L}_A(c, d)$ s'identifie au vecteur tangent à ℓ orientée par $-\xi$. La formule précédente donne, en passant à la limite le long de ℓ,

$$(n_0, \operatorname{Or} W^s(c), \operatorname{Or} \mathscr{L}(c, d)) = (-1)^{I(c)} \operatorname{Or} \overline{W}^s(d),$$

donc les orientations de $\partial\overline{W}^s(d)$ et de $W^s(c) \times \mathscr{L}(c, d)$ diffèrent de $(-1)^{I(c)}$.

Les orientations de $S^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d)$ données par les inclusions

$$S^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d) \subset W^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d) \subset \overline{W}^s(d, A + \varepsilon)$$

et

$$S^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d) \subset \overline{S}^s(d, A + \varepsilon) \subset \overline{W}^s(d, A + \varepsilon)$$

sont opposées, donc l'orientation induite par $\overline{S}^s(d, A + \varepsilon)$ sur $S^s(c, \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d)$ diffère de l'orientation produit par $(-1)^{1 + I(c)}$.

2.15. Soient b, c, d trois points critiques; $\mathscr{L}_B(b, c) \times \mathscr{L}_A(c, d)$ est une face de codimension 0 de $\partial\overline{\mathscr{L}}_{A+B}(b, d)$ et l'on veut comparer les orientations. Soit

$$(\ell', \ell) \in \mathscr{L}_B(b, c) \times \mathscr{L}_A(c, d);$$

on considère ℓ' dans $S^s(c, B - \varepsilon)$ et $(\ell', \ell) \in S^s(c, B - \varepsilon) \times \mathscr{L}_A(c, d) \subset \overline{S}^s(d, A + B - \varepsilon)$. Soit n la normale sortante à $\overline{S}^s(d, A + B - \varepsilon)$ en (ℓ', ℓ); c'est aussi la normale sortante à $\overline{\mathscr{L}}_{A+B}(b, d)$. La dernière formule de 2.14 dit que

$$(n, \operatorname{Or} S^s(c; B - \varepsilon), \operatorname{Or} \mathscr{L}_A(c, d)) = (-1)^{1+I(c)} \operatorname{Or} \overline{S}^s(d, A + B - \varepsilon);$$

or
$$(\operatorname{Coor}_F S^u(b, \varepsilon), \operatorname{Or} \mathscr{L}_B(b, c)) = \operatorname{Or} S^s(c, B - \varepsilon)$$

et
$$(\operatorname{Coor}_F S^u(b, \varepsilon), \operatorname{Or} \mathscr{L}_{A+B}(b, d)) = \operatorname{Or} S^s(d, A + B - \varepsilon),$$

donc
$$\operatorname{Or} \partial\overline{\mathscr{L}}_{A+B}(b, d) = (-1)^{I(c)-I(b)-1}(\operatorname{Or} \mathscr{L}_B(b, c), \operatorname{Or} \mathscr{L}_A(c, d))$$
$$(-1)^{\dim \mathscr{L}(b, c)} \operatorname{Or}(\mathscr{L}_B(b, c) \times \mathscr{L}_A(c, d)).$$

En particulier, si $I(d) = 2 + I(b)$, il vient que comme variétés orientées

$$\partial\overline{\mathscr{L}}_L(b, d) = \bigcup_{\substack{c, L', L'' \\ I(b) < I(c) < I(d) \\ L' + L'' = L}} \mathscr{L}_{L'}(b, c) \times \mathscr{L}_{L''}(c, d).$$

Lorsque $I(d) = 1 + I(c)$, si $\ell \in \mathscr{L}(c, d)$, on pose $\varepsilon(\ell) = (-1)^{I(c)} \operatorname{Or} \ell$. Les formules de 2.14 disent que $\varepsilon(\ell)$ est le coefficient d'incidence de $\overline{W}^s(d)$ sur $W^s(c) \times \{\ell\} \subset \partial\overline{W}^s(d)$ tandis que le coefficient d'incidence de $\overline{W}^u(c)$ sur $\{\ell\} \times W^u(d) \subset \partial\overline{W}^u(c)$ est $(-1)^{I(d)} \varepsilon(\ell)$.

Si on choisit des relevés des points critiques dans $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, on associe à $\ell \in \mathscr{L}(c, d)$ un élément $g(\ell)$ de $\pi_1 M$ de la façon suivante : si on relève ℓ à partir de $\tilde{d}$ on arrive à $g(\ell)\,\tilde{c}$. Si $\tilde{f}: \widetilde{M} \to \mathbf{R}$ est une primitive de $\pi^* \alpha$, on a

$$L(\ell) = \tilde{f}(\tilde{d}) - \tilde{f}(g(\ell)\,\tilde{c}) = \tilde{f}(\tilde{d}) - \tilde{f}(\tilde{c}) - u(g(\ell)).$$

Pour $g \in \pi_1 M$, on pose $\mathscr{L}_g(c, d) = \{\ell \in \mathscr{L}(c, d) / g(\ell) = g\}$. C'est une réunion de composantes de $\mathscr{L}_A(c, d)$ avec $A = \tilde{f}(\tilde{d}) - \tilde{f}(\tilde{c}) - u(g)$.

Si $I(d) = 2 + I(b)$, on a comme variétés orientées

$$\partial\overline{\mathscr{L}}_g(b, d) = \bigcup_{\substack{c, g', g'' \\ I(b) < I(c) < I(d) \\ g' g'' = g}} \mathscr{L}_{g''}(b, c) \times \mathscr{L}_{g'}(c, d).$$

Soit encore $\sum \varepsilon(\ell)\, \varepsilon(\ell') = 0$ où la somme porte sur les points critiques c avec $I(b) < I(c) < I(d)$ et les liaisons $\ell \in \mathscr{L}(b, c), \ell' \in \mathscr{L}(c, d)$ telles que $g(\ell')\, g(\ell) = g$ dans $\pi_1 M$.

2.16. Pour tout point critique de α, on considère les couples $\check{c} = (\tilde{c}, \mathcal{O})$ où $\tilde{c}$ est un relèvement de c dans $\widetilde{M}$ et $\mathcal{O}$ est une orientation de $W^s(c)$; pour $h \in \pi_1 M$, on pose $h\check{c} = (h\tilde{c}, \mathcal{O})$ et $\sigma\check{c} = (\tilde{c}$, orientation opposée).

Pour $\mathrm{I}(d) = 1 + \mathrm{I}(c)$, on pose

$$[\check{d}, \check{c}] = \sum_{\ell \in \mathscr{L}(c,\, d)} \varepsilon(\ell)\, g(\ell) \in \Lambda_{-u};$$

il est clair que $[h\check{d}, \check{c}] = h[\check{d}, \check{c}]$, $[\check{d}, h\check{c}] = [\check{d}, \check{c}]\, h^{-1}$ et $[\sigma\check{d}, \check{c}] = [\check{d}, \sigma\check{c}] = -[\check{d}, \check{c}]$.

Considérons le quotient du $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les $\check{c}$ (pour c d'indice q) par les relations $\sigma\check{c} + \check{c}$; il possède une structure naturelle de $\mathbf{Z}[\pi_1 \mathrm{M}]$-module. Notons-le $\mathscr{C}_q$ et écrivons encore $\check{c}$ la classe de $\check{c}$ dans $\mathscr{C}_q$; donc $\sigma\check{c} = -\check{c}$ dans $\mathscr{C}_q$, qui est un $\mathbf{Z}[\pi_1 \mathrm{M}]$-module libre basé.

Posons $\mathrm{C}_q(\alpha) = \Lambda_{-u} \otimes_{\Lambda} \mathscr{C}_q$, $\Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1 \mathrm{M}]$.

Soit d un point critique d'indice $q + 1$, choisissons $\check{d}$ et, pour chaque point critique d'indice q, un $\check{c}$. Les formules précédentes montrent que la somme $\Sigma_{\mathrm{I}(c) = q} [\check{d}, \check{c}]\, \check{c} \in \mathrm{C}_q(\alpha)$ ne dépend pas du choix des $\check{c}$ et que $\Sigma [h\check{d}, \check{c}]\, \check{c}$ est égal à $h.(\Sigma [\check{d}, \check{c}]\, \check{c})$, donc définit une application Λ-linéaire $\mathscr{C}_{q+1} \to \mathrm{C}_q(\alpha)$ qu'on prolonge par Λ_{-u}-linéarité en

$$d_{q+1}(\xi) : \mathrm{C}_{q+1}(\alpha) \to \mathrm{C}_q(\alpha).$$

Proposition **2.17.** — *Le système* $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi) = (\mathrm{C}_q(\alpha), d_q(\xi))$ *est un complexe de* Λ_{-u}*-modules libres basés.*

Preuve. — L'égalité $d_q(\xi).d_{q+1}(\xi) = 0$ est une conséquence immédiate de 2.15.

Théorème **2.18.** — *Soient* $u : \pi_1 \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ *un homomorphisme,* α *une* 1*-forme de Morse dans la classe* u, ξ *un pseudo-gradient générique pour* α *et* K *une* C^1*-triangulation de* M. *Alors, les deux complexes de* Λ_{-u}*-modules libres basés* $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi)$ *et* $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{K}, -u)$ *sont simplement équivalents.*

La démonstration consiste à comparer d'abord $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi_0)$ et $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi_1)$ lorsque ξ_0 et ξ_1 sont deux pseudo-gradients génériques pour α, ensuite $\mathrm{C}_\bullet(\alpha_0, \xi_0)$ et $\mathrm{C}_\bullet(\alpha_1, \xi_1)$ lorsque α_0 et α_1 sont cohomologues et enfin de construire un exemple.

Proposition **2.19.** — *Soient* ξ_0 *et* ξ_1 *deux pseudo-gradients génériques pour la* 1*-forme de Morse* α. *Les complexes* $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi_0)$ *et* $\mathrm{C}_\bullet(\alpha, \xi_1)$ *sont simplement isomorphes.*

Lemme **2.20.** — *Avec les notations précédentes, il existe une isotopie* Φ_s *de* M, $s \in [0, 1]$, *avec* $\Phi_0 = \mathrm{Id}$, *telle que*

1) $\forall\, c \in \mathrm{Crit}\, \alpha,\ \forall\, s \in [0, 1],\ \Phi_s(c) = c$;

2) $\forall\, x \in \mathrm{M} - \mathrm{Crit}\, \alpha,\ \forall\, s \in [0, 1],\ \left\langle \alpha_{\Phi_s(x)}, \dfrac{d}{ds} \Phi_s(x) \right\rangle > 0$;

3) $\forall\, c, d \in \mathrm{Crit}\, \alpha,\ \Phi_1 \varphi^u_{c,\, \xi_0} : \mathrm{W}^u(c, \xi_0) \to \mathrm{M}$ *et* $\varphi^s_{d,\, \xi_1} : \mathrm{W}^s(d, \xi_1) \to \mathrm{M}$ *sont transverses.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\mathrm{W}^u(c, \xi_0) \cap \mathrm{W}^s(d, \xi_1) \cap \mathrm{Crit}\, \alpha = \emptyset$ sauf si $c = d$; dans ce cas, $\mathrm{T}_c \mathrm{W}^u(c, \xi_0) \cap \mathrm{T}_c \mathrm{W}^s(c, \xi_1) = \{0\}$ car la Hessienne de α est définie négative sur l'un des termes de l'intersection et définie positive sur l'autre.

Soit X l'espace des familles à 1 paramètre $s \in [0, 1]$ de champs de vecteurs η_s sur M telles que, pour tout $s \in [0, 1]$, η_s et ξ_0 coïncident au premier ordre sur Crit α; X est fermé dans l'espace de toutes les familles, donc est de Baire. D'après l'hypothèse, la fonction $\langle \alpha, \eta_s \rangle$ lue dans une carte de Morse s'écrit $Q(x)\,(1 + \beta(x, s))$ où Q est une forme quadratique définie positive et $\beta(0, s) = 0$ pour tout $s \in [0, 1]$, donc le sous-espace X_0 de X, formé des η_s telles que

$$\forall\, m \in M - \mathrm{Crit}\,\alpha, \qquad \forall\, s \in [0, 1], \qquad \langle \alpha_m, \eta_s(m) \rangle > 0,$$

est un ouvert non vide de X.

On note Φ_s l'isotopie associée à η_s $\left(\dfrac{d}{ds}\Phi_s(m) = \eta_s(\Phi_s(m))\right)$. Soient V_0 et V_1 deux sous-variétés de M telles que si $V_0 \cap V_1 \cap \mathrm{Crit}\,\alpha \neq \emptyset$, l'intersection est réduite à un point c, $T_c M = T_c V_0 \oplus T_c V_1$ et $T_c V_0 = T_c W^u(c, \xi_0)$ (de sorte que si $\eta_s \in X$, $T_c \Phi_s V_0 = T_c W^u(c, \xi_0)$ pour tout $s \in [0, 1]$).

Soient de plus K_0 et K_1 deux compacts de V_0 et V_1 respectivement. Soit

$$\Omega(V_0, V_1, K_0, K_1) \subset X$$

formé des η_s tels que

$$\forall\, x_0 \in K_0, \qquad \forall\, x_1 \in K_1 \quad \text{avec } \Phi_1(x_0) = x_1,$$
$$T_{x_0}\Phi_1(T_{x_0} V_0) + T_{x_1} V_1 = T_{x_1} M.$$

J'affirme que $\Omega(V_0, V_1, K_0, K_1)$ est ouvert dense dans X.

Le fait que cet ensemble est ouvert est clair. Soit $\eta_s^0 \in X$ et Φ_s^0 l'isotopie associée. Si $K_0 \cap K_1 \cap \mathrm{Crit}\,\alpha = \emptyset$, alors $(\Phi_1^0 K_0) \cap K_1 \subset M - \mathrm{Crit}\,\alpha$; si $K_0 \cap K_1 \cap \mathrm{Crit}\,\alpha = \{c\}$, alors c est un point isolé de $(\Phi_1^0 K_0) \cap K_1$; dans tous les cas, $K = (\Phi_1^0 K_0 \cap K_1) - \mathrm{Crit}\,\alpha$ est un compact de $M - \mathrm{Crit}\,\alpha$.

Pour chaque $x \in K$, on note D_x un disque de $M - \mathrm{Crit}\,\alpha$ centré en x tel que $\Phi_1^0 V_0 \cap D_x$ et $V_1 \cap D_x$ soient des sous-disques, et l'on trouve $x_1, \ldots, x_k$ tels que $K \subset 1/2\,\mathring{D}_{x_1} \cup \ldots \cup 1/2\,\mathring{D}_{x_k}$. Il est alors classique d'approximer η_s^0 sur $D_{x_1} \times [0, 1]$ (donc loin de $\mathrm{Crit}\,\alpha \times [0, 1]$) en η_s^1 tel que $\Phi_1^1 V_0$ et V_1 soient transverses au-dessus de $1/2\,D_{x_1}$, puis η_s^1 en η_s^2 tel que $\Phi_1^2 V_0$ et V_1 soient transverses au-dessus de $1/2\,D_{x_1} \cup 1/2\,D_{x_2}$, etc.; η_s^k est alors une approximation de η_s^0 et est dans Ω.

En appliquant ce résultat à

$$V_0 = \bigcup_{0 \leqslant i < n+1} \varphi_i^0(W^u_{\mathrm{loc}}(c, \xi_0)), \qquad K_0 = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i^0(W^u_{\mathrm{loc}}(c, \xi_0)),$$

$$V_1 = \bigcup_{-(n+1) < i \leqslant 0} \varphi_i^1(W^s_{\mathrm{loc}}(d, \xi_1)), \qquad K_1 = \bigcup_{-n \leqslant i \leqslant 0} \varphi_i^1(W^s_{\mathrm{loc}}(d, \xi_1)),$$

où φ_t^i est le groupe à 1 paramètre de ξ_i, il vient que

$$Y_{c,d} = \{\, \eta_s \in X \mid \Phi_1\, \varphi^u_{c,\xi_0} \quad \text{et} \quad \varphi^s_{d,\xi_1} \text{ sont transverses} \,\}$$

est résiduel dans X. Il en est donc de même de $Y = \bigcap_{c,d \in \mathrm{Crit}\,\alpha} Y_{c,d}$, et $X_0 \cap Y \neq \emptyset$.

2.21. *Notations.* — Utilisant l'isotopie Φ_s du lemme, nous notons $\Lambda(c, d)$ l'intersection de $\Phi_1 \varphi^u_{c,\xi_0} : W^u(c, \xi_0) \to M$ avec $\varphi^s_{d,\xi_1} : W^s(d, \xi_1) \to M$; c'est une sous-variété de dimension $I(d) - I(c)$ de $W^u(c, \xi_0) \times W^s(d, \xi_1)$.

Soit λ un élément de $\Lambda(c, d)$; il est composé d'une ξ_0-trajectoire γ_0 allant de c à m_0 et d'une ξ_1-trajectoire γ_1 allant de $m_1 = \Phi_1(m_0)$ à d. On pose $L(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} \alpha$, où γ_λ est le chemin γ_0 suivi du chemin $\Phi_s(m_0)$ de m_0 à m_1 lui-même suivi de γ_1.

La condition 2) dit que $L(\lambda) > L(\gamma_0) + L(\gamma_1)$ sauf si λ est l'élément trivial de $\Lambda(c, c)$.

On pose $\Lambda(c, d, A) = \{\lambda \in \Lambda(c, d)/L(\lambda) \leqslant A\}$ et $\Lambda_A(c, d) = \{\lambda \in \Lambda(c, d)/L(\lambda) = A\}$. On suppose de plus que ξ_0 et ξ_1 sont génériques. Les applications

$$\Phi_1 \bar{\varphi}^u_{c,\xi_0} : \overline{W}^u(c, \xi_0) \to M \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}^s_{d,\xi_1} : \overline{W}^s(d, \xi_1) \to M$$

sont automatiquement transverses, $\Lambda(c, d, A)$ est contenue dans l'intersection de

$$\Phi_1 \bar{\varphi}^u_c : \overline{W}^u(c, \xi_0, A) \to M \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}^s_d : \overline{W}^s(d, \xi_1, A) \to M,$$

qui est compacte, et son adhérence $\overline{\Lambda}(c, d, A)$ dans cette intersection est une variété compacte à bord anguleux. Il en résulte que les longueurs des éléments de $\Lambda(c, d)$ est un ensemble discret.

— Pour $I(d) = I(c)$, $\Lambda(c, d, A)$ est un ensemble fini;

— Pour $I(d) - I(c) = 1$, $\overline{\Lambda}(c, d, A)$ est une variété compacte de dimension 1, $\partial\overline{\Lambda}(c, d, A)$ est la réunion de

$$\bigcup_{\substack{I(c') = I(c) \\ A' + A'' = A}} \Lambda(c, c', A') \times \mathscr{L}(c', d, \xi_1, A'')$$

et de

$$\bigcup_{\substack{I(d') = I(d) \\ A' + A'' = A}} \mathscr{L}(c, d', \xi_0, A') \times \Lambda(d', d, A'')$$

où $(\lambda, \ell) \in \Lambda(c, c') \times \mathscr{L}(c', d, \xi_1)$ correspond à l'intersection de $\Phi_1 W^u(c, \xi_0)$ avec $W^s(c', \xi_1) \times \{\ell\} \subset \partial\overline{W}^s(d, \xi_1)$, tandis que $(\ell', \lambda') \in \mathscr{L}(c, d', \xi_0) \times \Lambda(d', d)$ correspond à l'intersection de $\Phi_1(\{\ell\} \times W^u(d', \xi_0)) \subset \Phi_1 \partial\overline{W}^u(c, \xi_0)$ avec $W^s(d, \xi_1)$.

On choisit des orientations des variétés stables pour ξ_0 et ξ_1 qui induisent la même co-orientation sur la variété instable pour ξ_0; $\Lambda(c, d)$ est alors orientée par (Coor $\Phi_1 W^u(c, \xi_0)$, Or $\Lambda(c, d)$) = Or $W^s(d, \xi_1)$.

Si $I(c) = I(c')$ et si $\lambda \in \Lambda(c, c')$, on définit $\varepsilon(\lambda)$ par

$$\text{Coor } \Phi_1 W^u(c, \xi_0) = \varepsilon(\lambda) \text{ Or } W^s(d, \xi_1).$$

Pour $I(d) - I(c) = 1$, $(\lambda, \ell) \in \Lambda(c, c') \times \mathscr{L}(c', d, \xi_1)$ apparaît dans $\partial\overline{\Lambda}(c, d)$ avec le coefficient $(-1)^{I(c)} \varepsilon(\lambda) \varepsilon(\ell)$. En effet, si n est la normale sortante à $\overline{W}^s(d, \xi)$ en $(m_1, \ell) \subset W^s(c', \xi_1) \times \mathscr{L}(c', d)$, c'est aussi la normale sortante à $\overline{\Lambda}(c, d)$. On a

$$(n, \text{Or } W^s(c', \xi_1)) = \varepsilon(\ell) \text{ Or } W^s(d, \xi_1) \quad (2.15),$$

donc

$$(\text{Coor } \Phi_1 W^u(c, \xi_0), n) = (-1)^{I(c)} \varepsilon(\lambda) (n, \text{Or } W^s(c', \xi_1))$$
$$= (-1)^{I(c)} \varepsilon(\lambda) \varepsilon(\ell) \text{ Or } W^s(d, \xi_1);$$

$(\ell', \lambda') \in \mathscr{L}(c, d', \xi_0) \times \Lambda(d', d)$ apparaît dans $\partial\overline{\Lambda}(c, d)$ avec le coefficient

$$-(-1)^{I(c)}\,\varepsilon(\ell')\,\varepsilon(\lambda').$$

En effet, si n est la normale sortante à $\overline{W}^u(c, \xi_0)$ en $(\ell', m_0) \in \mathscr{L}(c, d', \xi_0) \times W^u(d', \xi_0)$, on a, toujours vu (2.15),

$$\text{Coor } W^u(d', \xi_0) = -(-1)^{I(c)}\,\varepsilon(\ell')\,(\text{Coor } W^u(c, \xi_0), n),$$

$n' = (\Phi_1)_* n$ est la normale sortante à $\overline{\Lambda}(c, d)$ en (ℓ', λ') et

$$\begin{aligned}(\text{Coor } \Phi_1 W^u(c, \xi_0), n') &= -(-1)^{I(c)}\,\varepsilon(\ell')\ \text{Coor } \Phi_1 W^u(d', \xi_0)\\ &= -(-1)^{I(c)}\,\varepsilon(\ell')\,\varepsilon(\lambda')\ \text{Or } W^s(d, \xi_1).\end{aligned}$$

Une fois choisis des relevés des points critiques, on associe à $\lambda \in \Lambda(c, d)$, $g(\lambda) \in \pi_1 M$: si on relève γ_λ à partir de $\tilde{d}$, on aboutit à $g(\lambda)\tilde{c}$.

La considération de $\partial\overline{\Lambda}_g(c, d)$ donne alors comme en 2.15

$$(2.22)\qquad \sum_{\substack{c', \lambda, \ell \\ \lambda \in \Lambda(c, c') \\ \ell \in \mathscr{L}(c', d, \xi_1) \\ g(\ell)\,g(\lambda) = g}} \varepsilon(\lambda)\,\varepsilon(\ell) - \sum_{\substack{d', \ell', \lambda' \\ \ell' \in \mathscr{L}(c, d', \xi_0) \\ \lambda' \in \Lambda(d', d) \\ g(\lambda')\,g(\ell') = g}} \varepsilon(\ell')\,\varepsilon(\lambda') = 0.$$

2.23. On définit un coefficient d'incidence pour deux points critiques de même indice

$$\{\check{c}, \check{c}'\} = \sum_{\lambda \in \Lambda(c, c')} \varepsilon(\lambda)\,g(\lambda) \in \Lambda_{-u};$$

on a

$$\{h\check{c}, \check{c}'\} = h\{\check{c}, \check{c}'\}; \qquad \{\check{c}, h\check{c}'\} = \{\check{c}, \check{c}'\}h^{-1} \quad \text{pour } h \in \pi_1 M;$$

$$\{-\check{c}, \check{c}'\} = \{\check{c}, -\check{c}'\} = -\{\check{c}, \check{c}'\}.$$

Remarquons que $\{\check{c}, \check{c}\} = 1 + r$, avec $u(r) < 0$, est une unité triviale de Λ_{-u}.

On définit $w_q : C_q(\alpha) \to C_q(\alpha)$, morphisme de Λ_{-u}-modules, par la formule $w_q(\check{c}) = \Sigma\{\check{c}, \check{c}'\}\check{c}'$.

Les deux faits suivants achèvent la démonstration de la proposition 2.19.

Fait 1. — L'application $w_\cdot : C_\cdot(\alpha, \xi_0) \to C_\cdot(\alpha, \xi_1)$ est un morphisme de complexes $d_{q+1}(\xi_1) \cdot w_{q+1} - w_q \cdot d_{q+1}(\xi_0) = 0$. Cela résulte directement de la formule 2.22.

Fait 2. — L'application $w_q : C_q(\alpha) \to C_q(\alpha)$ est un isomorphisme simple.

Nous allons déterminer la matrice de w_q pour un numérotage des points critiques d'indice q et un choix des relevés judicieux.

— Si α est exacte, $\alpha = df$; on numérote les points critiques d'indice q : $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de sorte que $f(c_1) \geqslant f(c_2) \geqslant \ldots \geqslant f(c_k)$; alors $\Lambda(c_i, c_j) = \emptyset$ si $i < j$ et la matrice de w_q est $I + T$ où T est triangulaire stricte.

— Si α est rationnelle, $u(\pi_1 M) = \rho\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ avec $\rho > 0$. Soit $\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbf{R}$ une primitive de $\pi^*\alpha$. On choisit un ordre sur les points critiques et des relevés de sorte que

$$\tilde{f}(\tilde{c}_1) \geqslant \tilde{f}(\tilde{c}_2) \geqslant \ldots \geqslant \tilde{f}(\tilde{c}_k) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\tilde{c}_1) - \tilde{f}(\tilde{c}_k) \leqslant \rho.$$

La matrice de w_q est $I + T + R$ avec $u(R) < 0$ et T triangulaire stricte avec des éléments dans $\mathbf{Z}[u^{-1}(0)]$; on a alors $I + T + R = (1 + T)(I + R')$ avec

$$R' = (1 - T + T^2 + \ldots + (-)^{k-1} T^{k-1}) R,$$

donc $u(R') < 0$, d'où le résultat d'après 1.7.

— Si α est irrationnelle, $u(\pi_1 M)$ est dense dans $\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que les éléments non triviaux λ des $\Lambda(c, c')$ vérifient $L(\lambda) > \varepsilon_0$; on numérote arbitrairement les points critiques d'indice q et on choisit des relevés de sorte que

$$|\tilde{f}(\tilde{c}_i) - \tilde{f}(\tilde{c}_j)| < \varepsilon_0;$$

la matrice de w_q est alors $I + R$ avec $u(R) < 0$.

Proposition **2.24.** — *Soient α_0 et α_1 deux 1-formes de Morse dans la classe u. Soient ξ_0 et ξ_1 deux pseudo-gradients génériques pour α_0 et α_1 respectivement. Les complexes $C_\bullet(\alpha_0, \xi_0)$ et $C_\bullet(\alpha_1, \xi_1)$ sont simplement équivalents.*

La preuve de cette proposition occupera les numéros 2.25 à 2.27.

Lemme **2.25.** — *Soit α_s ($s \in [0, 1]$) une famille de 1-formes de Morse toutes cohomologues; soient ξ_0 et ξ_1 deux pseudo-gradients génériques pour α_0 et α_1 respectivement. Les complexes $C_\bullet(\alpha_0, \xi_0)$ et $C_\bullet(\alpha_1, \xi_1)$ sont simplement isomorphes.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où la famille est constante sur un voisinage de Crit α_0. Par compacité de [0, 1], on construit $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_k = 1$ et des champs de vecteurs ξ'_j tels que, pour tout $s \in [s_j, s_{j+1}]$, ξ'_j soit un pseudo-gradient générique pour α_s.

Le résultat découle de l'application répétée de 2.19

$$C_\bullet(\alpha_0, \xi_0) \sim C_\bullet(\alpha_0, \xi'_0) = C_\bullet(\alpha_{s_1}, \xi'_0) \sim C_\bullet(\alpha_{s_1}, \xi'_1) \ldots = C_\bullet(\alpha_1, \xi'_{k-1}) \sim C_\bullet(\alpha_1, \xi_1),$$

où $\sim$ signifie simplement isomorphe.

Le cas général s'en déduit : on suit par continuité les points critiques de α_s; le lemme de Morse à paramètres donne une isotopie de plongement d'un voisinage Ω de Crit α_0, $\psi_s : \Omega \to M$ avec $\psi_s^* \alpha_s = \alpha_0$ sur Ω. On étend ψ_s en une isotopie φ_s de M. Si ξ est un pseudo-gradient générique pour $\varphi_1^* \alpha_1$, le cas particulier nous dit que

$$C_\bullet(\alpha_0, \xi_0) \sim C_\bullet(\varphi_1^* \alpha_1, \xi). \text{ Or } C_\bullet(\varphi_1^* \alpha_1, \xi) = C_\bullet(\alpha_1, (\varphi_1)_* \xi) \sim C_\bullet(\alpha_1, \xi_1).$$

2.26. Modèle. — Sur $\mathbf{R} \times V_+ \times V_-$, on considère

$$M_t(x, y_+, y_-) = x^3 - 3tx + |y_+|^2 - |y_-|^2,$$

fonction sans point critique pour $t < 0$ et qui a, pour $t > 0$, deux points critiques $c = (\sqrt{t}, 0, 0)$ d'indice q et $d = (-\sqrt{t}, 0, 0)$ d'indice $q + 1$.

Si α_s est un chemin générique de 1-formes fermées avec un point de naissance mort c_0 pour $s = s_0$, on sait (déploiement universel de la singularité x^3) qu'il existe U, voisinage de l'origine dans $\mathbf{R} \times V_+ \times V_-$, et, pour $(s - s_0)$ petit, une isotopie de plongement $\psi_s : U \to M$ avec $\psi_{s_0}(0) = c_0$, et une fonction $h(s)$ définie pour $(s - s_0)$ petit avec $h(s_0) = 0$ telle que

$$\psi_s^* \alpha_s = dM_{h(s)}|_U.$$

Si f_s est une primitive locale de α_s au voisinage de c_0, il existe une fonction $k(s)$ telle que $f_s(\psi_s(z)) = M_{h(s)}(z) + k(s)$.

Modification du modèle. — Fixons $\rho > 0$ assez petit pour que $(x, y) \in U$ si $|x| \leqslant 3\rho$ et $|y| \leqslant 3\rho$. Soit H_0 défini par les inégalités $|x| \leqslant \rho$ et $|y| \leqslant \rho$. On considère, pour $\delta > 0$, la fonction $r : \mathbf{R} \times V_+ \times V_- \to \mathbf{R} \times V_+ \times V_-$, définie par

$$r(x, y_+, y_-) = (x, (1 + \delta x) y_+, (1 - \delta x) y_-).$$

On appelle H l'image par r de la partie $|x| \leqslant 3\rho$, $|y| \leqslant 3\rho$ et H_1 celle de la partie définie par les inégalités $2\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho$ et $|y| \leqslant 3\rho$ ou bien $|x| \leqslant 3\rho$ et $2\rho \leqslant |y| \leqslant 3\rho$; δ est choisi assez petit pour que H_1 soit plongé dans U et disjoint de H_0. Le champ de vecteurs sur H, $r_* \frac{\partial}{\partial x}$, vérifie $\left\langle dM_0, r_* \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle > 0$ hors de l'origine. Par partition de l'unité, on construit pour $t^2 < \rho$ un champ de vecteurs η_t sur $\mathbf{R} \times V_+ \times V_- - H_0$ vérifiant

$$\langle dM_t(z), \eta_t(z) \rangle = 3x \quad \text{où} \quad z = (x, y_+, y_-).$$

L'équation $\frac{d}{dt} \chi_t(z) = \eta_t(\chi_t(z))$ et $\chi_0(z) = z$ pour $z \in H_1$ définit, pour $-t_0 \leqslant t \leqslant t_0$, une isotopie de plongement de H_1 dans $\mathbf{R} \times V_+ \times V_-$ que l'on prolonge en une isotopie de plongement de H, notée toujours χ_t, vérifiant $\chi_t(z) = z$ pour $z \in H_0$.

On pose $\overline{M}_t(z) = M_t(\chi_t(z))$ pour $z \in H$; $\overline{M}_t(z)$ est indépendant de t pour $z \in H_1$ car $\frac{d}{dt} \overline{M}_t(z) = \left(\frac{d}{dt} M_t\right)(\chi_t(z)) + \langle dM_t(\chi_t(z)), \eta_t(\chi_t(z)) \rangle = 0$. Construisons, pour $t > 0$ petit, un bon champ de pseudo-gradient pour $\overline{M}_t$.

Le résultat est évident si $V_+ = \{0\}$ ou si $V_- = \{0\}$. Sinon on choisit $t > 0$ assez petit pour que, si $\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho$, $\left\langle d\overline{M}_t(x, 0), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle > 0$, et que les restrictions de $\overline{M}_t$ à $(H - \mathring{H}_0) \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0)$ et à $(H - \mathring{H}_0) \cap (\mathbf{R} \times 0 \times V_-)$ soient sans point critique.

On choisit ζ pseudo-gradient pour $x^3 - 3tx$ sur $[-3\rho, 3\rho]$ égal à $\frac{\partial}{\partial x}$ si $|x| \geqslant \rho$ et $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ égale à 1 sur $[0, \rho]$ et de support dans $[0, 2\rho]$. On pose

$$\xi^0(x, y) = (1 - \omega(|x|)) r_* \frac{\partial}{\partial x} + \omega(|x|)(\zeta, \operatorname{grad} Q),$$

où $Q(y) = |y_+|^2 - |y_-|^2$. Si $\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho$ et $y = 0$, on a $\xi^0(x, 0) = \dfrac{\partial}{\partial x}$, donc il existe $\rho' > 0$ tel que $\langle d\overline{M}_t(x,y), \xi^0(x,y)\rangle > 0$ si $\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho$ et $|y| \leqslant \rho'$. On commence par étendre le champ qui est ξ^0 sur

$$(H_0 \cup \{\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho, |y| \leqslant \rho'\} \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0)$$

et $r_* \dfrac{\partial}{\partial x}$ sur $H_1 \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0)$ en un champ tangent à $H \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0)$ transverse à $\overline{M}_t|_{(H-H_0)\cap(\mathbf{R}\times V_+\times 0)}$, on fait de même avec $\mathbf{R} \times 0 \times V_-$, puis on étend le résultat en un champ ξ sur H égal à $r_* \dfrac{\partial}{\partial x}$ sur H_1 et à ξ^0 sur $H_0 \cup \{\rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho$ et $|y| < \rho'\}$. Le long de $H \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0)$, ξ est tangent à $\mathbf{R} \times V_+ \times 0$ et le long de $H \cap (\mathbf{R} \times 0 \times V_-)$, ξ est tangent à $\mathbf{R} \times 0 \times V_-$. Il en résulte que

$$W^u(c, \xi) \subset H \cap (\mathbf{R} \times V_+ \times 0) \quad \text{et} \quad W^s(d; \xi) \subset H \cap (\mathbf{R} \times 0 \times V_-),$$

et donc que $W^u(c) \cap W^s(d) =]c, d[$ et que $W^u(c)$ et $W^s(d)$ sont transverses.

Posons $K = \psi_{s_0}(H)$, $K_1 = \psi_{s_0}(H_1)$ et $K_0 = \psi_{s_0}(H_0)$. Le composé $\psi_s \chi_{h(s)} \psi_{s_0}^{-1}$ est une isotopie de plongements de K dans M égale à l'inclusion pour $s = s_0$; on la prolonge en une isotopie g_s de M avec $g_{s_0} = I$. Remarquons que $g_s^* \alpha_s$ est indépendante de s sur K_1. Définissons

$$\bar{\alpha}_s = \begin{cases} \alpha_{s_0} & \text{sur } (M - K) \cup K_1, \\ g_s^* \alpha_s & \text{sur } K. \end{cases}$$

Choisissons s_-, s_+ avec $s_- < s_0 < s_+$ et $s_+ - s_-$ petit. Il suffit de comparer $C_\bullet(\bar{\alpha}_{s_-}, \xi_-)$ et $C_\bullet(\bar{\alpha}_{s_+}, \xi_+)$. En effet, $\bar{\alpha}_{s_-}$ et $g_{s_-}^* \alpha_{s_-}$ sont joignables sans accident par la famille valant $g_s^* \alpha_s$ sur $(M - K) \cup K_1$ pour $s \in [s_-, s_0]$ et $g_{s_-}^* \alpha_{s_-}$ sur K, donc si ξ pseudo-gradient générique pour $g_{s_-}^* \alpha_{s_-}$, 2.25 nous dit que

$$C_\bullet(\bar{\alpha}_{s_-}, \xi_-) \sim C_\bullet(g_{s_-}^* \alpha_{s_-}, \xi) = C_\bullet(\alpha_{s_-}, (g_{s_-})_* \xi).$$

On a le même raisonnement pour $\bar{\alpha}_{s_+}$.

Nous supposons que c'est $\bar{\alpha}_{s_-}$ qui n'a pas de point critique dans K. Nous allons construire un pseudo-gradient générique ξ_- pour α_{s_-} égal à $(\psi_{s_0})_* r_* \dfrac{\partial}{\partial x}$ sur K et tel que l'ensemble ω-limite des trajectoires passant par K est soit une courbe périodique attractive, soit un point critique d'indice n et que l'ensemble α-limite des mêmes trajectoires est soit une courbe périodique répulsive, soit un point critique d'indice 0.

Appelons c et d les deux points critiques d'indice q et $q + 1$ de $\bar{\alpha}_{s_+}|_K$, et ξ_+ le champ égal à ξ_- hors de K et à $(\psi_{s_0})_* \xi$ sur K, où ξ est le pseudo-gradient construit pour $\overline{M}_{h(s_+)}$; ξ_+ est automatiquement pseudo-gradient générique pour $\bar{\alpha}_{s_+}$ puisque les variétés instables de c et d ne coupent au plus que la variété stable d'un point d'indice n et qu'on a une situation analogue pour les variétés stables.

Abrégeons $C_\bullet(\bar{\alpha}_{s_+}, \xi_+)$ en $C_\bullet^+$, $d_\bullet(\xi_+)$ en ∂^+, $C_\bullet(\bar{\alpha}_{s_-}, \xi_-)$ en $C_\bullet^-$ et $d(\xi_-)$ en ∂^-.

On choisit des relevés $\tilde{c}$ et $\tilde{d}$ contigus et des orientations compatibles de sorte que $[\check{d}, \check{c}] = 1 \in \Lambda_{-u}$. Soit T le complexe trivial qui est $\Lambda_{-u}\check{d}$ en dimension $q+1$, $\Lambda_{-u}\check{c}$ en dimension q et tel que $\partial\check{d} = \check{c}$. Il est évident que $C_0^+ = C_0^- \oplus T$ sauf dans les deux cas particuliers suivants.

— Si $q = 0$ et si l'ensemble α-limite de K est un point critique c' d'indice 0; on a alors $\partial^+\check{d} = \check{c} + \varepsilon g\check{c}'$, où $\varepsilon = \pm 1$ et $g \in \pi_1 M$. Dans ce cas, $h : C_\bullet^+ \to C_\bullet^- \oplus T$, avec $h(\check{c}) = -\varepsilon g\check{c}' + \check{c}$, et l'identité sur les autres vecteurs de base est un isomorphisme simple.

— Si $q = n-1$ et si l'ensemble ω-limite de K est un point critique d' d'indice n; on a alors $\partial^+\check{d} = \check{c}$, $\partial^+\check{d}' = \varepsilon g\check{c} + \partial^-\check{d}'$. A nouveau $h : C_\bullet^+ \to C_\bullet^- \oplus T$, où cette fois $h(\check{d}) = \check{d}' + \varepsilon g\check{d}$, et identité sur les autres vecteurs de base est un isomorphisme simple.

Construction de ξ_-

Lemme **2.27.** — *Soit α une 1-forme de Morse sur M de dimension $n \geqslant 2$. Soit $x \in M - \mathrm{Crit}\,\alpha$; il existe δ_+, point critique d'indice n ou bien cercle plongé transverse à α, δ_-, point critique d'indice 0 ou bien cercle plongé transverse à α avec $\delta_+ \cap \delta_- = \emptyset$, et un arc de courbe plongé γ passant par x, transverse à α, d'origine sur δ_- et d'extrémité sur δ_+.*

Preuve. — Soit η un pseudo-gradient générique pour α tel que la trajectoire passant par x est transverse aux variétés stables et instables des points critiques.

Si la trajectoire de x meurt en un point critique c, alors c est d'indice n et on pose $\delta_+ = \{c\}$. Sinon, soit y dans l'ensemble ω-limite de x; si $y \in \mathrm{Crit}\,\alpha$, alors $1 \leqslant I(y) \leqslant n-1$ et $x \notin W^s(y)$, donc il existe une composante du niveau local de y privé de y qui est coupée deux fois par la trajectoire positive de x (même résultat si $y \notin \mathrm{Crit}\,\alpha$). On referme alors la trajectoire de x entre ces deux passages en un cercle plongé δ_+ transverse à α. On a le même raisonnement pour l'ensemble α-limite et δ_-. Si $\dim M \geqslant 3$, il est clair qu'on peut construire δ_+ et δ_- disjoints. Cela marche aussi en dimension 2. Des modifications de Seifert construisent à partir de δ_- et δ_+ génériques une famille finie de transversales plongées deux à deux disjointes : on a fini sauf si dans le sens positif et le sens négatif γ arrive à la même transversale. Dans ce cas, les orientations doivent être cohérentes (regarder $\gamma^*\alpha$) et donc on construit une transversale périodique γ_0 passant par x. On peut, quitte à modifier γ_0, supposer que son voisinage tubulaire est trivial et construire dans ce voisinage δ_- et δ_+.

On applique le lemme au centre de K; quitte à effectuer un redressement dans K et des détours pour éviter K, on peut supposer que $\delta_+ \cap K = \delta_- \cap K = \emptyset$ et que γ coupe K suivant un segment de trajectoire de $(\psi_{s_0})_* r_* \dfrac{\partial}{\partial x}$. On construit d'abord sur un voisinage de $K \cup \gamma \cup \delta_- \cup \delta_+$ un pseudo-gradient η égal à $(\psi_{s_0})_* r_* \dfrac{\partial}{\partial x}$ sur K tel que, si δ_+ est une courbe, alors c'est une trajectoire périodique de η attractive et attirant

tout K, et de même pour δ_-. On étend η en un pseudo-gradient ξ_0 sur M tout entier et on choisit ξ_-, pseudo-gradient générique égal à η sur K, si proche de ξ_0 qu'il y a une orbite périodique attractive proche de δ_+ attirant tout K et une orbite répulsive proche de δ_- qui est l'ensemble α-limite de K.

2.28. Nous aurons besoin du résultat suivant (sans doute bien connu).

Lemme **2.28.** — *Soit f une fonction de Morse sur une variété compacte* M, *soit* ξ *un pseudo-gradient pour f (ou df) et soit* K *une* C^1*-triangulation de* M; *alors les complexes de* $\Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1 M]$*-modules libres basés* $C_.(df, \xi)$ *et* $C_.(\widetilde{K})$ *sont simplement équivalents.*

Un résultat analogue est montré dans [8] pour la situation du h-cobordisme et donc pour des complexes acycliques. Nous allons généraliser le théorème de subdivision algébrique [8, théorème 5.2].

On considère un complexe fini $C_.$ de Λ-modules libres basés et une filtration $C_.^0 \subset C_.^1 \subset \ldots \subset C_.^n = C_.$ par des sous-complexes libres basés. On suppose :

1) le complexe quotient $C_.^p/C_.^{p-1}$ ($C_.^{-1} = 0$) est libre basé et il y a compatibilité des bases dans la suite exacte

$$0 \to C_.^{p-1} \to C_.^p \to C_.^p/C_.^{p-1} \to 0;$$

2) l'homologie de $C_.^p/C_.^{p-1}$ est concentrée en degré p et est libre basée.

On définit un nouveau complexe libre et basé $\overline{C}_.$ par $\overline{C}_p = H_p(C_.^p/C_.^{p-1})$, $\bar{d}_p : \overline{C}_p \to \overline{C}_{p-1}$ étant le bord de la suite exacte du triple $C_.^{p-2} \subset C_.^{p-1} \subset C_.^p$.

Lemme **2.29.** — *Il existe une équivalence d'homotopie* $f_. : \overline{C}_. \to C_.$ *et*

$$\tau(f) = \Sigma_{p=0}^n \tau(C_.^p/C_.^{p-1}),$$

où $\tau(C_.^p/C_.^{p-1})$ *est la torsion de Milnor d'un complexe libre basé dont l'homologie est libre basée.*

Démonstration. — On considère la filtration triviale $\overline{C}_.^p$ de $\overline{C}_.$, où $\overline{C}_q^p = \overline{C}_q$ si $q \leqslant p$ et $\overline{C}_q^p = 0$ si $q > p$; $\overline{C}_.^p/\overline{C}_.^{p-1}$ est concentré en degré p et vaut $\overline{C}_p$.

On va construire par récurrence des morphismes de complexes $f_.^p : \overline{C}_.^p \to C_.^p$ tels que

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{C}_.^0 & \subset & \overline{C}_.^1 & \subset & \overline{C}_.^p & \subset & \overline{C}_.^n \\ \downarrow f_.^0 & & \downarrow f_.^1 & & \downarrow f_.^p & & \downarrow f_.^n \\ C_.^0 & \subset & C_.^1 & \subset & C_.^p & \subset & C_.^n \end{array}$$

commute, et tels que le morphisme induit $\overline{C}_.^p/\overline{C}_.^{p-1} \to C_.^p/C_.^{p-1}$ donne en homologie l'identité $\overline{C}_p = H_p(C_.^p/C_.^{p-1})$.

La construction de $f_.^0$ est évidente; supposons construit $f_.^k$ pour $k \leqslant p-1$ vérifiant les hypothèses jusqu'en degré $p-1$.

Soit $x \in \bar{C}_p^p = \bar{C}_p$ et soit t un p-cycle de $C_\cdot^p/C_\cdot^{p-1}$ dont la classe d'homologie est x; dt appartient à C_{p-1}^{p-1} et $\bar{dx}$ est la classe de dt dans $H_{p-1}(C_\cdot^{p-1}/C_\cdot^{p-2})$. Par hypothèse de récurrence, $dt - f_{p-1}^{p-1}\,\bar{dx} \in C_{p-1}^{p-1}$ est un cycle et sa classe d'homologie dans $H_{p-1}(C_\cdot^{p-1}/C_\cdot^{p-2})$ est nulle. D'après les propriétés de $f_\cdot^{p-1}$, il existe donc

$$y \in C_p^{p-1} \quad \text{et} \quad z \in C_{p-1}^{p-2} \quad \text{avec } dt - f_{p-1}^{p-1}\,\bar{dx} = dy + z;$$

donc $z = dt - f_{p-1}^{p-1}\,\bar{dx} - dy$ est un cycle et comme $H_{p-1}(C_\cdot^{p-2}) = 0$ (d'après l'hypothèse 2), il existe $z_1 \in C_p^{p-2}$ avec $z = dz_1$. Soit $\alpha = t - y - z_1 \in C_p^p$; on a

$$d\alpha = f_{p-1}^{p-1}\,\bar{dx} \in C_{p-1}^{p-1}$$

et la classe de α dans $H_p(C_\cdot^p/C_\cdot^{p-1})$ est la même que celle de t, c'est-à-dire x.

Comme $\bar{C}_p$ est libre, la construction précédente sur une base de $\bar{C}_p$ définit $f_p^p : \bar{C}_p \to C_p^p$ avec $d_p f_p^p = f_{p-1}^{p-1}\,\bar{d}_p$, d'où $f_\cdot^p : \bar{C}_\cdot^p \to C_\cdot^p$ ayant les propriétés voulues. Une récurrence et le lemme des cinq montrent alors que $f_\cdot^p : \bar{C}_\cdot^p \to C_\cdot^p$ est un isomorphisme en homologie, donc en considérant le mapping cylindre, une équivalence d'homotopie.

Du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{C}_\cdot^{p-1} & \longrightarrow & \bar{C}_\cdot^{p} & \longrightarrow & \bar{C}_\cdot^{p}/\bar{C}_\cdot^{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_\cdot^{p-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\cdot^{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_\cdot^{p}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_\cdot^{p-1} & \longrightarrow & C_\cdot^{p} & \longrightarrow & C_\cdot^{p}/C_\cdot^{p-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on tire $\tau(f_\cdot^p) = \tau(f_\cdot^{p-1}) + \tau(g_\cdot^p)$. Or $\tau(g_\cdot^p) = \tau(C_\cdot^p/C_\cdot^{p-1})$; donc $f_\cdot = f_\cdot^n : \bar{C}_\cdot = \bar{C}_\cdot^n \to C_\cdot = C_\cdot^n$ convient.

La démonstration du théorème 7.1 de [8] donne alors, si L est une subdivision d'un complexe fini K, une équivalence d'homotopie simple entre $C_\cdot(\tilde{K})$ et $C_\cdot(\tilde{L})$.

Donc, si K_0 et K_1 sont deux C^1-triangulations d'une variété compacte M, $C_\cdot(\tilde{K}_0)$ et $C_\cdot(\tilde{K}_1)$ sont simplement équivalents comme complexes de $\mathbf{Z}[\pi_1 M]$-modules libres basés.

Soit f une fonction de Morse sur M telle que si c est un point critique d'indice q, alors $f(c) = q$, et soit $M^q = f^{-1}(]-\infty, q + 1/2])$. Si K est une C^1-triangulation de M telle que des sous-complexes triangulent les M^q, l'argument de [8, th. 9.3] donne alors que, si ξ est un pseudo-gradient générique pour f, $C_\cdot(df, \xi)$ et $C_\cdot(\tilde{K})$ sont simplement équivalents.

Soit $u \in H^1(M, \mathbf{R}) - \{0\}$. Soit Ω la réunion de petits voisinages de Morse fermés pour f. Comme $H^1(\Omega) = 0$, la flèche $H_c^1(M - \Omega) \to H^1(M, \mathbf{R})$ est surjective. On choisit β, une 1-forme fermée à support compact dans $M - \Omega$ dont la classe de cohomologie est u. Pour ε petit non nul, $\alpha_\varepsilon = (1/\varepsilon)\,df + \beta$ est une 1-forme de Morse avec $\mathrm{Crit}\,\alpha_\varepsilon = \mathrm{Crit}\,f$ et α_ε est cohomologue à β. Si $\varepsilon > 0$ est petit, ξ, qui est pseudo-gradient générique pour $(1/\varepsilon)\,df$, est pseudo-gradient générique pour α_ε et l'on a $C_\cdot(\alpha_\varepsilon, \xi) = C_\cdot(df, \xi)$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.18.

2.30. *Dualité.* — Soit $w : \Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1 M] \to \Lambda$ l'anti-automorphisme de Λ défini par $w(g) = w_1(g)\, g^{-1}$ si $g \in \pi_1(M)$ (w_1 est la première classe de Stiefel-Whitney) ; w s'étend en un anti-isomorphisme de Λ_{-u} sur Λ_u.

Si ξ est pseudo-gradient générique pour α, $-\xi$ est pseudo-gradient générique pour $-\alpha$ et $W^s(c, -\xi) = W^u(c, \xi)$.

On choisit des relevés des points critiques, des orientations des variétés stables pour α et une orientation de $\tilde{M}$, on oriente les variétés stables de $-\alpha$ par la convention $(\mathrm{Or}\, W^s(\tilde{c})\,;\ \mathrm{Or}\, W^u(\tilde{c})) = \mathrm{Or}\, \tilde{M}$. Si $\check{c} \in C_q(\alpha, \xi)$ et $\check{d} \in C_{q+1}(\alpha, \xi)$, on note

$$\overline{P}\check{c} \in C_{n-q}(-\alpha, -\xi) \quad \text{et} \quad \overline{P}(\check{d}) \in C_{n-q-1}(-\alpha, -\xi)$$

les éléments correspondants et on a $[\overline{P}\check{c}, \overline{P}\check{d}] = (-1)^{q-1}\, w[\check{d}, \check{c}]$.

Le groupe $\mathrm{Hom}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_{-u})$ est un Λ_{-u}-module libre à droite, notons $\{c^*\}$ la base duale de la base $\{\check{c}\}$ de $C_q(\alpha, \xi)$. En considérant $C_q(\alpha, \xi)$ comme Λ_u-module à droite grâce à w, $\mathrm{Hom}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_u)$ est un Λ_u-module libre à gauche et

$$w : \mathrm{Hom}_{\Lambda_{-u}}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_{-u}) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_u}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_u)$$

qui à φ associe $w.\varphi$ est un isomorphisme w-linéaire. Posons

$$w\,\mathrm{Hom}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_{-u}) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_u}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_u).$$

Soit $Iw\,\mathrm{Hom}(C_\cdot(\alpha, \xi), \Lambda_{-u})$ le complexe (de chaînes) de Λ_u-modules à gauche libres basés qui en dimension $n - q$ est $w\,\mathrm{Hom}(C_q(\alpha, \xi), \Lambda_{-u})$. Il est clair que si on associe $(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}\, \overline{P}\check{c}$ à wc^*, on obtient un isomorphisme simple entre les complexes $Iw\,\mathrm{Hom}(C_\cdot(\alpha, \xi), \Lambda_{-u})$ et $C_\cdot(-\alpha, -\xi)$; on en déduit

$$H_*(M, -u) = 0 \Leftrightarrow H_*(M, u) = 0 \tag{2.30}$$

et, si $H_*(M, u) = 0$,

$$\tau(M, u) = (-1)^{n-1}\, w(\tau(M, -u)), \tag{2.31}$$

où $w : \mathrm{Wh}(G, -u) \simeq \mathrm{Wh}(G, u)$ est l'isomorphisme induit de $w : \Lambda_{-u} \to \Lambda_u$.

Chapitre 3

MODIFICATIONS ÉLÉMENTAIRES

3.1. Modifications élémentaires de la 1-forme de Morse

Lemme **3.1.** — *Soit* α *une* 1*-forme de Morse sur* M, *soit* ξ *un pseudo-gradient pour* α. *On considère un point critique* c *et on se donne* L, L′ *avec* $0 < L < L'$. *On suppose qu'il n'existe pas de liaison partant de* c *et de longueur* $\leqslant L'$. *Soit* V *un voisinage tubulaire de* $W^u(c, L')$. *Il existe* α_1, *forme de Morse égale à* α *hors de* V, *cohomologue à* α, *ayant les mêmes points critiques que* α, *admettant* ξ *comme pseudo-gradient et telle que si* $f : V \to \mathbf{R}$ *est la primitive de* $\alpha|_V$ *avec* $f(c) = 0$, *alors* $\alpha_1|_V$ *admet une primitive* f_1 *égale à* f *près du bord de* V *et satisfaisant à* $f_1(c) = L$. *On dit qu'on a « fait monter le point critique* c *de* L ».

Démonstration. — Soit $g : U \to M$ une carte de Morse définissant ξ au voisinage de c, où U est choisi de sorte que $\Omega = g(U) \subset V$ et que les trajectoires de ξ passant par $\partial_+ \Omega$ restent dans V jusqu'à la longueur L′. On construit une extension $g' : U' \to V$ de g, où U′ contient le disque $\{(x_+, 0) / |x_+|^2 \leqslant L'\}$, où g' envoie les orbites de grad Q sur celles de ξ et où $g'^*(\alpha|_{\Omega'}) = dQ$ ($\Omega' = g'(U')$). On a alors $g'_*(\text{grad } Q|_{U'}) = \lambda\xi|_{\Omega'}$, où λ est une fonction > 0, égale à 1 sur Ω. On choisit k assez grand pour que

$$\left\{(x_+, x_-) \;\middle|\; \frac{1}{L'}|x_+|^2 + k|x_-|^2 \leqslant 1\right\} \subset U'$$

et une fonction $\omega : [0, \infty[\to [0, L]$ croissante égale à 0 au voisinage de 0 et à L au voisinage de $[1, \infty[$, avec $0 \leqslant \omega'(t) < L'$. Considérons la fonction $f_1 : \Omega' \to \mathbf{R}$ telle que

$$f_1 g'(x_+, x_-) = |x_+|^2 - |x_-|^2 + L - \omega\left(\frac{1}{L'}|x_+|^2 + k|x_-|^2\right);$$

grad Q est pseudo-gradient pour $f_1 . g'$ car

$$(\text{grad } Q)\, f_1\, g'(x_+, x_-) = 4|x_+|^2\left(1 - \frac{1}{L'}\omega'\left(\frac{|x_+|^2}{L'} + k|x_-|^2\right)\right)$$
$$+ 4|x_-|^2\left(1 + k\omega'\left(\frac{|x_+|^2}{L'} + k|x_-|^2\right)\right) > 0 \quad \text{si } (x_+, x_-) \neq (0, 0).$$

Donc ξ est pseudo-gradient pour f_1. On pose $\alpha_1 = \alpha$ sur $M - \dot{\Omega}'$ et $\alpha_1 = df_1$ sur Ω'.

Remarque. — Avec des hypothèses analogues sur $W^s(c)$, on peut faire descendre de L le point critique c.

3.2. *Lemme d'élimination élémentaire de Morse-Smale. — Soient c et d deux points critiques d'indice q et q + 1 d'une forme de Morse α et soit ξ un pseudo-gradient pour α. On suppose qu'il existe une liaison transverse ℓ de c à d de longueur* L *et qu'il n'arrive à d aucune autre liaison de longueur* $\leqslant$ L. *Soit* $\Omega(c)$ *un voisinage de Morse de c de taille* ε; $W^s(d, L - \varepsilon)$ *se plonge dans* M. *Il existe* V, *voisinage arbitrairement petit de* $\Omega(c) \cup W^s(d, L - \varepsilon)$, *et* α_1, *forme de Morse cohomologue à α, égale à α hors de* V, *telle que* $\alpha_1|_V$ *n'a pas de point critique.*

Preuve. — La forme α est exacte sur un voisinage de $\Omega(c) \cup W^s(d, L - \varepsilon)$ et l'on se trouve dans la situation du lemme d'élimination comme rédigé dans [2].

3.3. Modifications élémentaires du champ de pseudo-gradient

Lemme **3.3.** — *Soient α une 1-forme de Morse sur* M, ξ *un pseudo-gradient générique pour α et d un point critique de α. Soit* g_λ ($\lambda \in [0, 1]$) *une isotopie à support compact* S *de plongements de* $\partial W^s(d, L)$ *dans la feuille* $\mathscr{F}$ *qui le contient. Si* U *est un voisinage de* S *dans* M *et si*

$$S \cap W^s(d, L) = S \cup \partial W^s(d, L),$$

il existe un pseudo-gradient générique ξ_1 *égal à* ξ *hors de* U *et tel que*

$$\partial W^s(d, L, \xi_1) = g_1(\partial W^s(d, L, \xi)).$$

Démonstration. — Soit V un petit voisinage tubulaire de S dans $\mathscr{F}$. On étend g_λ en $h_\lambda : V \to V$ avec $h_\lambda = \mathrm{Id}$ près du bord; soit f une primitive de α au voisinage de V; on considère le champ de vecteurs $\eta(x) = \xi(x)/\langle \alpha x, \xi(x)\rangle$ au voisinage de V et ψ_t le groupe local à 1 paramètre associé de sorte que $f\psi_t(x) = t + f(x)$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère le plongement $\Psi : V \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, $\Psi(x, y) = \psi_y(x)$; on pose

$$N = \Psi(V \times [-\varepsilon, \varepsilon]), \qquad N_+ = \Psi(V \times [0, \varepsilon])$$

et

$$N_- = \Psi(V \times [-\varepsilon, 0]),$$

et l'on suppose ε assez petit pour que $N \subset U$ et que

$$N_+ \cup W^s(d, L) = N_+ \cap (W^s(d, L) - \mathrm{Int}\, W^s(d, L - \varepsilon)).$$

Soit $H : V \times [0, \varepsilon] \to V \times [0, \varepsilon]$ le difféomorphisme $H(x, y) = (h_{\omega(y/\varepsilon)}(x), y)$ où $\omega : [0, 1] \to [0, 1]$ vaut 1 au voisinage de 0 et 0 au voisinage de 1. Soit $\overline{H}$ le difféomorphisme de N_+ qui s'en déduit; on a $\overline{H}^* \alpha|_{N_+} = \alpha|_{N_+}$ et $\overline{H}_*(\xi)$ est égal à $\lambda\xi$ près de V, où la fonction λ est > 0. On pose $\xi_1 = \xi$ hors de N, sur N_+; ξ_1 est $\overline{H}_*(\xi)$ reparamétré

au voisinage de V pour y être égal à ξ, et sur N_- c'est une petite déformation de ξ de sorte que ξ_1 soit générique. La condition

$$N_+ \cap W^s(d, L, \xi) = N_+ \cap (W^s(d, L, \xi) - \operatorname{Int} W^s(d, L - \varepsilon, \xi))$$

assure que

$$\Psi(V \times \{\varepsilon\}) \cap W^s(d, L - \varepsilon, \xi_1) = \Psi(V \times \{\varepsilon\}) \cap W^s(d, L - \varepsilon, \xi)$$

et donc que $\partial W^s(d, L, \xi_1) = g_1(\partial W^s(d, L, \xi))$.

Ajout de liaisons

Proposition **3.4.** — *Soit α une forme de Morse sans point critique d'indice $n-1$, n et sans point critique d'indice $< q$ $(2 \leqslant q \leqslant n-3)$. Soit ξ un pseudo-gradient générique. On choisit des relevés $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_k$ des points critiques d'indice q et $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_\ell$ des points d'indice $q+1$ et des orientations des variétés stables. On se donne $g_0 \in \pi_1 M$, $\eta = \pm 1$, $L > 0$.*

Si $\tilde{f}(\tilde{d}_1) > \tilde{f}(\tilde{d}_2) + u(g_0)$, il existe un pseudo-gradient générique ξ_1 tel que

1) *les liaisons de longueur $\leqslant L$ entre points critiques d'indice q et $q+1$ pour ξ sont des liaisons pour ξ_1;*
2) *on obtient ainsi toutes les liaisons de longueur $\leqslant L$ pour ξ_1 arrivant à d_j pour $j \geqslant 2$;*
3) *pour chaque liaison ℓ de c_i à d_2 pour ξ de longueur $\leqslant L' = L - (f(\tilde{d}_1) - \tilde{f}(\tilde{d}_2) - u(g_0))$, il existe une liaison ℓ' de c_i à d_1 proche de ℓ au début avec $g(\ell') = g_0\, g(\ell)$, $\varepsilon(\ell') = \eta\varepsilon(\ell)$. On obtient ainsi avec 1) toutes les liaisons de longueurs $\leqslant L$ pour ξ_1 arrivant à d_1.*

On écrira $\lambda = \lambda' + (u < C)$, pour $\lambda, \lambda' \in \Lambda_{-u}$, pour dire que $\lambda - \lambda' = \Sigma_{u(g_i) < C} n_i g_i$. Les relations entre les coefficients d'incidence pour ξ et ξ_1 sont alors données par :

3.5. Soit $A = \sup_{i,j}(\tilde{f}(\tilde{d}_j) - \tilde{f}(\tilde{c}_i))$, alors

$$[\check{d}_1, \check{c}_i]_{\xi_1} = [\check{d}_1, \check{c}_i]_\xi + \eta g_0 [\check{d}_2, \check{c}_i]_\xi + (u < A - L),$$

et si $j \geqslant 2$,

$$[\check{d}_j, \check{c}_i]_{\xi_1} = [\check{d}_j, \check{c}_i]_\xi + (u < A - L).$$

Démonstration de **3.4.** — D'abord, comme il n'y a pas de point critique d'indice $0, 1, n-1, n$, on peut faire bouger comme on veut un objet de dimension 1 générique par rapport à ξ le long des trajectoires de ξ ou de $-\xi$; donc $\tilde{f}^{-1}(t)$ est connexe par arc pour tout t.

On choisit $t_0 \in]\tilde{f}(g_0 \tilde{d}_2), \tilde{f}(\tilde{d}_1)[$, on pose $L_1 = \tilde{f}(\tilde{d}_1) - t_0$, $L_2 = t_0 - \tilde{f}(g_0 \tilde{d}_2)$. On choisit $\tilde{b}_1 \in W^s(\tilde{d}_1, L) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0)$ tel que $b_1 = \pi \tilde{b}_1$ ne soit contenu dans aucun $W^u(c_i, L)$, et $\tilde{B}_1 \subset \tilde{f}^{-1}(t_0)$, une petite boule de dimension $n-q-1$ transverse à $W^s(\tilde{d}_1, L) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0)$

en $\tilde{b}_1$ telle que, si $B_1 = \pi\tilde{B}_1$, on ait $B_1 \cap W^u(c_i, L) = \emptyset$ et $B_1 \cap W^s(d_j, L) = \emptyset$ si $j \geqslant 2$, $B_1 \cap W^s(d_1, L)$ étant réduit à b_1. On choisit $\tilde{b}_2 \in W^u(g_0 \tilde{d}_2, L) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0)$ et une petite boule $\tilde{B}_2$ de dimension $q + 2 \subset \tilde{f}^{-1}(t_0)$ transverse à $W^u(g_0 \tilde{d}_2, L)$ en $\tilde{b}_2$ de sorte que, si $B_2 = \pi\tilde{B}_2$ on ait $B_2 \cap W^s(d_j, L) = \emptyset$, $B_2 \cap W^u(d_j, L) = \emptyset$ si $j \neq 2$, $B_2 \cap W^u(d_2, L)$ étant réduit à $b_2 = \pi\tilde{b}_2$; B_2 coupe transversalement $\overline{W}^u(c_i, L)$ suivant des arcs. On choisit $a_1 \in \partial B_1$, $a_2 \in \partial B_2$ hors des $\overline{W}^u(c_i, L)$. On choisit aussi un arc $\tilde{I}$ dans $\tilde{f}^{-1}(t_0)$ joignant $\tilde{a}_1$ à $\tilde{a}_2$, évitant les points critiques et tel que $\tilde{I} \cap \tilde{B}_1 = \{\tilde{a}_1\}$, $\tilde{I} \cap \tilde{B}_2 = \{\tilde{a}_2\}$. Par position générale, on peut supposer que $I = \pi\tilde{I}$ est plongé dans sa feuille, que

$$I \cap W^u(c_i, L) = \emptyset$$

car $q \geqslant 2$, que $I \cap W^s(d_j, L) = \emptyset$ car $q \leqslant n - 3$ et qu'il n'y a aucune trajectoire de ξ de longueur L passant par I qui recoupe I. Soit U un petit voisinage de $B_1 \cup I \cup B_2$ dans M qui a, par rapport aux variétés stables et instables de longueur $\leqslant L$, des propriétés analogues à celles de B_1, B_2 et I. Soit g_λ l'isotopie de plongement de $\partial W^s(d_1, L_1)$ dans sa feuille $\mathscr{F}$, à support compact $S \subset U \cap \mathscr{F}$, qui réalise l'enlacement de signe η de $\partial W^s(d_1, L_1)$ avec $\partial W^u(d_2, L_2)$ [7, th. 7.6], et soit ξ_1 donné par 3.3. Vu le soin mis à choisir B_1, B_2 et I, il est clair que ξ_1 convient.

Elimination de liaisons

Lemme **3.6.** — *Soit α une 1-forme de Morse sur M de dimension $n \geqslant 7$. Soit ξ un pseudo-gradient générique pour α; soit q avec $3 \leqslant q \leqslant n - 4$. On suppose que α n'a pas de point critique d'indice $n - 2$, $n - 1$ et n, ni de point critique d'indice $< q$. Soient c_1 un point critique d'indice q et d_1 un point critique d'indice $q + 1$, et soient $\ell, \ell' \in \mathscr{L}(c_1, d_1, L)$ avec $g(\ell) = g(\ell')$, $\varepsilon(\ell) = -\varepsilon(\ell')$. Il existe un pseudo-gradient générique ξ_1 pour α ayant les mêmes liaisons de longueur $\leqslant L$ entre points critiques d'indice q et $q + 1$ que ξ sauf que ℓ et ℓ' ont disparu.*

Démonstration. — Comme α n'a pas de point critique d'indice 0, 1, 2, $n - 2$, $n - 1$ et n, on peut faire bouger comme on veut un objet de dimension 2 générique par rapport à ξ par les trajectoires de ξ ou de $-\xi$; il en résulte que, pour tout t, $\tilde{f}^{-1}(t)$ est simplement connexe.

On pose $g = g(\ell) = g(\ell')$ et l'on choisit $t_0 \in]\tilde{f}(g\tilde{c}_1), \tilde{f}(\tilde{d}_1)[$; soient $\tilde{p}$ et $\tilde{p}' \in W^u(g\tilde{c}_1, L) \cap W^s(\tilde{d}_1, L) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0)$ correspondant à ℓ et à ℓ'. Comme $\varepsilon(\ell) = -\varepsilon(\ell')$, on peut trouver un disque de Whitney $\tilde{\Delta} \subset \tilde{f}^{-1}(t_0)$ pour l'élimination de $\tilde{p}$ et $\tilde{p}'$. Soit $\Delta = \pi\tilde{\Delta}$ qu'on suppose plongé dans sa feuille ($n \geqslant 6$). Soit $\partial_- \Delta$ la partie de $\partial\Delta$ dans $W^u(c_1, L)$ et $\partial_+ \Delta$ la partie dans $W^s(d_1, L)$. Comme $q \geqslant 3$, on peut supposer $\Delta \cap W^u(c_i, L) = \emptyset$ si $i \neq 1$ et $\Delta \cap W^u(c_1, L) = \partial_- \Delta$. Comme $q \leqslant n - 4$, on peut supposer $\Delta \cap W^s(d_j, L) = \emptyset$ si $j \neq 1$ et $\Delta \cap W^s(d_1, L) = \partial_+ \Delta$, et comme $n \geqslant 6$, on peut supposer qu'il n'y a pas de trajectoire de ξ de longueur $\leqslant L$ passant par Δ qui

recoupe Δ. Soient U un petit voisinage de Δ dans M et g_λ ($\lambda \in [0, 1]$) l'isotopie de Whitney de plongement de $\partial W^s(d_1, L_1 = \tilde{f}(\tilde{d}_1) - t_0)$ dans sa feuille $\mathscr{F}$ à support compact incluse dans $U \cap \mathscr{F}$ qui élimine les points p et p', et soit ξ_1 donnée par 3.3; il est clair que ξ_1 a la propriété de l'énoncé.

Remarque. — La difficulté du cas $q = 2$ est que, même si l'on a construit un disque de Whitney, on ne peut plus assurer par position générale que $\Delta \cap W^u(c_i, L) = \emptyset$ pour $i \neq 1$ et donc, en éliminant ℓ et ℓ', on risque d'introduire de nouvelles liaisons de longueur $\leqslant L$. Nous verrons au § 5 comment surmonter cette difficulté.

Chapitre 4

ÉLIMINATION DE POINTS CRITIQUES

4.1. Elimination des points critiques d'indice 0 et n

Lemme **4.1.** — *Soit α une forme de Morse sur une variété compacte connexe. On suppose α non exacte. Il existe une forme α' cohomologue à α ayant les mêmes points critiques d'indice $\geqslant 2$ que α et α' sans point critique d'indice 0.*

Preuve. — Soit ξ un pseudo-gradient générique pour α. Soit L_i la suite des longueurs des liaisons issues d'un point critique m d'indice 0 de α. Si s est un point critique d'indice 1, $\mathscr{L}_L(m, s)$ est soit vide soit formé de 1 ou 2 points. S'il n'existait pas de point d'indice 1 avec $\mathscr{L}_L(m, s)$ réduit à un point, alors B_L, adhérence de $W^u(m, L)$ dans M, serait, pour L différent des L_i, une variété de dimension n à bord lisse sur laquelle α est exacte. Par connexité de M, on aurait $M = B_L$ pour un certain L, donc α serait exacte.

Soit donc s un point critique d'indice 1 avec $\mathscr{L}_L(m, s)$ réduit à un point ℓ et L minimal; B_L est une variété compacte avec une singularité conique en s sur laquelle α est exacte. Soit f une primitive de $\alpha|_{B_L}$ avec $f(s) = 0$. L'autre partie de $W^s(s)$ descend d'au moins ε du voisinage de Morse. Changeons les voisinages de Morse de m et s en $\Omega'(m)$ et $\Omega'(s)$, en remplaçant ε par $\varepsilon/10$. Changeons $f: B_L \to \mathbf{R}$ par un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ en f_1 à valeurs dans $[-\varepsilon, 0]$ avec $f = f_1$ près de ∂B_L et $f_1 - f = c$ sur $\Omega'(m)$. Soit $\alpha_1 = df_1$ sur B_L et $\alpha_1 = \alpha$ hors de B_L; α_1 est cohomologue à α. La liaison ℓ de m à s, qui est maintenant de longueur $\leqslant \varepsilon$, permet l'élimination de m et s (3.2).

On ne considérera que des formes de Morse sans points critiques d'indice 0 et n.

4.2. Elimination des points critiques d'indice 1 et $n-1$

Proposition **4.2.** — *Soit α une 1-forme de Morse dans la classe u sur une variété M de dimension $n \geqslant 5$ sans point critique d'indice 0 et n. Si $\mathscr{M}_{-u}(M)$ est connexe, il existe α' de Morse cohomologue à α ayant les mêmes points critiques d'indice $\geqslant 4$ que α et n'ayant pas de point critique d'indice 0 et 1.*

Lemme **4.3.** — *Avec les notations précédentes, soit c un point d'indice* 1. *Il existe* α' *obtenue à partir de* α *en faisant monter des points critiques d'indice* $n-1$ *et* $n-2$, *et un plongement* $g : D^2 \hookrightarrow M$, *tels que*

1) $g(S^1)$ *est dans la feuille de* $S_+(c)$ *et coupe transversalement* $S_+(c)$ *en un point* m;
2) $g(D^2) \cap W^u_{loc}(c) = \{m\}$;
3) $g^* \alpha'$ *n'a qu'un seul point critique sur* D^2 *qui est d'indice* 2.

La démonstration de 4.2 est facile à partir du lemme. Soit D_0 un petit disque $\subset D^2$ centré au point d'indice 2 de $g^* \alpha'$; on construit un pseudo-gradient ξ_1 tangent à $g(D^2 - \mathring{D}_0)$ et radial, dans une petite boîte K coupant $g(D^2)$ en $g(D_0)$ on introduit (2.17) une paire de points critiques d, e d'indices 2 et 3 telle que $W^s(d) \cap K$ soit exactement $g(\partial D_0)$, et l'on élimine alors c et d grâce à 3.2.

Démonstration de **4.3.**

1) On choisit une petite transversale I à $S_+(c)$ dans sa feuille $\mathscr{F}$. Quitte à diminuer l'épaisseur des voisinages de Morse, on construit à partir de chaque extrémité de I un chemin transversal à α allant à $-\infty$ disjoint des voisinages de Morse, ce qui est possible car α n'a pas de point critique d'indice 0. On obtient $\gamma : \mathbf{R} \to M$ avec $\gamma[-a, a] = I$, et $\tilde{f}\tilde{\gamma}(t) \xrightarrow[|t| \to \infty]{} -\infty$, où on a relevé $\tilde{\gamma}$ à partir de $\tilde{m}$ proche de $\tilde{c}$,

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{R}) \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, \tilde{f}(\tilde{c}) + \varepsilon]).$$

Comme $\mathscr{M}_{-u}(M)$ est connexe, il existe $\Gamma : \mathbf{R}^2_+ \to M$ étendant γ avec $\tilde{f}\tilde{\Gamma}(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} -\infty$. En se restreignant à $D_+(R)$ avec R assez grand, on a $\Gamma(D_+(R) \cap \mathbf{R}) = \gamma[-R, R]$, $\tilde{f}\tilde{\Gamma}(\partial D_+(R) - \mathbf{R}) \subset]-\infty, -1 + \tilde{f}(\tilde{c})]$; on construit donc $g : D^2 \to M$ avec $I \subset g(S^1)$ et $\tilde{f}(\tilde{x}) < \tilde{f}(\tilde{c}) + \varepsilon$ pour $\tilde{x} \in \tilde{g}(S^1) - \tilde{I}$. On modifie g au voisinage de I de sorte que g pointe vers le haut au voisinage de I, donc $W^u_{loc}(c) \cap g(D^2) = \{m\}$ au voisinage de m. Comme $n \geqslant 5$, on peut supposer que $g : D^2 \to M$ est un plongement sans changer les autres propriétés.

On suppose $g(D^2)$ transverse à $W^u_{loc}(c)$; l'ensemble $(g(D^2) - I) \cap W^u_{loc}(c)$, de dimension 1, peut être supposé disjoint du rayon passant par m dans $W^u_{loc}(c)$ $(n \geqslant 4)$, donc en poussant par ξ au voisinage de $W^u_{loc}(c)$, on peut supposer que g a les propriétés précédentes avec en plus $g(D^2) \cap W^u_{loc}(c) = \{m\}$. Par la suite, les modifications essentielles de g seront obtenues en poussant le long des trajectoires positives de ξ, donc la condition $g(D^2) \cap W^u_{loc}(c) = \{m\}$ se conserve.

On choisit $L > \sup_{x, y \in \tilde{g}(D^2)}(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))$.

Soit V un petit voisinage de m dans $g(D^2)$ où g est déjà, comme on le souhaite, assez petit pour que $V \cap W^u(d, L) = \emptyset$ si $I(d) > 1$. On peut supposer

$$(g(D^2) - V) \cap W^s(d, L) = \emptyset \quad \text{si } I(d) < n - 2,$$

$$(g(D^2) - V) \cap W^u(d, L) = \emptyset \quad \text{si } I(d) > 2.$$

Soit α' obtenue à partir de α en faisant monter de L les points d'indice $n-1$, puis de L les points d'indice $n-2$. On a $\alpha'|_{g(D^2)} = \alpha|_{g(D^2)}$, et pour la nouvelle situation $(g(D^2) - V) \cap W^s(d, L) = \emptyset$ pour tout d. On met $g|_{S^1}$ transversal à ξ ($n \geqslant 3$) sans rien bouger sur I, puis on fait monter $g(S^1) - I$ dans la feuille $\mathscr{F}$ de $S_+(c)$ grâce à ξ. Comme $n \geqslant 4$, on peut supposer qu'on obtient un plongement $g(S^1) \hookrightarrow \mathscr{F}$ et l'on a $g(S^1) \cap S_+(c) = \{m\}$ car, dans la situation précédente, $(g(S^1) - I) \cap W^u_{loc}(c) = \emptyset$.

On fait pointer g vers le haut le long de $g(S^1)$ (si $n \geqslant 4$, $\pi_1 S^{n-2} = 0$) de sorte que $g(D^2) - V$ reste disjoint des $W^s(d, L)$, où V est maintenant un petit voisinage de $g(S^1)$, g étant comme on le souhaite.

On met $g(D^2) - V$ transversal à ξ ($n \geqslant 5$) sans perdre les propriétés précédentes et on peut supposer $g^* \alpha'$ de Morse.

Soit m_0 un minimum de $g^* \alpha'$, Δ son domaine d'élimination (4.1) et s_0 la selle sur $\partial \Delta$. Soit $\hat{pr} : \hat{\Delta} \to \hat{f}^{-1}(\hat{f}(\hat{s}_0))$ la projection obtenue en poussant le long des trajectoires de $\hat{\xi}$ ($\hat{M} \to M$ est le revêtement d'intégration de α'). Comme $n \geqslant 5$, quitte à bouger un peu g, on peut supposer que $\hat{pr}$ est une immersion générique avec des points doubles isolés (si $n = 5$); $\hat{pr}(\hat{\Delta})$, qui est un compact de $\hat{f}^{-1}(\hat{f}(\hat{s}_0))$, se plonge dans M par la projection $\hat{M} \to M$, l'image est dans la feuille $\mathscr{F}_0$ de s_0, on obtient ainsi $pr : \Delta \to \mathscr{F}_0$ et on peut supposer $g(D^2 - \Delta)$ transverse à pr c'est-à-dire disjoint de $pr(\Delta)$ ($n \geqslant 5$). Dans un petit collier au-dessous de $pr(\Delta)$, on construit un nouveau plongement h de Δ égal à g près de $\partial \Delta$ isotope à $g|_\Delta$ avec $h^* \alpha' = \lambda g^* \alpha'$, où λ est une fonction > 0 (on obtient h en poussant suivant les trajectoires de ξ). On remplace g sur D^2 par le plongement g_1 égal à g sur $D^2 - \Delta$ et à h sur Δ (g_1 n'est peut-être pas isotope à g si $n = 5$, mais cela n'a pas d'importance). A l'aide d'un chemin ascendant de m_0 à s_0 ne passant pas par les points doubles de pr, on élimine m_0 et s_0.

On est arrivé à $g : D^2 \hookrightarrow M$ avec toutes les propriétés voulues sauf que $g^* \alpha'$ a des points critiques d'indice 1 et 2. Soit m le maximum absolu de $g^* \alpha'$ qui est exacte. Soit m_0 un maximum le plus bas possible. Soit s_0 une selle d'élimination pour m_0 (considéré comme un minimum de $-g^* \alpha'$); on construit un chemin γ_1 ascendant pour $g^* \alpha'$ de s_0 à m_0 et de l'autre côté un chemin ascendant γ_2 qui arrive à un maximum supérieur à m_0.

Soit J l'arc formé de γ_1 et de γ_2 arrêté au niveau de m_0. Comme $n \geqslant 5$, on peut supposer que les trajectoires positives de ξ passant par J donnent une membrane $P \subset M$ avec $P - J$ disjoint de $g(D^2)$ et la partie supérieure de P est au niveau de m_0. On utilise P pour modifier g sur un voisinage tubulaire de J de façon à éliminer s_0 et m_0.

4.4. Elimination des points critiques d'indice 2 et $n-2$

Proposition **4.4.** — *Soit α une 1-forme de Morse dans la classe u sur une variété M de dimension $n \geqslant 7$, sans point critique d'indice 0, 1, n. Si $\mathscr{M}_{-u}(M)$ est simplement connexe, il existe α' de Morse cohomologue à α, ayant les mêmes points critiques d'indice $\geqslant 5$ que α et n'ayant pas de point critique d'indice $\leqslant 2$.*

La démonstration est analogue à celle de 4.2; elle est basée sur le

Lemme **4.5.** — *Avec les notations précédentes, soit c un point critique d'indice* 2. *Il existe* α' *obtenue à partir de* α *en faisant monter des points critiques d'indice* $n-1$, $n-2$, $n-3$, *et il existe un plongement* $g : D^3 \hookrightarrow M$ *tel que* :

1) $g(S^2)$ *est dans la feuille de* $S_+(c)$ *et coupe transversalement* $S_+(c)$ *en un point* m;
2) $g(D^3 \cap W^u_{loc}(c)) = \{m\}$;
3) $g^* \alpha'$ *n'a qu'un seul point critique sur* D^3 *qui est d'indice 3.*

Démonstration. — On suit mot pour mot la démonstration de 4.3 avec $n \geqslant 7$; la seule modification est qu'il faut faire monter les points critiques d'indice $n-1$, $n-2$, $n-3$.

On arrive à $g : D^3 \hookrightarrow M$ vérifiant les conditions 1) et 2), pointant vers le haut le long de S^2 et avec $g^* \alpha' = dh$ n'ayant qu'un maximum, des points d'indice 1, $c_1, \ldots, c_k$, et des points d'indice 2, $d_1, \ldots, d_k$. Quitte à modifier g en poussant par les trajectoires positives de ξ au voisinage de la nappe montante des d_j, on peut supposer $h(d_j) > h(c_i)$ pour tous i et j; une surface de niveau intermédiaire de h est une surface de Heegaard, donc, quitte à introduire des paires triviales c_i, d_i $(i = k+1, \ldots, \ell)$ à un niveau intermédiaire (toujours en modifiant g par les trajectoires positives de ξ), on peut supposer la décomposition de Heegaard triviale (Reidemeister-Singer), donc, après avoir fait monter des points critiques de h grâce à ξ et avec un bon numérotage, on trouve des disques ascendants (pour h) D_i de centre c_i avec $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et D_i monte jusqu'au niveau de d_i. Comme $n \geqslant 7$, on construit comme en 4.3 des membranes P_i sur les D_i et on modifie g sur un voisinage tubulaire de $\bigcup_1^\ell D_i$ pour supprimer les points d'indice 1 et 2.

4.6. Elimination intermédiaire

Proposition **4.6.** — *Soit* α *une forme de Morse sur* M *de dimension* $n \geqslant 7$. *On suppose que* α *n'a pas de point critique d'indice* $n-2$, $n-1$, n, *ni d'indice* $< q$, *où* $3 \leqslant q \leqslant n-4$. *Si* $H_q(M, -u) = 0$, *il existe* α' *cohomologue à* α *ayant les mêmes points critiques d'indice* $\neq q$, $q+2$ *que* α *et sans point critique d'indice* q.

Démonstration. — Soit ξ un pseudo-gradient générique pour α avec un tube de trajectoires n'interagissant pas avec les points critiques (2.24); on choisit des relevés $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_k$ des points critiques d'indice q et $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_\ell$ des points critiques d'indice $q+1$ et des orientations des variétés stables. On fait descendre des points critiques d'indice q de sorte que $\tilde{f}(\tilde{c}_1) > \tilde{f}(\tilde{c}_i)$ pour $i \geqslant 2$. Par hypothèse, $d : C_{q+1}(\alpha, \xi) \to C_q(\alpha, \xi)$ est surjective. Choisissons $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \Lambda_{-u}$ avec $d(\lambda_1 \check{d}_1 + \ldots + \lambda_\ell \check{d}_\ell) = \check{c}_1$. On tronque λ_j en $\lambda'_j \in \Lambda$ de sorte que $\sum_j \lambda'_j [\check{d}_j, \check{c}_i] = \delta_{1i} + (u < 0)$.

Soit

$$B = \max\{ u(g) \mid g \text{ figure avec un coefficient non nul dans un des } \lambda'_j \}.$$

Du tube de trajectoires, on fait sortir une paire triviale $\tilde{d}_0$ d'indice $q+1$ et $\tilde{c}_0$ d'indice $q+2$ avec $\tilde{f}(\tilde{d}_0) > B + \sup_{j\geqslant 1} \tilde{f}(\tilde{d}_j)$.

Soit $L > A = \sup_{j\geqslant 0, i\geqslant 1}(\tilde{f}(\tilde{d}_j) - \tilde{f}(\tilde{c}_i))$. Une application répétée de 3.4 nous donne ξ_1 générique avec $[\check{d}_0, \check{c}_i]_{\xi_1} = \delta_{1i} + (u<0)$.

La condition $[\check{d}_0, \check{c}_i] = (u<0)$ $(i\geqslant 2)$ dit que, si $L' \leqslant \tilde{f}(\tilde{d}_0) - \tilde{f}(\tilde{c}_1)$, on peut regrouper deux par deux les éléments de $\mathscr{L}_{L'}(c_i, d_0, \xi_1)$ de sorte que $g(\ell) = g(\ell')$ et $\varepsilon(\ell) = -\varepsilon(\ell')$.

La condition $[\check{d}_0, \check{c}_1] = 1 + (u<0)$ dit qu'il existe une liaison ℓ_0 de c_1 à d_0, de longueur $L_0 = \tilde{f}(\tilde{d}_0) - \tilde{f}(\tilde{c}_1)$, et qu'on peut grouper les éléments de $\mathscr{L}_{L'}(c_1, d_0) - \{\ell_0\}$ pour $L' \leqslant L_0$ par paires ℓ, ℓ', avec $g(\ell) = g(\ell')$ et $\varepsilon(\ell) = -\varepsilon(\ell')$.

Une application répétée de 3.6 donne ξ_2 avec $\mathscr{L}(c_1, d_0, L_0, \xi_2) = \{\ell_0\}$ et $\mathscr{L}(c_i, d_0, L_0, \xi_2) = \emptyset$ pour $i \geqslant 2$. On élimine alors c_1 et d_0 grâce à 3.2, d'où le résultat.

4.7. Elimination finale

Proposition **4.7.** — *Supposons que α de Morse n'a que des points critiques d'indice q et $q+1$ avec $3 \leqslant q \leqslant n-4$. Si $H_*(M_1 - u) = 0$ et si $\tau(M, -u) = 0$, il existe α' cohomologue à α et sans point critique.*

Démonstration. — Soit ξ un pseudo-gradient générique pour α; l'hypothèse dit que $d : C_{q+1}(\alpha, \xi) \to C_q(\alpha, \xi)$ est un isomorphisme.

1) Supposons que, pour des choix $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_k$, $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_k$ des relevés des points critiques, la matrice de d est $I + R$ avec $u(R) < 0$. On fait descendre les points d'indice q et monter ceux d'indice $q+1$ de sorte que

$$\tilde{f}(\tilde{c}_1) = \ldots = \tilde{f}(\tilde{c}_k) < \tilde{f}(\tilde{d}_1) = \ldots = \tilde{f}(\tilde{d}_k).$$

Soit $L = \tilde{f}(\tilde{d}_1) - \tilde{f}(\tilde{c}_1)$; on a $[\check{d}_j, \check{c}_i] = \delta_{ij} + (u<0)$, donc une application répétée de 3.6 donne ξ_1 avec

$$\mathscr{L}(c_i, d_j, L, \xi_1) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}(c_i, d_i, L, \xi_1) \text{ égal à un point.}$$

On élimine alors les c_i avec les d_i simultanément grâce à 3.2.

2) Soit ξ un pseudo-gradient générique avec un tube de trajectoires n'interagissant pas avec les points critiques. Comme plus haut, on se ramène à $\tilde{f}(\tilde{c}_1) = \ldots = \tilde{f}(\tilde{c}_k)$, $\tilde{f}(\tilde{d}_1) = \ldots = \tilde{f}(\tilde{d}_k)$. Soit $L_0 = \tilde{f}(\tilde{d}_1) - \tilde{f}(\tilde{c}_1)$. Soit $A \in Gl(k, \Lambda_{-u})$ la matrice de

$$d : C_{q+1}(\alpha, \xi) \xrightarrow{\sim} C_q(\alpha, \xi).$$

Comme $\tau(M, -u) = 0$, il existe un stabilisé de A, $A' \in Gl(r, \Lambda_{-u})$, des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_p \in Gl(r, \Lambda_{-u})$, une matrice diagonale Δ avec des $\pm g$ sur la diagonale telle que

$$\Delta E_1 E_2 \ldots E_p A' = I + \Delta_0,$$

avec Δ_0 diagonale et $u(\Delta_0) < 0$.

Il existe des troncatures des E_j, $\bar{E}_j \in Gl(r, \Lambda)$ telles que

$$\Delta \bar{E}_1 \bar{E}_2 \dots \bar{E}_p A' = 1 + R_0 \quad \text{avec } u(R_0) < 0.$$

Soit $B > \max\{ u(g) \mid g \in \pi_1 M$ apparaît avec un coefficient non nul dans une des matrices $\Delta, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_p \}$.

On choisit $L > L_0 + (p + 1) B$.

Du tube, on fait naître $(r - k)$ paires triviales, c_j d'indice q et d_j d'indice $q + 1$ $(j = k + 1, \dots, r)$, et l'on se ramène à

$$\tilde{f}(\tilde{c}_1) = \dots = \tilde{f}(\tilde{c}_r) < \tilde{f}(\tilde{d}_1) = \dots = \tilde{f}(\tilde{d}_r).$$

Si la matrice $\bar{E}_p$ fait intervenir d_i et d_j, on fait monter d_i de B et l'on applique plusieurs fois 3.4 pour obtenir ξ_1 générique dont la matrice A'_1 vérifie $A'_1 = \bar{E}_p A' + R_1$, $u(R_1) < L_0 + B - L$ (3.5). En continuant ainsi, on trouve ξ_p générique tel que sa matrice A'_p vérifie $A'_p = \bar{E}_1 \dots \bar{E}_p A' + R_p$ avec $u(R_p) < L_0 + pB - L$. On change alors les relevés des points d'indice $q + 1$ et peut-être l'orientation des variétés stables. La matrice est alors $A'_{p+1} = \Delta A'_p = \Delta \bar{E}_1 \dots \bar{E}_p A' + R_{p+1}$ avec

$$u(R_{p+1}) < L_0 + (p + 1) B - L,$$

donc $A'_{p+1} = I + R$ avec $R = R_0 + R_{p+1}$ et $u(R) < 0$; on est dans le cas 2, ce qui achève la démonstration du théorème en dimension $\geqslant 7$.

Chapitre 5

CHEMINS DE TRAVERSÉE ET HOMOLOGIE DE NOVIKOV

5.1. On reprend les notations de 1.1.

On appelle $\Omega_p(X, u)$ le groupe de bordisme formé des $\varphi : V \to \widetilde{X}$ où V est une variété de dimension p orientée sans bord et où $(\widetilde{f\varphi})^{-1}(]-\infty, t])$ est compact pour tout t, modulo des cobordismes analogues. Si $g \in G = \pi_1 X$, on définit $g.\varphi : V \to \widetilde{X}$ par $(g.\varphi)(v) = g.\varphi(v)$; la somme disjointe munit alors $\Omega_p(X, u)$ d'une structure de Λ_u-module.

Soit $\varphi : (W^p, \partial W^p) \to (\widetilde{X}^p, \widetilde{X}^{p-1})$ avec $(\widetilde{f\varphi})^{-1}(]-\infty, t])$ compact pour tout t; soient $\widetilde{e}_1^p, \ldots, \widetilde{e}_k^p$ des relevés des p-cellules de X. Si l'on écrase tout dans $\widetilde{X}^p$, sauf la cellule ouverte $g\widetilde{e}_j^p$, on obtient une application $W \to S^p$ telle que la contre-image de S^p privé du pôle nord est compacte et est dans Int W; soit n_{jg} le degré de cette application et posons $[\varphi, \widetilde{e}_j^p] = \Sigma\, n_{jg}\, g \in \Lambda_u$.

Posons $h(\varphi) = \Sigma\, [\varphi, \widetilde{e}_j^p]\, \widetilde{e}_j^p \in C_p(X, u)$. On a aussi $h(\varphi\,|_{\partial W}) \in C_{p-1}(X, u)$ et, d'après la définition de $d : C_p(X, u) \to C_{p-1}(X, u)$, il est clair que

$$dh(\varphi) = h(\varphi\,|_{\partial W}).$$

Si V^p est sans bord et si $\varphi : V^p \to \widetilde{X}$ est homotope à $\varphi_1 : V^p \to \widetilde{X}^p$ parmi les applications $\widetilde{f}$-propres, le résultat précédent montre que la classe du cycle $h(\varphi_1)$ ne dépend pas des choix faits et définit un morphisme de Λ_u-modules

$$h : \Omega_p(X, u) \to H_p(X, u).$$

On a des définitions relatives et, comme $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$, il vient (en regardant les contre-images transverses du centre des p-cellules) :

$$\Omega_{p+q}(\widetilde{X}^p, \widetilde{X}^{p-1}, u) = 0 \quad \text{si } q = 1, 2, 3$$

et $$h : \Omega_p(\widetilde{X}^p, \widetilde{X}^{p-1}, u) \to C_p(X, u) \text{ est un isomorphisme.}$$

Il en résulte, par une chasse au diagramme classique, que

$$h : \Omega_k(X, u) \to H_k(X, u) \text{ est un isomorphisme pour } k \leqslant 3.$$

On note encore h la composée $\pi_p(X, u) \to \Omega_p(X, u) \to H_p(X, u)$.

5.2. Lorsque $\mathscr{M}_u(X)$ est simplement connexe, on va construire une structure de Λ_u-module sur $\pi_k(X, u)$ $(k \geqslant 3)$ et aussi sur $\pi_k(X, X^j, u)$ $(k \geqslant 4, j \geqslant 3)$.

On choisit un point base $\gamma_0 \in \mathscr{M}_u(X)$ avec $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{x}_0$ et $\tilde{f}\tilde{\gamma}_0$ croissante tendant vers l'infini.

Si $\mathscr{M}_u(X)$ est $(n-2)$-connexe $(n \geqslant 3)$, donc si $\pi_p(X, u) = 0$ pour $p < n$, on construit comme en 1.4 une section de $e : \mathscr{C}_u(X) \to X$ sur le $(n-1)$-squelette de X, d'où $\Phi : X^{n-1} \times [0, \infty[\to X^n$ cellulaire $(\Phi(X^j \times [0, \infty[) \subset X^{j+1})$ que l'on relève en $\tilde{\Phi} : \tilde{X}^{n-1} \times [0, \infty[\to \tilde{X}^n$ avec $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, 0) = \tilde{x}$, $\tilde{\Phi}(\tilde{x}_0, t) = \tilde{\gamma}_0(t)$; on a $\tilde{\Phi}(g\tilde{x}, t) = g\tilde{\Phi}(\tilde{x}, t)$. L'application $\psi : X^{n-1} \times [0, \infty[\to \mathbf{R}$, définie par $\psi(x, t) = \tilde{f}\tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) - \tilde{f}(\tilde{x})$ si $x = \pi\tilde{x}$, est alors continue, tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$ uniformément sur X^{n-1} et est minorée, disons par c.

Faisons d'abord agir $\pi_1(X)$ sur $\pi_k \mathscr{M}_u(X)$, $k \geqslant 2$. Soit $g \in \pi_1(X)$ et soit $\Gamma : D^k \to \mathscr{M}_u(X)$ avec $\Gamma(S^{k-1}) = \gamma_0$. On choisit un chemin a de $\tilde{x}_0$ à $g\tilde{x}_0$ et une homotopie h_s de $a * g\tilde{\gamma}_0$ à $\tilde{\gamma}_0$ ($\mathscr{M}_u(X)$ est connexe) et l'on considère l'application $\Gamma_g : D^k \to \mathscr{M}_u(X)$ obtenue en considérant $g.\Gamma$ précédée du chemin a sur $(1/2)\, D^k$ et en disposant radialement l'homotopie h sur la couronne restante

$$\Gamma_g(z) = \begin{cases} a * (g.\Gamma(2z)) & \text{si } |z| \leqslant \frac{1}{2}, \\ h_{2|z|-1} & \text{si } |z| \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Comme $\mathscr{M}_u(X)$ est 1-connexe, la classe d'homotopie de Γ_g ne dépend pas des choix faits; on pose $g.[\Gamma] = [\Gamma_g] \in \pi_k \mathscr{M}_u(X)$.

Soit maintenant $\lambda \in \Lambda_u$ écrit sous la forme $\lambda = \Sigma m_i g_i$ avec $m_i = \pm 1$ et la suite $u(g_i)$ croissante, tendant vers $+\infty$.

Construisons d'abord un chemin $\gamma_\lambda \in \mathscr{M}_u(X)$ avec

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \tilde{\gamma}_\lambda(p) = g_p.\tilde{x}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{f}\tilde{\gamma}_\lambda(t) \geqslant u(g_p) \quad \text{si } t \geqslant p.$$

Pour cela, on va construire un chemin allant de $g_p\tilde{x}_0$ à $g_{p+1}\tilde{x}_0$ dans $\tilde{f}^{-1}[u(g_p), \infty[$: on part d'un chemin $c(s)$ quelconque dans $\tilde{X}^1$ de $g_p\tilde{x}_0$ à $g_{p+1}\tilde{x}_0$ avec $\tilde{f}c(s) \geqslant b$ pour tout $s \in [0, 1]$; on a donc

$$\tilde{f}\tilde{\Phi}(c(s), t) \geqslant u(g_p) \quad \text{pour } s = 0 \text{ ou } 1,$$

$$\tilde{f}\tilde{\Phi}(c(s), t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \text{uniformément en } s,$$

où $\Phi : X^1 \times [0, \infty[\to X^2$ est donné par l'hypothèse de connexité de $\mathscr{M}_u(X)$. On joint alors $g_p\tilde{x}_0$ à $g_{p+1}\tilde{x}_0$ par $\tilde{\Phi}(g_p\tilde{x}_0, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant N$, N grand) suivi d'une approximation à valeurs dans le 1-squelette de $\tilde{\Phi}(c(s), N)$ $(s \in [0, 1])$ et $\tilde{\Phi}(g_{p+1}\tilde{x}_0, N - t)$ $(t \in [0, N])$.

Considérons $\gamma'_p \in \mathscr{M}_u(X)$ où $\tilde{\gamma}'_p(t) = \tilde{\gamma}_\lambda(t)$ pour $t \leqslant p$ et $\tilde{\gamma}'_p(t) = g_p\tilde{\gamma}_0(t - p)$ pour $t \geqslant p$, et choisissons une homotopie h^p_s entre γ'_p et γ_λ qui soit fixe sur le segment $[0, p]$ et telle que $\tilde{f}\tilde{h}^p_s(t) \geqslant u(g_p) + c$ si $t \geqslant p$.

On choisit dans (1/2) $D^k = D'_0$ une suite de disques D^k_p disjoints et tendant vers un point z_∞, dans D_p un disque de rayon moitié D'_p, et un isomorphisme linéaire $v_p : D'_p \to D^k$ conservant l'orientation si $m_p = 1$, la renversant sinon.

Soit $\Gamma : D^k \to \mathscr{M}_u(X)$, constante égale à γ_0 sur le bord. Considérons $\Gamma_\lambda : D^k \to \mathscr{M}_u(X)$ définie de la façon suivante :

sur $\quad D'_0 - \bigcup_1^\infty D_p$, $\Gamma_\lambda(z) = \gamma_\lambda$

sur $\quad D'_p$, $\Gamma_\lambda(z)\ (t) = \begin{cases} \gamma_\lambda(t) & \text{si } t \leqslant p, \\ g_p . \Gamma(v_p(z))\ (t-p) & \text{si } t \geqslant p. \end{cases}$

Sur $D_p - D'_p$, pour $p \geqslant 0$, on dispose radialement l'homotopie h^p_s.

Vérifions la continuité de Γ_λ. Le seul problème est en z_∞ pour le contrôle à l'infini; soient A, a, tels que $\tilde{f}\,\tilde{\gamma}_\lambda(t) > A$ pour $t \geqslant a$. Posons $c_1 = \inf_{D^k \times [0,\infty[} \tilde{f}\,\tilde{\Gamma}(z)\ (t)$. Soit V un voisinage de z_∞ assez petit pour que $V \cap D_p \neq \emptyset$ implique $u(g_p) + \min(c, c_1) > A$. Soit $z \in V \cap D_p$;

si $t \geqslant p$, $\quad \tilde{f}\,\tilde{\Gamma}_\lambda(z)\ (t) = u(g_p) + \tilde{f}\,\tilde{\Gamma}(v_p(z))\ (t-p) \geqslant u(g_p) + c_1$ pour $z \in D'_p$,

$\qquad\qquad \geqslant u(g_p) + c$ pour $z \in D_p - D'_p$;

si $t \leqslant p$, $\quad \tilde{f}\,\tilde{\Gamma}_\lambda(z)\ (t) = \tilde{f}\,\tilde{\gamma}_\lambda(t)$.

Donc $\Gamma_\lambda(V) \subset W(a, A)$.

La classe d'homotopie de Γ_λ ne dépend pas des choix effectués car $\mathscr{M}_u(X)$ est 1-connexe; on la note $\lambda.[\Gamma]$. Il est clair que $h : \pi_{k+1}(X, u) \to H_{k+1}(X, u)$ est alors Λ_u-linéaire.

On a une construction analogue pour $\pi_p(X, X^j, u)$ $(p \geqslant 4, j \geqslant 3)$.

Théorème **5.3.** — *Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $\pi_p(X, u) = 0$ si $p < n$; alors $H_p(X, u) = 0$ pour $p < n$ et $h : \pi_n(X, u) \to H_n(X, u)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — A partir de $\Phi : X^{n-1} \times [0, \infty[\to X^n$ construit en 5.2, on construit, comme en 1.10, $H_p : C_p(X, u) \to C_{p+1}(X, u)$ pour $p < n$ avec $dH_p + H_{p-1}\,d = I$, donc $H_j(X, u) = 0$ pour $j < n$. Pour chaque n-cellule σ de X, on pose

$$E(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma} - H_{n-1}(d\tilde{\sigma}) \text{ (cellule élargie)};$$

c'est un cycle et les $E(\tilde{\sigma})$ engendrent $H_n(X, u)$ et sont visiblement dans l'image de h, donc $h : \pi_n(X, u) \to H_n(X, u)$ est surjective par Λ_u-linéarité. Pour démontrer l'injectivité, considérons $X^n \subset X^{n+1} \subset X$. Par position générale, $\pi_k(X^q, X^p, u) = 0$ si $k \leqslant p < q$ et $H_k(X^q, X^p, u) = 0$ si $k \leqslant p < q$.

1) Montrons que $h : \pi_n(X^n, u) \to H^!_n(X^n, u)$ est injective. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ les n-cellules de X. Soit $\tilde{\varphi} : \mathbf{R}^n \to \tilde{X}^n$ avec $\tilde{f}\,\tilde{\varphi}(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} +\infty$ dont la classe est dans le noyau de h; on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ est transverse aux centres des n-cellules. Comme $h(\varphi) = 0$

dans $H_n(X^n, u)$, $h(\varphi) = 0$ dans $H_n(X^n, X^{n-1}, u) = C_n(X, u)$. On peut donc grouper les contre-images des centres des n-cellules en deux suites a_p et $b_p \in \mathbf{R}^n$ avec $\tilde{\varphi}(a_p) = \tilde{\varphi}(b_p) =$ centre de $g_p \tilde{\sigma}_{j(p)}$, avec $u(g_p) \to \infty$, $|a_p| \to \infty$, $|b_p| \to \infty$ et $\tilde{\varphi}$ d'orientations opposées en a_p et b_p. Soit $R(t) = \sup\{|z| \mid z \in (\tilde{f}\tilde{\varphi})^{-1}(]-\infty, t])\}$; $\mathbf{R}^n - B(0, R(t))$ est contenu dans $(\tilde{f}\tilde{\varphi})^{-1}[t, \infty[$, $R(t)$ est croissante et $R(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$. Soit

$$M(t) = \sup\{\tilde{f}\tilde{\varphi}(z) \mid |z| \leqslant R(t)\};$$

$M(t)$ est croissante et $M(t) \to +\infty$. Comme $|a_p|$ et $|b_p| \to \infty$, choisissons une suite $m_p \to \infty$ avec $\min(\tilde{f}\tilde{\varphi}(a_p), \tilde{f}\tilde{\varphi}(b_p)) \geqslant M(m_p)$. Donc a_p et b_p sont dans

$$\mathbf{R}^n - B(0, R(m_p)) \subset (\tilde{f}\tilde{\varphi})^{-1}[m_p, \infty[$$

et sont donc joints par un arc λ_p avec, pour tout $s \in [0, 1]$, $R(m_p) \leqslant |\lambda_p(s)| \leqslant \max(|a_p|, |b_p|)$ et $\tilde{f}\tilde{\varphi}\lambda_p(s) \geqslant m_p$. Comme $n \geqslant 3$, on peut supposer les arcs λ_p disjoints.

Donc $\tilde{\varphi}(\lambda_p)$ est un lacet au centre de $g_p \tilde{\sigma}_{j(p)}$ qui évite les autres centres. On peut homotoper dans $\tilde{f}^{-1}[m_p - C_1, \infty[$, $\tilde{\varphi}\lambda_p$ en un lacet δ_p de $\tilde{X}^1 \cap \tilde{f}^{-1}[m_p - C_1, \infty[$, l'homotopie évitant les autres centres (C_1 dépend de la variation de $\tilde{f}$ sur les cellules de $\tilde{X}$). Il existe $H_p^0 : D^2 \to \tilde{X}^2$ tel que $H_p^0|_{S^1}$ soit égal à δ_p. Considérons $D^2 \times [0, \infty[\to \tilde{X}^3$, $(y, t) \mapsto \tilde{\Phi}(H_p^0(y), t)$; si $y \in S^1$, alors $\tilde{f}\tilde{\Phi}(H_p^0(y), t) \geqslant m_p - C_1 - C$ et $\tilde{f}\tilde{\Phi}(H_p^0(y), t)$ tend vers ∞ uniformément en $y \in D^2$. On regarde la restriction à $S^1 \times [0, N] \cup D^2 \times \{N\}$ pour N grand qu'on modifie un peu sur $D^2 \times \{N\}$ de sorte que l'on soit à valeurs dans $\tilde{X}^2$: on trouve $H_p^1 : D^2 \to \tilde{X}^2 \cap \tilde{f}^{-1}[m_p - C_1 - C, \infty[$ prolongeant δ_p; H_p^1 ne recoupe pas les centres des n-cellules (autre que $g_p \tilde{\sigma}_{j(p)}$) car $n \geqslant 3$ (c'est le point essentiel). En ajoutant l'homotopie initiale entre $\tilde{\varphi}\lambda_p$ et δ_p, on construit H_p étendant $\tilde{\varphi}\lambda_p$ qui a les mêmes propriétés.

Construisons alors une homotopie $\tilde{\varphi}_s$ entre $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}_1$ telle que $\tilde{\varphi}_1(\mathbf{R}^n)$ ne touche plus les centres des n-cellules. On choisit des petits disques $N_1(\lambda_p) \subset N_2(\lambda_p)$, voisinages de λ_p avec $N_2(\lambda_p) \cap N_2(\lambda_q) = \emptyset$ si $p \neq q$. Pour $s \in [0, 1/2]$, on modifie $\tilde{\varphi}$ sur $N_2(\lambda_p)$ grâce à l'homotopie H_p de sorte que $\tilde{\varphi}_{1/2}(N_1(\lambda_p))$ soit tout entier dans un petit voisinage V_p du centre de $g_p \tilde{\sigma}_{j(p)}$; l'application $\partial N_1(\lambda_p) \to V_p$-centre est alors de degré nul d'après le choix de a_p et b_p et, entre 1/2 et 1, on modifie $\tilde{\varphi}_{1/2}$ sur $N_1(\lambda_p)$ de sorte que $\tilde{\varphi}_1(N_1(\lambda_p))$ soit contenu dans V_p-centre. Nous avons $\tilde{\varphi}_s = \tilde{\varphi}_0$ hors des $N_2(\lambda_p)$ et, si $z \in N_2(\lambda_p)$, $\tilde{\varphi}_s(z) \in \tilde{f}[m_p - C - C_1, \infty[$; il est alors clair que $\tilde{f}\tilde{\varphi}_s(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty$ uniformément en $s \in [0, 1]$.

L'application $\tilde{\varphi}_1$ qui évite les centres des n-cellules est homotope à $\tilde{\varphi}_2$ à valeurs dans $\tilde{X}^{n-1}$ et la considération de $\Phi : X^{n-1} \times [0, \infty[\to X^n$ montre que $\varphi_2 = 0$ dans $\pi_n(X^n, u)$.

2) L'application $h : \pi_n(X^{n+1}, u) \to H_n(X^{n+1}, u)$ est injective.

Soit $\tilde{\sigma}$ une $(n+1)$-cellule de $\tilde{X}$ d'application caractéristique

$$\chi : (D^{n+1}, S^n) \to (\tilde{X}^{n+1}, \tilde{X}^n).$$

Soit $\mu : (D_+^{n+1}, D^n) \to (D^{n+1}, S^n)$ qui écrase S_+^n au pôle nord a de S^n et est un homéomorphisme de $(D_+^{n+1} - S_+^n, D^n - S^{n-1})$ sur $(D^n - \{a\}, S^n - \{a\})$. Soit $\tilde{\gamma}$ un chemin de $\tilde{X}^n$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \chi(a)$ et $\tilde{f}\tilde{\gamma}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$.

Soit $\varphi : (\mathbf{R}_+^{n+1}, \mathbf{R}^n) \to (\tilde{X}^{n+1}, \tilde{X}^n)$ défini par

$$\varphi(z) = \chi\mu(z) \quad \text{si } |z| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \tilde{\gamma}(|z| - 1) \quad \text{si } |z| \geqslant 1.$$

Il est clair que l'image par h de φ est $\tilde{\sigma} \in H_{n+1}(X^{n+1}, X^n, u)$. Comme

$$H_n(X^{n+1}, X^n, u) = C_{n+1}(X, u)$$

admet pour base les $(n+1)$-cellules, cela montre par Λ_u-linéarité que

$$h : \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, u) \to H_n(X^{n+1}, X^n, u)$$

est surjective. Or le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, u) & \longrightarrow & \pi_n(X^n, u) & \longrightarrow & \pi_n(X^{n+1}, u) & \longrightarrow & \pi_n(X^{n+1}, X^n, u) = 0 \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n, u) & \longrightarrow & H_n(X^n, u) & \longrightarrow & H_n(X^{n+1}, u) & \longrightarrow & H_n(X^{n+1}, X^n, u) = 0,
\end{array}$$

où les lignes sont exactes, montre que $h : \pi_n(X^{n+1}, u) \to H_n(X^{n+1}, u)$ est injective.

Comme $\pi_n(X^{n+1}, u) \to \pi_n(X, u)$ et $H_n(X^{n+1}, u) \to H_n(X, u)$ sont des isomorphismes, $h : \pi_n(X, u) \to H_n(X, u)$ est injective.

5.4. En plus du revêtement universel $\tilde{X}$, nous considérons le revêtement $\hat{X} \to X$ dont le π_1 est $\ker u$; $\hat{X} \to X$ est un revêtement galoisien de groupe $u(G) \simeq \mathbf{Z}^k$ abélien. La fonction $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbf{R}$ descend en une fonction $\hat{f} : \hat{X} \to \mathbf{R}$ avec $\hat{f}(g\hat{x}) = u(g) + \hat{f}(\hat{x})$.

Lemme **5.4.** — *Il existe a_0 tel que pour tout t deux points de $\hat{f}^{-1}[t, \infty[$ sont joints par un chemin dans $\hat{f}^{-1}[t - a_0, \infty[$.*

Démonstration. — Soient $g_1, \ldots, g_n$ des éléments de G tels que tout $g \in G$ s'écrive $g_{\ell_1} g_{\ell_2} \ldots g_{\ell_p}$; soit $\tilde{x}_0$ le point base de $\tilde{X}$ avec $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = 0$. Il existe A tel que pour tout $i \in [1, n]$ on puisse joindre $\tilde{x}_0$ et $g_i \tilde{x}_0$ par un chemin dans $\tilde{f}^{-1}[-A, \infty[$. Soient x_1 et x_2 deux translatés du point base de $\hat{X}$ avec $\hat{f}(x_1) \leqslant \hat{f}(x_2)$. Vu l'abélianité du revêtement $\hat{X}$, on peut écrire $x_2 = g_{i_1} \ldots g_{i_\ell} x_1$, avec $\sum_{j=k}^{\ell} u(g_{i_j}) \geqslant 0$ pour tout $k \in [1, \ell]$. Il est alors clair qu'on peut joindre x_1 à x_2 par un chemin dans $\hat{f}^{-1}[\hat{f}(x_1) - A, \infty[$. Soit B un majorant de la variation de $\hat{f}$ sur les relevés des cellules de X au nombre de N. On peut relier $x \in \hat{X}$ à un translaté du point base dans $\hat{f}^{-1}[\hat{f}(x) - NB, \infty[$. On pose $a_0 = A + NB$.

5.5. *Corollaire-définition.* — *L'ensemble $\hat{f}^{-1}[t, \infty[$ n'a qu'une composante connexe par arcs sur laquelle $\hat{f}$ est non bornée; on la note $\hat{X}_t$. Les autres composantes connexes par arcs de $\hat{f}^{-1}[t, \infty[$ sont contenues dans $\hat{f}^{-1}[t, t + a_0[$, et l'on a $\hat{f}^{-1}[t + a_0, \infty[\subset \hat{X}_t \subset \hat{f}^{-1}[t, \infty[$.*

5.6. On dit que deux suites projectives de groupes (F_i, f_i) et (G_j, g_j) sont pro-isomorphes s'il existe des suites $i_p \to \infty$, $j_p \to \infty$, des morphismes $a_p : F_{i_p} \to G_{j_p}$ et $b_p : G_{j_{p+1}} \to F_{i_p}$ et des éléments $\alpha_p \in F_{i_p}$, $\beta_p \in G_{j_p}$ tels que, si $f'_p : F_{i_{p+1}} \to F_{i_p}$ est la composée des flèches f_i et de même pour $g'_p : G_{j_{p+1}} \to G_{j_p}$, on ait

$$\forall\, x \in F_{i_{p+1}}, \qquad b_p\, a_{p+1}(x) = \alpha_p^{-1} f'_p(x)\, \alpha_p,$$

$$\forall\, y \in G_{j_{p+1}}, \qquad a_p\, b_p(y) = \beta_p^{-1} g'_p(y)\, \beta_p.$$

On dit que la suite (F_n, f_n) est semistable (resp. stable) si elle est pro-isomorphe à une suite de surjections (resp. d'isomorphismes).

Lemme **5.6.** — *La suite (F_i, f_i) est semistable (resp. stable) si et seulement s'il existe une suite $i_p \to \infty$ telle que les restrictions $f'_p\,|_{\mathrm{Im}\, f'_{p+1}} : \mathrm{Im} f'_{p+1} \to \mathrm{Im} f'_p$ sont des surjections (resp. des isomorphismes).*

Preuve. — Si (F_i, f_i) est pro-isomorphe à (G_j, g_j), où avec les notations précédentes g'_p est surjectif pour tout p, alors $a_p : F_{i_p} \to G_{j_p}$ est aussi surjective et il existe $\gamma_p \in F_{i_{p+1}}$ tel que

$$\forall\, y \in F_{i_{p+1}}, \qquad a_p f'_p(y) = g'_p\, a_{p+1}(\gamma_p^{-1} y \gamma_p).$$

Si $x \in \mathrm{Im} f'_p$, il existe $x_1 \in F_{i_{p+1}}$ avec $x = f'_p\, x_1 = \alpha_p(b_p\, a_{p+1}\, x_1)\, \alpha_p^{-1}$, et il existe

$$x_2 \in F_{i_{p+2}} \quad \text{avec } a_{p+1}\, x_1 = g'_{p+1}\, a_{p+2}\, x_2 = a_{p+1} f'_{p+1}(\gamma_{p+1}\, x_2\, \gamma_{p+1}^{-1})$$

$$\text{et } x = f'_p f'_{p+1}(\gamma_{p+1}\, x_2\, \gamma_{p+1}^{-1}).$$

Le reste est évident.

5.7. Si $t_p \to \infty$ est une suite croissante, si on choisit un point base $a_p \in \hat{X}_{t_p}$ et un chemin γ_p de a_p à a_{p+1} dans $\hat{X}_{t_p}$, on obtient $f_p : \pi_1(\hat{X}_{t_{p+1}}, a_{p+1}) \to \pi_1(\hat{X}_{t_p}, a_p)$. Si t'_p, a'_p, γ'_p est un autre choix, il est clair que les suites projectives $(\pi_1(\hat{X}_{t_p}, a_p), f_p)$ et $(\pi_1(\hat{X}_{t'_p}, a'_p), f'_p)$ sont pro-isomorphes. Par le système projectif $(\pi_1 \hat{X}_t)$, on entend la classe de pro-isomorphisme de toutes ces suites projectives.

Lemme **5.7.** — *Le système projectif $(\pi_1 \hat{X}_t)$ ne dépend que de* G *et de $u : G \to \mathbf{R}$.*

Démonstration.

1) *Dépendance par rapport au choix de $\hat{f} : \hat{X} \to \mathbf{R}$.* Si $\hat{f}_1 : \hat{X} \to \mathbf{R}$ est un autre choix donnant le système $\pi_1 \hat{X}^1_t$, alors $\hat{f}_1 - \hat{f}$ vient de la base et est donc bornée par c; les inclusions $\hat{X}_t \hookrightarrow \hat{X}^1_{t-c}$ et $\hat{X}^1_t \hookrightarrow \hat{X}_{t-c}$ donnent un pro-isomorphisme entre les deux systèmes.

2) S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y préservant l'identification des π_1 avec G, alors les systèmes $\pi_1 \hat{X}_t$ et $\pi_1 \hat{Y}_t$ sont pro-isomorphes.

Soient $h : X \to Y$ et $h' : Y \to X$ avec $hh' \sim i_Y$ et $h'\, h \sim 1_X$. Soit $\hat{h} : \hat{X} \to \hat{Y}$; on a $\hat{h}(gx) = g\hat{h}(x)$ d'après l'hypothèse. On choisit $\hat{f}_Y : \hat{Y} \to \mathbf{R}$, et l'on pose $\hat{f}_X = \hat{f}_Y \circ \hat{h}$. Soit

H_s une homotopie entre hh' et 1_Y et K_s une homotopie entre $h'h$ et 1_X, et soit a tel que $\hat{f}_Y \hat{H}_s(y) - \hat{f}_Y(y) \geqslant a$ pour $y \in \hat{Y}$, et $\hat{f}_X \hat{K}_s(x) - \hat{f}_X(x) \geqslant a$ pour $x \in \hat{X}$; on a $\hat{h} : \hat{X}_t \to \hat{Y}_t$ et $\hat{h}' : \hat{Y}_{t'} \to \hat{X}_{t'-a}$ et les composées $\hat{X}_t \to \hat{X}_{t-a}$, $\hat{Y}_t \to \hat{Y}_{t-a}$ sont homotopes aux inclusions, d'où le résultat.

3) Si $Y = X \vee S^2$, le résultat est vrai car $\hat{Y} = \hat{X} \vee S^2_\lambda$ $(\lambda \in u(G))$ et l'on prend $\hat{f}_Y$ constante sur les sphères S^2_λ, donc $\hat{Y}_t = \hat{X}_t \vee S^2_\lambda$ $(\lambda \leqslant t)$.

4) Si X est simplicial, $Y = X \cup \sigma$, où σ est un simplexe de dimension $\geqslant 3$; le résultat est vrai car, si $\hat{f}_Y$ est linéaire sur chaque simplexe, $(\hat{\sigma} \cap \hat{f}_Y^{-1}[t, \infty[, \partial\hat{\sigma} \cap \hat{f}_Y^{-1}[t, \infty[)$ est 2-connexe et $\pi_1 \hat{Y}_t = \pi_1 X_t$.

5) Reste à montrer le résultat si X et Y sont deux complexes de dimension 2. On se limite à des complexes de dimension 2 n'ayant qu'un seul sommet et dont le π_1 est identifié à G; un tel complexe donne une présentation de G avec un générateur pour chaque 1-cellule et une relation pour chaque 2-cellule. Réciproquement, une présentation finie de G donne une classe d'homotopie simple de tels complexes. Soient X^2 et Y^2 donnant les présentations $\langle x_1, \ldots, x_n; r_1, \ldots, r_p \rangle$ et $\langle y_1, \ldots, y_m; s_1, \ldots, s_q \rangle$ de G; il existe des mots $Y_1, \ldots, Y_m$ en les lettres $x_i, X_1, \ldots, X_n$ en les lettres y_j tels que dans G on ait $x_i = X_i(y)$ et $y_j = Y_j(x)$. Soit Z associé à

$$\langle x, y; r, s, y_j = Y_j(x), x_i = X_i(y) \rangle$$

et soit X_1 associé à $\langle x, y; r, y_j = Y_j(x) \rangle$; il est clair que X_1 a même type simple que X et les 2-cellules collées à X_1 pour obtenir Z ont des applications d'attache homotopes à zéro dans X_1, donc Z a le type d'homotopie simple d'un bouquet de X_1 et de $n + q$ sphères S^2, donc de X et de $n + q$ sphères S^2. Pour la même raison, Z a le type d'homotopie simple d'un bouquet de Y et de $m + r$ sphères S^2, d'où le résultat d'après 2) et 3).

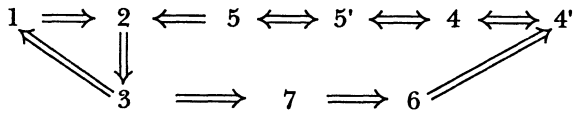
Proposition **5.8.** — *Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre*

1) *le système projectif* $\pi_1 \hat{X}_t$ *est semistable*;
2) *il existe* $t_0 < t_1 < t_2$ *et* $g_0 \in G$ *avec* $0 < u(g_0) \leqslant t_2 - t_1$ *et* $\pi_1 \hat{X}_{t_1}$ *et* $\pi_1 \hat{X}_{t_2}$ *ont même image dans* $\pi_1 \hat{X}_{t_0}$;
3) *il existe* a_1 *tel que pour* $t \leqslant t'$, $\pi_1 \hat{X}_t$ *et* $\pi_1 \hat{X}_{t'}$ *ont même image dans* $\pi_1 \hat{X}_{t-a_1}$;
4) *il existe* t_0 *avec* $\pi_1 X_{t_0} \to \pi_1 \hat{X}$ *surjectif*;
4') *il existe* t_0 *tel que* $\tilde{X}_t$, *partie de* $\tilde{X}$ *au-dessus de* $\hat{X}_t$, *est connexe par arcs*;
5) *pour tout* t, $\pi_1 X_t \to \pi_1 \hat{X}$ *est surjectif*;
5') *pour tout* t, $\tilde{X}_t$ *est connexe par arcs*;
6) $H_1(X, u) = 0$;
7) $\mathcal{M}_u(X)$ *est connexe par arcs.*

Remarques. — 1) Dans 2), l'existence de g_0 est évidente si u est irrationnelle.

2) Cette proposition, privée de 2), 3) et 7), se trouve dans [14] dans le cas où X est une variété.

Démonstration. — On va suivre le schéma suivant :



$1 \Rightarrow 2$. Si (t'_p) est une suite croissante telle que $\pi_1 \hat{X}_{t'_{p+2}}$ et $\pi_1 \hat{X}_{t'_{p+1}}$ ont même image dans $\pi_1 \hat{X}_{t'_p}$, on prend $t_0 = t'_0$, $t_1 = t'_1$ et $t_2 = t'_p$ avec p assez grand pour qu'il existe $g_0 \in G$ avec $0 < u(g_0) \leqslant t_2 - t_1$.

$2 \Rightarrow 3$. Remarquons que $\pi_1 \hat{X}_{t_1+u(g_0)}$ et $\pi_1 \hat{X}_{t_1}$ ont même image dans $\pi_1 \hat{X}_{t_0}$ puisque $t_1 + u(g_0) \leqslant t_2$; par récurrence on montre que $\pi_1 \hat{X}_{t_1+ku(g_0)}$ et $\pi_1 \hat{X}_{t_1}$ ont même image dans $\pi_1 \hat{X}_{t_0}$, donc que, pour tout $g \in G$, $\pi_1 \hat{X}_{t_1+u(g)+ku(g_0)}$ et $\pi_1 \hat{X}_{t_1+u(g)}$ ont même image dans $\pi_1 \hat{X}_{t_0+u(g)}$. Choisissons $a_1 > t_1 - t_0$ si u est irrationnelle et $a_1 > t_1 - t_0 + \gamma$ si $u(G) = \gamma \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ avec $\gamma > 0$. Si $t \in \mathbf{R}$, on peut trouver $g \in G$ avec $t - a_1 \leqslant t_0 + u(g) < t_1 + u(g) \leqslant t$ et, si $t' \geqslant t$, il existe k avec $t' \leqslant t_1 + u(g) + ku(g_0)$, donc $\pi_1 \hat{X}_t$ et $\pi_1 \hat{X}_{t'}$ ont même image dans $\pi_1 \hat{X}_{t_0+u(g)}$, donc aussi dans $\pi_1 \hat{X}_{t-a_1}$.

$3 \Rightarrow 1$. La suite $\pi_1 \hat{X}_{ka_1}$ montre la semistabilité.

$4 \Leftrightarrow 4'$ et $5 \Leftrightarrow 5'$. C'est la théorie des revêtements (la locale connexité par arcs n'est pas nécessaire).

$5 \Rightarrow 4$ est évident.

$4 \Rightarrow 5$, car pour tout t, il existe $g \in G$ avec $\hat{X}_{t_0} \subset g\hat{X}_t$.

$5 \Rightarrow 2$. Il suffit de faire la démonstration lorsque X n'a qu'un sommet; on numérote et oriente les 1-cellules en $c_1, \ldots, c_k$ de sorte que, si $g_i \in G$ correspond à c_i, on ait $u(g_1) > 0$, $u(g_2) \geqslant 0, \ldots, u(g_k) \geqslant 0$. On relève c_i en $\hat{c}_i$ entre $\hat{x}_0$ et $g_i \hat{x}_0$; grâce à $\hat{c}_1$ et ses itérés, on joint $\hat{x}_0$ à ∞ dans $\hat{X}_0$ par un chemin appelé γ. Pour chaque i, on joint deux points assez éloignés de γ et de $\hat{c}_i * g_i \gamma$ par un chemin dans $\hat{X}_{u(g_1)}$, et l'on obtient ainsi des éléments γ_i de $\pi_1 \hat{X}_0$. Il est clair que $\pi_1 \hat{X}_0$ est engendré par $\pi_1 \hat{X}_{u(g_1)}$ et les translatés $g\gamma_i$ avec $0 \leqslant u(g) \leqslant u(g_1)$.

Or comme $\pi_1 \hat{X}_{u(g_1)} \to \pi_1 \hat{X}$ est surjectif, les γ_i sont homotopes dans $\hat{X}$ à des lacets de $\hat{X}_{u(g_1)}$, l'homotopie ayant lieu dans $\hat{f}^{-1}[-c, \infty[$ pour un certain c, donc dans $\hat{X}_{-c-a_0}$ (a_0 donné par 5.4), et on a la même propriété pour $g\gamma_i$ si $u(g) \geqslant 0$, d'où 2) avec $t_0 = -c - a_0$, $t_1 = 0$, $t_2 = u(g_1)$.

$3 \Rightarrow 7$. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \hat{X}$ avec $\hat{f}\varphi(s) \xrightarrow[|s| \to \infty]{} + \infty$ et $\varphi(\mathbf{R}) \subset \hat{X}_{t_0}$. Soit $s_n \nearrow + \infty$ telle que $\varphi(\mathbf{R} - [-s_n, s_n]) \subset \hat{X}_{t_0+n}$. D'après 3), $\varphi|_{[-s_1, s_1]}$ est homotope rel ∂ à un arc γ_1 de $\hat{X}_{t_0+1}$ par une homotopie à valeurs dans $\hat{X}_{t_0-a_1}$, homotopie que l'on dispose sur le demi-disque $D_+(s_1)$. Le chemin $\varphi|_{[-s_2, -s_1]}$ suivi de γ_1 suivi de $\varphi|_{[s_1, s_2]}$ est à valeurs dans $\hat{X}_{t_0+1}$ et est homotope rel ∂ à un chemin γ_2 de $\hat{X}_{t_0+2}$ par une homotopie H_2 à valeurs dans $\hat{X}_{t_0-a_1+1}$, homotopie que l'on dispose sur $D_+(s_2) - \mathring{D}_+(s_1)$. En continuant ainsi, on construit $\Phi : \mathbf{R}^2_+ \to \hat{X}$ étendant φ, avec $\hat{f}\Phi(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} + \infty$.

$7 \Rightarrow 6$ est déjà établi.

$6 \Rightarrow 4'$. Soient x et $x' \in \tilde{X}_0$ qu'on joint à ∞ dans $\tilde{X}_0$ par des arcs γ et γ' et entre eux par un arc γ_0 à valeurs dans $\tilde{X}$. Comme $H_1(X, u) = 0$, $\Omega_1(X, u) = 0$ et donc $\bar{\gamma} * \gamma_0 * \gamma' : \mathbf{R} \to \tilde{X}$ borde $\psi : Y^2 \to \tilde{X}$. Si t_0 est une valeur régulière assez grande de $w : Y^2 \to \mathbf{R}$, petite déformation lisse de $f\psi$, alors $w^{-1}(t_0)$ contient un arc joignant un point de γ à un point de γ' dans $\tilde{X}_0$ et on relie x à x' dans $\tilde{X}_0$.

Proposition **5.9.** — *Il y a équivalence entre*

1) *le système* $\pi_1 \hat{X}_t$ *est stable*;
2) *le système* $\pi_1 \hat{X}_t$ *est semistable et il existe* $s_0 < s_1 < s_2$ *et* $g_1 \in G$, $0 < 2u(g_1) < s_1 - s_0$ *tels que*

$$\ker(\pi_1 \hat{X}_{s_2} \to \pi_1 \hat{X}_{s_0}) \subset \ker(\pi_1 \hat{X}_{s_2} \to \pi_1 \hat{X}_{s_1});$$

3) *le système* $\pi_1 \hat{X}_t$ *est semistable et il existe* a_2 *tel que*

$$\forall\, s \in \mathbf{R}, \qquad \ker(\pi_1 \hat{X}_s \to \pi_1 \hat{X}) \subset \ker(\pi_1 \hat{X}_s \to \pi_1 \hat{X}_{s-a_2}).$$

Preuve. — L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente.

$2 \Rightarrow 3$. Remarquons que si $s_1 + (k-1)\, u(g_1) \geqslant s_2$, un élément y de $\pi_1 \hat{X}_{s_1 + (k-1)u(g_1)}$ qui s'annule dans $\pi_1 \hat{X}_{s_1 - 2u(g_1)}$, donc dans $\pi_1 \hat{X}_{s_0}$, s'annule déjà dans $\pi_1 \hat{X}_{s_1}$; donc par action du groupe de revêtement, si $y \in \pi_1 \hat{X}_{s_1 + (k+\ell)u(g_1)}$ devient nul dans $\pi_1 \hat{X}_{s_1 + (\ell-1)u(g_1)}$, il l'est déjà dans $\pi_1 \hat{X}_{s_1 + (\ell+1)u(g_1)}$.

Si $s' - s \geqslant ku(g_1)$, on choisit ℓ avec $s_1 + \ell u(g_1) \leqslant s < s_1 + (\ell+1)\, u(g_1)$; on a $s_1 + (k+\ell)\, u(g_1) \leqslant s'$, donc si $z \in \pi_1 \hat{X}_{s'}$ donne 0 dans $\pi_1 \hat{X}_{s - u(g_1)}$, il donne déjà 0 dans $\pi_1 \hat{X}_s$.

Si $x \in \ker(\pi_1 \hat{X}_{s'} \to \pi_1 \hat{X})$, il existe c_x avec la propriété que

$$x \in \ker(\pi_1 \hat{X}_{s'} \to \pi_1 \hat{X}_{s' - c_x});$$

il résulte de ce qui précède qu'on peut choisir $c_x = ku(g_1)$. Donc 3) est vérifié avec $a_2 = ku(g_1)$.

$3 \Rightarrow 1$. On choisit $t_0 < t_1 < \ldots$ avec $t_{n+1} - t_n = \max(a_1, a_2)$, où a_1 provient de 5.8. Soit $\mathrm{Im}_i = \mathrm{Im}(\pi_1 \hat{X}_{t_{i+1}} \to \pi_1 \hat{X}_{t_i})$.

Comme $\quad t_{i+1} - t_i \geqslant a_1$, $\mathrm{Im}_{i+1} \to \mathrm{Im}_i$ est surjective;

comme $\quad t_{i+2} - t_{i+1} \geqslant a_2$, $\mathrm{Im}_{i+1} \to \mathrm{Im}_i$ est injective.

Comme le système projectif $\pi_1 \hat{X}_t$ ne dépend que de G et de $u : G \to \mathbf{R}$, on dira que u est semistable (resp. stable) pour exprimer que le système $(\pi_1 \hat{X}_t)$ est semistable (resp. stable).

Théorème **5.10.** — *Si* u *est stable, alors* $h : \pi_2(X, u) \to H_2(X, u)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme u est stable, il est semistable, donc $\mathcal{M}_u(X)$ est connexe. En utilisant $\Phi : X^1 \times [0, \infty[\to X^2$ de 5.2, on construit des 2-cellules élargies $E\tilde{\sigma} \in Z_2(X, u)$

dont les classes engendrent $H_2(X, u)$ sur Λ_u et qui sont dans l'image de h. Soit $\lambda \in \Lambda_u$. La construction de 5.2 peut s'effectuer (on n'a utilisé que la connexité de $\mathcal{M}_u(X)$); l'élément de $\pi_2(X, u)$ dépend des choix faits, mais son image par h est $\lambda.E\tilde{\sigma}$, donc $h : \pi_2(X, u) \to H_2(X, u)$ est surjective.

Si $h : Y \to X$ est 3-connexe, X a même type d'homotopie qu'un complexe obtenu à partir de Y en ajoutant des cellules de dimension $\geqslant 4$ et les applications induites $\pi_2(Y, u) \to \pi_2(X, u)$ et $H_2(Y, u) \to H_2(X, u)$ sont des isomorphismes. Donc, pour démontrer le théorème, on peut se limiter au cas d'une variété M de grande dimension (obtenue par chirurgie à partir de la donnée de chirurgie triviale S^n, fibré trivial sur X, trivialisation stable canonique de τ_{S^n}).

Pour retrouver la situation du § 4, nous changeons u en $-u$. Supposons $-u$ stable, on veut montrer que

$$h : \pi_2(M, -u) \to H_2(M, -u) \text{ est injective.}$$

Nous commençons par quelques lemmes.

Comme $\mathcal{M}_{-u}$ est connexe, nous considérons toujours α de Morse sans point critique d'indice 0, 1, n et un pseudo-gradient ξ générique pour α.

Définition **5.11.** — On appelle équipement de taille L pour (α, ξ) la donnée pour chaque point critique c d'indice 2 d'un disque Δ_c de bord $S_-(c)$ plongé dans la feuille de $S_-(c)$ et tels que

$$\Delta_c \cap W^u(d, L) = \emptyset \quad \text{pour tout point critique } d.$$

Si $I(d) > 2$, $\Delta_c \cap W^u(d, L) = \emptyset$ par généricité, donc la condition ne porte que sur les points critiques d d'indice 2.

Lemme **5.12.** — *Soient* M *de dimension* $\geqslant 6$, (α, ξ) *génériques et* L *donné. Si* $-u$ *est stable ou si* $\mathcal{M}_{-u}$ *est* 1*-connexe, après avoir modifié* α *en* α' *en faisant monter des points critiques d'indice* $n-1$ *et* $n-2$, *il existe un équipement de taille* L *pour* (α', ξ).

Démonstration. — Soient $\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k \in \hat{M}$ des relevés des points critiques d'indice 2. Si $-u$ est stable, on pose $L_1 = L + \varepsilon + a_2$ où a_2 est donné par la stabilité (5.9) et $t_i = \hat{f}(\hat{c}_i)$; $\partial W^s(\hat{c}_i, L_1) \subset \hat{M}_{t_i - L_1}$ nulle homotope dans $\hat{M}$ borde un disque $\hat{D}_i$ dans $\hat{f}^{-1}[t_i - L_i', t_i - L - \varepsilon]$ pour un certain L_i'. Soit $L' = \mathrm{Max}(L_i')$, on peut supposer les $\hat{D}_i$ génériques par rapport à ξ (si $D_i = \pi \hat{D}_i$, D_i est transversal à ξ, aucune trajectoire de ξ passant par un D_i ne recoupe un D_j avant la longueur L', $D_i \cap W^u(d, L') = \emptyset$ si $I(d) \geqslant 3$, $D_i \cap W^s(d, L') = \emptyset$ si $I(d) \leqslant n-3$); après avoir fait monter de L' des points critiques d'indice $n-1$ et $n-2$, on fait remonter les D_i par les trajectoires de ξ dans le niveau de $S_-(c_i)$ pour obtenir les Δ_{c_i}.

Si $\mathcal{M}_{-u}$ est 1-connexe, on fait le même raisonnement en tronquant assez loin $\Phi_i : \mathbf{R}^3_+ \to \tilde{M}$ réalisant l'homotopie à zéro de $W^s(c_i)$.

Lemme **5.13.** — *Si* (α, ξ) *possède un équipement de taille* L, *alors pour toute surface compacte* Y *et tout* $h : (Y, \partial Y) \to (\tilde{f}^{-1}([t, \infty[), \tilde{f}^{-1}(t))$, *il existe* $h' : Y \to \tilde{f}^{-1}(t)$ *égale à* h *sur le bord (en général* h' *n'est pas homotope à* h rel ∂Y*).*

Preuve. — Nous allons montrer que si $h : (Y, \partial Y) \to (\tilde{f}^{-1}([t, t + kL]), \tilde{f}^{-1}(t))$, il existe h' égale à h sur ∂Y avec $h'(Y) \subset \tilde{f}^{-1}([t, t + (k - 1)\, L])$. On déforme h de sorte que $\pi h(Y) \cap W^u(d, L) = \emptyset$ si $I(d) \geqslant 3$ et πh coupe transversalement les $W^u(c, L)$ en un nombre fini de points si $I(c) = 2$. On essaie de baisser h sur

$$Y_1 = h^{-1}(\tilde{f}^{-1}([t + (k - 1)\, L, t + kL]))$$

grâce aux trajectoires de $-\xi$. S'il y a une liaison de c d'indice 2 à $h(Y_1)$ de longueur $\leqslant L$ lors de la descente, Y se perce, mais on rebouche le trou grâce à Δ_c et ce remplacement ne créera plus de problème vu la taille de l'équipement.

Lemme **5.14.** — *Si* (α, ξ) *a un équipement de taille* L, *alors, pour tout* t,

$$\pi_1 \hat{f}^{-1}(]-\infty, t]) \to \pi_1 \hat{M}$$

est un isomorphisme ou encore $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$ *est simplement connexe.*

Preuve. — Soit $S^1 \hookrightarrow \tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$ qui borde $D^2 \hookrightarrow \tilde{M}$ qu'on suppose transverse à $\tilde{f}^{-1}(t)$; soit $Y = D^2 \cap \tilde{f}^{-1}([t, \infty[)$ et on applique 5.13 pour construire $D^2 \hookrightarrow \tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$ bordant $S^1 \hookrightarrow \tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$.

Si $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, t]$ est 1-connexe pour tout t, $-u$ est stable, on a donc

Corollaire **5.15.** — *Si* $\mathcal{M}_{-u}$ 1-*connexe*, $-u$ *est stable.*

Corollaire **5.16.** — *Soit* M *de dimension* $\geqslant 6$ *et* $u : \pi_1 M \to \mathbf{R}$. *Il y a équivalence entre*

1) $-u$ *est stable* ;
2) *il existe* α, 1-*forme de Morse dans la classe* u *sans point critique d'indice* 0, 1, n, ξ *pseudo-gradient générique pour* α *et un équipement de taille* L *pour* (α, ξ) ;
3) *il existe* α, 1-*forme de Morse dans la classe* u *avec tous les* $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$ *simplement connexes.*

Corollaire **5.17.** — *Soit* G *un groupe de présentation finie* ; *l'ensemble des* $u \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ *stables forment un ouvert de* $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$.

Démonstration. — Nous allons montrer que l'ensemble des u tels que $-u$ est stable est un ouvert. Soit u avec $-u$ stable ; on choisit M de dim $\geqslant 6$, (α, ξ) génériques où α n'a pas de point critique d'indice 0, 1, n et un équipement $\{\Delta_{c_i}\}$ de taille L pour (α, ξ). Soit Ω un petit voisinage de la réunion des voisinages de Morse et des Δ_{c_i}. Comme $H^1_c(M - \Omega) \to H^1(M)$ est surjective, si u' est assez proche de u, on peut trouver α' dans la classe u' égale à α sur Ω et telle que ξ est pseudo-gradient générique pour α'. Les Δ_{c_i} forment alors un équipement de taille L pour (α', ξ) et $-u'$ est stable.

Lemme **5.18.** — *Soient* M *de dimension* $\geqslant 6$ *et* $u : \pi_1 M \to \mathbf{R}$. *On suppose* $\mathscr{M}_u$ 1-*connexe. Soient* α *une* 1-*forme de Morse dans la classe* u *sans point critique d'indice* 0, 1, $n-1$, n, *et* ξ *un pseudo-gradient générique pour* α. *On suppose que* (α, ξ) *a un équipement de taille* L. *Alors, pour tout* t, $\tilde{f}^{-1}(t)$ *est simplement connexe.*

Corollaire **5.19.** — *Dans cette situation, si l'on fait monter des points critiques d'indice* $n-2$, *les niveaux restent* 1-*connexes.*

Démonstration de **5.18.** — Soit $C \subset \tilde{f}^{-1}(t)$ qui borde $D^2 \hookrightarrow \tilde{M}$; D^2 et les trajectoires de ξ partant de C donnent $g : \mathbf{R}^2 \to \tilde{M}$ avec $\tilde{f}g(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty$. Comme $\pi_2(M, u) = 0$, on trouve $G : \mathbf{R}^3_+ \to \tilde{M}$ avec $\tilde{f}G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty$ étendant g et, en se restreignant au bord d'une grande demi-boule centrée en 0 dans $\mathbf{R}^3_+$, on construit

$$h : (B^2, C) \to (\tilde{f}^{-1}([t, +\infty[), \tilde{f}^{-1}(t)).$$

Le lemme 5.13 donne alors un disque bordant C dans $\tilde{f}^{-1}(t)$.

Proposition **5.20.** — *Soit* M *de dimension* $\geqslant 5$ *et* $u : \pi_1(M) \to \mathbf{R}$; *il y a équivalence entre*

1) u *et* $-u$ *sont stables*;
2) *il existe* α *de Morse dans la classe* u *avec* $\tilde{f}^{-1}(t)$ *simplement connexe pour tout* t.

Démonstration. — L'implication 2 $\Rightarrow$ 1 est évidente : $\tilde{f}^{-1}]-\infty, t]$ et $\tilde{f}^{-1}[t, \infty[$ sont 1-connexes, sans que l'on puisse utiliser Van Kampen. Si C est un cercle générique de $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$, il borde un disque D dans $\tilde{M}$ disjoint des points critiques, qu'on peut supposer transverse à $\tilde{f}^{-1}(t)$, et un cercle de $\tilde{f}^{-1}(t) \cap D$ minimal sur D s'élimine grâce à la simple connexité de $\tilde{f}^{-1}(t)$.

1 $\Rightarrow$ 2. On va montrer plus précisément que si u et $-u$ sont stables et si (α_0, ξ) est générique, où α_0 n'a pas de point critique d'indice 0, 1, $n-1$, n, il existe α obtenue à partir de α_0 en faisant monter des points d'indice $n-2$ et descendre des points d'indice 2 $(2 < n-2)$, telle que ξ soit pseudo-gradient générique pour α, les $\tilde{f}^{-1}(t)$ étant tous 1-connexes.

Cela donne 1 $\Rightarrow$ 2 car alors $\mathscr{M}_u$ et $\mathscr{M}_{-u}$ sont connexes et, comme dim $\geqslant 5$, on peut trouver (α_0, ξ).

Comme $-u$ est stable, après avoir fait monter des points d'indice $n-2$, on construit un équipement (immergé si dim M = 5) de taille L pour les points critiques d'indice 2. Pour construire alors un équipement de taille L pour les points critiques d'indice $n-2$, on est amené à faire descendre certains points d'indice 2 de L', ce qui risque de détruire l'équipement de ces points. En fait, on va faire descendre simultanément tous les points d'indice 2 de L' et l'équipement de taille L des points d'indice 2 se conserve.

Soit alors $C \subset \tilde{f}^{-1}(t)$ qui borde $D^2 \hookrightarrow \tilde{M}$ disjoint des points critiques qu'on suppose pointer vers le haut le long de C et transverse à $\tilde{f}^{-1}(t)$. Soit $Y_+ = D \cap \tilde{f}^{-1}([t, \infty[)$

et soit $Y_- = D \cap \tilde{f}^{-1}(]-\infty, t])$. $\partial Y_+ = D \cap \tilde{f}^{-1}(t) = C \cup \partial Y_-$. Une application de 5.13 et de son symétrique donne

$$h_+ : Y_+ \to \tilde{f}^{-1}(t), \quad h_+|_{\partial Y_+} = \text{inclusion}$$
$$h_- : Y_- \to \tilde{f}^{-1}(t), \quad h_-|_{\partial Y_-} = \text{inclusion};$$

d'où $h : D \to \tilde{f}^{-1}(t)$ bordant C.

Fin de la démonstration du théorème **5.10** : *Preuve de l'injectivité de*

$$h : \pi_2(M, -u) \to H_2(m, -u)$$

si $-u$ *est stable.* — La variété M est de dimension $\geqslant 8$ et on suppose, grâce à 5.12 et 5.14, que (α, ξ) est générique, α sans point critique d'indice 0, 1, n et $\tilde{f}^{-1}]-\infty, t[$ simplement connexe pour tout t. Soit $g : \mathbf{R}^2 \hookrightarrow \tilde{M}$ dans le noyau de h.

1) Nous supposons d'abord que $\tilde{f}g$ n'a qu'un point critique qui est un maximum m et $\tilde{f}g(m) = 0$.

Comme $\Omega_2(M, -u) \to H_2(M, -u)$ est un isomorphisme, il existe une variété connexe orientée Y^3 avec $\partial Y^3 = \mathbf{R}^2$ et une application $\gamma : Y^3 \hookrightarrow \tilde{M}$ avec $(\tilde{f}\gamma)^{-1}[t, \infty[$ compact pour tout t et $\gamma|_{\partial Y} = g$.

Soit a_0 avec $\gamma(Y) \subset \tilde{f}^{-1}]-\infty, a_0]$. On suppose γ transverse à $\tilde{f}^{-1}(-1)$; $(\tilde{f}\gamma)^{-1}(-1)$ est une surface compacte qui disconnecte Y. Il y a une composante qui borde le cercle $g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(-1)$ et peut-être d'autres composantes sans bord. L'ensemble $\tilde{f}^{-1}(-1)$ n'est peut-être pas connexe s'il y a des points critiques de α d'indice $n-1$, mais $\tilde{f}^{-1}]-\infty, -1]$ est simplement connexe. En ajoutant à Y des anses de dimension 1 dont les âmes sont plongées dans $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$, on construit $Y' \hookrightarrow \tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$ et une surface compacte connexe F plongée dans $Y' \cap \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$ séparant Y' et de bord $g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(-1)$. Puis, en faisant des chirurgies d'indice 1 plongées dans $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$, on construit $Y'' \hookrightarrow \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$, $\partial Y'' = g(\mathbf{R}^2)$, et un disque Δ_1 plongé dans $Y'' \cap \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$ séparant Y'' et de bord $g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(-1)$. On pose $Y'' = Z_1 \cup_{\Delta_1} Y_1$, où $Y_1 \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -1])$ et où la 3-variété compacte orientée $Z_1 \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$ a comme bord la sphère $\Sigma_1 = (g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}([-1, 0])) \cup \Delta_1$. La sphère Σ_1, homologue à 0 dans $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$, borde une boule B_1 dans $\tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$ (car $\pi_2\tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0]) \to H_2\tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$ est un isomorphisme). On recommence avec Y_1 et $\tilde{f}^{-1}(-a_2)$, où $a_2 \geqslant 2$ est tel que $\Delta_1 \subset \tilde{f}^{-1}(]-a_2, -1])$, de sorte que

$$\partial Y_1 \cap \tilde{f}^{-1}(-a_2) = g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(-a_2),$$

d'où $B_2 \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -a_1])$ avec $\partial B_2 = \Delta_1 \cup (g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}([-a_2, -a_1])) \cup \Delta_2$. On obtient ainsi une suite $a_n \nearrow +\infty$, une suite de disques $\Delta_n \subset \tilde{f}^{-1}(]-a_{n+1}, -a_n])$, $\partial\Delta_n = g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(-a_n)$, et une suite de boules $B_n \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, -a_{n-1}])$ avec

$$\partial B_n = \Delta_{n-1} \cup (g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}([-a_n, -a_{n-1}])) \cup \Delta_n,$$

d'où la construction de $G : \mathbf{R}^3_+ \hookrightarrow \tilde{M}$ étendant g et tel que $\tilde{f}G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} -\infty$ et $\tilde{f}G(\mathbf{R}^3_+) \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, a_0])$.

2) Supposons $\tilde{f}\tilde{g} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ générique.

On dit qu'un col, au niveau t_0 de $\tilde{f}\tilde{g}$, est de type I si $g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0 - \varepsilon)$ a moins de composantes que $g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0 + \varepsilon)$ et de type II dans le cas contraire.

Nous allons déformer g pour supprimer les cols de type II. Soit c un col de type II au niveau t_0 et soit $X_1 \subset \mathbf{R}^2$ la composante de $(\tilde{f}\tilde{g})^{-1}(]-\infty, t_0 - \varepsilon])$ qui est entourée par la composante de $(\tilde{f}\tilde{g})^{-1}(t_0)$ contenant c et non par la composante correspondante de $(\tilde{f}\tilde{g})^{-1}(t_0 + \varepsilon)$; X_1 est compacte. Soit m le minimum absolu de $\tilde{f}\tilde{g}$ sur X_1. On construit $\gamma : [-a, a] \hookrightarrow g(\mathbf{R}^2)$ tel que $\gamma(0) = g(c)$, $\gamma(a) = g(m)$, $\tilde{f}\gamma$ a un seul point critique sur $]-a, a[$, l'origine, qui est un maximum, et $\tilde{f}\gamma(-s) = \tilde{f}\gamma(s)$ pour tout s. Comme α n'a pas de point critique d'indice $\leqslant 1$, on peut suivre par continuité un arc joignant $\gamma(-s)$ à $\gamma(s)$ dans leur niveau. On construit donc une membrane $\Delta \subset \tilde{M}$ transversale à α, s'appuyant sur γ et descendant jusqu'au niveau de $g(m)$; on déforme alors g en g' pour supprimer c et m et $\tilde{f}g'(x) \leqslant \tilde{f}g(x)$, pour $x \in \mathbf{R}^2$. Si l'on effectue cette déformation pour tous les cols de type II, on obtient $g_1 : \mathbf{R}^2 \hookrightarrow \tilde{M}$ sans cols d'indice II et $\tilde{f}g_1(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} -\infty$.

Nous supposons donc que $\tilde{f}g$ n'a que des cols de type I, donc que $\tilde{f}g$ n'a pas de minimum; nous choisissons Y^3 bordant $g(\mathbf{R}^2)$ grâce au

Lemme **5.22.** — *Soit* $Y^3 \hookrightarrow \tilde{M}$ *connexe orientable non compacte avec* $\tilde{f}^{-1}([t, \infty[) \cap Y$ *compact pour tout* t *et* $\tilde{f}|_Y$ *générique et* $\tilde{f}|_{\partial Y}$ *sans minimum. Il existe* $Y' \hookrightarrow M$, $\partial Y' = \partial Y$, Y' *ayant les mêmes propriétés que* Y *et en plus telle que* $\tilde{f}|_{Y'}$ *soit sans point critique d'indice* $\leqslant 1$.

Preuve. — Soit s un point critique d'indice 1 de $\tilde{f}|_Y$ au niveau t_0; $S_-(s)$ est formé de deux points $a(t_0 - \varepsilon)$ et $b(t_0 - \varepsilon)$ de $(Y - \partial Y) \cap \tilde{f}^{-1}(t_0 - \varepsilon)$ qui sont joints par un arc $\gamma(t_0 - \varepsilon)$ dans $\tilde{f}^{-1}(t_0 - \varepsilon) - Y$. Comme α n'a pas de point critique d'indice $\leqslant 1$, lorsque t décroît, on peut suivre par continuité ces éléments en

$$a(t), b(t) \in (Y - \partial Y) \cap \tilde{f}^{-1}(t)$$

et $\gamma(t)$ les joignant dans $\tilde{f}^{-1}(t) - Y$ tant que $a(t)$ ou $b(t)$ n'arrive à un point critique d'indice 0 de $\tilde{f}|_Y$ ($a(t)$ et $b(t)$ peuvent arriver au même point critique).

Soit m un minimum de $\tilde{f}|_Y$. Comme Y est connexe et non compacte, il existe un point critique s d'indice 1 au niveau t_0 tel que $(\tilde{f}|Y)^{-1}(]-\infty, t_0 - \varepsilon])$ a une composante compacte Z_1 contenant m et une composante non compacte Z_2 avec $a(t_0 - \varepsilon) \in Z_1$ et $b(t_0 - \varepsilon) \in Z_2$. On est alors sûr que $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ existent jusqu'à ce que $a(t_1) = m$ et alors $b(t_1) \in Z_2$. On élimine alors s et m grâce à la membrane engendrée par $\gamma(t)$. On construit donc Y_1 tel que $\tilde{f}|_{Y_1}$ n'ait pas de minimun. Pour chaque point d'indice 1 de $\tilde{f}|_{Y_1}$, la membrane descend jusqu'à $-\infty$ et grâce à ces membranes on modifie Y_1 en Y' avec $\tilde{f}|_{Y'}$ sans point critique d'indice $\leqslant 1$.

Soit m_0 le maximum absolu de $\tilde{f}|_Y$ et m_i les autres maxima; donc $\tilde{f}(m_i) \to -\infty$ s'il y a une infinité de maxima. Soit $X_t = Y \cap \tilde{f}^{-1}(t)$, $\partial X_t = g(\mathbf{R}^2) \cap \tilde{f}^{-1}(t)$. D'après le choix de Y, lorsque t décroît, X_t ne subit que les transformations suivantes : apparition d'une composante ou d'une composante de bord, somme connexe sur le bord et chirurgie d'indice 0 sur l'intérieur. Soit s_i un col (de type I) de $\tilde{f}g$ au niveau t_i qui correspond à une somme connexe sur le bord pour X_t; donc, dans $X_{t_i-\varepsilon}$, on a un arc propre $J(s_i)$ qui coupe la composante de $X_{t_i-\varepsilon}$ qui le contient. On peut suivre par continuité cet arc en $J_t(s_i)$ pour $t < t_i$ avec $J_t(s_i)$ disjoint des $J_t(s_j)$ déjà présents et $J_t(s_i)$ coupant la composante de X_t qui le contient (il suffit de faire attention lorsque X_t subit une chirurgie d'indice 0). Ces familles d'arcs donnent des membranes $P_i \subset Y$. Soient Y_j les composantes connexes du complémentaire dans Y de la réunion des P_i; le bord de l'adhérence $\overline{Y}_j$ de Y dans Y, $\partial\overline{Y}_j$, est un plan car les $\partial\overline{Y}_j \cap \tilde{f}^{-1}(t)$ sont tous connexes. Posons $g_j(\mathbf{R}^2) = \partial\overline{Y}_j$. Le $\sup(\tilde{f}|_{\overline{Y}_j})$ est atteint en un maximum de $\tilde{f}|_Y$ ou en un maximum de $\tilde{f}g$, donc $\sup(\tilde{f}|_{\overline{Y}_j}) \to -\infty$. D'après 1), on remplace chaque $\overline{Y}_j$ par

$$G_j(\mathbf{R}^3_+) \subset \tilde{f}^{-1}(]-\infty, \sup(\tilde{f}|_{\overline{Y}_j})])$$

et les $G_j(\mathbf{R}^3_+)$ se recollent le long des membranes P_i pour donner $G : \mathbf{R}^3_+ \hookrightarrow \tilde{M}$, $\tilde{f}G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} -\infty$ et $\partial G(\mathbf{R}^3_+) = g(\mathbf{R}^2)$.

Corollaire **5.23.** — *Soit* X *un complexe fini et soit* $u : G = \pi_1(X) \to \mathbf{R}$; *il y a équivalence entre*

1) $\mathscr{M}_u(X)$ *est contractile*;
2) *u est stable et* $C_*(X, u)$ *est acyclique.*

Cela résulte de 5.3, 5.10 et 5.15.

Corollaire **5.24.** — *L'ensemble des* $u \in H^1(X, \mathbf{R})$ *tels que* $\mathscr{M}_u(X)$ *est contractile (resp.* $\mathscr{M}_u(X)$ *contractile et* $\tau(X, u) = 0$ *dans* $\mathrm{Wh}(G, u)$*) est un ouvert de* $H^1(X, \mathbf{R})$.

Cela résulte de 5.23, 1.17 et 5.17.

5.25. *Démonstration du théorème en dimension 6.* — Soit α une forme de Morse sur M^6 dans la classe u avec $\mathscr{M}_u(M)$ et $\mathscr{M}_{-u}(M)$ contractiles où α n'a que des points critiques d'indice 2, 3, 4.

1) *Suppression des points critiques d'indice 2.* On raisonne comme en 4.6 pour l'élimination intermédiaire; on trouve d_0, e_0 d'indice 3 et 4 et un pseudo-gradient générique ξ pour lequel $[\check{d}_0, \check{c}_1] = 1 + (u < 0)$ et $[\check{d}_0, \check{c}_j] = (u < 0)$ pour $j \geqslant 2$. Soit

$$L = \tilde{f}(\tilde{d}_0) - \tilde{f}(\tilde{c}_1).$$

Sans bouger ξ et en montant des points d'indice 4, on construit un équipement de taille L pour les points critiques d'indice 2, donc les $\tilde{f}^{-1}(t)$ sont 1-connexes (5.18). Si ℓ et ℓ' sont

des liaisons de longueur $\leqslant L$ entre c_i et d_0 avec $g(\ell) = g(\ell')$, $\varepsilon(\ell) = -\varepsilon(\ell')$, on trouve un pré-disque de Whitney Δ (avec $\Delta \cap W^u(b, L + \varepsilon) = \emptyset$ si $I(b) = 4$) qui vérifie les hypothèses de 3.6 sauf que $\mathring{\Delta} \cap W^u(c_j, L)$ n'est peut-être pas vide mais intersection transverse formée d'un nombre fini de points. Pour chacune de ces liaisons de longueur $L' \leqslant L$ de c_j à $\mathring{\Delta}$, on choisit un petit disque $B \subset \Delta$ autour du point correspondant de $\Delta \cap W^u(c_j, L)$. On considère le cylindre de trajectoires de $-\xi$ s'appuyant sur ∂B de longueur $L' + \varepsilon$, on rebouche le bord inférieur par un exemplaire parallèle à Δ_{c_j}, on met tout cela transverse à ξ, puis, après avoir encore monté des points d'indice 4 de $L + \varepsilon$, on remonte le tout au niveau de Δ; on obtient un vrai disque de Whitney Δ' avec les mêmes conditions que pour Δ, mais en plus $\mathring{\Delta}' \cap W^u(c_j, L) = \emptyset$ pour tout j. On suit alors les démonstrations de 3.6 et 4.6.

2) En changeant le signe de α, on est ramené au cas où α a uniquement des points critiques d'indice 2 et 3. La partie 2 de la démonstration de 4.7 s'applique; la partie 1 aussi après création d'équipement de taille L (ce qui ne nécessite plus de bouger α) d'après l'argument précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Browder et J. Levine, Fibering manifolds over a circle, *Comment. Math. Helv.*, **40** (1966), 153-160.

[2] J. Cerf et A. Gramain, *Le théorème du h-cobordisme (Smale)*, Ecole Normale Supérieure Ulm, 1968.

[3] F. T. Farrell, The obstruction to fibering a manifold over the circle, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 737-740.

[4] F. T. Farrell, The obstruction to fibering a manifold over the circle, *Indiana Univ. Math. J.*, **21** (1971-1972), 315-346.

[5] A. Floer, An instanton invariant for 3-manifolds, *Commun. Math. Phys.*, **118** (1988), 215-240.

[6] S. Maumary, Type simple d'homotopie dans *Torsion et type simple d'homotopie*, *Springer L.N.M.*, **48** (1967), 37-64.

[7] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, 1965.

[8] J. Milnor, Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 358-426.

[9] S. P. Novikov, Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory, *Soviet Math. Dokl.*, **24** (1981), 222-226.

[10] S. P. Novikov, The Hamiltonian formalism and a multi-valued analogue of Morse theory, *Russian Math. Surveys*, **37** (1982), 1-56.

[11] A. V. Pazhitnov, On the sharpness of Novikov type inequalities for manifolds with free abelian fundamental group, *Math USSR Sbornik*, **68** (1991), 351-389.

[12] A. V. Pazhitnov, *Surgery on the Novikov complex*, Université de Nantes, Rapport de Recherche 93/01-2.

[13] L. Siebenmann, A total Whitehead obstruction to fibering over the circle, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 1-48.

[14] J. C. Sikorav, *Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un*, Thèse, Orsay, 1987.

URA 1169 du CNRS
Topologie et Dynamique
Bâtiment 425 — Université Paris-Sud
F - 91405 ORSAY Cedex

Manuscrit reçu le 12 juillet 1993