PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE DELIGNE

Extensions centrales de groupes algébriques simplement connexes et cohomologie galoisienne

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 84 (1996), p. 35-89
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1996__84__35_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXTENSIONS CENTRALES DE GROUPES ALGÉBRIQUES SIMPLEMENT CONNEXES ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE

par P. DELIGNE

Introduction 35
Terminologie et notations 38
1. Espaces classifiants simpliciaux et leur cohomologie 40
2. La construction principale 52
3. Groupes semi-simples simplement connexes 62
4. Calculs de commutateurs 71
5. Corps locaux 75
6. Corps globaux 81
7. Questions 84
Bibliographie 89

0. Introduction

Soit G un groupe algébrique linéaire absolument simple simplement connexe sur un corps F. Si G est déployé et F infini, le groupe G(F) des points rationnels de G est égal à son groupe des commutateurs (l'analogue algébrique de « connexe ») et admet donc une extension centrale universelle

$$\textbf{(0.1)} \qquad 0 \to \pi_1(G(F)) \to G(F)^{\sim} \to G(F) \to 0.$$

Matsumoto (1969) détermine le noyau $\pi_1(G(F))$ par générateurs et relations. Pour G de type autre que C_n ($n \geqslant 1$), c'est le quotient $K_2(F)$ de $F^* \otimes F^*$ par le sous-groupe engendré par les $x \otimes (1 - x)$ pour $x \neq 1$ dans F^*. Pour G de type C_n, c'est un groupe L dont $K_2(F)$ est quotient. Voir 3.8 pour plus de détails.

Une application

$$(\ ,\ ) : F^* \times F^* \to A$$

bimultiplicative : $(xy, z) = (x, z) + (yz)$ et $(x, yz) = (x, y) + (x, z)$, et vérifiant

$$\textbf{(0.2)} \qquad (x, 1 - x) = 0$$

(un *symbole*) définit donc une extension centrale de G(F) par A.

Soient $\bar{F}$ une clôture séparable de F, n un entier inversible dans F, $\mathbf{Z}/n(1)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité de $\bar{F}$, $\mathbf{Z}/n(k)$ sa puissance tensorielle k-ième sur $\mathbf{Z}/n$ et $\partial_n : F^* \to H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(1))$ le cobord de Kummer (0.N.3). On sait (Tate (1976)) que le cup-produit des cobords de Kummer

(0.3) $$(\ , \ )_n : F^* \times F^* \to H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) : x, y \mapsto \partial_n x \smile \partial_n y$$

est un symbole *(symbole galoisien)*. Nous donnons dans le présent article une interprétation (3.5 et 3.7) de l'extension centrale correspondante en termes de cohomologie étale, la construction reposant finalement sur le fait que pour K un groupe de Lie compact presque simple simplement connexe, on a (voir 1.7)

(0.4) $$H^4(BK, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Notre construction 3.5 n'exige pas que G soit déployé. Pour G absolument simple simplement connexe sur F, elle fournit une extension centrale

(0.5) $$0 \to H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) \to G(F)^{\sim} \to G(F) \to 0.$$

Nous n'affirmons pas que cette extension centrale soit universelle parmi les extensions centrales de noyau annulé par n, ni qu'elle soit non triviale. En fait, pour $F = \mathbf{R}$ et $G(\mathbf{R})$ compact, l'espace topologique $G(\mathbf{R})$ est connexe et simplement connexe et l'extension centrale (0.5), étant topologique (2.9), est triviale.

La vertu de l'extension centrale (0.5) est d'être canonique : définie à isomorphisme *unique* près. Elle est fonctorielle en F, et sa fonctorialité en G est contrôlée par celle de (0.4). Voir 3.9 (ii). Pour tout sous-groupe unipotent U de G, elle est canoniquement trivialisée sur U(F) (2.11). Pour T un tore dans G, le commutateur

$$(t_1, t_2) := \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \tilde{t}_1^{-1} \tilde{t}_2^{-1} \in H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$$

de relèvements $\tilde{t}_1$ et $\tilde{t}_2$ dans $G(F)^{\sim}$ de $t_1, t_2 \in T(F)$ est décrit en termes de cohomologie galoisienne (3.5.3). Si T^{ad} est l'image de T dans le groupe adjoint G^{ad}, l'action de $G^{ad}(F)$ sur G fournit par transport de structures une action de $G^{ad}(F)$ sur l'extension (0.5). Pour $t_1 \in T^{ad}(F)$ et $t_2 \in T(F)$, le « commutateur »

$$(t_1, t_2) := t_1(\tilde{t}_2) \tilde{t}_2^{-1} \in H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$$

admet une description analogue (4.9).

Si F est un corps local et que n est assez divisible, l'extension (0.5) est indépendante de n (5.2). C'est une extension centrale

(0.6) $$0 \to \mu(F) \to G(F)^{\sim} \to G(F) \to 0$$

de G(F) par le groupe $\mu(F)$ des racines de l'unité dans F si F est non complexe (5.4.1), par le groupe trivial pour F complexe. Si F est non archimédien, d'anneau de valua-

tion $\mathcal{O}$, que G a « bonne réduction » et que $\mu(F)$ est d'ordre premier à la caractéristique résiduelle, on dispose d'un scindage

$$\textbf{(0.7)} \qquad {}^{\sim} : G(\mathcal{O}) \to G(F)^{\sim}$$

de (0.6) au-dessus du sous-groupe compact maximal hyperspécial $G(\mathcal{O})$. Voir 5.12.

Si F est un corps global, de complétés les corps locaux F_v, le produit restreint des $G(F_v)^{\sim}$ de (0.6) (produit restreint relativement aux $G(\mathcal{O}_v)^{\sim}$ de (0.7), qui sont définis pour presque toute place v) est une extension centrale du groupe adélique $G(\mathbf{A})$ par la somme sur les places non complexes des $\mu(F_v)$. Poussons-la par

$$\textbf{(0.8)} \qquad \bigoplus \mu(F_v) \to \mu(F) : (x_v) \mapsto \prod x_v^{|\mu(F_v)|/|\mu(F)|}$$

(presque tous les facteurs égaux à 1, et $\mu(F)$ identifié à un sous-groupe de $\mu(F_v)$ pour F_v non complexe). On obtient une extension centrale $G(\mathbf{A})^{\sim}$ de $G(\mathbf{A})$ par $\mu(F)$ et la fonctorialité de (0.5) en le corps de base montre (voir 6.4) qu'elle est canoniquement trivialisée sur G(F) :

$$\textbf{(0.9)} \qquad \begin{tikzcd} & & G(F) \arrow[dl] \arrow[d, hook] \\ \mu(F) \arrow[r] & G(\mathbf{A})^{\sim} \arrow[r] & G(\mathbf{A}). \end{tikzcd}$$

La fonctorialité de (0.6) et (0.9) en G est contrôlée par celle de (0.4). La fonctorialité en F est celle de l'identification de $\mu(F)$ à un groupe de cohomologie galoisienne. Voir (5.5).

D'après Merkurjev-Suslin (1982), le groupe $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$ est le quotient $K_2(F)/nK_2(F)$ de $K_2(F)$. Sous l'hypothèse que la variété de groupe G soit rationnelle sur F, j'ai montré dans un séminaire à Bures (1977-1978, non publié) comment construire une extension de G(F) par $K_2(F)$ généralisant celle construite par Matsumoto pour G déployé. Plus récemment, J. L. Brylinski a montré que l'hypothèse de rationalité est inutile. Il m'a néanmoins semblé utile de publier le présent article, qui met en évidence le caractère géométrique, basé sur (0.4), des extensions centrales considérées et de leur fonctorialité, et qui suffit pour l'application arithmétique (0.9).

Passons en revue les sections de l'article.

Au § 1, nous rappelons comment interpréter, en géométrie algébrique, la notion homotopique d'espace classifiant, et comment transférer, en cohomologie étale, le résultat classique (0.4).

Au § 2, nous expliquons la relation entre espaces classificants et extensions centrales. L'idée de base est la suivante. Soit G^{δ} le schéma en groupes sur Spec(F) somme de copies de Spec(F) indexées par G(F). Pour une interprétation des classifiants comme topos, on dispose de morphismes

$$BG(F) \xleftarrow{①} BG^{\delta} \xrightarrow{②} BG$$

et ① a pour fibre Spec(F). Une classe de cohomologie $\mathbf{c}$ de BG à coefficients dans $\mathbf{Z}/n(2)$ fournit, par image inverse par ②, une classe d'hypercohomologie $\mathbf{c}^\delta$ de BG(F), à coefficients dans un complexe calculant la cohomologie galoisienne $H^*(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$. Cette hypercohomologie est l'aboutissement d'une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(BG(F), H^q(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))),$$

où $H^q(BG(F), \ )$ est la cohomologie du groupe G(F) à coefficients dans un G(F)-module trivial. On se débarrasse des $E_2^{0,q}$ en considérant plutôt une cohomologie relative $\tilde{H}$: G modulo le groupe trivial. La classe $\mathbf{c}^\delta$ a alors une image dans

$$\begin{aligned} E_2^{1,3} &= H^1(BG(F), H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))) \\ &= \mathrm{Hom}(G(F), H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))). \end{aligned}$$

Une application de Merkurjev-Suslin (1982) montre que cette image est nulle. Voir 1.11. La classe $\mathbf{c}^\delta$ a alors une image dans

$$E_2^{2,2} = H^2(BG(F), H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))),$$

le groupe des classes d'isomorphie d'extensions centrales de G(F) par $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$.

Dans le texte, nous travaillons plus près du niveau des cocycles. Sous l'hypothèse que $\tilde{H}^3(BG, \mathbf{Z}/n(2)) = 0$, ceci nous permet de construire une extension centrale (0.5) canonique. Par ailleurs, nous travaillons autant que possible sur un schéma de base S et utilisons le langage de la cohomologie étale plutôt que celui de la cohomologie galoisienne. Sur une base S, ce que l'on obtient est une extension centrale par $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$ du noyau d'un homomorphisme de G(S) dans $H^3(S, \mathbf{Z}/n(2))$.

Les § 3 et 4 appliquent les résultats du § 2 au cas des groupes semi-simples simplement connexes et explicitent la fonctorialité et certains commutateurs.

Le § 5 traite des corps locaux : identification de $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$ à $\mu(F)$ pour n assez divisible, fonctorialité en F de cette identification et scindage sur $G(\mathcal{O}_v)$ dans le cas de bonne réduction.

Le § 6 traite des corps globaux : construction de (0.9).

Le § 7 conjecture comment la théorie devrait se généraliser au cas des groupes réductifs connexe. On pose aussi une question sur K_2, suggérée par les calculs de commutateurs.

0.N. Terminologie et notations

(0.N.1) Sauf mention expresse du contraire, par *faisceau* sur un schéma S nous entendrons toujours faisceau sur le site étale S_{et} de S et *localement* signifie localement pour la topologie étale.

(0.N.2) Par $(\mathbf{G}_m)_S$ ou simplement $\mathbf{G}_m$, on entend le schéma en groupes multiplicatifs sur S, ou, selon le contexte, le faisceau $\mathcal{O}_S^*$ de ses sections locales.

(0.N.3) Pour n un entier inversible sur S, on note $\mathbf{Z}/n(1)$ le faisceau des racines n-ièmes de l'unité. La *suite exacte de Kummer*

$$0 \to \mathbf{Z}/n(1) \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{x^n} \mathbf{G}_m \to 0$$

définit le *cobord de Kummer*

$$\partial : \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*) \to H^1(S, \mathbf{Z}/n(1)).$$

Pour $n \mid m$, la *réduction modulo* n, $\mathbf{Z}/m(1) \mapsto \mathbf{Z}/n(1)$ est $x \mapsto x^{m/n}$. Le cobord de Kummer est compatible à la réduction modulo n.

Le faisceau $\mathbf{Z}/n(1)$ est un faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules localement libres de rang un. On note $\mathbf{Z}/n(k)$ sa puissance tensorielle k-ième ($k \in \mathbf{Z}$). Pour $\mathcal{F}$ un faisceau abélien de n-torsion, on note $\mathcal{F}(k)$ son produit tensoriel avec $\mathbf{Z}/n(k)$ *(twist à la Tate)*.

(0.N.4) Un schéma en groupes G sur S sera dit *réductif*, *semi-simple*, *simple*, *simplement connexe*, un *tore* s'il est lisse et affine sur S et que ses fibres géométriques ont la propriété dite. Selon la terminologie de SGA3, t. 3, XIX, *réductif* suppose connexe. D'après SGA3, les théorèmes de structure familiers pour S spectre d'un corps algébriquement clos restent valables localement pour la topologie étale sur un schéma de base S. Noter que pour S spectre d'un corps F, notre terminologie *simple* correspond à ce qu'il est d'usage d'appeler « groupe algébrique linéaire absolument (presque) simple sur F ».

(0.N.5) Un *torseur* est un espace principal homogène à droite.

(0.N.6) Si E est une extension centrale d'un groupe Γ, l'application commutateur : $g, h \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ de $E \times E$ dans E se factorise par une application (g, h), encore appelée *commutateur*, de $\Gamma \times \Gamma$ dans E.

(0.N.7) Nous avons tenté d'utiliser systématiquement les notations suivantes :

S	un schéma
a	la projection sur S d'un schéma sur S
$\mathcal{B}$	un faisceau abélien sur S. On note encore $\mathcal{B}$ son image inverse sur un schéma sur S
n	un entier inversible sur S
A	un faisceau abélien de torsion annulé par n sur S. On note encore A son image inverse sur un schéma sur S
G, H	schémas en groupes sur S, le plus souvent semi-simples simplement connexes
T	un tore sur S. Localement sur S, il est isomorphe à $\mathbf{G}_m^N$, pour N convenable. On pose $X = \mathcal{H}om_S(T, \mathbf{G}_m)$ et $Y = \mathcal{H}om_S(\mathbf{G}_m, T)$. Ce sont des faisceaux localement isomorphes à $\mathbf{Z}^N$ et duaux l'un de l'autre pour l'accouplement $x \circ y$ à valeurs dans $\mathcal{H}om_S(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Z}$.

Pour T un sous-schéma en tores maximaux de G, supposé semi-simple, W est le groupe de Weyl (un faisceau en groupes sur S).

1. Espaces classifiants simpliciaux et leur cohomologie

1.1. L'espace classifiant BG d'un groupe de Lie G est défini classiquement comme étant la base d'un G-torseur (0.N.5) EG qui soit contractile. Il est défini à équivalence d'homotopie près. Si K est un sous-groupe compact maximal de G, l'inclusion de K dans G est une équivalence d'homotopie, EG est un K-torseur sur EG/K, qui est donc une version de BK et BK $\to$ BG est une équivalence d'homotopie. Il est d'usage, chez les topologues, de considérer BK de préférence à BG.

D'après Milnor (1956) et Segal (1968), une version de BG est la réalisation géométrique de l'espace topologique simplicial suivant :

$$\Delta_n \mapsto G^{\Delta_n}/G. \tag{1.1.1}$$

Dans (1.1.1), on a noté Δ_n l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \ldots, n\}$ et l'on regarde un objet simplicial comme un foncteur contravariant sur la catégorie des Δ_n. L'action à droite par laquelle on divise est l'action diagonale par translations à droite. Le fibré EG est la réalisation géométrique de $\Delta_n \mapsto G^{\Delta_n}$.

Pour les applications à la géométrie algébrique, il est commode d'omettre toute mention des réalisations géométriques et de définir le classifiant (simplicial) $B_\bullet G$ (ou simplement BG) comme étant l'espace topologique simplicial (1.1.1). La cohomologie de la réalisation géométrique d'un espace topologique simplicial $X_\bullet$ peut se définir directement, sans passer par l'intermédiaire de la réalisation géométrique. Voici deux définitions possibles. Leur équivalence est prouvée dans Deligne (1974), 5.2 ou SGA4 (t. 2), V *bis*, 2.3.5, 2.3.8. La seconde définition, plus calculatoire que la première, est celle qui nous servira.

(A) Un *faisceau* $\mathscr{F}$ sur $X_\bullet$ est un système de faisceaux $\mathscr{F}_n$ sur les X_n et de morphismes $\mathscr{F}(\varphi) : X(\varphi)^* \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ pour $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$, avec $\mathscr{F}(\psi\varphi) = \mathscr{F}(\psi) \circ \mathscr{F}(\varphi)$ (de façon plus pédante $\mathscr{F}(\psi\varphi) = \mathscr{F}(\psi) \circ X(\psi)^* (\mathscr{F}(\varphi))$). Les faisceaux d'ensembles sur $X_\bullet$ forment un topos et l'on prend la cohomologie de ce topos.

(B) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur $X_\bullet$. Soit $\mathscr{F}^*$ une résolution de ce faisceau, avec chaque $\mathscr{F}_n^m$ acyclique sur X_n : $H^i(X_n, \mathscr{F}_n^m) = 0$ pour $i > 0$. Par exemple : prendre pour $\mathscr{F}_n^*$ la résolution flasque canonique (Godement (1958), II, 4.3) de $\mathscr{F}_n$ sur X_n; elle est fonctorielle en $(X_n, \mathscr{F}_n)$. Le système des $\Gamma(X_n, \mathscr{F}_n^m)$ est cosimplicial en n et différentiel gradué en m. Il fournit un complexe double. La cohomologie de $\mathscr{F}$ est celle du complexe simple associé :

$$H^i(X_\bullet, \mathscr{F}) := H^i(\mathbf{s}\Gamma(X_n, \mathscr{F}_n^m)). \tag{1.1.2}$$

Pour identifier la composante de degré k de $\mathbf{s}\Gamma(X_n, \mathscr{F}_n^m)$ à la somme des $\Gamma(X_n, \mathscr{F}_n^m)$ pour $n + m = k$, on regarde n comme première variable et m comme seconde. Si d'

est la différentielle simpliciale et d'' la différentielle de $\mathscr{F}^*$, la différentielle de $\mathbf{s}\Gamma(X_n, \mathscr{F}_n^m)$ est alors $d' + (-1)^n d''$. La filtration par n fournit une suite spectrale

(1.1.3) $$E_1^{pq} = H^q(X_p, \mathscr{F}_p) \Rightarrow H^{p+q}(X_\bullet, \mathscr{F}).$$

La différentielle d_1 de cette suite spectrale est la différentielle simpliciale $\Sigma(-1)^i \partial_i^*$. Prenons pour $\mathscr{F}$ le faisceau constant A. La cohomologie obtenue est alors celle de la réalisation géométrique de X, à coefficients dans A, et la suite spectrale (1.1.3) est donnée par la filtration par les squelettes successifs.

1.2. Pour vérifier que la cohomologie du classifiant simplicial $B_\bullet G$ coïncide avec celle de l'espace classifiant BG, il n'est pas nécessaire de passer par la réalisation géométrique, comme suggéré par 1.1.

Soit en effet $(EG/BG)^{\Delta_n}$ la puissance fibrée $(n+1)$-ième de EG sur BG. Il résulte de l'existence de sections locales de $EG \to BG$ que l'espace simplicial $(EG/BG)^{\Delta_n}$ a même cohomologie que BG (SGA4 (t. 2), V *bis* (3.3.2) et (4.1.9)).

Soit $(EG)_x$ la fibre de EG en $x \in BG$. Pour $q \in (EG)_x$, $g \mapsto qg$ est un isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} (EG)_x$. Notons $p \mapsto q^{-1}p$ son inverse. L'application

$$(EG)_x^{\Delta_n} \to G^{\Delta_n}/G : (p_i) \mapsto (p_i^{-1} q)$$

est indépendante du choix de q. Elle fournit un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux

$$(EG/BG)^{\Delta_n} \to (G^{\Delta_n}/G) = B_\bullet G.$$

En chaque degré n, ce morphisme est isomorphe à $pr_2 : EG \times G^n \to G^n$, donc est une équivalence d'homotopie. Par (1.1.3), il induit un isomorphisme en cohomologie : on a

(1.2.1) $$H^*(BG) \xrightarrow{\sim} H^*((EG/BG)^{\Delta_n}) \xleftarrow{\sim} H^*(B_\bullet G).$$

1.3. Si l'on identifie G^{Δ_n}/G à G^n par

(1.3.1) $$(g_0, \ldots, g_n) \to (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1} g_n^{-1}),$$

les flèches simpliciales sont données par des formules familières en cohomologie des groupes. Ainsi

(1.3.2) $\partial_0, \partial_1, \partial_2 : G^2 \to G$ sont $(g, h) \mapsto h, gh, g,$

et $s_0, s_1 : G \to G^2$ sont $g \mapsto (e, g), (g, e).$

1.4. La construction 1.1 s'applique aussi bien pour définir la cohomologie étale d'un schéma simplicial : dans 1.1 (A) ou (B), remplacer « faisceau » par « faisceau pour la topologie étale ».

Le cas qui nous intéresse est celui de l'espace classifiant simplicial BG d'un schéma en groupes G sur un schéma S, de composantes les G^{Δ_n}/G. On identifiera par (1.3.1) G^{Δ_n}/G à la puissance fibrée n-ième G^n de G sur S.

Pour $X_\bullet$ un schéma simplicial sur $\mathbf{C}$, avec X_n de type fini sur $\mathbf{C}$, et A un groupe abélien de torsion, la suite spectrale 1.1.3 et le théorème de comparaison SGA4 (t. 3), XVI, 4.1, appliqué aux X_n montrent que la cohomologie étale $H^*(X_\bullet, A)$ coïncide avec la cohomologie $H^*(X_\bullet(\mathbf{C}), A)$ de l'espace topologique simplicial $X_\bullet(\mathbf{C})$.

En particulier, pour G un groupe algébrique sur $\mathbf{C}$, et pour K un sous-groupe compact maximal du groupe de Lie $G(\mathbf{C})$, la cohomologie étale $H^*(B_\bullet G, A)$ coïncide avec son analogue topologique :

$$\textbf{(1.4.1)} \qquad H^*(B_\bullet G, A) = H^*(B_\bullet G(\mathbf{C}), A) = H^*(BG(\mathbf{C}), A) = H^*(BK, A).$$

1.5. Nous aurons besoin de l'analogue, pour G un schéma en groupes réductif sur un schéma S, de résultats classiques sur la cohomologie de groupes de Lie et de leurs espaces classifiants. Pour $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$, ils se déduisent des résultats classiques à l'aide du théorème de comparaison. En général, localement pour la topologie étale sur S, G est l'image inverse d'un schéma en groupes réductif déployé sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, et on se ramènera au cas de $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$ à l'aide du

Rappel **1.5.1.** — *Soient* S *un schéma, n un entier inversible sur* S, $a : G \to S$ *un schéma en groupes réductif sur* S *et* A *un faisceau abélien de torsion sur* S, *annulé par n. On note encore* A *l'image inverse de* A *sur un* S-*schéma. Alors*

(i) *La formation des faisceaux* $R^i a_* A$ *sur* S *est compatible à tout changement de base* $S' \to S$.

(ii) *Si* A *est localement constant sur* S, *les* $R^i a_* A$ *sont localement constants.*

Preuve. — La question est locale pour la topologie étale sur S. On peut donc supposer, et on suppose, que G admet un sous-schéma en groupes de Borel B, de radical unipotent U, et que le tore $T = B/U$ est déployé. On choisit un isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^N$.

Factorisons a en

$$G \xrightarrow{b} G/U \xrightarrow{c} S.$$

En tant que schéma sur G/U, G est localement sur G/U isomorphe à l'espace affine type de dimension M pour M convenable. On a donc $Rb_* A = A$ (SGA4 (t. 3), XV, 2.2) et il en résulte que $Ra_* A = Rc_* A$. Le quotient G/U est un T-torseur sur G/B. La compactification T-équivariante de $T = \mathbf{G}_m^N$ par $\mathbf{P}^{1N}$ fournit une compactification de G/U en un S-schéma G/U^-, propre et lisse sur G/B, dans lequel G/U est le complément d'un diviseur à croisements normaux relatifs. Il ne reste qu'à appliquer SGA4½, App. à Th. finitude, (1.3.1) + (1.3.3) (ii), pour (i), et 2.4 + SGA4 (t. 3), IX, 2.11, pour (ii).

Remarque. — La formule de changement de coefficients

$$\textbf{(1.5.2)} \qquad Ra_* A = Ra_* \mathbf{Z}/n \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/n} A$$

où $\overset{L}{\otimes}$ est un produit tensoriel dérivé, ramène le calcul de $Ra_* A$ au cas où A est le faisceau constant $\mathbf{Z}/n$. Pour prouver (1.5.2), on se ramène par 1.5.1 (i) au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, justifiable de SGA4, XVII (5.2.11.1).

La définition 1.1 de la cohomologie d'un espace (ou schéma) simplicial a un analogue relatif, pour $X_.$ augmenté vers S : $a : X_. \to S$. On définit Ra_* en remplaçant $\Gamma(X_n, \ )$ dans 1.1 (B) par le foncteur d'image directe de X_n à S.

Pour $f : Y \to Z$ un morphisme (resp. $f : Y_. \to Z$ un espace simplicial augmenté), nous écrirons souvent $Rf_*(Y, \ )$ (resp. $Rf_*(Y_., \ )$) pour Rf_*. Cette notation permet de lever des ambiguïtés, et met en évidence l'analogie avec $H^*(Y, \ )$. Soit $a : X_. \to S$ un espace simplicial augmenté vers S et écrivons simplement a pour $a_n : X_n \to S$. Comme en 1.1.3, pour $\mathscr{F}$ un faisceau sur $X_.$, on a une suite spectrale

$$\textbf{(1.5.3)} \qquad E_1^{pq} = R^q a_*(X_p, \mathscr{F}_p) \Rightarrow R^{p+q} a_*(X_., \mathscr{F}).$$

Elle permet de déduire de (1.5.1) son

Corollaire **1.5.4.** — *Les conclusions* (i), (ii) *de* 1.5.1 *valent, sous les mêmes hypothèses, pour* $Ra_*(BG, A)$.

1.6. *Rappels.* — Dans cette section et les deux suivantes, nous rappellerons les résultats classiques dont nous aurons besoin sur la cohomologie des groupes réductifs complexes et de leurs classifiants.

Pour le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, $\mathbf{G}_m(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$, de sous-groupe compact maximal U^1, a le type d'homotopie d'un cercle : cohomologie entière $\mathbf{Z}$ en degré 0 et 1. Un modèle du classifiant est l'espace projectif complexe de dimension infinie : cohomologie entière $\mathbf{Z}[x]$ avec x de degré 2.

Précisons, dans le langage qui nous sera utile, notre choix d'un générateur de $H^1(\mathbf{C}^*, \mathbf{Z})$. La suite exacte exponentielle

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^* \to 0$$

fait de $\mathbf{C}$ un $\mathbf{Z}$-torseur (0.N.5) sur $\mathbf{C}^*$. Sa classe de cohomologie est notre générateur préféré :

$$\textbf{(1.6.1)} \qquad H^1(\mathbf{C}^*, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Si l'on travaille sur *une* clôture algébrique C de $\mathbf{R}$, sans choix privilégié de $i = \sqrt{-1}$, il faut remplacer la suite exacte exponentielle par

$$0 \to \mathbf{Z}(1) \to C \to C^* \to 0$$

avec $\mathbf{Z}(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$ et (1.6.1) devient

$$\textbf{(1.6.2)} \qquad H^1(C^*, \mathbf{Z}(1)) = \mathbf{Z},$$

préfigurant les twist à la Tate qui apparaîtront en géométrie algébrique.

On passe du cas de $\mathbf{G}_m$ à celui d'un tore T, isomorphe à $\mathbf{G}_m^N$ pour N convenable, par la formule de Künneth. Soient $X := \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de T et $Y := \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$. Les groupes X et Y sont isomorphes à $\mathbf{Z}^N$ et en dualité, la dualité étant donnée par

(1.6.3) $$x \circ y : X \otimes Y \to \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Z}.$$

L'application $x \mapsto x^*(1)$ de X dans $H^1(T(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est un isomorphisme, et

(1.6.4) $$H^*(T(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \overset{*}{\wedge} X$$

fonctoriellement en T. La cohomologie du classifiant est l'algèbre symétrique

(1.6.5) $$H^*(BT(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathrm{Sym}^*(X)$$

avec X en degré 2 (signe précisé ci-dessous). En particulier,

(1.6.6) $$H^4(BT(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathrm{Sym}^2(X) = \{\text{ formes quadratiques entières sur } Y\}.$$

Le schéma simplicial BT a pour composantes les T^{Δ_n}/T. Par (1.6.4), la suite spectrale (1.1.3) pour $BT(\mathbf{C})$ a pour terme E_1

(1.6.7) $$E_1^{pq} = H^q(T^{\Delta_p}/T, \mathbf{Z}) = \overset{q}{\wedge} \mathrm{Ker}(\Sigma : X^{\Delta_p} \to X).$$

Dans la suite exacte de groupes cosimpliciaux

$$0 \to E_1^{p,1} \to X^{\Delta_p} \to X \to 0,$$

le groupe cosimplicial constant X a une cohomologie réduite à X en degré 0. Le complexe des cochaînes non dégénérées, noyau des opérateurs de dégénérescence, du groupe cosimplicial X^{Δ_p} est réduit à X en degrés 0 et 1, la différentielle $\partial_0 - \partial_1$ étant l'identité. Le groupe cosimplicial X^{Δ_p} est donc acyclique et par la suite exacte longue de cohomologie, le seul groupe de cohomologie non nul de E_1^{*1} est X en degré 1. Par passage aux puissances extérieures (Illusie (1971), I, 4.3.2.1, dualisé), le seul groupe de cohomologie non nul de $E_1^{*,q}$ est $\mathrm{Sym}^q(X)$ en degré q :

(1.6.8) $$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \mathrm{Sym}^p X & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Dans la description 1.3 de BT : $(BT)_n = T^n$, on a

(1.6.9) $$E_1^{pq} = \overset{q}{\wedge} X^p$$

et (1.6.9) pour $p = q = 1$ est notre choix de signe pour définir l'isomorphisme

(1.6.10) $$H^2(BT(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = E_\infty^{11} = E_1^{11} = X.$$

Les isomorphismes (1.6.4) et (1.6.7) sont ensuite définis par la structure d'algèbre de la cohomologie, resp. la structure multiplicative de la suite spectrale 1.1.3. Cette structure multiplicative pour $x' \in H^{q'}(T_{p'})$ et $x'' \in H^{q''}(T_{p''})$ est

(1.6.11) $$x' * x'' = (-1)^{q'p''} \varphi(x') \smile \psi(x'')$$

avec $\varphi : \Delta_{p'} \to \Delta_{p'+p''}$ et $\psi : \Delta_{p''} \to \Delta_{p'+p''}$ donnés par $(0, \ldots, p')$ et $(p', \ldots, p' + p'')$.

1.7. Soient G un groupe algébrique simple simplement connexe sur $\mathbf{C}$, $G(\mathbf{C})$ le groupe de Lie de ses points complexes et $BG(\mathbf{C})$ son classifiant. Pour suivre la notation usuelle en topologie, nous considérons aussi un sous-groupe compact maximal K de G, de même type d'homotopie. On a

(A) $\pi_i(K) = 0$ pour $i \leqslant 2$ (Cartan (1936)).

D'après Hurewitz, on a donc en homologie réduite $\widetilde{H}_i(K, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \leqslant 2$. En cohomologie : $\widetilde{H}^i(K, A) = 0$ pour $i \leqslant 2$ et tout groupe abélien A.

La suite spectrale (1.1.3) pour le classifiant simplicial BK s'écrit par 1.3

(1.7.1) $$E_1^{pq} = H^q(K^p, A) \Rightarrow H^{p+q}(BK, A).$$

Pour $q = 0$, $E_1^{p0} = A$ et d_1 est alternativement 0 et l'identité : $E_2^{0,0} = H^0(BK, A) = A$ et $E_2^{p,0} = 0$ pour $p > 0$. Pour $q = 1, 2$, on a $E_1^{pq} = 0$. En cohomologie réduite, on a donc

(1.7.2) $$\widetilde{H}^i(BK, A) = 0 \quad \text{pour } i \leqslant 3.$$

Pour $q = 3$, le morphisme d_1 de $E^{1,3}$ dans $E^{2,3}$ est nul : pour μ la loi de groupe $K \times K \to K$, c'est

$$pr_2^* - \mu^* + pr_1^* : H^3(K, A) \to H^3(K \times K, A),$$

les morphismes inj_i $(i = 1, 2) : k \mapsto (k, e)$ et $k \mapsto (e, k)$ induisent un isomorphisme

$$H^3(K \times K, A) \to H^3(K, A) \times H^3(K, A),$$

et les $inj_i^*(pr_2^* - \mu^* + pr_1^*)$ sont trivialement nuls.

La suite spectrale (1.7.1) fournit donc un isomorphisme

(1.7.3) $$H^4(BK, A) \xrightarrow{\sim} H^3(K, A).$$

(B) $\pi_3(K) \simeq \mathbf{Z}$ (Bott (1954)).

On a donc $H_3(K, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $H^3(K, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $H^4(K, \mathbf{Z})$ est sans torsion et $H^3(K, A) = A$. Par (1.7.3), fonctoriellement en A, $H^4(BK, A) = A : H^4(BK, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ et $H^5(BK, \mathbf{Z})$ est sans torsion.

Soient $T_{\mathbf{C}} \subset G$ un tore maximal et W son groupe de Weyl. On suppose K choisi

de sorte que $T := T_{\mathbf{C}} \cap K$ soit le sous-groupe compact maximal de $T_{\mathbf{C}}$. L'inclusion φ de T dans K induit

(1.7.4) $$\varphi^* : H^4(BK, \mathbf{Z}) \to H^4(BT, \mathbf{Z})^W.$$

(C) Le morphisme (1.7.4) est un isomorphisme.

La preuve de (C) qui suit m'a été expliquée par A. Borel. On peut voir $\varphi : BT \to BK$ comme une fibration de fibre K/T. Puisque G est connexe, BG est simplement connexe et la suite spectrale de Leray de φ s'écrit

$$E_2^{pq} = H^p(BK, H^q(K/T, \mathbf{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(BT, \mathbf{Z}).$$

L'espace K/T coïncide avec la variété de drapeaux G/B. La décomposition de Bruhat, par cellules de dimension réelle paire, assure que sa cohomologie est sans torsion et nulle en degrés impairs. On a donc

$$E_2^{pq} = H^p(BK, \mathbf{Z}) \otimes H^q(K/T, \mathbf{Z})$$

et $E_2^{pq} = 0$ pour $p = 1, 2, 3$ ou q impair. En bas degrés, la suite spectrale de Leray donne un isomorphisme

$$H^2(BT, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(K/T, \mathbf{Z})$$

et une suite exacte

$$0 \to H^4(BK, \mathbf{Z}) \to H^4(BT, \mathbf{Z}) \to H^4(K/T, \mathbf{Z}).$$

Le morphisme $H^4(BK, \mathbf{Z}) \to H^4(BT, \mathbf{Z})$ est donc injectif et son conoyau sans torsion.

Par (1.6.6), $H^4(BT, \mathbf{Z})$ est l'espace des formes quadratiques entières sur $Y := \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$. L'action de W sur $Y \otimes \mathbf{Q}$ est absolument irréductible. Le groupe $H^4(BT, \mathbf{Z})^W$ est donc de rang un, isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le morphisme (1.7.4) est injectif, à conoyau sans torsion, entre groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$: c'est un isomorphisme.

Lemme **1.7.5.** — *Le générateur positif* Q *du groupe des formes quadratiques entières* W-*invariantes sur* Y *vérifie* $Q(H_\alpha) = 1$ *pour* H_α *la coracine (courte) correspondant à une racine longue* α.

Soit Q_1 la forme quadratique W-invariante sur Y, *a priori* à valeurs rationnelles, telle que $Q_1(H_\alpha) = 1$. D'après la classification des systèmes de racines irréductibles, pour toute coracine H_β, on a $Q_1(H_\beta) = 1, 2$ ou 3. Soit B_1 la forme bilinéaire associée à Q_1 : $B_1(x, y) = Q_1(x + y) - Q_1(x) - Q_1(y)$. Pour toute racine β, les formes linéaires sur Y $B_1(H_\beta, y)$ et $\beta(y)$ sont proportionnelles. Pour $y = H_\beta$, la première vaut $2Q_1(H_\beta)$ et la seconde 2. On a donc

(1.7.6) $$B_1(H_\beta, y) = Q_1(H_\beta)\, \beta(y).$$

Le groupe K étant simplement connexe, Y est engendré par les coracines. La forme B_1 est donc à valeurs entières et la forme quadratique Q_1, entière sur un système de générateurs, est à valeurs entières. Elle prend la valeur 1, donc est le générateur positif cherché.

D'après (C) et 1.7.5, l'application composée

$$\textbf{(1.7.7)} \qquad H^4(BK, \mathbf{Z}) \to H^4(BT, \mathbf{Z}) =_{1.6.6} \mathrm{Sym}^2(X)$$
$$= \{\text{formes quadratiques entières sur } Y\} \xrightarrow{Q(H_\alpha)} \mathbf{Z}$$

est un isomorphisme de $H^4(BK, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$.

Remarque **1.7.8.** — Soient T_C^{ad} l'image de T_C dans le groupe adjoint G^{ad} et $Y^{ad} := \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T_C^{ad})$. L'indice de Y dans Y^{ad} est l'ordre du centre de G. Les racines sont à valeurs entières sur Y^{ad}. Puisque Y est engendré par les coracines, (1.7.6) montre encore que la forme bilinéaire $B = B_1$ associée à la forme quadratique Q de 1.7.5 se prolonge en une forme bilinéaire à valeurs entières $\widetilde{B}$ appariant Y^{ad} et Y.

1.8. Soient G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur $\mathbf{C}$ et I l'ensemble de ses facteurs simples. Le groupe G est le produit de ses facteurs simples : $G = \prod G_i$ $(i \in I)$. Soient T un tore maximal de G, produit de tores maximaux $T_i \subset G_i$ et W son groupe de Weyl, produit des groupes de Weyl W_i des T_i. Les résultats qui suivent se déduisent de 1.7, qui traite du cas où G est simple, par la formule de Künneth :

$$\textbf{(1.8.1)} \qquad \widetilde{H}^i(G(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{pour } i < 3,$$
$$\widetilde{H}^i(BG(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{pour } i < 4,$$
$$H^4(BG(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^3(G(\mathbf{C}), \mathbf{Z});$$

$$\textbf{(1.8.2)} \qquad H^3(G(\mathbf{C}), \mathbf{Z}),\ H^4(G(\mathbf{C}), \mathbf{Z}),\ H^4(BG(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \text{ et } H^5(BG(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \text{ sont sans torsion;}$$

$$\textbf{(1.8.3)} \qquad H^4(BG(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^4(BT(\mathbf{C}), \mathbf{Z})^W \xrightarrow{\sim} \prod H^4(BT_i(\mathbf{C}), \mathbf{Z})^{W_i} =_{1.7.7} \mathbf{Z}^I.$$

De plus, (1.8.2) assure, par la formule des coefficients universels, que (1.8.1) reste valable en cohomologie à coefficients dans un groupe abélien A.

1.9. Soient S un schéma, n un entier inversible sur S et A un faisceau abélien annulé par n sur S. Pour X un schéma sur S, ou un schéma simplicial sur S, nous noterons systématiquement a la projection de X sur S et A l'image inverse de A sur X. La notation $Ra_*(X, \ )$ de 1.5 lèvera les ambiguïtés.

Soit $\mathbf{G}_{m_S}$, ou simplement $\mathbf{G}_m$, le schéma en groupes « groupe multiplicatif » sur S. Le morphisme

$$x \mapsto x^n : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$$

fait de $\mathbf{G}_m$ un $\mathbf{Z}/n(1)$-torseur (0.N.3 et 0.N.5) sur $\mathbf{G}_m$. Sa classe de cohomologie dans $H^1(\mathbf{G}_m, \mathbf{Z}/n(1))$ fournit par localisation sur S une section de $R^1 a_*(\mathbf{G}_m, \mathbf{Z}/n(1))$. Le morphisme correspondant

(1.9.1) $$\mathbf{Z}/n \xrightarrow{\sim} R^1 a_*(\mathbf{G}_m, \mathbf{Z}/n(1))$$

est un isomorphisme (réduction à (1.6.1), ou mieux, (1.6.2), par (1.5.1)).

Partant de là, définissant les flèches comme en 1.6 à 1.8 et prouvant que ce sont des isomorphismes par réduction 1.5 au cas complexe, on obtient les résultats (1.9.2) à (1.9.7) suivants.

Soient T un schéma en tores sur S et X, Y comme en (0.N.7). On a (cf. 1.6)

(1.9.2) $$R^i a_*(T, A(i)) = \overset{i}{\wedge} X \otimes A$$

(1.9.3) $$R^{2i} a_*(BT, A(i)) = \mathrm{Sym}^i(X) \otimes A$$

et les $R^{2i+1} a_*(BT, A)$ sont nuls.

Si $a : G \to S$ est un schéma en groupes sur S et $\mathscr{B}$ un faisceau sur S, la section neutre e fournit une décomposition de $Ra_* \mathscr{B}$ en la somme directe de $\mathscr{B}$ en degré 0 et d'une image directe réduite $\widetilde{R}a_* \mathscr{B}$. De même, $Ra_*(Be, \mathscr{B})$ est réduit à $\mathscr{B}$ en degré 0 et $Ra_*(BG, \mathscr{B})$ se scinde en la somme directe de $\mathscr{B}$ en degré 0 et d'une image directe réduite $\widetilde{R}a_*(BG, \mathscr{B})$.

Soit G un schéma en groupes semi-simples simplement connexes sur S (0.N.4). Localement sur S (0.N.1), G est produit de facteurs simples (0.N.4). Soit I le faisceau des facteurs simples. Il est localement constant. On a (cf. 1.8)

(1.9.4) $$\widetilde{R}^4 a_*(BG, A(2)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}^3 a_*(G, A(2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^I \otimes A,$$

(1.9.5) nullité des images directes réduites précédentes.

Soient T un sous-schéma en tores maximaux de G et X, Y, W comme en (0.N.7). Le morphisme de restriction, de $\widetilde{R}^4 a_*(BG, A(2)) = R^4 a_*(BG, A(2))$ à $\widetilde{R}^4 a_*(BT, A(2)) = R^4 a_*(BT, A(2)) = \mathrm{Sym}^2(X) \otimes A$ (1.9.3) induit un isomorphisme (cf. 1.8.3)

(1.9.6) $$R^4 a_*(BG, A(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2(X)^W \otimes A.$$

Localement sur S, G est produit de facteurs simples G_i, T est produit de $T_i \subset G_i$ et si H_i est une coracine courte (correspondant à une racine longue) de $T_i \subset G_i$, (1.9.4) est défini par (1.9.6) et l'isomorphisme

(1.9.7) $$\mathrm{Sym}^2(X)^W \to \mathbf{Z}^I : Q \to (Q(H_i)).$$

Si T_1 et T_2 sont deux sous-schémas en tores maximaux, localement sur S, T_1 et T_2 sont conjugués. Un isomorphisme de conjugaison $\mathrm{int}(g)$ induit un isomorphisme entre

les faisceaux de caractères X_1 et X_2, et $\mathrm{int}(g) : \mathrm{Sym}^2(X_1)^{W_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2(X_2)^{W_2}$ est indépendant de g. Le diagramme d'isomorphismes

$$\textbf{(1.9.8)} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & R^4 a_*(BT_1, A(2))^{W_1} = \mathrm{Sym}(X_1)^{W_1} \otimes A \arrow[dr, "1.9.7"] \arrow[dd, "\mathrm{int}_g"] & \\ R^4 a_*(BG, A(2)) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Z}^I \otimes A \\ & R^4 a_*(BT_2, A(2))^{W_2} = \mathrm{Sym}(X_2)^{W_1} \otimes A \arrow[ur, "1.9.7"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Cas particulier :

(1.9.9) Pour G simple, $R^4 a_*(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ a un générateur canonique 1.

1.10. Pour G un schéma en groupes sur S, la projection de G sur S admet pour section la section neutre e. Elle définit un scindage

$$H^*(S, A) \xrightarrow{a^*} H^*(G, A) \xrightarrow{e^*} H^*(S, A)$$

de la cohomologie de G en somme directe de celle de S et d'une cohomologie réduite : celle de G modulo le sous-schéma en groupes trivial e. De même, le classifiant Be a même cohomologie que S et la restriction de BG à Be fournit un scindage de la cohomologie de BG en celle de S et celle de BG mod Be.

Notation. — On notera $\widetilde{H}^*$ ces groupes cohomologie relative, de G mod e, ou de BG mod Be.

Ils sont l'aboutissement de suites spectrales de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(S, \widetilde{R}^q a_*(G, A)) \Rightarrow \widetilde{H}^{p+q}(G, A)$$

et

$$E_2^{pq} = H^p(S, \widetilde{R}^q a_*(BG, A)) \Rightarrow \widetilde{H}^{p+q}(BG, A).$$

Si G est semi-simple simplement connexe sur S, de faisceau de facteurs simples I, on a donc par 1.9

(1.10.1) $\widetilde{H}^4(BG, A(2)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^3(G, A(2)) \simeq H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes A)$

(1.10.2) nullité des groupes de cohomologie réduite précédents.

Soient T un sous-schéma en tores maximaux de G et X, Y, W comme en 1.9. L'isomorphisme (1.10.1) est la restriction à BT, localisée sur S :

$$\textbf{(1.10.3)} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{H}^4(BG, A(2)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & H^0(S, \mathrm{Sym}^2(X)^W \otimes A) \arrow[r, "1.9.7"] \arrow[d, hook, "1.9.3"] & H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes A) \\ & H^0(S, R^4 a_*(BT, A(2))) & \end{tikzcd}$$

En particulier, pour G simple simplement connexe sur S,

(1.10.4) $$\widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2)) = \widetilde{H}^3(G, \mathbf{Z}/n(2)) = H^0(S, \mathbf{Z}/n)$$

contient un élément canonique 1.

Proposition **1.11.** — *Pour* S *spectre d'un corps* F, G *un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur* F *et* $\mathbf{c} \in \widetilde{H}^3(G, \mathbf{Z}/n(2))$, *l'application*

(1.11.1) $$g \mapsto g^*(\mathbf{c}) : G(F) \to H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$$

est nulle.

Preuve. — Par (1.10.1), $\mathbf{c}$ provient d'une classe dans $\widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$. Comme on le verra en (2.4.2), il en résulte que si $\mu : G \times G \to G$ est la loi de groupe, on a

(1.11.2) $$\mu^*(\mathbf{c}) = \mathrm{pr}_1^*(\mathbf{c}) + \mathrm{pr}_2^*(\mathbf{c}).$$

Il résulte de (1.11.2) que l'application (1.11.1) : $g \mapsto g^*(\mathbf{c})$ est un homomorphisme.

Si le corps F est fini, $H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) = 0$ et 1.11 est trivial. Supposons donc F infini. Soit F_1 une extension finie séparable de F telle que $G(F_1)$ soit égal à son groupe des commutateurs. Il suffit de prendre F_1 déployant G. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(F) & \xrightarrow{1.11.1} & H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_{F_1/F}} \\ G(F_1) & \xrightarrow{1.11.1} & H^3(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_1), \mathbf{Z}/n(2)) \end{array}$$

est commutatif. Puisque $G(F_1)$ est égal à son groupe des commutateurs, le morphisme en deuxième ligne est nul. Pour $g \in G(F)$, on a donc :

(1.11.3) $$[F_1 : F]\, g^*(\mathbf{c}) = \mathrm{cores}_{F_1/F}\, \mathrm{res}_{F_1/F}\, g^*(\mathbf{c}) = 0.$$

Décomposant n en facteurs primaires, on se ramène à supposer n puissance d'un nombre premier ℓ inversible dans F : $n = \ell^a$. Si ℓ^b est la plus grande puissance de ℓ divisant $[F_1 : F]$, on a par (1.11.3)

$$\ell^b\, g^*(\mathbf{c}) = 0.$$

La suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z}/\ell^a \xrightarrow{\ell^b} \mathbf{Z}/\ell^{a+b} \to \mathbf{Z}/\ell^b \to 0,$$

tordue à la Tate, fournit une suite exacte longue de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-cohomologie

$$H^2(\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2)) \xrightarrow{①} H^2(\mathbf{Z}/\ell^b(2)) \xrightarrow{\partial} H^3(\mathbf{Z}/\ell^a(2)) \xrightarrow{②} H^3(\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2)).$$

Par Merkurjev-Suslin (1982), le groupe $K_2(F)$ s'envoie sur chaque $H^2(\mathbf{Z}/\ell^k(2))$. La flèche ① est donc surjective, et la flèche ② est injective.

On lit sur (1.10.1) que la classe $\mathbf{c}$ est réduction mod ℓ^a d'une classe $\tilde{\mathbf{c}}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2)$. La classe $g^*(\mathbf{c})$ est la réduction modulo ℓ^a de $g^*(\tilde{\mathbf{c}})$, et on a encore $\ell^b g^*(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$. La multiplication par ℓ^b dans $\mathbf{Z}/\ell^{a+b}$ est le composé

$$\mathbf{Z}/\ell^{a+b} \to \mathbf{Z}/\ell^a \xrightarrow{\ell^b} \mathbf{Z}/\ell^{a+b}.$$

La multiplication par ℓ^b dans $H^2(\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2))$ est donc le composé

$$H^2(\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2)) \longrightarrow H^2(\mathbf{Z}/\ell^a(2)) \xrightarrow{②} H^2(\mathbf{Z}/\ell^{a+b}(2)),$$

et

$$g^*(\tilde{\mathbf{c}}) \mapsto g^*(\mathbf{c}) \mapsto 0,$$

avec un zéro au but car $\ell^b g^*(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$. La flèche ② étant injective, on conclut que $g^*(\mathbf{c}) = 0$.

Cet argument est une traduction « finie » de l'argument ℓ-adique suivant : la suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z}_\ell(2) \xrightarrow{\ell} \mathbf{Z}_\ell(2) \to \mathbf{Z}/\ell(2) \to 0$$

fournit une suite exacte longue

$$H^2(\mathbf{Z}_\ell(2)) \to H^2(\mathbf{Z}/\ell(2)) \xrightarrow{\partial} H^3(\mathbf{Z}_\ell(2)) \xrightarrow{\ell} H^2(\mathbf{Z}_\ell(2))$$

qui, par Merkurjev-Suslin, montre que $H^3(\mathbf{Z}_\ell(2))$ est sans torsion. La classe $g^*(\mathbf{c}) \in H^3(\mathbf{Z}_\ell(2))$, de torsion dans un groupe sans torsion, est nulle.

1 12. Dans la fin de cette section, nous exposons une variante plus précise de 1.11, due à A. A. Beilinson. Nous n'aurons pas à nous en servir. Pour simplifier, et pour obtenir un énoncé plus fort, nous travaillons en cohomologie ℓ-adique (T. Ekedahl, On the adic formalism, *Grothendieck Festschrift*, vol. II, p. 197-218, *Progress in Math.*, **87**, Boston, Birkhauser, 1990) en admettant 1.10 dans le cadre ℓ-adique. Supposant pour simplifier G simple simplement connexe sur S irréductible, on dispose au-dessus de $S[1/\ell]$ d'un générateur canonique (1.10.4) dans le groupe de cohomologie ℓ-adique $\tilde{H}^3(G, \mathbf{Z}_\ell(2))$. Notons-le a_ℓ.

Proposition **1.13.** — *Il existe un ouvert dense* U *de* G *tel que pour tout* ℓ *la restriction de* a_ℓ *à* $U[1/\ell]$ *soit nulle.*

Procédant comme en 1.11, il serait possible de modifier la preuve qui suit, et de travailler plutôt en cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/n(2)$, tout au moins pour U pouvant dépendre de n.

Preuve. — Ceci ne changeant ni la topologie, ni la cohomologie, on peut supposer et on suppose S réduit. Remplaçant S par un ouvert dense, on peut supposer l'existence

d'un tore maximal $T \subset G$. Il existe alors un revêtement fini étale $S' \to S$ tel que T se déploie sur S'. On peut supposer S' et donc $G_{S'} := G \times_S S'$ irréductibles. Soit K' le corps des fractions rationnelles de $G_{S'}$. Puisque G se déploie sur K', le groupe $G_{S'}(K')$ est égal à son groupe des commutateurs. En particulier, le point « inclusion identique dans $G_{S'}$ » : $\mathrm{Spec}(K') \to G'_{S'}$ est un produit de commutateurs. Par passage à la limite inductive, il existe donc un ouvert dense $U' \subset G_{S'}$ tel que l'inclusion identique de U' dans $G_{S'}$ soit un produit de commutateurs dans $G_{S'}(U')$.

Soit π la projection de $G_{S'}$ sur G. Le complément U de $\pi(G_{S'} - U')$ est un ouvert dense de G, et $U_{S'} \subset U'$. Après changement de base de S à S', l'inclusion identique de U dans G devient donc un produit de commutateurs dans $G_{S'}(U_{S'})$.

La classe a_ℓ étant primitive, sa restriction à $U_{S'}$ est nulle. Si S' est de degré N sur S, on en déduit par un argument de trace que

$$N.(\text{restriction de } a_\ell \text{ à } U) = 0.$$

Pour ℓ premier à N, il en résulte que $a_\ell \mid U = 0$. Restent à traiter des ℓ, en nombre fini, qui divisent N. On peut supposer et on suppose ℓ inversible sur S. Soit n la plus grande puissance de ℓ divisant N. La suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{n} \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}/n \to 0,$$

tordue à la Tate, fournit une suite exacte longue

$$H^2(U, \mathbf{Z}_\ell(2)) \to H^2(U, \mathbf{Z}/n(2)) \xrightarrow{\partial} H^3(U, \mathbf{Z}_\ell(2)) \xrightarrow{n} H^3(U, \mathbf{Z}_\ell(2))$$

de sorte que la restriction de a_ℓ à U est de la forme ∂b, avec $b \in H^2(U, \mathbf{Z}/n(2))$.

Soit η le point générique de U. Par Merkurjev-Suslin (1982), la restriction de b à $H^2(\eta, \mathbf{Z}/n(2))$ est de la forme $\Sigma(f_i, g_i)_n$ avec $f_i, g_i \in k(\eta)^*$. La cohomologie étale de η est la limite inductive des cohomologies étales de ses voisinages de Zariski $V \subset U$. Il existe donc $V \subset U$, dense, tel que les f_i, g_i soient inversibles sur V et que sur V on ait $b = \Sigma(f_i, g_i)_n$. Dès lors, b se relève à $H^2(U, \mathbf{Z}_\ell(2))$ et $\partial b = a_\ell \mid V = 0$.

2. La construction principale

2.1. Soient G un schéma en groupes sur un schéma S et $\mathscr{B}$ un faisceau (0.N.1) de groupes abéliens sur S. On suppose G séparé sur S. Si S est le spectre d'un corps F, de clôture séparable $\bar{F}$, la donnée de $\mathscr{B}$ équivaut à celle d'un groupe abélien B, muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Nous supposerons G de type fini sur S et, pour tout schéma X de type fini sur S, nous noterons $\mathscr{B}_X$ le faisceau sur X image inverse de $\mathscr{B}$.

Nous aurons besoin de disposer, pour tout schéma X de type fini sur S, d'une résolution $\mathscr{B}^*_X$ de $\mathscr{B}_X$, fonctorielle en X et à composantes acycliques. La fonctorialité en X signifie que pour $f : Y \to X$ un morphisme de schémas de type fini sur S, on dispose d'un morphisme de résolutions $f^* \mathscr{B}^*_X \to \mathscr{B}^*_Y$, avec une compatibilité pour un morphisme composé. « Composantes acycliques » signifie $H^i(X, \mathscr{B}^m_X) = 0$ pour $i > 0$.

La résolution flasque canonique (SGA4, XVII, 4.2) fait l'affaire. Une résolution injective $\mathscr{B}^*$ de l'image inverse de $\mathscr{B}$ sur le gros site étale S_{ET} de S aussi. Le site S_{ET} est celui des schémas de type fini sur S, pour la topologie étale. Pour $f: X \to S$ de type fini, *i.e.* X dans S_{ET}, les morphismes de sites $f: X_{ET} \to S_{ET}$ et $p: X_{ET} \to X_{et}$ donnent lieu à des foncteurs f^* et p_*, exacts et admettant (SGA4 (t. I), IV, 5) pour adjoints à gauche respectivement $f_!$ et p^*. Le composé $p_* f^*$ est simplement le foncteur de restriction à X_{et} d'un faisceau sur S_{ET}, de sorte qu'une résolution injective $\mathscr{B}^*$ de l'image inverse de $\mathscr{B}$ sur S_{ET} induit une résolution injective fonctorielle en X de $\mathscr{B}_X$ sur chaque X_{et}.

Pour $i: Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X, le lecteur veillera à ne pas confondre $\mathscr{B}^*_Y$ avec l'image inverse sur Y de $\mathscr{B}^*_X$. Nous n'aurons pas à faire usage de cette image inverse, dont les composantes ne sont en général pas acycliques. Nous appellerons « restriction à Y » le morphisme $i^*: \Gamma(X, \mathscr{B}^*_X) \to \Gamma(Y, \mathscr{B}^*_Y)$.

Si cela ne crée pas d'ambiguïté, nous écrirons simplement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ pour $\mathscr{B}_X$ et $\mathscr{B}^*_X$. Par exemple, nous écrirons $H^*(X, \mathscr{B})$ pour $H^*(X, \mathscr{B}_X)$.

Notation. — Pour $f: X \to Y$ un morphisme et $c \in \Gamma(Y, \mathscr{B}^n)$, nous écrirons parfois $c(f)$ pour $f^* c$. Cette notation sera particulièrement commode pour $X = S$, *i.e.* pour $f \in Y(S)$.

2.2. Soient $(Y_c)_{c \in C}$ une famille finie de sous-schémas fermés de X, et $j: U \hookrightarrow X$ l'inclusion dans X du complément de la réunion des Y_c. Pour $D \subset C$, soit $i(D): Y(D) \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'intersection Y(D) des Y_d ($d \in D$). On a $Y(\emptyset) = X$. Si l'on identifie D à sa fonction caractéristique $C \to \{0, 1\}$, les $i(D)_*(\mathscr{B}_{Y(D)})$ apparaissent comme un complexe C-uple, nul en degrés $\neq 0, 1$, de différentielles les morphismes de restriction. Le complexe simple associé est une résolution de $j_! \mathscr{B}_U$, ainsi qu'on le vérifie point par point. Résolvant ses composantes par les $i(D)_* \mathscr{B}^*_{Y(T)}$, on obtient une résolution de $j_! \mathscr{B}_U$ à composantes acycliques : les morphismes

$$\textbf{(2.2.1)} \qquad j_! \mathscr{B}_U \to \mathbf{s}(i(D)_* \mathscr{B}_{Y(D)}) \to \mathbf{s}(i(D)_* \mathscr{B}^*_{Y(D)})$$

sont des quasi-isomorphismes. Passant aux sections globales, on voit que la cohomologie de $j_! \mathscr{B}_U$ (cohomologie relative de X mod $\bigcup Y_c$) est celle du complexe simple associé au complexe (C + 1)-uple suivant :

$$\textbf{(2.2.2)} \qquad H^*(X, j_! \mathscr{B}_U) = H^* \, \mathbf{s}\Gamma(Y(D), \mathscr{B}^*_{Y(D)}).$$

2.3. En termes d'un système fonctoriel de résolutions $\mathscr{B}^*$ comme en 2.1, la cohomologie $H^*(BG, \mathscr{B})$ est celle du complexe simple associé au complexe double des $\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m)$, comme en 1.1 (B).

Si $f: K \to L$ est un morphisme de complexes, la *cohomologie relative* correspondante est celle du complexe simple associé au complexe double $[K \xrightarrow{f} L]$ nul en premier degré $\neq 0, 1$ et ayant K (resp. L) comme colonne d'indice 0 (resp. 1). Un cocycle est donc un cocycle de K muni d'une homologie à zéro de son image dans L. Si f est en chaque degré un épimorphisme, le sous-complexe $\mathrm{Ker}(f) \subset K$ de $\mathbf{s}[K \to L]$ a même cohomologie.

La cohomologie réduite $\widetilde{H}^*(BG, \mathscr{B})$ de 1.10, vue comme celle de BG mod Be, est obtenue par ce procédé : c'est celle du complexe

(2.3.1) $$\mathbf{s}[\mathbf{s}\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m) \to \mathbf{s}\Gamma(e^{\Delta_n}/e, \mathscr{B}^m)].$$

Nos calculs utiliseront trois complexes quasi-isomorphes (et même homotopes) à (2.3.1). A $n \geqslant 0$ fixe, le complexe $\Gamma(e^{\Delta_n}/e, \mathscr{B}^*)$ est une copie de $\Gamma(S, \mathscr{B}^*)$. La différentielle simpliciale est alternativement 0 et l'identité : la colonne $n = 0$ du complexe $\mathbf{s}\Gamma(e^{\Delta_n}/e, \mathscr{B}^m)$ en est un facteur direct, et a la même cohomologie. Remplaçant dans (2.3.1) $\mathbf{s}\Gamma(e^{\Delta_n}/e, \mathscr{B}^m)$ par sa colonne $n = 0$, on obtient donc un complexe quasi isomorphe

(2.3.1)′ $$\mathbf{s}[\mathbf{s}\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m) \to \Gamma(e^{\Delta_0}/e, \mathscr{B}^m)].$$

Plus précisément, le morphisme naturel de (2.2.1) dans (2.2.1)′ est une équivalence d'homotopie. Puisque $G^{\Delta_0}/G = e^{\Delta_0}/e = S$, remplaçant (2.3.1)′ par un noyau, on obtient le sous-complexe quasi isomorphe

(2.3.2) $$\mathbf{s}[\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m) \text{ pour } n > 0,\ 0 \text{ pour } n \leqslant 0].$$

Puisque $\mathscr{B}^m_X$ est fonctoriel en X, pour tout schéma X de type fini sur S muni d'une section $e \in X(S)$, on a

$$\mathscr{B}^m(S) \oplus \mathrm{Ker}(e^* : \mathscr{B}^m(X) \to \mathscr{B}^m(S)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}^m(X).$$

Remplaçant (2.3.1) par un noyau, on obtient un sous-complexe de (2.3.2)

(2.3.3) $$\mathbf{s}(\mathrm{Ker}(e^* : \Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m) \to \Gamma(S, \mathscr{B}^m)).$$

A n fixé, le complexe $\mathrm{Ker}(e^* : \Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m) \to \Gamma(S, \mathscr{B}^m))$ calcule la cohomologie réduite (1.10) de G^n que (2.2.2) pour le sous-schéma fermé « section neutre » de G^n identifie à la cohomologie de $\mathscr{B}$ sur $G^n - e$, prolongé par 0 sur G^n.

A m fixé, $\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m)$ est simplicial en n, donc homotope au sous-complexe annulé par tous les opérateurs de dégénérescence. Dans (2.3.1), remplaçons $\Gamma(G^{\Delta_n}/G, \mathscr{B}^m)$ par le noyau de tous les opérateurs de dégénérescence. Faisons de même pour $\Gamma(e^{\Delta_n}/e, \mathscr{B}^m)$: on obtient à nouveau la colonne $n = 0$. Prenons enfin le noyau. Si l'on identifie G^{Δ_n}/G à G^n comme en 1.3, on obtient un sous-complexe de (2.3.3)

(2.3.4) $$\mathbf{s}(\ker(\Gamma(G^n, \mathscr{B}^m) \to \bigoplus_1^n \Gamma(G^{n-1}, \mathscr{B}^m)))$$

où la flèche est la somme des morphismes de restriction aux sous-schémas $g_i = e$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Dans (2.3.2) et (2.3.3), nous identifierons aussi G^{Δ_n}/G à G^n, comme en 1.3. Les suites spectrales définies par la filtration par n s'écrivent respectivement

(2.3.5) $$E_1^{pq} = \begin{cases} H^p(G^p, \mathscr{B}) & (p > 0) \\ 0 & (p \leqslant 0) \end{cases} \Rightarrow \widetilde{H}^*(BG, \mathscr{B})$$

(2.3.6) $$E_1^{pq} = \widetilde{H}^q(G^p, \mathscr{B}) \Rightarrow \widetilde{H}^*(BG, \mathscr{B}).$$

Dans (2.3.6), la notation $\sim$ est celle de 1.10.

Pour $T \subset \{1, \ldots, n\}$, soit D_T le sous-schéma « $g_i = e$ pour $i \in T$ » de G^n. Les $\Gamma(D_T, \mathscr{B}^m)$ forment un complexe n-uple, nul en degrés $\neq 0, 1$: identifier T à sa fonction caractéristique $\{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ et prendre pour différentielles les restrictions (cf. 2.2). Le complexe simple associé est, à n et m fixés, une résolution du noyau (2.3.4). Ce fait est un cas particulier d'un énoncé valable pour tout groupe abélien cosimplicial C, considéré comme un foncteur sur la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés non vides : si R_T est la relation d'équivalence sur Δ_n engendrée par $i - 1 \equiv i$ si $i \in T$, le noyau des opérateurs de dégénérescence sur $C(\Delta_n)$ admet pour résolution le complexe simple associé au complexe n-uple des $C(\Delta_n/R_T)$.

D'après 2.2.2, appliqué aux sous-schémas $g_i = e$ de G^n, le complexe

$$\mathrm{Ker}(\Gamma(G^n, \mathscr{B}^*) \to \bigoplus_1^n \Gamma(G^{n-1}, \mathscr{B}^*))$$

calcule donc la cohomologie relative de G^n modulo la réunion des $g_i = e$: pour j^n l'inclusion de $(G - e)^n$ dans G^n, la suite spectrale définie par (2.3.4) s'écrit

(2.3.7) $$E_1^{pq} = H^q(G^p, j_!^p \mathscr{B}) \Rightarrow \widetilde{H}^*(BG, \mathscr{B}).$$

2.4. Fixons $\mathbf{c} \in \widetilde{H}^4(BG, \mathscr{B})$ et un cocycle représentatif $c_3 + c_2 + c_1 + c_0$ dans le complexe (2.3.2) : $c_i \in \Gamma(G^{4-i}, \mathscr{B}^i)$. Notons d' la différentielle simpliciale et d'' celle de $\mathscr{B}^*$. Que Σc_i soit un cocycle s'écrit

(2.4.1) $$d'' c_3 = d' c_3 + d'' c_2 = d' c_2 - d'' c_1 = d' c_1 + d'' c_0 = d' c_0 = 0.$$

La classe $[c_3] \in H^3(G, \mathscr{B})$ est l'image de $\mathbf{c}$ dans le terme $E_1^{1,3}$ de la suite spectrale (2.3.5). Elle vérifie $d_1[c_3] = 0$, *i.e.* est primitive : si $\mu : G \times_S G \to G$ est la loi de groupe, on a

(2.4.2) $$\mu^*[c_3] = \mathrm{pr}_1^*[c_3] + \mathrm{pr}_2^*[c_3].$$

L'application

(2.4.3) $$G(S) \to H^3(S, \mathscr{B}) \ : \ g \mapsto g^*[c_3]$$

est donc un homomorphisme.

Soit $G(S)^0$ le noyau de (2.4.3). Avec la notation 2.1, pour $g \in G(S)^0$, $c_3(g) := g^* c_3$ dans $\Gamma(S, \mathscr{B}^3)$ est un cobord. Définissons $E(g) \subset \Gamma(S, \mathscr{B}^2)/\mathrm{Im}(d)$ par

(2.4.4) $$E(g) := \{ x \in \Gamma(S, \mathscr{B}^2) \mid dx = g^* c_3 \}/\mathrm{Im}(d).$$

C'est un torseur sous $H^2(S, \mathscr{B})$.

L'identité (2.4.2) se précise en

$$\mathrm{pr}_2^* c_3 - \mu^* c_3 + \mathrm{pr}_1^* c_3 = - d'' c_2$$

sur $G \times G$. Pour g et h dans le noyau de (2.4.3), on a donc

$$h^* c_3 - (gh)^* c_3 + g^* c_3 = - d''(g, h)^* c_2,$$

d'où une application

(2.4.5) $$\mathrm{E}(g) \times \mathrm{E}(h) \to \mathrm{E}(gh) \ : \ x', x'' \mapsto x' + x'' + (g, h)^* c_2.$$

Avec la notation introduite en 2.1 : $x', x'' \mapsto x' + x'' + c_2(g, h)$. Cette application fait de $\mathrm{E}(gh)$ la somme des torseurs $\mathrm{E}(g)$ et $\mathrm{E}(h)$:

(2.4.6) $$\mathrm{E}(g) + \mathrm{E}(h) \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(gh).$$

Pour g_1, g_2, g_3 dans le noyau de (2.4.2),

$$(g_2, g_3)^* c_2 - (g_1 g_2, g_3)^* c_2 + (g_1, g_2 g_3)^* c_2 - (g_1, g_2)^* c_2 = d''(g_1, g_2, g_3)^* c_3$$

est un cobord. Le diagramme d'isomorphismes 2.4.6

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}(g_1) + \mathrm{E}(g_2) + \mathrm{E}(g_3) & \longrightarrow & \mathrm{E}(g_1 g_2) + \mathrm{E}(g_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{E}(g_1) + \mathrm{E}(g_2 g_3) & \longrightarrow & \mathrm{E}(g_1 g_2 g_3) \end{array}$$

est donc commutatif, et les $\mathrm{E}(g)$ définissent une extension centrale $\mathrm{E}(c)$ ou simplement E

(2.4.7) $$0 \to \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B}) \to \mathrm{E} \to \mathrm{G}(\mathrm{S})^0 \to 0.$$

Un élément de E est la donnée $(g; x)$ de $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})^0$ et de $x \in \mathrm{E}(g)$. La loi de groupe est donnée par 2.4.5.

2.5. Soient c' et c'' deux cocycles représentant **c** et E′, E″ les extensions centrales correspondantes. Soit b une homologie de c' à c'' : $c'' - c' = db$ et écrivons $b = b^2 + b^1 + b^0$, avec b^i dans $\Gamma(\mathrm{G}^{3-i}, \mathscr{B}^i)$. On a $c''^3 - c'^3 = - d'' b^2$ et

(2.5.1) $$\mathrm{E}'(g) \to \mathrm{E}''(g) : x \mapsto x - b^2(g)$$

est un isomorphisme de torseur. Puisque

$$c''^2 - c'^2 = d' b^2 + d'' b^1,$$

l'isomorphisme (2.5.1) est compatible à l'addition (2.5.5) : l'homologie b définit un isomorphisme d'extensions $[b] : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''$. Cet isomorphisme ne change pas si b est remplacé par une cochaîne cohomologue $b + dy$.

Si des cocycles représentatifs c', c'', c''' donnent lieu à des extensions E′, E″, E‴ et que b' (resp. b'') est une homologie de c' à c'' (resp. c'' à c'''), de sorte que $b' + b''$ est une homologie de c' à c'', on a

(2.5.2) $$[b' + b''] = [b''] \circ [b'] : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''.$$

Si b est une homologie de c à c : $db = 0$, $[b^2] \in \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \mathscr{B})$ est une classe de cohomologie primitive. Elle définit un homomorphisme

(2.5.3) $$\mathrm{G}(\mathrm{S}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathrm{B}) \ : \ g \mapsto g^*[b^2]$$

et l'automorphisme $[b]$ de l'extension E est

(2.5.4) $$(g; x) \mapsto (g; x - b^2(g)).$$

En particulier, si $\widetilde{\mathrm{H}}^3(\mathrm{BG}, \mathscr{B}) = 0$, la construction 2.5 fournit un système transitif d'isomorphismes entre les extensions centrales définies par les cocycles représentatifs de $\mathbf{c}$:

Construction **2.6.** — *Une classe* $\mathbf{c} \in \widetilde{\mathrm{H}}^4(\mathrm{BG}, \mathscr{B})$ *définit un morphisme* (2.4.3) *de* G(S) *dans* $\mathrm{H}^3(\mathrm{S}, \mathscr{B})$ *et une classe d'isomorphie d'extensions centrales* (2.4.7) *du noyau* $\mathrm{G}(\mathrm{S})^0$ *par* $\mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B})$. *Si* $\widetilde{\mathrm{H}}^3(\mathrm{BG}, \mathscr{B}) = 0$, *elle définit même une extension centrale canonique (unique à isomorphisme unique près) de* $\mathrm{G}(\mathrm{S})^0$ *par* $\mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B})$.

Il reste à montrer que l'extension centrale construite est indépendante, à isomorphisme unique près, du choix de la résolution fonctorielle $\mathscr{B}^*$ de $\mathscr{B}$. Le plus simple est de se limiter aux résolutions fonctorielles définies par une résolution injective de $\mathscr{B}$ dans le gros site étale S_{ET} de S (2.1). Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux résolutions, il existe alors un morphisme de résolutions $u : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$. Il induit un isomorphisme d'extensions. De plus, si u' et u'' sont deux morphismes de résolutions : $\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$, ils sont homotopes, et induisent donc le même isomorphisme d'extensions.

2.7. *Fonctorialité.* — La construction 2.6 est fonctorielle en S, en G et en $\mathscr{B}$. Explicitons.

(i) Soit $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ un morphisme de schémas en groupes sur S. Pour c un cocycle représentatif de $\mathbf{c} \in \widetilde{\mathrm{H}}^4(\mathrm{BG}, \mathscr{B})$ et $c' = u^* c$ son image inverse sur BG′, les morphismes (2.4.3) et extensions centrales (2.4.7) correspondantes E et E′ donnent lieu à un diagramme commutatif

(2.7.1) $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B}) & \longrightarrow & \mathrm{E}' & \longrightarrow & \mathrm{G}'(\mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{S}, \mathscr{B}) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B}) & \longrightarrow & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{S}, \mathscr{B}). \end{array}$$

(ii) Soient $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme de schémas, $\mathrm{G}' := \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ l'image inverse de G sur S′ et $\mathscr{B}'$ un faisceau sur S′ muni de $\varphi : f^* \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$. On suppose choisis des systèmes de résolutions d'images inverses de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, comme en 2.1, et un morphisme prolongeant φ entre elles. Par exemple : travailler sur un gros site étale de S, assez gros pour contenir S′, prendre une résolution injective de l'image inverse de $\mathscr{B}$ sur ce site, choisir une résolution injective de $\mathscr{B}'$, et prolonger φ en un morphisme de résolutions. Pour c un cocycle représentatif de $\mathbf{c} \in \widetilde{\mathrm{H}}^4(\mathrm{BG}, \mathscr{B})$ et $c' = \varphi f^* c$ son image inverse sur BG′, les morphismes (2.4.3) et extensions centrales (2.4.7) correspondantes E et E′ donnent lieu à un diagramme commutatif

(2.7.2) $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathscr{B}) & \longrightarrow & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{S}, \mathscr{B}) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi f^*} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u f^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi f^*} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\mathrm{S}', \mathscr{B}') & \longrightarrow & \mathrm{E}' & \longrightarrow & \mathrm{G}'(\mathrm{S}') & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{S}', \mathscr{B}'). \end{array}$$

(iii) Pour S hensélien local de point fermé s, on a $H^*(S, \mathscr{B}) \xrightarrow{\sim} H^*(s, \mathscr{B})$. Faisons $S' = s$ dans (ii). Par (2.5.2), $G(S)^0$ est l'image inverse de $G(s)^0 \subset G(s)$ et l'extension E est l'image inverse par $G(S)^0 \to G(s)^0$ de l'extension centrale E'.

2.8. *Variante.* — La construction 2.6 est en fait valable dans tout topos. Prendre pour G un faisceau en groupes et pour $\mathscr{B}$ un faisceau abélien. De ce point de vue, 2.6 est le cas particulier du topos des faisceaux sur le site S_{ET}, pour $\mathscr{B}$ l'image inverse d'un faisceau sur S_{et} et pour G le faisceau des applications dans un objet en groupes de S_{ET}.

2.9. *Topologie.* — Soit F un corps local : localement compact non discret. Si G est un groupe algébrique sur F, *i.e.* un schéma en groupes de type fini sur S = Spec(F), le groupe G(F) est un groupe localement compact. Soient $\mathbf{c} \in H^4(BG, \mathscr{B})$ et c un cocycle représentatif. Nous nous proposons de vérifier que le sous-groupe $G(F)^0$ de G(F) correspondant est un sous-groupe ouvert, et de munir l'extension centrale E définie par c d'une topologie qui en fasse un groupe topologique et un revêtement de $G(F)^0$.

La construction repose sur le théorème des fonctions implicites : si $f: X \to Y$ est un morphisme étale de schémas de type fini sur F, le morphisme d'espaces localement compacts $f: X(F) \to Y(F)$ est un homéomorphisme local. Soient $\bar{F}$ et B comme en 2.1.

Lemme **2.10.** — *Soit* $h \in H^i(X, \mathscr{B})$. *L'application de* X(F) *dans*

$$H^i(S, \mathscr{B}) = H^i(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), B) : x \mapsto x^*(h)$$

est localement constante.

Preuve. — Soit $y \in X(F)$. L'hensélisé X_y de X en y est la limite projective des voisinages étales U de y (schéma U étale sur X muni de $\tilde{y} \in U(F)$ au-dessus de y). La cohomologie de X_y coïncide avec celle de son point fermé $y \simeq \mathrm{Spec}(F)$, et est la limite inductive de celle des voisinages étales U de y. Il existe donc un voisinage étale U tel que la restriction de h à U coïncide avec l'image inverse sur U de $y^*(h)$. La fonction $x \mapsto x^*(h)$ est alors constante de valeur $y^*(h)$ sur l'image de U(F) dans X(F). Par le théorème des fonctions implicites, cette image contient un voisinage de y et 2.10 en résulte.

Faisons dans 2.10 X = G et $h = [c_3]$: le morphisme (2.4.3) est localement constant et son noyau $G(F)^0$ est donc ouvert.

Pour faire de E un $H^2(S, \mathscr{B})$-torseur sur l'espace topologique $G(F)^0$, il suffit de définir une classe $\mathscr{C}$ de sections locales telle que

a) Pour tout $g \in G(F)^0$, il existe une section locale de classe $\mathscr{C}$ définie en g.

b) Si s_1 et s_2 sont deux sections locales de classe $\mathscr{C}$, sur leur domaine commun de définition $V \subset G(F)^0$ on a $s_2 = s_1 \varphi$ avec $\varphi : V \to H^2(S, \mathscr{B})$ localement constant.

Pour que la structure correspondante d'espace topologique sur E en fasse un groupe topologique, il suffit que, de plus,

c) Pour trois sections locales s_1, s_2 et s_3, sur l'ouvert de $G(F)^0 \times G(F)^0$ où $s_1(x)$, $s_2(y)$ et $s_3(xy)$ sont définis, on a $s_1(x)\, s_2(y) = s_3(xy)\, c(x, y)$ avec c localement constant.

Définissons la classe $\mathscr{C}$ comme étant celle des sections obtenues comme suit à partir d'un morphisme étale $f: U \to G$ tel que $f^*[c_3] = 0$, d'une section locale topologique φ de $f: U(F) \to G(F)$, de domaine $V \subset G(F)$ et de $x \in \Gamma(U, \mathscr{B}^2)$ vérifiant $f^* c_3 = dx$. La section est définie sur V, de valeur en v la classe modulo $\mathrm{Im}(d)$ de $\varphi(v)^*(x) \in \Gamma(S, \mathscr{B}^2)$.

Preuve de a). — Si $g \in G(F)^0$, $g^*[c_3] = 0$ et la preuve de 2.10 montre que g admet un voisinage étale $f: U \to G$ tel que $f^*[c_3] = 0$. De plus, par le théorème des fonctions implicites, $f: U(F) \to G(F)$ admet une section locale topologique en g.

Preuve de b). — Soient U_i, x_i, φ_i définissant des sections locales s_i $(i = 1, 2)$. Sur leur domaine commun de définition, s_1 et s_2 sont encore définies par le produit fibré $U_1 \times_G U_2$, $\mathrm{pr}_i^*(x_i)$ et (φ_1, φ_2) : on peut supposer et on suppose que $U_1 = U_2$ et que $\varphi_1 = \varphi_2$ (notés U et φ). La différence $x_2 - x_1$ est fermée. Soit $[x_2 - x_1] \in H^2(U, \mathscr{B})$ sa classe. Les sections s_1 et s_2 diffèrent par $\varphi^*[x_2 - x_1]$, localement constant par 2.10.

Preuve de c). — Soient U_i, x_i, φ_i définissant des sections locales s_i $(i = 1, 2, 3)$. Soient $\mu : G \times G \to G$ la loi de groupe et U le produit fibré sur $G \times G$ de $\mathrm{pr}_1^*(U_1)$, $\mathrm{pr}_2^*(U_2)$ et $\mu^*(U_3)$. La fonction $c(x, y)$ provient d'une classe dans $H^2(U, \mathscr{B})$ et d'une section locale topologique φ de $U(F) \to G(F) \times G(F)$, et l'on conclut encore par 2.10.

2.11. Soit U un schéma en groupes unipotent sur S, localement extension itérée de schémas en groupes additifs et supposant $\mathscr{B}$ annulé par un entier inversible sur S. Une application itérée de SGA4 (t. 3), XV, 2.2 donne

(2.11.1) $$\mathrm{R}a_*(U, \mathscr{B}) = \mathscr{B}.$$

Avec la notation $\sim$ de 1.9 et 1.10, on a donc $\widetilde{\mathrm{R}}a_*(U, \mathscr{B}) = 0$. La suite spectrale de 1.10 donne

(2.11.2) $$\widetilde{H}^*(U, \mathscr{B}) = 0.$$

Par (2.11.2) appliqué aux U^n et la suite spectrale (2.3.6), on a

(2.11.3) $$\widetilde{H}^*(BU, \mathscr{B}) = 0.$$

Si U est un sous-schéma de G et que $\mathbf{c} \in \widetilde{H}^4(BG, \mathscr{B})$, la fonctorialité (2.7.1) donne

(2.11.4) $$U(S) \subset G(S)^0 := \ker(G(F) \to H^3(S, \mathscr{B}))$$

et l'extension centrale définie par un cocycle représentatif de $\mathbf{c}$ est canoniquement scindée au-dessus de U(S). En particulier, si $\widetilde{H}^3(BG, \mathscr{B}) = 0$, l'extension centrale E canoniquement attachée à $\mathbf{c}$ est munie d'un scindage

(2.11.5)
$$\begin{tikzcd} & & & U(S) \arrow[dl] \arrow[d, hook] & \\ 0 \arrow[r] & H^2(S, \mathscr{B}) \arrow[r] & E \arrow[r] & G(S)^0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

2.12. Reprenons les notations de 2.4, en prenant c dans le complexe (2.3.4). Soit h dans $G(S)^0$. Relevons h en $\tilde{h} = (h; y)$ dans l'extension centrale E. L'automorphisme intérieur correspondant de E ne dépend que de h. Notons-le $\mathrm{Int}(h)$. Pour $(g; x)$ dans E, exprimant que

$$\mathrm{Int}(h)\,[(g; x)]\,(h; y) = (h; y)\,(g; x),$$

on obtient

$$\mathrm{Int}(h)\,[(g; x)] = (hgh^{-1}; x + c_2(h, g) - c_2(hgh^{-1}, h)). \tag{2.12.1}$$

Un calcul laissé au lecteur montre que pour h quelconque dans G(S) et $(g; x)$ dans E,

$$x + c_2(h, g) - c_2(hgh^{-1}, h) \in E(hgh^{-1})$$

et que $\mathrm{int}(h)$, défini par (2.12.1), définit une action de G(S) sur E, relevant l'action par automorphismes intérieurs de G(S) sur $G(S)^0$. Un argument plus transparent sera donné dans la preuve de 4.2.

Soient $(h; y)$ et $(g; x)$ dans E, de commutateur (h, g) (0.N.6). Exprimant que

$$(h, g)\,(g; x) = \mathrm{int}(h)\,[(g; x)],$$

on obtient

$$(h, g) = (hgh^{-1}g^{-1}; c^2(h, g) - c_2(hgh^{-1}, h) - c_2(hgh^{-1}g^{-1}, g)). \tag{2.12.2}$$

Un calcul laissé au lecteur (un calcul analogue sera donné en 4.4) montre que pour g et h quelconques dans G(S), on continue à avoir

$$c^2(h, g) - c_2(h^{-1}gh, h) - c_2(hgh^{-1}g^{-1}, g) \in E(hgh^{-1}g^{-1}).$$

Non seulement le commutateur de g et h est dans $G(S)^0$ — une conséquence de ce que (2.4.3) est un homomorphisme — mais, exprimant pourquoi, on obtient un relèvement explicite de ce commutateur dans E :

$$G(S) \times G(S) \to E, \quad \text{donné par (2.12.2)} \tag{2.12.3}$$

(h dans le premier facteur G(S), g dans le second).

L'intérêt de ces constructions est de s'appliquer à des cas universels. Indiquons par un indice X l'effet d'un changement de base $X \to S$. Sur $G \times G$, on dispose des deux sections g, h de $G_{G \times G}$ définies par $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : G \times G \to G$. Sur $G \times G$, l'image inverse du cocycle c définit encore une extension centrale, notée $E_{G \times G}$, de $G_{G \times G}(G \times G)^0$ par $H^2(G \times G, \mathscr{B})$ et (2.12.3) fournit un relèvement à $E_{G \times G}$ du commutateur universel $ghg^{-1}h^{-1}$. Pour $(g_0, h_0) \in G(S) \times G(S)$, le commutateur (2.12.3) s'en déduit par image inverse par $(g_0, h_0) : S \to G \times G$.

Soit $C \subset G \times G$ le sous-schéma des (g, h) tels que g commute à h et changeons

de base par $C \to S$. Au-dessus de C, le commutateur universel est trivial et son relèvement (2.12.3) fournit une classe de cohomologie

(2.12.4) $$[comm] \in H^2(C, \mathscr{B}).$$

Par construction, on a

Proposition **2.13.** — *Si g et h dans* $G(S)$ *commutent, le commutateur* (2.12.3) *de g et h, égal au commutateur* (0.N.6) *si $g, h \in G(S)^0$, est*

$$(g, h)^* [comm] \in H^2(S, \mathscr{B}).$$

2.14. L'intérêt de 2.13 est qu'il peut être plus facile de calculer une classe universelle dans $H^2(C, \mathscr{B})$ que de calculer directement un commutateur (0.N.6). Cf. 3.2.

Paraphrasons la construction de $[comm]$. Soient g, h et gh les applications pr_1, pr_2 et la loi de groupe de $G \times G$ dans G. On a sur $G \times G$

$$h^* c_3 - (gh)^* c_3 + g^* c_3 = - d''(g, h)^* c_2$$

et, prenant l'image inverse par $(g, h) \mapsto (h, g)$

$$g^* c_3 - (hg)^* c_3 + h^* c_3 = - d''(h, g)^* c_2.$$

Les membres de gauche ont la même image inverse sur C et

(2.14.1) $$comm := (g, h)^* c_2 - (h, g)^* c_2$$

est donc un 2-cocycle sur C. Il représente $[comm]$.

Si Y est l'un des sous-schémas $G \times e$, ou $e \times G$ de C, l'image de *comm* par le morphisme de restriction (fonctorialité de $\mathscr{B}^*$)

$$\Gamma(C, \mathscr{B}^2_C) \to \Gamma(Y, \mathscr{B}^2_Y)$$

est nulle. Le cocycle *comm* est donc encore un cocycle dans le complexe (2.2.2) relatif à ces sous-schémas. Par (2.2.2), il définit une classe dans la cohomologie relative de C mod $G \times e \cup e \times G$.

Si on change le représentant c de $\mathbf{c}$ en $c + db$, $b = b_2 + b_1 + b_0$, le 2-cocycle *comm* est changé en

$$comm + d''((g, h)^* b_1 - (h, g)^* b_1),$$

et $(g, h)^* b_1 - (h, g)^* b_1$ s'annule par restriction à $G \times e$, $e \times G$. La classe de cohomologie

(2.14.2) $$[comm] \in H^2(C \bmod G \times e \cup e \times G, \mathscr{B})$$

ne dépend donc que de $\mathbf{c}$. Des arguments analogues permettraient de préciser $[comm]$ en une classe de cohomologie dans $H^2(C \bmod G \times e \cup e \times G \cup \Delta, \mathscr{B})$, pour Δ la diagonale $\delta(G)$ de $G \times G$.

3. Groupes semi-simples simplement connexes

3.1. Reprenons comme en 1.9 les notations S, n (inversible sur S), A (annulé par n), a (projection sur S), T (tore sur S), $X = \mathscr{H}om_S(T, \mathbf{G}_m)$, $Y = \mathscr{H}om_S(\mathbf{G}_m, T)$ de (0.N.7). Soit $\mathbf{c}$ une classe

$$\mathbf{c} \in \tilde{H}^4(BT, A(2))$$

(notation $\sim$ de 1.10). Pour $i = 2$, (1.9.3) s'écrit

$$R^4 a_*(BT, A(2)) = \mathrm{Sym}^2(X) \otimes A.$$

Par localisation sur S, la classe $\mathbf{c}$ fournit donc une section globale de $\mathrm{Sym}^2(X) \otimes A$, *i.e.* une forme quadratique Q_c à valeurs dans A sur Y.

La classe $\mathbf{c}$ définit un morphisme (2.4.3) de T(S) dans $H^3(S, A(2))$ et une classe d'isomorphie d'extensions centrales du noyau $T(S)^0$ par $H^2(S, A(2))$. D'après 2.13 et 2.14, l'application commutateur correspondante (0.N.6), de $T(S)^0 \times T(S)^0$ dans $H^2(S, A(2))$, est définie par une classe

$$comm(\mathbf{c}) \in H^2(T \times_S T \bmod T \times e \cup e \times T, A(2)).$$

On se propose de la calculer.

D'après (1.9.2), déduit de (1.6.4), on a

$$\textbf{(3.1.1)} \qquad R^i a_*(T \bmod e, \mathbf{Z}/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ \overset{i}{\wedge} X \otimes \mathbf{Z}/n(-i) & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Le calcul de $R^* a_*(T \times_S T \bmod T \times e \cup e \times T, \mathbf{Z}/n)$ s'en déduit par la formule de Künneth : c'est

$$[\wedge(X \otimes \mathbf{Z}/n(-1)) \text{ en degrés} > 0]^{\otimes 2}.$$

Tensorisant avec A(2), on a donc

$$\textbf{(3.1.2)} \qquad R^2 a_*(T \times_S T \bmod T \times e \cup e \times T, A(2)) = X \otimes X \otimes A,$$

(3.1.3) nullité des $R^i a_*$ précédents.

Par la suite spectrale de Leray pour la projection sur S, on déduit de (3.1.1), tensorisé avec A(1) (voir 1.5.1 Remarque) (resp. de (3.1.2) et (3.1.3)) que

$$\textbf{(3.1.4)} \qquad H^1(T \bmod e, A(1)) = H^0(S, X \otimes A),$$

$$\textbf{(3.1.5)} \qquad H^2(T \times_S T \bmod T \times e \cup e \times T, A(2)) = H^0(S, X \otimes X \otimes A).$$

Le groupe $H^0(S, X \otimes X \otimes A)$ est celui des formes bilinéaires sur Y à valeurs dans A.

Proposition **3.2.** — *La forme bilinéaire sur* Y *image de comm*(**c**) *par* (3.1.5) *est l'opposée de la forme bilinéaire* B_c *associée à* Q_c.

Preuve. — Il suffit de vérifier 3.2 en chaque point géométrique de S. On peut donc supposer, et on suppose, que S est le spectre d'un corps algébriquement clos F. Par fonctorialité en A, on peut aussi supposer que $A = \mathbf{Z}/n$.

L'application de restriction en cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/n(2)$

$$H^1(T \times T) \xrightarrow{\sim} H^1(T \times e \cup e \times T) \simeq H^1(T) \times H^1(T)$$

est bijective, en particulier surjective. Par la suite exacte longue de cohomologie, l'application

$$H^2(T \times T \bmod T \times e \cup e \times T) \to H^2(T \times T)$$

est donc injective. Son image est le noyau de

$$\textbf{(3.2.1)} \qquad H^2(T \times T) \to H^2(T) \times H^2(T)$$

et il suffit de vérifier 3.2 dans $H^2(T \times T)$. L'identification utilisée en 3.1 entre le noyau de

$$\overset{2}{\wedge}(X \oplus X) \otimes \mathbf{Z}/n \to (\overset{2}{\wedge} X \oplus \overset{2}{\wedge} X) \otimes \mathbf{Z}/n$$

et $X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n$, donnée par Künneth, est

$$x \otimes y \mapsto x' \wedge y'' \ \text{(modulo } n)$$

où $'$ (resp. $''$) est la première (resp. seconde) injection de X dans $X \oplus X$.

La classe **c** est celle d'un cocycle $c^3 + c^2 + c^1 + c^0$ (2.4). Dans la suite spectrale 2.3.5 pour BT, on a $E_2^{1,3} = 0$ (cf. 1.6.8). On peut donc supposer que $c^3 = 0$. La cochaîne c^2 est alors un cocycle. Soit $[c^2] \in H^2(T \times T)$ sa classe de cohomologie. Par définition, $Q_c \in \mathrm{Sym}^2(X) \otimes \mathbf{Z}/n$ est obtenu comme suit : $[c^2] \in H^2(T \times T) = E_1^{22}$ vérifie $d_1[c_2] = 0$, donc a une image $[c_2]^-$ dans E_2^{22}. Lorsqu'on identifie E_2^{22} à $\mathrm{Sym}^2(X) \otimes \mathbf{Z}/n$ par la structure multiplicative de la suite spectrale (1.1.3), $Q_c = [c_2]^-$.

Explicitons. Le produit

$$E_1^{11} \otimes E_1^{11} \to E_1^{22} : X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n \to \overset{2}{\wedge}(X \oplus X) \otimes \mathbf{Z}/n$$

est

$$x \otimes y \mapsto -\partial_2(x) \wedge \partial_0(y) = -x' \wedge y'' \ \text{(modulo } n).$$

Puisque E_1^{11} est égal à E_2^{11}, il est à valeurs dans $\mathrm{Ker}(d_1)$. Le morphisme

$$d_1 : E_1^{12} \to E_1^{22} : \overset{2}{\wedge} X \otimes \mathbf{Z}/n \to \overset{2}{\wedge}(X + X) \otimes \mathbf{Z}/n$$

est

$$\begin{aligned} x \wedge y \mapsto x'' \wedge y'' - (x' + x'') \wedge (y' + y'') + x' \wedge y' \\ = -(x' \wedge y'' + x'' \wedge y') \ \text{(modulo } n). \end{aligned}$$

Les images du produit et de d_1 engendrent $\mathrm{Ker}(d_1 : E_1^{21} \to E_1^{3,1})$, que l'on peut donc identifier à $X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n$ par $x \otimes y \mapsto x' \wedge y''$. Pour cette identification, le produit est l'opposé du produit $x \otimes y$ évident, l'image de d_1 est le sous-groupe des $y \otimes x - x \otimes y$. Le quotient de $X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n$ par ce sous-groupe est $\mathrm{Sym}^2(X) \otimes \mathbf{Z}/n$ et, pour cette identification,

$$Q_c = -[c_2]^-.$$

Soit τ la symétrie $(g, h) \mapsto (h, g)$ de $T \times T$. Par définition, l'image de $comm(\mathbf{c})$ dans $H^2(T \times T)$ est

$$comm(\mathbf{c}) = [c_2] - \tau^*[c_2].$$

L'action de τ sur $X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n \subset H^2(T \times T)$ est donnée par

$$\tau^* : x' \wedge y'' \mapsto x'' \wedge y' = -y' \wedge x'',$$

i.e. $$x \otimes y \mapsto -y \otimes x \text{ (modulo } n).$$

Pour $c_2 = x' \wedge y''$, Q_c est donc la forme quadratique $-xy$ sur Y et $comm(\mathbf{c})$ la forme bilinéaire $x \otimes y + y \otimes x$, en accord avec 3.2.

3.3. Le noyau de $t \mapsto t^n : T \to T$ est canoniquement isomorphe à $Y \otimes \mathbf{Z}/n(1)$. Le morphisme $t \mapsto t^n : T \to T$ est fini, étale et surjectif; il fait de T un $Y \otimes \mathbf{Z}/n(1)$-torseur (0.N.5) sur T, trivialisé le long de la section neutre e. Soit

$$b \in H^1(T \bmod e, Y \otimes \mathbf{Z}/n(1))$$

sa classe de cohomologie. L'isomorphisme (3.1.1)

$$R^1 a_*(T \bmod e, \mathbf{Z}/n(1)) = X \otimes \mathbf{Z}/n$$

est donné par $x \mapsto x(b)$, et l'isomorphisme (3.1.2)

$$R^2 a_*(T \bmod T \times e \cup e \times T, \mathbf{Z}/n(1)) = X \otimes X \otimes \mathbf{Z}/n$$

est donc donné par

$$x \otimes y \mapsto x \otimes y(b \boxtimes b).$$

Pour $B \in H^0(S, X \otimes X \otimes A)$, identifié à un morphisme $Y \otimes Y \to A$, la classe correspondante (3.1.5) dans $H^2(T \times_S T \bmod T \otimes e \cup e \times T, (2))$ est donc

$$B(b \boxtimes b).$$

Il suffit de le vérifier en chaque point géométrique.

Pour $g \in T(S)$, $g^*(b) \in H^1(S, Y \otimes \mathbf{Z}/n(1))$ est simplement le cobord ∂g de g pour la suite exacte longue de cohomologie définie par

(3.3.1) $$0 \to Y \otimes \mathbf{Z}/n(1) \to T \to T \to 0.$$

L'image inverse par g du $Y \otimes \mathbf{Z}/n(1)$-torseur de classe b est en effet simplement l'image inverse de g par $t \mapsto t^n$ (voir SGA4$\frac{1}{2}$, Cycles 1.1, pour les conventions de signes).

Pour $g, h \in T(S)$, on a

$$\begin{aligned}(g, h)^*(b \boxtimes b) &= g^*(b) \otimes h^*(b) \\ &= \partial g \otimes \partial h\end{aligned}$$

dans $H^2(S, Y \otimes Y \otimes \mathbf{Z}/n(2))$ et

$$(g, h)^*(B(b \boxtimes b)) = B(\partial g \otimes \partial h)$$

dans $H^2(S, A(2))$.

Appliquant 2.13 et 3.2, on obtient

Proposition **3.4.** — *Avec les notations de* 3.1 *et* 3.3, *le commutateur* (2.12.3) *de g et h dans* $T(S)$ *est*

(3.4.1) $$(g, h) = -B_c(\partial g \otimes \partial h)$$

pour $B_c : Y \otimes Y \to A$ *la forme bilinéaire associée à* Q_c. *En particulier, si* $g, h \in T(S)^0$, *le commutateur* (0.N.6) *de g et h dans l'extension centrale* E *de* $T(S)^0$ *par* $H^2(S, A(2))$ *est donné par* (3.4.1).

Rassemblons les résultats obtenus. Les notations sont celles de (0.N.7).

3.5. *Théorème principal.* — *Soient* G *un schéma en groupes semi-simples simplement connexes sur* S, *de faisceau de facteurs simples* I, *et*

$$c \in H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes A)$$

correspondant par (1.10.1) *à* $\mathbf{c} \in \widetilde{H}^4(BG, A(2))$. *Les* $\widetilde{H}^i$ *précédents sont nuls* (1.10.2). *Par* 2.6, *la classe* $\mathbf{c}$ *fournit un homomorphisme*

(3.5.1) $$G(S) \to H^3(S, A(2))$$

et une extension centrale canonique $E(c)$ *du noyau* $G(S)^0$ *par* $H^2(S, A(2))$:

(3.5.2) $$0 \to H^2(S, A(2)) \to E(c) \to G(S)^0 \to 0.$$

Soient T *un sous-schéma en tores de* G. *La restriction de* $\mathbf{c}$ *à* BT, *localisée sur* S, *définit une forme quadratique* Q_c *sur* Y, *à valeurs dans* A. *Soit* B_c *la forme bilinéaire associée. Pour* $g, h \in T(S)^0 = T(S) \cap G(S)^0$, *le commutateur de g et h dans* $E(c)$ *est*

(3.5.3) $$(g, h) = -B_c(\partial g \otimes \partial h),$$

où $\partial : T(S) \to H^1(S, Y \otimes \mathbf{Z}/n(1))$ *est le cobord défini par* (3 3.1).

Pour T *un sous-schéma en tores maximaux,* Q_c *dans* $H^0(S, \mathrm{Sym}^2(X)^W \otimes A)$ *est caractérisé par la condition que, localement sur* S, *si* α *est une racine longue d'un facteur simple* G_i *de* G, $Q_c(H_\alpha) = c_i$.

Si S *est le spectre d'un corps* F *et que* $A = \mathbf{Z}/n$, (3.5.1) *est trivial* : E(c) *est une extension par* $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$ *de* G(S) *tout entier* :

(3.5.4) $$0 \to H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) \to E(c) \to G(F) \to 0.$$

3.6. *Cas particulier.* — Si G est simple (0.N.4), et que $A = \mathbf{Z}/n$, la donnée de c est simplement la donnée d'un entier modulo n localement constant sur S. Pour $c = 1$, on appellera **c** le *générateur canonique* de $\tilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ et E(c) l'*extension canonique* par $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$.

Proposition **3.7.** — *Soit* G *un groupe algébrique simple simplement connexe déployé sur un corps infini* F. *L'extension centrale canonique* (3.6) *de* G(F) *par* $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$ *est celle attachée par Matsumoto (1969) à l'opposé du symbole galoisien* (0.3).

Preuve. — Soit T un tore maximal déployé de G. Par Matsumoto (1969), II, 5.4 *c)* et la preuve de *ibid.*, II, 5.8, l'extension que Matsumoto attache à un symbole c a une restriction à T(F) dont le commutateur est donné par

(3.7.1) $$(y_1(s), y_2(t)) = \langle y_1, y_2 \rangle c(s, t)$$

pour $y_1, y_2 \in Y = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ et $\langle\ ,\ \rangle$ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique entière W-invariante Q sur Y vérifiant $Q(H_\alpha) = 1$ pour α une racine longue. Pour comparer à la formule donnée par Matsumoto, utiliser que

$$Q(H_\alpha)\, \alpha(H_\beta) = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle.$$

Prenons pour symbole c l'opposé du symbole galoisien. D'après 3.5, la même formule donne alors le commutateur pour l'extension canonique (3.6).

Supposons tout d'abord que G n'est pas de type C_n ($n \geqslant 1$). Toute extension centrale de G(F) est alors donnée par un symbole. De plus, la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ prend la valeur 1 et ce symbole est donc déterminé par l'application commutateur, pour la restriction à T de l'extension centrale. Ceci prouve 3.7 pour G non de type C_n ($n \geqslant 1$).

Supposons G de type $A_1 = C_1$: $G = SL(2)$. Regardons SL(2) comme sous-groupe de SL(n) ($n \geqslant 3$) par la représentation linéaire somme de la représentation tautologique et d'une représentation triviale. Les extensions centrales (3.6) et de Matsumoto de SL(2) sont induites par les extensions centrales analogues pour SL(n), et 3.7 pour G de type A_1 résulte de 3.7 pour G de type A_n.

Pour G quelconque, réalisons SL(2) comme sous-groupe de G engendré par $H_\alpha(\mathbf{G}_m)$ et les sous-groupes radiciels $U_{\pm\alpha}$, pour α une racine longue. D'après Matsumoto (1969), II, 5.10, une extension centrale de G est déterminée par sa restriction à SL(2), et 3.7 pour G résulte de 3.7 pour SL(2).

Remarque **3.8.** — Ci-dessus, nous avons traité du cas où $G = SL(2)$ par réduction au cas où $G = SL(n)$ ($n \geqslant 3$). Voici une autre façon de procéder, peut-être plus naturelle.

Le groupe SL(2, F) étant parfait, *i.e.* égal à son groupe dérivé, il admet une extension centrale universelle

(3.8.1) $$1 \to L \to SL(2, F)^{\sim} \to SL(2, F) \to 1.$$

Étant solution d'un problème universel, cette extension est bien définie à isomorphisme unique près (cf. Moore (1968), chap. I).

Le groupe adjoint $SL(2)^{ad}$ est le groupe PGL(2), l'action de PGL(2) sur SL(2) étant déduite de l'action de GL(2) sur lui-même par automorphismes intérieurs. L'action de PGL(2, F) sur SL(2, F) se relève uniquement en une action sur $SL(2, F)^{\sim}$. L'extension (3.8.1) étant une extension centrale, le sous-groupe PSL(2, F) de PGL(2, F) image de SL(2, F) agit trivialement sur L : l'action de PGL(2, F) sur L se factorise par PGL(2, F)/PSL(2, F), identifié à F^*/F^{*2} par det. Soit $K := L_{PGL(2,F)}$ le groupe des co-invariants.

Soient a et b dans F^*, g dans PGL(2, F) la matrice diagonale $(a, 1)$, h dans SL(2, F) la matrice diagonale (b, b^{-1}) et $\tilde{h}$ un relèvement de h dans $SL(2, F)^{\sim}$.

Puisque g, agissant sur SL(2), fixe h, le « commutateur » $g(\tilde{h})\,\tilde{h}^{-1}$ est dans L. Son image (g, h) dans K est indépendante du choix de $\tilde{h}$ relevant h.

Dans Moore (1968), 9.2, ou Matsumoto (1969), 5.10, le noyau L est décrit par générateurs et relations. Calculant l'action de PGL(2, F) sur L, on déduit de leurs formules que le quotient K de L est $K_2(F)$. Plus précisément, l'application $(a, b) \mapsto g(\tilde{h})\,\tilde{h}^{-1}$ induit un isomorphisme de $K_2(F) = F^* \otimes F^*/\langle (a, 1-a) \rangle$ sur le quotient K de L.

Si une extension centrale

(3.8.2) $$1 \to L_1 \to SL(2, F)_1^{\sim} \to SL(2, F) \to 1$$

de SL(2, F) est telle que l'action de PGL(2, F) sur SL(2, F) se relève à $SL(2, F)_1^{\sim}$, avec action triviale sur L_1, elle est déduite de (3.8.1) par un morphisme $u : L \to L_1$ qui se factorise par le quotient $K = K_2(F)$ de L.

L'application « commutateur » $g(\tilde{h})\,\tilde{h}^{-1}$:

(3.8.3) $$\text{(matrices diagonales de PGL(2, F))} \times \text{(matrices diagonales de SL(2, F))} \to L_1$$

détermine u, et donc l'extension centrale (3.8.2). Pour vérifier 3.7 pour SL(2), il suffit donc de calculer le « commutateur » (3.8.3) pour l'extension canonique de SL(2, F) par $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$, et de comparer à Matsumoto. Le calcul du « commutateur » (3.8.3) sera fait, dans un cadre plus général, en 4.9.

Le cas de $Sp(2n, F)$ pourrait se traiter de même, plutôt que par réduction au cas de SL(2, F). Si T est le tore déployé maximal standard de $Sp(2n, F)$ et T^{ad} son image dans le groupe adjoint, l'extension centrale canonique est détectée par le « commutateur »

$$T^{ad}(F) \times T(F) \to H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$$

qui sera calculé en 4.9.

3.9. *Fonctorialités.* — (i) Le morphisme (3.5.1) et l'extension (3.5.2) sont fonctoriels en S, A et G. Voir 2.7. La fonctorialité en A, appliquée à l'addition $A \oplus A \to A$, fournit une additivité en c.

(ii) Soit $u : G \to H$ un morphisme entre schémas en groupes semi-simples simplement connexes sur S, de faisceaux de facteurs simples I et J. Définissons

$$u^* : \mathbf{Z}^J \to \mathbf{Z}^I. \tag{3.9.1}$$

Localement sur S, G (resp. H) est produit de facteurs simples G_i (resp. H_j) que l'on peut supposer déployés, et on choisit des tores maximaux déployés T_i de G_i et T_j de H_j tels que

$$u_{ji} : G_i \to G \to H \to H_j$$

envoie T_i dans T_j. Soient α_i et β_j des racines longues de G_i et H_j et Q_j la forme quadratique W-invariante sur $Y_j := \mathscr{H}om_S(\mathbf{G}_m, T_j)$ telle que $Q_j(H_{\beta_j}) = 1$. Alors, u^* a pour coefficients de matrice

$$(u^*)^i_j = Q_j(u_{ji}(H_{\alpha_i})).$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}^4(BH, A(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^0(S, \mathbf{Z}^J \otimes A) \\ \downarrow{\scriptstyle u^*} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ \widetilde{H}^4(BG, A(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes A) \end{array}$$

est commutatif. Pour $c \in H^0(S, \mathbf{Z}^J \otimes A)$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(S, A(2)) & \longrightarrow & E(u^*(c)) & \longrightarrow & G(S) & \longrightarrow & H^3(S, A(2)) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & H^2(S, A(2)) & \longrightarrow & E(c) & \longrightarrow & H(S) & \longrightarrow & H^3(S, A(2)). \end{array} \tag{3.9.2}$$

(iii) Soient $f : S' \to S$ fini étale, G' un schéma en groupes semi-simples simplement connexes sur S' et $G := \prod_{S'/S} G'$ (Demazure-Gabriel (1970), I, § 1, 6.6). Pour S et S' spectres de corps, G est déduit de G' par restriction des scalaires à la Weil. Pour G et G' vus comme faisceaux sur les gros sites étales de S et S', $G = f_* G'$. On a un isomorphisme canonique $G(S) = G'(S')$.

Soit I' le faisceau sur S' des facteurs simples de G'. Localement sur S, S' est somme disjointe de sections s_α, $G = \prod s_\alpha^* G'$ et le faisceau I des facteurs simples de G est la somme disjointe des $s_\alpha^* I'$. On a donc un isomorphisme

$$f_* \mathbf{Z}^{I'} = \mathbf{Z}^I. \tag{3.9.3}$$

Soit $c' \in H^0(S', \mathbf{Z}^{I'} \otimes A)$, correspondant par (3.9.1) et l'isomorphisme

$$H^0(S, f_* \mathbf{Z}^{I'} \otimes A) \xrightarrow{\sim} H^0(S', \mathbf{Z}^{I'} \otimes A)$$

à $c \in H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes A)$. Les morphismes (3.5.1) et extensions centrales (3.5.2) définis par c' et c donnent lieu à un diagramme commutatif

(3.9.4)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(S', A(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] & E(c') \arrow[r] \arrow[d] & G'(S') \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^3(S', A(2)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
0 \arrow[r] & H^0(S, A(2)) \arrow[r] & E(c) \arrow[r] & G(S) \arrow[r] & H^3(S, A(2)).
\end{tikzcd}$$

Pour construire (3.9.4), la première étape est de réinterpréter la première ligne comme donnée par une construction 3.5 sur S, pour $f_* A$. Localement sur S, S' est somme disjointe de sections s_α, et

$$\mathbf{Z}^I \otimes f_* A = (\bigoplus_\alpha \mathbf{Z}^{s_\alpha^* I'}) \otimes (\bigoplus_\alpha A)$$

contient comme facteur direct

$$\bigoplus_\alpha (\mathbf{Z}^{s_\alpha^* I'} \otimes A) = \mathbf{Z}^I \otimes A.$$

Soit c_S l'image de c. Les morphismes (3.5.1) et extensions centrales (3.5.2) définies par c' et c_S donnent lieu à un isomorphisme

(3.9.5)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(S', A(2)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(c') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & G'(S') \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^3(S', A(2)) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^2(S, f_* A(2)) \arrow[r] & E(c_S) \arrow[r] & G(S) \arrow[r] & H^3(S, f_* A(2)).
\end{tikzcd}$$

Pour construire (3.9.4) à partir de (3.9.5), on utilise la fonctorialité de 3.5 pour le morphisme trace $\mathrm{Tr}_f : f_* A \to A$. Un calcul local sur S montre que

$$\mathrm{Tr}_f : \mathbf{Z}^I \otimes f_* A \to \mathbf{Z}^* \otimes A$$

envoie c_S sur c, et (3.9.4) est le composé (3.9.5) et de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(S, f_* A(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] & E(c_S) \arrow[r] \arrow[d] & g(S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^3(S, f_* A(2)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] \\
0 \arrow[r] & H^2(S, A(2)) \arrow[r] & E(c) \arrow[r] & G(S) \arrow[r] & H^3(S, A(2)).
\end{tikzcd}$$

Construisons (3.9.5). La fonctorialité en S de 3.5, pour G et $f_* A$, fournit un diagramme commutatif

(3.9.6)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(S, f_* A(2)) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & E(c_S) \arrow[r] \arrow[d] & G(S) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(S, f_* A(2)) \arrow[d, "f_*"] \\
0 \arrow[r] & H^2(S', f^* f_* A(2)) \arrow[r] & E(f^* c_S) \arrow[r] & f^* G(S') \arrow[r] & H^3(S', f^* f_* A(2)).
\end{tikzcd}$$

La fonctorialité en A de (3.5), appliquée à S′, $f^* G$ et au morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_A : f^* f_* A \to A$, fournit un diagramme commutatif

(3.9.7)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(S', f^* f_* A(2)) & \longrightarrow & E(f^* c_S) & \longrightarrow & f^* G(S') & \longrightarrow & H^3(S', f^* f_* A(2)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{adj}_A} & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{adj}_A} \\
0 & \longrightarrow & H^2(S', A(2)) & \longrightarrow & E(\mathrm{adj}_A f^* c_S) & \longrightarrow & f^* G(S') & \longrightarrow & H^3(S', A(2)).
\end{array}$$

Le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_G : f^* G = f^* f_* G' \to G'$ définit $\mathrm{adj}_G^* : \mathbf{Z}^{I'} \to f^* \mathbf{Z}^* I$. Une vérification locale laissée au lecteur donne

(3.9.8) $$\mathrm{adj}_A f^*(c_S) = \mathrm{adj}_G^* c'.$$

De là, un diagramme commutatif

(3.9.9)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(S', A(2)) & \longrightarrow & E(\mathrm{adj}_A f^* c_S) & \longrightarrow & f^* G(S') & \longrightarrow & H^3(S', A(2)) \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{adj}_G} & & \| \\
0 & \longrightarrow & H^2(S', A(2)) & \longrightarrow & E(c) & \longrightarrow & G'(S') & \longrightarrow & H^3(S', A(2)).
\end{array}$$

On définit (3.9.5) comme étant l'inverse du composé de (3.9.6), (3.9.7) et (3.9.9) : les isomorphismes $H^i(S, f_* A(2)) = H^i(S', A(2))$ utilisés en (3.9.5) pour $i = 2, 3$ sont le composé

$$H^i(S, f_* A(2)) \xrightarrow{f^*} H^i(S', f^* f_* A(2)) \xrightarrow{\mathrm{adj}} H^i(S', A(2))$$

et l'isomorphisme $G(S) = G'(S')$ est le composé

$$G(S) \to f^* G(S') \xrightarrow{\mathrm{adj}} G'(S').$$

(iv) *Exemple.* — Soient $u : G \to H$, I et J comme en (ii) et ${}^t u^* : \mathbf{Z}^I \to \mathbf{Z}^J$ le transposé du morphisme u^* de (3.9.1). Le faisceau localement constant I est le faisceau des sections locales d'un schéma fini étale sur S, encore noté I. Soit G_0 le schéma en groupes simple simplement connexe sur I tel que, pour i une section locale de I, $i^* G_0$ soit le facteur simple G_i de G. On a $G = \prod_{I/S} G_0$ et $G(S) = G_0(I)$. De même, $H = \prod_{J/S} H_0$, $H(S) = H_0(J)$ et u définit un morphisme encore noté u de $G_0(I)$ dans $H_0(J)$.

Définissons $c_G \in H^0(S, \mathbf{Z}^I \otimes \mathbf{Z}^I \otimes \mathbf{Z}/n)$ par

$$c_G = \sum_i e_i \otimes e_i \pmod{n}.$$

Notons $E(G_0)$ l'extension canonique (3.6) de $G_0(I)^0$ par $H^2(I, \mathbf{Z}/n(2))$. Par (3.9.5), elle s'identifie à l'extension $E(c_G)$ de $G(S)^0$ par $H^2(S, \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/n(2))$. De même pour H, avec $c_H = \sum_j e_j \otimes e_j$.

Par (3.9.2), on a un diagramme commutatif

(3.9.10)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(u^* \otimes 1(c_H)) & \longrightarrow & G(S) & \longrightarrow & H^3(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)) \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
0 & \longrightarrow & H^2(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(c_H) & \longrightarrow & H(S) & \longrightarrow & H^3(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)).
\end{array}$$

On a

$$\begin{aligned}
(u^* \otimes 1)\ (c_H) &= \Sigma\, u^*(e_j) \otimes e_j = \Sigma\, (u^*)^i\, je_i \otimes e_j \\
&= \Sigma\, e_i \otimes {}^t u^*(e_i) = (1 \otimes {}^t u^*)\ (c_G).
\end{aligned}$$

La fonctorialité en A de 3.9 (i), appliquée ${}^t u^* \otimes \mathbf{Z}/n$, fournit

(3.9.11)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(S, \mathbf{Z}^I \otimes \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(c_G) & \longrightarrow & G(S) & \longrightarrow & H^3(S, \mathbf{Z}^I \otimes \mathbf{Z}/n(2)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle {}^t u^*} & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle {}^t u^*} \\
0 & \longrightarrow & H^2(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(u^* \otimes 1(c_H) & \longrightarrow & G(S) & \longrightarrow & H^3(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)).
\end{array}$$

Notons encore ${}^t u^*$ le morphisme

$$H^*(I, \mathbf{Z}/n(2)) = H^*(S, \mathbf{Z}^* \otimes \mathbf{Z}/n(2)) \xrightarrow{{}^t u^*} H^*(S, \mathbf{Z}^J \otimes \mathbf{Z}/n(2)) = H^*(J, \mathbf{Z}/n(2)).$$

Composant (3.9.11) et (3.9.10) et récrivant les deux lignes par (3.9.5), on obtient un diagramme commutatif d'extensions canoniques 3.6

(3.9.12)

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(I, \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(G_0) & \longrightarrow & G_0(I) & \longrightarrow & H^3(I, \mathbf{Z}/n(2)) \\
\downarrow{\scriptstyle {}^t u^*} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle {}^t u^*} \\
H^2(J, \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(H_0) & \longrightarrow & H_0(J) & \longrightarrow & H^3(J, \mathbf{Z}/n(2)).
\end{array}$$

4. Calculs de commutateurs

4.1. Soient G, I, A, c et $\mathbf{c}$ comme en 3.5 et H′ le schéma en groupes des automorphismes de G. Localement sur S, H′ est une extension du groupe fini F′ des automorphismes du diagramme de Dynkin de G par le groupe adjoint G^{ad}. Le groupe F′ agit sur I. Soient $F \subset F'$ le fixateur de c et H l'image inverse de F dans H′. C'est le schéma en groupes des automorphismes de G fixant c.

Le groupe H(S) agit par transport de structures sur l'extension centrale $E(c)$ (3.5.2) de $G(S)^0$ par $H^2(S, A(2))$.

Proposition **4.2.** — *Pour* $h \in H(S)$ *l'image dans* $G^{ad}(S)$ *de* $h_1 \in G(S)$, *l'action par transport de structures de* h *sur* $E(c)$ *coïncide avec* $\mathrm{int}(h_1)$ *défini par* (2.12.1).

D'après 2.12, si $h_1 \in G(S)^0$, cette action est donc encore l'action par automorphismes intérieurs d'un quelconque relèvement de h_1 dans $E(c)$.

Preuve. — Soient $h \in H(S)$ un automorphisme de G préservant c et $c^3 + c^2 + c^1 + c^0$ comme en 2.4 un cocycle représentatif de **c**, dans le complexe (2.3.4). Par hypothèse, il est cohomologue à son image par h, *i.e.* à son image inverse par l'automorphisme h^{-1} de BG :

(4.2.1) $$\Sigma c_i - h(\Sigma c_i) = db,$$

$b = b^2 + b^1 + b^0$ avec $b^i \in \Gamma(G^{3-i}, \mathscr{B}^i)$. Par (1.10.2) la cochaîne b vérifiant (4.2.1) du complexe (2.3.4) est unique à l'addition près d'un cobord. L'extension centrale $E(c)$ est définie par le cocycle Σc_i, et h se prolonge trivialement en un isomorphisme de $E(c)$ avec l'extension définie par le cocycle $h(\Sigma c_i)$. Cette dernière s'identifie à $E(c)$ par (4.2.1) et (2.5.1). L'action de h sur l'extension centrale $E(c)$ de $G(S)^0$ admet donc la description suivante. Soit $(g; x)$ dans $E(c)$: $g \in G(S)^0$ et $x \in E(g)$. On a

(4.2.2) $$h : (g; x) \mapsto (h(g); x - b_2(h(g))).$$

Si h est intérieur : image de $h_1 \in G(S)$, l'automorphisme $h = \operatorname{int} h_1$ de BG est homotope à l'identité. L'homotopie est un morphisme de schémas simpliciaux

$$H : BG \times \Delta_1 \to BF.$$

L'image par H du produit d'un 2-simplexe (a, b) par Δ_1 est donnée comme suit :

Cette homotopie fournit un choix naturel pour b :

(4.2.3) $$\begin{aligned} b_2(a) &= c_2(a, h_1) - c_2(h_1, h_1^{-1} ah_1) \\ b_1(a, b) &= -c_1(a, b, h_1) + c_1(a, h_1, h_1^{-1} bh_1) - c_1(h_1, h_1^{-1} ah_1, h_1^{-1} bh_1) \\ b_0(a, b, c) &= c_0(a, b, c, h_1) - c_0(a, b, h_1, h_1^{-1} ch_1) \\ &\quad + c_0(a, h_1, h_1^{-1} bh_1, h_1^{-1} ch_1) - c_0(h_1, h_1^{-1} ah_1, h_1^{-1} bh_1, h_1^{-1} ch_1). \end{aligned}$$

Conformément à la notation introduite en 2.1, la première ligne signifie que $b_2 = \varphi_1^* c_2 - \varphi_2^* c_2$, pour φ_1 (resp. φ_2) : $G \to G \times G$ l'application $a \mapsto (a, h_1)$ (resp. $a \mapsto (h_1, h_1^{-1} ah_1)$). J'avoue avoir utilisé l'homotopie pour deviner (4.2.3), et avoir ensuite vérifié (4.2.1) par force brutale, après avoir ajusté les signes.

Pour ce choix de b, l'action (4.2.2) s'écrit

(4.2.4) $$(g; x) \mapsto (h_1 g h_1^{-1}; x + c_2(h_1, g) - c_2(h_1 g h_1^{-1}, h_1)).$$

On retrouve (2.12.1), ce qui vérifie 4.2.

4.3. L'action par transport de structures de H(S) sur E(c) induit une action triviale sur le noyau $H^2(S, A(2))$. Pour $h \in H(S)$ et $g \in G(S)^0$, image de $\tilde{g}$ dans E(c), le « commutateur » $h(\tilde{g})\,\tilde{g}^{-1}$ ne dépend donc pas du choix du relèvement $\tilde{g}$ de g. Il définit

(4.3.1) $$(h, g) := h(\tilde{g})\,\tilde{g}^{-1} : H(S) \times G(S)^0 \to E(c).$$

Construction **4.4.** — *Nous construirons une application*

(4.4.1) $$(h, g) : H(S) \times G(S) \to E(c)$$

prolongeant (4.3.1) *et qui, pour h image de $h_1 \in G(S)$ par* $G \to G^{ad} \hookrightarrow H$, *redonne* (2.12.3).

Pour $g \in G(S)^0$ image de $\tilde{g} \in E(c)$, exprimant que

$$(h, g)\,\tilde{g} = h(\tilde{g}),$$

on déduit de (4.2.2) que

(4.4.2) $$(h, g) = (h(g)\,g^{-1}; -b_2(h(g)) - c_2(h(g)\,g^{-1}\,g)).$$

Vérifions que pour g quelconque dans G(S), on a encore

$$-b_2(h(g)) - c_2(h(g)\,g^{-1}, g) \in E(h(g)\,g^{-1}), \quad i.e.$$

(4.4.3) $$c_3(h(g)\,g^{-1}) = d''[-b_2(h(g)) - c_2(h(g)\,g^{-1}, g)].$$

Appliquant la propriété de cocycle de c à $h(g)\,g^{-1}$ et g, on obtient

$$c_3(g) - c_3(h(g)) + c_3(h(g)\,g^{-1}) = d''\,c_2(h(g)\,g^{-1}, g).$$

Écrivant (4.2.1) sous la forme $h^* \Sigma c_i - \Sigma c_i = dh^*\,b$, on obtient

$$c_3(h(g)) - c_3(g) = -d''\,b_2(h(g)).$$

La somme de ces identités donne (4.4.3).

Définissons (4.4.1) par (4.4.2). La cochaîne b vérifiant (4.2.1) étant unique à l'addition d'un cobord près, l'élément (h, g) de E(c) obtenu ne dépend pas du choix de b. Si h est l'image de $h_1 \in G(S)$, on peut prendre b donné par (4.2.3). On a alors

$$(h, g) = (h(g)\,g^{-1}; -c_2(h_1 g h_1^{-1}, h_1) + c_2(h_1, g) - c_2(h_1 g h_1^{-1}\,g^{-1}, g))$$

en accord, comme promis, avec (2.12.3).

Corollaire **4.5.** — *Soit* Z *le centre de* G.

(i) *Pour* $z \in Z(S)$, *l'automorphisme* $\mathrm{int}(z)$ (2.12) *de l'extension centrale* $E(c)$ *de* $G(S)^0$ *est triviale.*

(ii) *Pour* $g \in G(S)$, *le commutateur* (z, g) (2.12.3) *est trivial.*

En particulier, l'image inverse de $Z(S)$ *dans* $E(c)$ *est centrale.*

Preuve. — L'image de z dans H est la section neutre de H.

4.6. Comme en 2.12, l'intérêt de cette construction est de s'appliquer à des cas universels, que l'on peut espérer calculer. Nous noterons par un indice X l'effet d'un changement de base $X \to S$.

Soit $C \subset H \times G$ le sous-schéma des (h, g) tels que h fixe g. Il contient $H \times e$ et $e \times G$. Son image inverse C_1 dans $G \times G$ par l'application $(G \to G^{ad} \hookrightarrow G) \times G$ est le sous-schéma de $G \times G$ noté C en 2.12.

Sur C, H_C et G_C ont des sections universelles h_C et g_C, correspondant à pr_1, pr_2. Par définition de C, h_C et g_C commutent et (4.4.1) devient

(4.6.1) $$[comm] := (h_C, g_C) \in H^2(C, A(2)).$$

Si $h \in H(S)$ fixe $g \in G(S)$, le « commutateur » (4.4.1) de h et g est $(h, g)^*[comm]$. D'après 4.4, l'image inverse de $[comm]$ sur C_1 est donnée par (2.12.4).

Construction **4.7.** — *Nous précisons la classe* 4.6.1 *en une classe*

$$[comm] \in H^2(C \bmod e \times G \cup H \times e, A(2)),$$

d'image inverse dans $H^2(C_1 \bmod e \times G \cup G \times e, A(2))$ *la classe* (2.14.2).

Changeons de base par $H \to S$. Sur H, on dispose de la section universelle h_H de H_H, correspondant à l'application identique de H. Notons encore c_i l'image inverse de c_i sur BG_H et soit b vérifiant (4.2.1), pour $h = h_H$. Si l'on change de base par la section neutre : $e : S \to H$, b devient un cocycle. Corrigeons b par l'image inverse de ce cocycle par $H \to S$. Nous obtenons ainsi une nouvelle solution de (4.2.1). Elle s'annule par le changement de base $e : S \to H$.

Le sous-schéma C de $G_H = H \times G$ est un sous-schéma en groupes de G_H. La restriction à $BC \subset BG_H$ annule le premier membre de 4.2.1. L'image inverse de b sur BC est donc un cocycle. En particulier, sur C, on a $db_2 = 0$.

Puisque b_2 est dans le complexe (2.3.4), la restriction de *comm* à $H \times \{e\}$ est nulle. Sa restriction à $e \times G$ est nulle par construction.

Définissons la classe cherchée comme étant celle de b_2. Il reste à vérifier la compatibilité avec la classe (2.14.2).

Changeons de base par $G \to G^{ad} \hookrightarrow H$. Sur G, on dispose de la section universelle h_G de G_G. L'image inverse de b est caractérisée à un cobord près par

$$\Sigma c_i - h_G(\Sigma c_i) = db.$$

Cette unicité permet, dans le calcul de l'image inverse de [*comm*] sur C_1, de remplacer l'image inverse de b par (4.2.3). On obtient le cocycle représentatif

$$c_2(h, g) - c_2(g, h),$$

en accord avec (2.14.2).

4.8. Soient T un sous-schéma en tores maximaux de G et T^{ad} son image dans G^{ad}. Restreignant la classe (4.7) à $T^{ad} \times T \subset C$, on obtient une classe

(4.8.1) $$u \in H^2(T^{ad} \times T \bmod T^{ad} \times e \cup e \times T, A(2))$$

telle que pour h dans $T^{ad}(S)$ et g dans $T(S)$, le commutateur (4.4) de h et g soit

$$(h, g) = (h, g)^* u \in H^2(S, A(2)).$$

D'après 4.7, l'image inverse de u dans

$$H^2(T \times T \bmod T \times e \cup e \times T, A(2))$$

est la classe calculée en 3.2.

Soient $X = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ et $X^{ad} = \mathrm{Hom}(\mathbf{T}^{ad}, \mathbf{G}_m)$. Par la suite spectrale de Leray pour la projection sur S, on a (cf. 3.1)

(4.8.2) $$H^2(T^{ad} \times T \bmod T^{ad} \times e \cup e \times T, A(2)) = H^0(S, X^{ad} \otimes X \otimes A).$$

Le calcul de u (4.8.1) est donc une question locale sur S.

Localement sur S, G est un produit de facteurs simple G_i. La décomposition $G = \prod G_i$ induit des décompositions de T, T^{ad}, X, X^{ad} et leurs duaux Y, Y^{ad}. Comme observé en 1.7.8, pour chaque i, si Q_i est la forme quadratique Q de 1.7.5 sur Y_i, la forme bilinéaire associée B_i se prolonge en un accouplement $\widetilde{B}_i : Y_i^{ad} \times Y_i \to \mathbf{Z}$. Posons $\widetilde{B}_c = \Sigma c_i \widetilde{B}_i$. C'est une section globale, sur S, de $X^{ad} \otimes X \times A$, et son image dans $X \otimes X \otimes A$ est la section B_c (3.2) de $X \otimes X \otimes A$. Elle est caractérisée par cette propriété, et sa fonctorialité en A. Il résulte donc de 3.2 que u correspond par 4.8.2 à $-\widetilde{B}_c$. Comme en 3.4, on conclut

Proposition **4.9.** — *Avec les notations précédentes, si ∂g et ∂h sont les cobords* 3.3 *de g et h, le « commutateur »* (4.4) *est donné par*

$$(h, g) = -\widetilde{B}_c(\partial h \otimes \partial g).$$

Cas particulier : si g se relève en $\widetilde{g} \in E(c)$, cette formule calcule $h(\widetilde{g})\,\widetilde{g}^{-1}$.

5. Corps locaux

5.1. Soit F un corps local, *i.e.* localement compact non discret. Si $F \simeq \mathbf{C}$, la cohomologie galoisienne de F est nulle. On suppose dorénavant F non isomorphe à $\mathbf{C}$.

Soient $\mu_*(F)$ le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans F, et N son ordre. Si F est d'exposant caractéristique $p \geqslant 2$: $F \simeq k((t))$ avec k fini, on a $\mu(F) = k^*$ et N est premier à p.

Soient $\bar{F}$ une clôture séparable de F, M un $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-module fini, d'ordre premier à p et $M' := \mathrm{Hom}(M, \bar{F}^*)$ (dualité de Cartier). Le cas qui nous intéresse est celui où $M = \mathbf{Z}/n(2)$, avec n premier à p, et où $M' = \mathbf{Z}/n(-1)$. Supposons tout d'abord F non archimédien. Les théorèmes de dualité en $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-cohomologie (Poitou (1967), exp. 12, § 2) assurent alors que le cup-produit à valeurs dans $H^2(\bar{F}^*) = \mathrm{Br}(F) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ fait de $H^i(M)$ et $H^{2-i}(M')$ les duaux l'un de l'autre, pour une dualité (de Pontrjagin) à valeurs dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Pour $F = \mathbf{R}$, la cohomologie $H^i(\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}), \ )$ est à remplacer par la cohomologie de Tate $\tilde{H}^i$, qui fournit des groupes annulés par 2. La dualité est à valeurs dans $\tilde{H}^2(\bar{F}^*) = H^2(\bar{F}^*) = \mathrm{Br}(\mathbf{R}) = (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_2 \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (*loc. cit.*, § 3).

Dans la dualité entre $\mathbf{Z}/n(2)$ et $\mathbf{Z}/n(-1)$, le morphisme de réduction modulo n : $\mathbf{Z}/nm(2) \to \mathbf{Z}/n(2)$ a pour transposé la multiplication par n : $\mathbf{Z}/n(-1) \to \mathbf{Z}/nm(-1)$. Soit (n, N) le plus grand commun diviseur de n et N. La multiplication par $n/(n, N)$: $\mathbf{Z}(n, N)\ (-1) \to \mathbf{Z}/n(-1)$ induit un isomorphisme sur H^0. Par dualité, on a donc

Lemme **5.2.** — *Le morphisme de réduction modulo* (n, N) *est un isomorphisme*

$$H^2(\mathbf{Z}/n(2)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbf{Z}/(n, N).(2)).$$

5.3. Pour n divisant N, l'action de Galois sur $\mathbf{Z}/n(1)$ est triviale et

$$H^2(\mathbf{Z}/n(2)) = H^2(\mathbf{Z}/n(1))\ (1) = \mathrm{Br}(F)_n\,(1).$$

Puisque $\mathrm{Br}(F)_n = \mathbf{Z}/n$, on a donc simplement

(5.3.1) $$H^2(\mathbf{Z}/n(2)) = \mu_n(F),$$

le morphisme de réduction modulo n étant

(5.3.2) $$H^2(\mathbf{Z}/N(2)) \to H^2(\mathbf{Z}/n(2)) : x \mapsto x^{N/n} : \mu(F) \to \mu_n(F).$$

Combinant 5.2 et (5.3.1), (5.3.2), on obtient

Construction **5.4.** — *Le système projectif des* $H^2(\mathbf{Z}/n(2))$ *pour n premier à l'exposant caractéristique p s'identifie au système projectif des* $\mu_{(n, N)}$, *avec pour morphismes de transition les*

$$\mu_{(m, N)} \to \mu_{(n, N)} : x \mapsto x^{(m, N)/(n, N)} \qquad \textit{pour } n \mid m.$$

En particulier, pour $N \mid n$, *on a*

(5.4.1) $$H^2(\mathbf{Z}/n(2)) = \mu(F).$$

Quand il y a lieu de préciser quel est le corps F considéré, nous écrirons $H^*(F, \mathbf{Z}/n(2))$ ou $H^*(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$, plutôt que $H^*(\mathbf{Z}/n(2))$. C'est un groupe de cohomologie étale

de Spec(F). Pour F_1 une extension finie de F, on dispose de morphismes image inverse et trace :

$$H^*(F, \quad) \to H^*(F_1, \quad) \quad \text{et} \quad H^*(F_1, \quad) \to H^*(F, \quad),$$

de composé la multiplication par $[F_1 : F]$. Dans le langage de la cohomologie galoisienne, l'image inverse est la restriction et, si F_1 est séparable sur F, la trace est la corestriction.

Proposition **5.5.** — *Soit* F_1 *une extension finie d'un corps local non archimédien* F. *Soient* N *et* N_1 *les ordres de* $\mu(F)$ *et* $\mu(F_1)$. *Fixons n divisible par* N_1 *et premier à l'exposant caractéristique p.*

(i) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^2(F_1, \mathbf{Z}/n(2)) & = & \mu(F_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} & & \downarrow{\scriptstyle x^{N_1/N}} \\ H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) & = & \mu(F) \end{array}$$

est commutatif.

(ii) *La norme* $N_{F_1/F}$ *envoie* $\mu(F_1)$ *dans* $\mu(F)$. *Sur* $\mu(F_1)$, *elle est donc de la forme* $x \mapsto x^{\nu N_1/N}$, *avec* ν *dans* $\mathbf{Z}/N$. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) & \xrightarrow{\sim} & \mu(F) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle x^{\nu}} \\ H^2(F_1, \mathbf{Z}/n(2)) & \xrightarrow{\sim} & \mu(F_1) \end{array}$$

est commutatif.

Preuve. — Via les identifications des groupes de Brauer de F et F_1 avec $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, la norme : $\mathrm{Br}(F_1) \to \mathrm{Br}(F)$ est l'identité de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Pour $x \in H^i(F, \mathbf{Z}/n(a))$ et $y \in H^{2-i}(F_1, \mathbf{Z}/n(b))$ avec $a + b = 1$, on a dans le groupe de Brauer

$$x.\mathrm{Tr}(y) = N_{F_1/F}(\mathrm{res}(x).y),$$

i.e. pour la $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$-dualité utilisée en 5.1,

$$\langle x, \mathrm{Tr}(y) \rangle = \langle \mathrm{res}(x), y \rangle. \tag{5.5.1}$$

Les assertions 5.5 résultent de 5.5.1 par un calcul laissé au lecteur, dont les points essentiels sont :

a) Soit $x \in H^0(F, \mathbf{Z}/n(-1))$, identifié à $x : \mu_n(\bar{F}) \to \mathbf{Z}/n$. Le morphisme x, étant invariant par Galois, il existe un morphisme X de $\mu(F)$ dans $\mathbf{Z}/N$ tel que $x(\zeta) = dX(\zeta^d)$ avec $d = n/N$. Si $y \in H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$ correspond par (5.4.1) à $\zeta_y \in \mu(F)$, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} X(\zeta_y) = \frac{1}{n} x(\zeta_y^{1/d}).$$

b) Pour $x \in H^0(F, \mathbf{Z}/n(-1)) : \mu_n(\bar{F}) \to \mathbf{Z}/n$, on a $\mathrm{res}(x) = x$.

c) Pour $n = N_1$ et $x \in H^0(F_1, \mathbf{Z}/N_1(-1)) : \mu(F_1) \to \mathbf{Z}/N_1$, $\mathrm{Tr}(x)$ est

$$\zeta \mapsto x(N_{F_1/F}(\zeta)) = \nu x(\zeta^d) : \mu_{N_1} \to \mathbf{Z}/N_1.$$

Remarque **5.6.** — Pour n premier à p quelconque, l'application norme de F_1 à F envoie $\mu_{(n, N_1)} \subset \mu(F_1)$ dans $\mu_{(n, N)} \subset \mu(F)$, donc est de la forme $x \mapsto x^{\nu'(n, N_1)/(n, N)}$. On déduit de 5.5 que la trace et la restriction, en cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/n(2)$, s'identifient par 5.4 à

$$\mathrm{Tr} : x \mapsto x^{(n, N_1)/(n, N)}$$

$$\mathrm{res} : x \mapsto x^{\nu'}.$$

Exemple **5.7.** — Soient $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation v de F, m son idéal maximal, $k = \mathcal{O}/m$ le corps résiduel et (changement de notations) p la caractéristique résiduelle. Pour $n = |k^*|$, on identifiera $\mu_n(F)$ à k^* par l'isomorphisme de réduction modulo m :

$$\mu_n(F) \xrightarrow{\sim} k^*.$$

L'ordre de k^* est la partie première à p de l'ordre de $\mu(F)$ et, par 5.4, on a donc

$$\textbf{(5.7.1)} \qquad H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) \xrightarrow{\sim} k^*$$

pour n premier à p et divisible par $|k^*|$.

Soient F_1 une extension finie de F, $\mathcal{O}_1$ l'anneau de sa valuation, k_1 le corps résiduel et e l'indice de ramification de F_1 sur F. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1^* & \longrightarrow & k_1^* \\ \downarrow{\scriptstyle N_{F_1/F}} & & \downarrow{\scriptstyle N^e_{k_1/k}} \\ \mathcal{O}^* & \longrightarrow & k^* \end{array}$$

est commutatif. Par ailleurs, pour l'extension de corps finis k_1/k, la norme est $x \mapsto x^{|k_1^*|/|k^*|}$.

Appliquant 5.6 à n premier à p et divisible par $|k_1^*|$, on trouve que les morphismes trace et restriction, pour $H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$ et $H^2(F_1, \mathbf{Z}/n(2))$ s'identifient respectivement à

$$\textbf{(5.7.2)} \qquad N_{k_1/k} : k_1^* \to k^* \quad \text{et} \quad x \mapsto x^e : k^* \to k_1^*.$$

En fait, le cup-produit $\partial_n x \smile \partial_n y$ des cobords de Kummer

$$F^* \otimes F^* \to H^1(F, \mathbf{Z}/n(1)) \otimes H^1(F, \mathbf{Z}/n(1)) \to H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) = k^*$$

est le symbole modéré : la réduction mod m, dans k^*, de

$$(-1)^{v(x)\,v(y)}\, x^{v(y)}/y^{v(x)}.$$

Il serait facile d'en déduire (5.7.2).

Exemple **5.8.** — Supposons F de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p, et considérons $H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$ pour n une puissance de p. Si la puissance est assez grande, on obtient par 5.4 la p-partie $\mu(F)_p$ de $\mu(F)$.

Supposons tout d'abord que $p \neq 2$ et que F contienne une racine primitive p-ième de l'unité. Soit F_{cycl} l'extension p-cyclotomique de F. Le groupe de Galois $Gal(F_{cycl}/F)$ est un sous-groupe d'indice fini de $(1 + p\mathbf{Z}_p)^*$. Il est donc de la forme $(1 + p^a \mathbf{Z}_p)^*$, et $|\mu(F)_p| = p^a$. Soit F_1 déduit de F par adjonction d'une racine de l'unité ζ d'ordre p^b, $b > a$. Le polynôme minimal de ζ sur F est $X^{p^{b-a}} - \zeta^{p^{b-a}} = 0$, de sorte que $N_{F_1/F}(\zeta) = \zeta^{p^{b-a}}$. Avec les notations de 4.6, si n est une puissance de p divisible par p^b, on a donc $\nu' = 1$: le diagramme

$$\textbf{(5.8.1)} \qquad \begin{array}{ccc} H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) & =_{5.4} & \mu(F)_{(p)} \\ \downarrow{\scriptstyle res} & & \downarrow \\ H^2(F_1, \mathbf{Z}/n(2)) & =_{5.4} & \mu(F_1)_{(p)} \end{array}$$

est commutatif.

Pour $p = 2$, les mêmes arguments s'appliquent, avec la même conclusion, si F contient une racine primitive quatrième de 1. Dans le cas contraire, $\mu(F)_2$ est réduit à ± 1 et pour toute extension F_1 de F de degré pair et tout n puissance de 2, le morphisme de restriction de $H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$ à $H^2(F_1, \mathbf{Z}/n(2))$ est nul.

5.9. Soit G un groupe algébrique simple simplement connexe (0.N.4) sur F. Prenons n inversible dans F et divisible par $|\mu(F)|$, et soit $\mathbf{c}$ le générateur canonique 1 de $\tilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2)) \simeq \mathbf{Z}/n$ (3.6).

Si F est réel, le système projectif des

$$H^3(Gal(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) = H^3(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/n) = H^1(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/n) = Hom(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/n)$$

est essentiellement nul. Si F est non archimédien, F est de dimension cohomologique 2 et $H^3(Gal(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2)) = 0$. L'application définie par $\mathbf{c}$:

$$G(F) \to H^3(Gal(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$$

est donc trivialement nulle. Le même énoncé a été prouvé pour un corps quelconque en 1.11 comme conséquence de Merkurjev-Suslin.

D'après (2.7.2) et la détermination 5.4 de $H^2(Gal(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$, l'extension centrale définie par $\mathbf{c}$ est indépendante de n divisible par $|\mu(F)|$. C'est une extension centrale topologique (2.9) canonique

$$\textbf{(5.9.1)} \qquad 0 \to \mu(F) \to G(F)^{\sim} \to G(F) \to 0.$$

5.10. Supposons F non archimédien. Avec les notations de 5.7, prenons n premier à la caractéristique résiduelle p et divisible par $|k^*|$. D'après la détermination (5.7.1)

de $H^2(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Z}/n(2))$, l'extension centrale de $G(F)$ définie par le générateur canonique de $\widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ est une extension

$$\textbf{(5.10.1)} \qquad 0 \to k^* \to G(F)^{\sim} \to G(F) \to 0$$

indépendante de n. Elle se déduit de l'extension (5.9.1) en poussant par

$$\mu(F) \to k^* : x \mapsto x^a \bmod m \quad \text{avec } a = |\mu(F)|/|k^*| = |\mu(F)_p|.$$

Sa fonctorialité en F est contrôlée par 5.7 : pour F_1 une extension finie de F on a un diagramme commutatif

$$\textbf{(5.10.2)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & G(F)^{\sim} & \longrightarrow & G(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x^e} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k_1^* & \longrightarrow & G(F_1)^{\sim} & \longrightarrow & G(F_1) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Il résulte de (5.10.2) que

Proposition **5.11.** — *Pour* F_1 *une extension non ramifiée de* F, *l'extension* 5.10.1 *vérifie*

$$G(F)^{\sim} \to G(F_1)^{\sim\,\mathrm{Gal}(F_1/F)}.$$

Pour la p-partie de $\mu(F)$, et F_1 une extension p-cyclotomique, 5.8 fournit un résultat similaire, sauf pour $p = 2$ lorsque F ne contient pas les racines 4-ièmes de l'unité.

5.12. Supposons F non archimédien et reprenons les notations de 5.7. Soient G semi-simple simplement connexe sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, d'image inverse G_F sur $\mathrm{Spec}(F)$, et n premier à la caractéristique résiduelle p. Le générateur canonique c_F de $\widetilde{H}^4(BG_F, \mathbf{Z}/n(2))$ se prolonge uniquement en $c_{\mathcal{O}} \in \widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$. Le corps résiduel k est fini, de dimension cohomologique 1. Par 2.7 (iii), on a donc $G(\mathcal{O})^0 = G(\mathcal{O})$ et l'extension $E(c_{\mathcal{O}})$ est une extension par le groupe trivial. La fonctorialité (2.7.2) pour $\mathrm{Spec}(F) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ se réduit à un scindage

$$\textbf{(5.12.1)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & G(\mathcal{O}) & & \\ & & & & & \swarrow & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(F, \mathbf{Z}/n(2)) & \longrightarrow & E(c_F) & \longrightarrow & G(F) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Si B_F est un sous-groupe de Borel de G_F, B_F provient d'un sous-groupe de Borel B de G (propreté de la variété des Borel). Soit U son radical unipotent. Le scindage 2.11.5 étant fonctoriel en S, sur $U(\mathcal{O}) = G(\mathcal{O}) \cap U(F)$, les scindages 5.12.1 et 2.11.5 coïncident.

Par contre, si $g[G(\mathcal{O})]$ est le conjugué de $G(\mathcal{O})$ par un élément du groupe adjoint $G^{\mathrm{ad}}(F)$, correspondant à une nouvelle structure entière sur G, les scindages (5.12.1) pour $G(\mathcal{O})$ et $g[G(\mathcal{O})]$ sont conjugués par g et ne coïncident en général pas sur $G(\mathcal{O}) \cap g[G(\mathcal{O})]$.

Pour n premier à p et divisible par $|k^*|$, (5.12.1) se récrit

$$\begin{tikzcd} & & G(\mathcal{O}) \arrow[dl] \arrow[d, hook] \\ 0 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & E(c_F) \arrow[r] & G(F). \end{tikzcd} \tag{5.12.2}$$

6. Corps globaux

6.1. Soit F un corps global. Pour F une extension finie de $\mathbf{Q}$, on note X le spectre de l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F. En caractéristique $p \geqslant 2$, on note k le corps des constantes de F et X la courbe projective non singulière sur k dont F est le corps des fonctions rationnelles. Soient $\mu(F)$ le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans F, et N son ordre. En caractéristique $p \geqslant 2$, $\mu(F) = k^*$ et N est premier à p.

On note F_v le complété de F en une place v. Si v est non complexe, on note $N(v)$ l'ordre du groupe $\mu(F_v)$ des racines de l'unité contenues dans F_v.

Soit S le complément dans X d'un ensemble fini T_f de points fermés, identifiés à des places de F. Soient T_∞ l'ensemble des places archimédiennes de F et $T^* := T_f \amalg T_\infty$. Les places complexes ne joueront qu'un rôle de figurant, et on aura parfois à remplacer T^* par $T := T_f \amalg \{\text{ places réelles }\}$.

Soient M un faisceau localement constant sur S, à fibres finies d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles, et $M' := \mathcal{H}om(M, \mathbf{G}_m)$. Le cas qui nous intéresse est celui où $M = \mathbf{Z}/n(2)$, avec n inversible sur S, et $M' = \mathbf{Z}/n(-1)$. Comme dans le cas local, on dispose de théorèmes de dualité. Ils relient $H^i(S, M)$ et $H_c^{3-i}(S, M')$, pour H_c une cohomologie à support compact convenablement définie : la cohomologie relative de S modulo les $\mathrm{Spec}(F_v)$, $v \in T$, sauf que pour les places réelles, on remplace la cohomologie étale par celle de Tate (J. S. Milne [1986], II, 3.3). La dualité est donnée par le cup-produit à valeurs dans $H_c^3(U, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Proposition **6.2.** — *Sauf pour $p \geqslant 2$ et $S = X$, le système projectif des $H^3(S, \mathbf{Z}/n(2))$ (n inversible sur S) est essentiellement nul.*

Preuve. — Si F une extension finie de $\mathbf{Q}$, le cas $S = X$ est inintéressant : il ne permet que $n = 1$. On peut donc supposer et on suppose que T_f est non vide. Si F n'a pas de place réelle, pour M et M' comme en 5.1, on a alors $H_c^0(S, M') = 0$ et donc par dualité $H^3(S, M) = 0$. Dans le cas général, la suite exacte longue de cohomologie relative fournit un isomorphisme

$$\bigoplus_{\text{places réelles}} H^{-1}(F_v, M') \xrightarrow{\sim} H_c^0(S, M')$$

et par dualité

$$H^3(S, M) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\text{places réelles}} H^3(F_v, M).$$

On conclut par 5.9.

La dualité fournit par les arguments utilisés en 5.4 :

Construction **6.3.** — *Le système projectif des* $H^3_c(S, \mathbf{Z}/n(2))$ *pour n inversible sur* S *s'identifie au système projectif des* $\mu_{(n,N)}(F)$, *avec pour morphismes de transition les*

$$\mu_{(m,N)} \to \mu_{(n,N)} : x \mapsto x^{(m,N)/(n,N)} \quad \textit{pour } n \mid m.$$

En particulier, pour $N \mid n$ *et n inversible sur* S,

$$H^3_c(S, \mathbf{Z}/n(2)) = \mu(F).$$

Ce qui nous importe est que le composé

$$\begin{tikzcd} H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] & \bigoplus_T H^2(F_v, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r, "①"] \arrow[d, equal] & H^3_c(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[d, equal] \\ & \bigoplus_T \mu_{(n,N(v))}(F_v) & \mu_{(n,N)}(F) \end{tikzcd} \tag{6.3.1}$$

est nul. L'application ① est

$$(x_v) \mapsto \prod_v x_v^{(n,N(v))/(n,N)}. \tag{6.3.2}$$

6.4. Soient G un schéma en groupes simples (0.N.4) simplement connexes sur S et n inversible sur S. En caractéristique $p \geqslant 2$, on suppose que $S \neq X$. Par 6.2 et la fonctorialité 2.7 (ii), le générateur canonique 3.6 de $\tilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ fournit pour chaque $v \in T$ un morphisme d'extensions centrales

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] \arrow[d] & E_S \arrow[r] \arrow[d] & G(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^2(F_v, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] & E_v \arrow[r] & G(F_v) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{6.4.1}$$

et pour $v \in S$, par 5.12, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] \arrow[d] & E_S \arrow[r] \arrow[d] & G(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathcal{O}_v) \arrow[r, equal] \arrow[d] & G(\mathcal{O}_v) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^2(F_v, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] & E_v \arrow[r] & G(F_v) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{6.4.2}$$

Pour v complexe, la fonctorialité se réduit au diagramme trivial

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] \arrow[d] & E_S \arrow[r] \arrow[d] & G(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & G(\mathbf{C}) \arrow[r, equal] & G(\mathbf{C}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{6.4.3}$$

Soit $E'_{\mathrm{loc},S}$ le produit des extensions centrales en deuxième ligne de (6.4.1), (6.4.2) et (6.4.3). On obtient

(6.4.4)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] \arrow[d] & E_S \arrow[r] \arrow[d] & G(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{v \in T} H^2(F_v, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] & E'_{\mathrm{loc},S} \arrow[r] & \prod_{v \in T} G(F_v) \times \prod_{v \in S} G(\mathcal{O}_v) \times \prod_{\text{complexe}} G(F_v) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pour S un ouvert de plus en plus petit de X, les diagrammes 5.4.4 forment un système inductif, de limite inductive

(6.4.5)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] \arrow[d] & E_F \arrow[r] \arrow[d] & G(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{v} H^2(F_v, \mathbf{Z}/n(2)) \arrow[r] & E'_{\mathbf{A}} \arrow[r] & G(\mathbf{A}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $E'_{\mathbf{A}}$ est le produit restreint, étendu à toutes les places de F, des extensions E_v. Le produit restreint est pris relativement aux images par les scindages (5.12.1) des sous-groupes $G(\mathcal{O}_v)$, $v \in S$.

Soit $E_{\mathrm{loc},S}$ l'extension déduite de $E'_{\mathrm{loc},S}$ en poussant par le morphisme ① de (6.3.1). D'après (6.3.1), le morphisme d'extension (6.4.4) fournit un scindage

(6.4.6)

$$\begin{tikzcd}
 & & G(S) \arrow[d] \\
\mu_{(n,N)}(F) \arrow[r] & E_{\mathrm{loc},S} \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & \prod_{v \in T} G(F_v) \times \prod_{v \in S} G(\mathcal{O}_S) \times \prod_{\text{complexe}} G(F_v).
\end{tikzcd}$$

La limite inductive des extensions $E_{\mathrm{loc},S}$ est l'extension $E_{\mathbf{A}}$ déduite de $E'_{\mathbf{A}}$ en poussant de même par $(x_v) \mapsto \prod x_v^{(n,N_v)/(n,N)}$, et la limite inductive des scindages (6.4.6) est un scindage

(6.4.7)

$$\begin{tikzcd}
 & & & G(F) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mu_{(n,N)}(F) \arrow[r] & E_{\mathbf{A}} \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & G(\mathbf{A}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pour n divisible par N, le diagramme (6.4.7) devient indépendant de n. Il s'écrit

(6.4.8)

$$\begin{tikzcd}
 & & & G(F) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mu(F) \arrow[r] & E_{\mathbf{A}} \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & G(\mathbf{A}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pour presque chaque place v, l'ordre $N(v)$ de $\mu(F_v)$ est premier à la caractéristique résiduelle et 5.12 fournit un relèvement de $G(\mathcal{O}_v)$ dans l'extension centrale (5.9.1) de $G(F_v)$ par $\mu(F_v)$. L'extension E_A de (6.4.8) est encore déduite du produit restreint correspondant de ces extensions en poussant par

$$\bigoplus \mu(F_v) \to \mu(F) : (x_v) \to \prod x_v^{N(v)/N}.$$

La fonctorialité en F du diagramme (6.4.8) est donnée par les formules de 5.5.

7. Questions

Les énoncés de cette section sont à prendre au signe près.

7.1. Soient S, n, T, X, Y comme en (0.N.7) et $\mathbf{c} \in \widetilde{H}^4(BT, \mathbf{Z}/n(2))$. La classe $\mathbf{c}$ définit un morphisme de T(S) dans $H^3(S, \mathbf{Z}/n(2))$ et une classe d'isomorphie d'extensions centrales du noyau $T(S)^0$ par $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$ (2.6). Pour avoir une extension centrale définie à isomorphisme unique près, il faut donner $\mathbf{c}$ « au niveau des cocycles ».

Par analogie avec Deligne (1991), j'espère qu'on y arrive comme suit.

Espoir **7.2.** — *Soit* Q *une forme quadratique à valeurs entières sur* Y, *de forme bilinéaire associée* B. *Pour se donner « au niveau des cocycles » un système projectif de classes* $\mathbf{c}_n$ *dans les* $H^4(BT, \mathbf{Z}/n(2))$ *(n inversible sur* S*), donnant lieu localement sur* S *à* Q mod n (1.9.3, $i = 2$, *cf.* 1.6.6), *il suffit de se donner une extension centrale de faisceaux sur* S

$$\textbf{(7.2.1)} \qquad 0 \to \mathbf{G}_m \to \mathscr{E} \to Y \to 0,$$

telle que le commutateur $(y_1, y_2) : Y \otimes Y \to \mathbf{G}_m$ *soit donné par*

$$\textbf{(7.2.2)} \qquad (y_1, y_2) = (-1)^{B(y_1, y_2)}.$$

Voici, de 7.3 à 7.6, des indications en faveur de 7.2.

7.3. Soit $T^\vee$ le tore sur S pour lequel $\mathscr{H}om_S(\mathbf{G}_m, T^\vee)$ est le dual $Y^\vee$ de Y. Le faisceau $\mathscr{H}om_S(Y, \mathbf{G}_m)$ des automorphismes (triviaux sur Y et $\mathbf{G}_m$) d'une extension (7.2.1) est celui des sections de $T^\vee$. Pour $t \in T(S)$ et $t' \in T^\vee(S)$, le produit des cobords définis par (3.3.1) :

$$\partial t \smile \partial t' : T(S) \otimes T'(S) \in H^1(S, Y \otimes \mathbf{Z}/n(1)) \otimes H^1(S, Y^\vee \otimes \mathbf{Z}/n(1)) \in H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$$

peut s'interpréter comme un morphisme $T^\vee(S)$ dans $\mathrm{Hom}(T(S), H^2(S, \mathbf{Z}/n(2)))$, groupe qui agit sur toute extension centrale de $T(S)^0$ par $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$.

7.4. Si Q est donné sous la forme $C(y, y)$, pour C une forme bilinéaire non nécessairement symétrique, le cocycle $(-1)^{C(y_1, y_2)}$ définit une extension (7.2.1). Parallèlement, une extension centrale de T(S) est donnée par le cocycle $C(\partial t_1, \partial t_2)$.

7.5. Soit $\mathscr{A}(Y)$ le faisceau des paires (A, q) : A forme alternée entière sur Y, q application $Y \to \mathbf{G}_m$ vérifiant

$$q(x+y)\, q(x)^{-1}\, q(y)^{-1} = (-1)^{A(x,y)}.$$

La forme quadratique Q définit un torseur $\overline{P}_Q$ sous le faisceau $\overline{\mathscr{A}}(Y)$ des formes alternées sur Y : celui des formes bilinéaires entières C telles que $Q(y) = C(y,y)$. Une extension (7.2.1) définit un relèvement de $\overline{P}_Q$ en un $\mathscr{A}(Y)$-torseur : les paires (C, s) avec C comme ci-dessus et s une section de $\mathscr{E} \to Y$ telle que

$$s(y_1+y_2) = s(y_1)\, s(y_2)\, (-1)^{C(y_1, y_2)}.$$

En fait, la donnée d'une extension (7.2.1) équivaut à celle d'un tel relèvement.

Pour (A, q) dans $\mathscr{A}(Y)$ et t dans T il devrait être possible, à l'imitation de Deligne (1991), de définir une gerbe $(A, q)\,(t)$ de lien $\mathbf{Z}/n(2)$, cette construction définissant dans la catégorie dérivée un morphisme

(7.5.1) $\qquad \varphi : \mathscr{A}(Y) \otimes_{\mathbf{Z}} T \to \mathbf{Z}/n(2)\ [2].$

Un morphisme (7.5.1) induit

(7.5.2) $\qquad H^1(S, \mathscr{A}(Y)) \otimes T(S) \to H^3(S, \mathbf{Z}/n(2))$

et, fixant dans le H^1 la classe du $\mathscr{A}(Y)$-torseur défini par une extension (7.2.1), un morphisme de T(S) dans $H^3(S, \mathbf{Z}/n(2))$. Ce devrait être celui défini par la classe $\mathbf{c}_n$ correspondante.

7.6. Soient G un schéma en groupes simples simplement connexes sur S, T un sous-schéma en tores maximaux et X, Y, W comme en (0.N.7). Uniformément en n, le générateur naturel (3.6) $\mathbf{c}_n$ de $\widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ induit une classe dans $\widetilde{H}^4(BT, \mathbf{Z}/n(2))$. Puisque $\widetilde{H}^i(BG, \mathbf{Z}/n(2)) = 0$ pour $i < 4$, cette classe induite est à considérer comme définie au niveau des cocycles. En tout cas, l'extension canonique de $G(S)^0$ par $H^2(S, \mathbf{Z}/n(2))$ définie par $\mathbf{c}_n$ induit une extension centrale de $T(S)^0$, définie à isomorphisme unique près.

Soit Q la forme quadratique entière W-invariante sur Y, vérifiant $Q(H_\alpha) = 1$ pour α une racine longue. Pour S le spectre d'un corps, nous allons construire une extension (7.2.1) adaptée à Q (7.2.2), qui devrait donner les restrictions de $\mathbf{c}_n$ à BT. Puisque, localement sur S, G et T sont déployés, il suffit de construire cette extension pour G et T déployés, pourvu que la construction soit fonctorielle en S.

Nous donnerons deux constructions de l'extension voulue. La seconde est une traduction terre à terre de la première et elle garde un sens pour S quelconque.

Soient donc G et T, déployés, sur $S = \mathrm{Spec}(F)$, et construisons une extension centrale

$$0 \to F^* \to \mathscr{E} \xrightarrow{\pi} Y \to 0$$

vérifiant (7.2.2).

Première construction. — Étendons les scalaires à $F((t))$. Le symbole modéré

$$F((t)) \otimes F((t)) \to F^*$$

fournit par Matsumoto (1969) une extension centrale

$$0 \to F^* \to E \to G(F((t))) \to 0,$$

dont on prend l'image inverse par l'application composée

$$Y \xrightarrow{\nu(t)} T(F((t))) \longrightarrow G(F((t))).$$

Deuxième construction. — L'extension $\mathscr{E}$ est caractérisée à isomorphisme unique près par (7.2.2) et comme étant munie d'applications

$$[\ \ ] : U_\alpha - \{0\} \to \pi^{-1}(H_\alpha)$$

vérifiant les conditions (7.6.1) et (7.6.2) suivantes.

(7.6.1) Pour $a \in F^*$ et $e_\alpha \in U_\alpha - \{0\}$, $[ae_\alpha] = a^{Q(H_\alpha)}[e_\alpha]$.

Soit $SL(2)_\alpha$ le sous-groupe $SL(2)$ engendré par $H_\alpha(\mathbf{G}_m)$ et les sous-groupes radiciels U_α et $U_{-\alpha}$. Soient N_α normalisateur de $H_\alpha(\mathbf{G}_m)$ dans $SL(2)_\alpha$ et $N_\alpha^1 := N_\alpha - H_\alpha(\mathbf{G}_m)$. Pour énoncer (7.6.2) nous utiliserons la trijection de J. Tits (Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Publ. Math. IHES*, **31** (1966), prop. 1, p. 25), entre $U_\alpha - \{0\}$, $U_{-\alpha} - \{0\}$ et N_α^1.

(7.6.2) Pour w_α, e_α, $e_{-\alpha}$, dans la trijection de Tits et $e_\beta \in U_\beta - \{0\}$,

$$[w_\alpha(e_\beta)] = [e_\beta]\,[e_\alpha]^{-\alpha(H_\beta)}\,\varepsilon(-\alpha(H_\beta))^{Q(H_\alpha)}$$

avec $\varepsilon(n) = (-1)^{n(n-1)/2}$. En particulier,

$$[e_{-\alpha}]\,[e_\alpha] = (-1)^{Q(H_\alpha)}.$$

7.7. Soit G un schéma en groupes réductifs (0.N.4) sur S. Il est extension d'un tore par un groupe semi-simple : le groupe dérivé G^{der}. Soit G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{der}. Pour chaque point géométrique $\bar{s}$ de s de caractéristique 0, la fibre géométrique $G^{sc}_{\bar{s}}$ est le revêtement universel, au sens de la géométrie algébrique, de $G^{der}_{\bar{s}}$. En « mauvaises » caractéristiques $p \geqslant 2$, le morphisme $\pi : G^{sc}_{\bar{s}} \to G^{der}_{\bar{s}}$ n'est pas nécessairement étale. Si $T^{sc}_{\bar{s}}$ est un tore maximal de $G^{sc}_{\bar{s}}$, le morphisme π induit des isomorphismes sur les sous-groupes radiciels correspondants, et $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T^{sc}_{\bar{s}})$ est engendré par les H_α.

Soient T un sous-schéma en tores maximaux de G et X, Y, W comme en (0.N.7). L'image inverse T^{sc} de T dans G^{sc} est un sous-schéma en tores maximaux de G^{sc}. Soient X^{sc} et Y^{sc} correspondant à T^{sc} comme en (0.N.7).

Soit Q une forme quadratique entière W-invariante sur Y. Par restriction à Y^{sc}, elle définit des classes $\mathbf{c}_n^{sc} \in H^4(BG^{sc}, \mathbf{Z}/n(2))$, pour n inversible sur S. Comme en 7.6, elle définit aussi une extension centrale de faisceaux sur S

$$(7.7.1) \qquad 0 \to \mathbf{G}_m \to \mathscr{E}^{sc} \to Y^{sc} \to 0.$$

Espoir **7.8.** — *Avec les notations précédentes, la donnée d'un prolongement de* (7.7.1) *en une extension centrale* $\mathscr{E}$

$$(7.8.1) \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathscr{E}^{sc} & \longrightarrow & Y^{sc} \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathscr{E} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

vérifiant (7.2.2) *définit « au niveau des cocycles » des classes* $\mathbf{c}_n \in \widetilde{H}^4(BG, \mathbf{Z}/n(2))$ *(n inversible sur* S*) prolongeant les* $\mathbf{c}_n^{sc}$ *et de restriction à* BT *définies par* Q *et* $\mathscr{E}$.

Remarque **7.9.** — Étant donnés Q et un prolongement (7.8.1) de (7.7.1), on définit comme suit une action sur $\mathscr{E}$ du normalisateur N de T^{sc} dans G^{sc}. Pour $\tilde{y}$ dans $\mathscr{E}$ d'image y dans Y,

a) l'action de $H_\alpha(a)$ est donnée par $\tilde{y} \mapsto \tilde{y}.a^{B(H_\alpha, y)}$;
b) pour w_α, e_α, $e_{-\alpha}$ dans la trijection de Tits, comme en (7.6.2),

$$w_\alpha(\tilde{y}) = \tilde{y}.[e_\alpha]^{-\alpha(y)}\, \varepsilon(-\alpha(y))^{Q(H_\alpha)}.$$

Si T_1 est un nouveau sous-schéma en tores maximaux de G, les g dans G^{sc} conjuguant T en T_1 forment un torseur sous N. Tordant (7.8.1) par ce torseur, on obtient une donnée analogue pour T_1. Elle doit donner lieu aux mêmes c_n. Cette construction rend l'espoir 7.8 indépendant du choix d'un tore maximal.

Exemple **7.10.** — Faisons $G = GL(N)$ sur un corps F et prenons pour T un tore maximal déployé. Soient x_i les poids de T dans la représentation standard et prenons

$$Q = \frac{1}{2}\,(\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2).$$

La restriction de Q à Y^{sc} est le générateur positif des formes quadratiques entières W-invariantes sur Y^{sc}.

Une représentation linéaire V de G, isomorphe à la représentation tautologique, définit un prolongement (7.8.1) : plonger G dans $SL(V \oplus \det(V)^\vee)$, par $g \mapsto (g, \det(g)^{-1})$ et appliquer 7.6 à T vu comme tore maximal de SL. Concrètement, soit e_i la base de Y duale de la base x_i du groupe des caractères de T et soit V_i le sous-espace de V de

poids x_i. L'extension $\mathscr{E}$ est caractérisée, à isomorphisme unique près, comme vérifiant (7.2.2) et étant munie d'applications

$$[\ \ ] : V_i - \{0\} \to \pi^{-1}(e_i)$$

vérifiant

$$[av] = a[v].$$

Les H_α sont les $e_i - e_j$, et $U_\alpha = \mathrm{Hom}(V_j, V_i) \simeq V_j^\vee \otimes V_i$. On identifie l'extension $Y \mid Y^{sc}$ à $\mathscr{E}^{sc}$ en la munissant des

$$[\ \ ] : v_j^{-1} v_i \to [v_j]^{-1}[v_i].$$

Cette construction, $V \mapsto E$, induit un isomorphisme sur les groupes d'automorphismes : de V, comme représentation de GL_n, et de $\mathscr{E}$, comme extension centrale prolongeant $\mathscr{E}^{sc}$. C'est donc une équivalence de catégories : il revient au même de se donner une représentation isomorphe à la représentation tautologique, ou un prolongement (7.8.1).

Prenons maintenant pour G une forme intérieure de GL(N) : le groupe multiplicatif d'une algèbre centrale simple D sur F. Soit T un tore maximal. La question étant locale, il revient encore au même de se donner $\mathscr{E}$, ou de se donner une représentation linéaire V de G géométriquement isomorphe à la représentation tautologique de GL(N) : l'existence de $\mathscr{E}$ est obstruée par la classe de D dans le groupe de Brauer.

Si l'on croit 7.8, les extensions centrales (3.6) de $G^{sc}(F)$ par les $H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$ n'ont donc en général pas d'extension naturelle à G(F). Par contre, si D est d'ordre k dans le groupe de Brauer, on peut espérer que la donnée d'un $D^{\otimes k}$-module simple fournisse une extension naturelle de leur multiple par k.

7.11. Soient F un corps et n un entier inversible dans F. Dans cet article, nous avons étudié des extensions centrales par le groupe de cohomologie galoisienne $H^2(F, \mathbf{Z}/n(2))$. D'après Merkurjev-Suslin (1982), ce groupe est le quotient $K_2(F) \otimes \mathbf{Z}/n$ de $K_2(F)$. Le groupe $K_2(F)$ est à considérer comme un groupe de cohomologie motivique $H^2(F, \mathbf{Z}(2))$. Nos méthodes, reposant essentiellement sur les bonnes propriétés de localisation, pour la topologie étale, des $H^*(F, \mathbf{Z}/n(2))$, ne s'appliquent pas à $K_2(F)$. On peut se demander comment y obvier, et dans quelle mesure s'étendent les fonctorialités que nous avons utilisées. Par exemple : soient T_i ($i = 1, 2$) deux tores sur un corps F, de clôture séparable $\bar{F}$, et $Y_i = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(\mathbf{G}_m, T)$. Soit $B : Y_1 \otimes Y_2 \to \mathbf{Z}$ invariant par $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. La forme B définit-elle un accouplement

$$(?) \qquad B : T_1(F) \otimes T_2(F) \to K_2(F)$$

compatible aux accouplements

$$B(\partial_n t_1, \partial_n t_2) : T_1(F) \otimes T_2(F) \to H^2(F, \mathbf{Z}/n(2)) = K_2(F) \otimes \mathbf{Z}/n\ ?$$

BIBLIOGRAPHIE

R. Bott, On torsion in Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 586-588.

E. Cartan, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie (1936), Paris, Hermann (*Œuvres*, I, vol. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1952, p. 1307-1330).

P. Deligne, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. IHES*, **44** (1974), 5-78.

P. Deligne, Le symbole modéré, *Publ. Math. IHES*, **73** (1991), 147-181.

M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Paris, Masson, 1970.

R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Paris, Hermann, 1958.

L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239, Springer Verlag, 1971.

H. Matsumoto, Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, *Ann. Sci. ENS*, **2** (1969), 1-62,

A. S. Merkurjev, A. A. Suslin, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphisms. *Izv. Acad. Sci. URSS*, **46** (1982), n° 5, 1011-1046.

J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Perspective in Math. 1, Acad. Press, 1986.

J. Milnor, Construction of universal bundles I, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 272-284.

C. C. Moore, Group extensions of p-adic and adelic linear groups, *Publ. Math. IHES*, **35** (1968), 5-70.

G. Poitou, *Cohomologie galoisienne des modules finis*, Séminaire de Lille (1962-1963), Paris, Dunod, 1967.

G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, *Publ. Math. IHES*, **34** (1968), 105-112.

J. Tate, Relations between K_2 and Galois cohomology, *Inv. Math.*, **36** (1976), 257-274.

SGA3, *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962-1964*, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics, **151**, **152**, **153** (1970), Springer Verlag.

SGA4, *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-1964*, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, **269**, **270**, **305** (1972 et 1973), Springer Verlag.

SGA4$\frac{1}{2}$, P. Deligne, *Cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, **569** (1977), Springer Verlag.

School of Mathematics,
Institute for Advanced Study,
Princeton, NJ 08540.
E-mail address: deligne@math.ias.edu.

Manuscrit reçu le 13 mai 1996.