

FERNAND PELLETIER

Singularités d'ordre supérieur de 1-formes, 2-formes et équations de Pfaff

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 61 (1985), p. 129-169

http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1985__61__129_0

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SINGULARITÉS D'ORDRE SUPÉRIEUR DE 1-FORMES, 2-FORMES ET ÉQUATIONS DE PFAFF

par FERNAND PELLETIER

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	129
CHAPITRE I. — Symbole d'un germe de 2-forme	137
1.1. Symbole et étendard d'une 2-forme extérieure sur un drapeau	137
1.2. Symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux emboîtés	140
1.3. Symbole d'un germe de 2-forme	142
CHAPITRE II. — Singularités de rang des 2-formes et 2-formes fermées. Singularités de classe d'équations de Pfaff et de 1-formes	145
2.1. Notations, Généralités	145
2.2. Singularités du rang des 2-formes	146
2.3. Relation entre les ensembles $\Sigma_{S_0} \dots S_k(\omega)$ d'un germe de 2-forme et les singularités $\Sigma_{S_0} \dots S_k$	149
2.4. Cas des 2-formes fermées	150
2.5. Comportement générique du rang d'une 2-forme sur une variété. Cas des 2-formes fermées	153
2.6. Comportement générique de la classe d'une équation de Pfaff	157
2.7. Quelques singularités d'ordre supérieur de la classe d'une 1-forme	159
CHAPITRE III. — Construction des singularités dans Λ_k^2 et Ω_k^2	162
3.1. Plan de démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1	162
3.2. Démonstration de la proposition 3.1.3 (esquisse)	167

INTRODUCTION

Soit ω une forme différentielle sur une variété M de dimension n . Le *rang* de ω en un point x de M est la codimension de l'espace associé à ω , ou noyau de ω , c'est-à-dire l'espace

$$K_\omega(x) = \{u \in T_x M \mid u \lrcorner \omega_x = 0\}$$

($u \lrcorner \omega_x$ désigne le produit intérieur de ω_x par u). La *classe* de ω en x est la codimension de l'intersection des noyaux de ω et de $d\omega$ en x c'est-à-dire l'espace $K_\omega(x) \cap K_{d\omega}(x)$. La classe et le rang sont invariants par le groupe des difféomorphismes de la variété.

En mécanique analytique, les formes de rang et de classe constants jouent un rôle essentiel, comme, par exemple, les formes symplectiques et les formes de contact. (Rappelons qu'une forme symplectique est une 2-forme fermée de rang maximum sur une variété de dimension paire, une forme de contact est une 1-forme de classe maximale sur une variété de dimension impaire.)

En général, le rang ou la classe varient d'un point à un autre. Le lieu des points où le rang, ou la classe, s'abaissent est une singularité de la forme, c'est-à-dire un ensemble de points où les propriétés de la forme changent localement.

Une situation analogue se présente pour le rang d'une application. La théorie des singularités de rang d'applications différentiables d'une variété M dans une variété P , les singularités de Thom-Boardman ([1], [2], [9], [12], [13], [17]), repose sur les deux principes suivants :

- A) la donnée d'un invariant numérique ρ , c'est-à-dire d'une application $\rho : M \times C^\infty(M, P) \rightarrow N$ invariante par l'action du groupe des difféomorphismes de M et de P . Pour les applications, l'invariant est le rang;
 B) la construction d'ensembles singuliers :

- 1) On définit les ensembles singuliers $\Sigma_{r_1}(f) = \{x \in M \mid \rho(f, x) = r_1\}$. Ce sont les premiers ensembles singuliers.
- 2) Supposons défini $\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f)$. Lorsque cet ensemble est une sous-variété régulière de M on peut étudier

$$\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1} r_i}(f) = \{x \in \Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f) \mid \text{tel que } \rho(f_i, x) = r_i\},$$

où f_i est la restriction de f à $\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f)$.

L'ensemble $\Sigma_{r_1 \dots r_i}(f)$, quand il peut être défini, n'est pas toujours une sous-variété régulière. Grâce aux théorèmes classiques de transversalité de René Thom ([18]), génériquement (c'est-à-dire pour un ensemble résiduel d'applications f), les ensembles $\Sigma_{r_1}(f), \dots, \Sigma_{r_1 \dots r_i}(f)$ sont des sous-variétés régulières de M .

Une première étude des *singularités de rang et de classe de formes différentielles* a été entreprise par Jean Martinet dans sa thèse ([10]). Voici rappelés ses principaux résultats.

Soit ω une p -forme différentielle ou une p -forme fermée sur M :

- si $p \neq 2$, génériquement le rang de ω est maximum en tout point de M , sauf peut-être sur un ensemble de points isolés où ω s'annule (cette dernière situation se présente pour $p = 1, n - 1, n$);
- si $p = 2$, génériquement le rang de ω est $n - c$ le long d'une sous-variété régulière Σ_c de codimension $\frac{c(c-1)}{2}$, lorsque $n - c$ est pair.

La classe d'une forme fermée est égale à son rang. La situation générique de la classe d'une p -forme est analogue à celle du rang, à la différence près que ce sont les 1-formes au lieu des 2-formes qui ont un comportement particulier.

L'étude de Jean Martinet concerne également le comportement générique de la

classe d'une équation de Pfaff. Rappelons que la *classe d'une équation de Pfaff* σ en x est la codimension du noyau $K_{\omega \wedge d\omega}(x)$, si ω est une 1-forme représentant localement σ . La situation générique est alors la même que pour le rang d'une 2-forme. Dans le cas particulier des 2-formes fermées sur $\mathbf{R}^4$, il a poursuivi l'étude en montrant que la variété :

$$\Sigma_2(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid \text{rg}_x \omega = 2\}$$

peut être encore stratifiée en sous-variétés par la valeur de la dimension de l'intersection $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_2(\omega)$ (voir aussi [14]). De cette manière, Jean Martinet suggérait que l'on pourrait construire pour les formes une théorie des singularités d'ordre supérieur, analogue à la théorie de Thom-Boardman. L'objet de ce travail est de faire partiellement une telle étude.

Comme le montrent tous les résultats rappelés plus haut, le rang (resp. la classe) d'une p -forme est un mauvais invariant pour $p = 1$, et $3 \leq p \leq n - 2$ (resp. $2 \leq p \leq n$), dans le sens où, génériquement, il est maximal en tout point. La description complète des ensembles singuliers d'ordre supérieur des $(n - 1)$ -formes et $(n - 1)$ -formes fermées et des n -formes ayant été réalisée par Golubitsky et Tischler dans [6], la théorie des ensembles singuliers d'ordre supérieur de formes n'a de raison d'être que dans les cas suivants :

- le rang d'une 2-forme;
- le rang d'une 2-forme fermée;
- la classe d'une 1-forme;
- la classe d'une équation de Pfaff.

C'est pourquoi les résultats que nous obtenons concernent ces quatre situations.

Comme pour les applications, les ensembles singuliers d'ordre supérieur de forme définis par Martinet, Tischler et Golubitsky possèdent la propriété caractéristique suivante :

Le noyau de la restriction de ω au premier ensemble singulier $\Sigma_r(\omega)$ est égal à l'intersection $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_r(\omega)$, $K_{\omega}(x)$ étant le noyau de ω en x . Pour les formes, en général, on a seulement l'inclusion $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_r(\omega) \subset K_{\bar{\omega}}(x)$, où $K_{\bar{\omega}}(x)$ est le noyau en x de la restriction $\bar{\omega}$ de ω à $\Sigma_r(\omega)$. *Cette inclusion peut être stricte* comme le montre l'exemple suivant.

Soit $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ la 2-forme symplectique canonique sur $\mathbf{R}^4$; la restriction $\bar{\omega}$ de ω au plan Lagrangien d'équation $x_1 = x_2 = 0$ est nulle et on a l'inclusion stricte

$$K_{\bar{\omega}}(x) = L \supsetneq K_{\omega}(x) \cap L = \{0\}.$$

C'est pourquoi, pour étudier les singularités d'ordre supérieur du rang, il est naturel d'introduire les dimensions des espaces

$$K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_c(\omega) \quad \text{et} \quad K_{\bar{\omega}}(x).$$

On définit ainsi

$$\Sigma_{c_1}(\Sigma_c(\omega)) = \{x \in \Sigma_c(\omega) \mid \dim(K_\omega(x) \cap T_x \Sigma_c(\omega)) = c_1 \text{ et } \dim K_\omega(x) = c_1\}$$

et on note cet ensemble $\Sigma_{c_1}(\omega)$.

Afin de donner le résultat général pour les 2-formes, il est nécessaire d'introduire les notations suivantes : soient $M = M_0 \supset \dots \supset M_l \supset \dots \supset M_k$ des sous-variétés régulières de M et $i_l: M_l \rightarrow M$ l'inclusion. On désigne par $i_l^*: \Lambda^2 T^* M \rightarrow \Lambda^2 T^* M_l$

l'application induite par i_l et par ω_l la forme induite $i_l^* \omega$. Pour tout $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^k$ on définit l'ensemble

$$\Sigma_S^\omega[M_0, \dots, M_k] = \{x \in M_k \mid \dim(K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_k) = s_i, i = 0, \dots, k\}.$$

Le symbole de ω en $x \in M_k$ sur $(M_0, \dots, M_k)$ est l'élément $(S_0, \dots, S_k)$ de $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ si } s_i^j = \text{codim}[K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_j].$$

Le symbole se présente sous forme d'un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & S_1 & \dots & S_j & \dots & S_k \\ s_0^0 & s_0^1 & \dots & s_0^j & \dots & s_0^k \\ & s_1^1 & \dots & s_1^j & \dots & s_1^k \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & s^j & \dots & s_j^k \leftarrow \dim[K_{\omega_j}(x) \cap T_x M \dots] \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & s_k^k \\ & & & & \uparrow & \\ & & & & \dim[K_{\omega_{\dots}}(x) \cap T_x M_j] & \end{array}$$

Le résultat est alors le suivant (énoncé dans le § 2.2) :

Théorème. — Dans l'espace des 2-formes sur une variété M de dimension n , les propriétés suivantes sont génériques :

Pour tout entier k et tout $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$, si n est assez grand, les ensembles $\Sigma_{S_0}(\omega), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$ sont des sous-variétés régulières de M , où $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$ est défini par récurrence :

$$\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega) = \Sigma_{S_j}^\omega[M, \Sigma_{S_0}(\omega), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)].$$

Le symbole d'un élément générique ω est $(S_0, \dots, S_k)$ en tout point de $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$. Lorsque $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$ est non vide, sa codimension $\nu_{S_0 \dots S_k}$ est donnée par la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} \nu_{S_0 \dots S_k} = \nu_{S_0 \dots S_{k-1}} &+ \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ &+ s_{k-1}^k (\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_i^k). \end{aligned}$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$ soit non vide sont précisées dans le § 2.2. De plus, dans [15] on donne une méthode de construction d'exemples génériques à coefficients polynomiaux présentant en $o \in \mathbf{R}^n$ la singularité $\Sigma_{S_0 \dots S_k}$, lorsqu'elle existe.

Pour les 2-formes fermées le résultat s'énonce de la même manière mais avec l'hypothèse restrictive suivante sur $(S_0 \dots S_k)$: sauf pour au plus un entier $1 \leq j \leq k$, S_j vérifie

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \quad 2 \leq j \leq k.$$

Si, pour tout j , la condition $(*)$ est satisfaite, dans les 2-formes et les 2-formes fermées les ensembles singuliers ont même codimension. Par contre, lorsqu'il existe un entier j ne vérifiant pas $(*)$, la codimension n'est plus la même. Il faut retrancher à $\nu_{S_0 \dots S_k}$:

$$\begin{aligned} \rho_k = \frac{(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)}{6} (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 2) \\ + (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k) (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) \frac{s_{k-1}^k}{2} \\ + \sum_{i=1}^{k-3} (s_i^{k-2} - s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-2} + s_{i-1}^{k-1}) \frac{s_{i-1}^k}{2} + (\nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-3}} \\ + s_{k-2}^{k-2} - s_{k-1}^{k-1} + 2s_{k-2}^{k-1}) (s_{k-3}^k - 1) \frac{s_{k-3}^k}{2}. \end{aligned}$$

Enfin dans les autres cas, en général, les ensembles singuliers seront des ensembles semi-algébriques non réguliers. Pour illustrer ces résultats voici des symboles $(S_0, \dots, S_k)$

qui conduisent à des genericités différentes dans les 2-formes et les 2-formes fermées :

222	2220	2220	2221	} 2-formes fermées
32	320	320	321	
3	30	31	31	
codim 6	0	2	2	
	codim 6	codim 7	codim 8	
222	2220	2221	2220	} 2-formes
32	320	321	321	
3	30	31	31	
codim 7	1	1	3	
	codim 7	codim 10	codim 10	

Le résultat sur les singularités de classe d'une équation de Pfaff s'exprime, comme pour les 2-formes, avec l'hypothèse (*) sur $(S_0, \dots, S_k)$ et l'hypothèse supplémentaire suivante :

L'équation de Pfaff σ ne s'annule pas en restriction aux ensembles singuliers $\Sigma_{s_0 \dots s_j}(\sigma)$, $0 \leq j \leq k$ (voir § 2.6).

Pour les singularités de classe d'une 1-forme il est nécessaire d'introduire un invariant supplémentaire permettant de comparer les intersections de $K_\omega \cap K_{d\omega}$ et de $K_{d\omega}$ avec les espaces tangents $T\Sigma_{s_0}, \dots, T\Sigma_{s_0 \dots s_k}$. Cet invariant se présente sous forme d'un tableau triangulaire $(V_0, \dots, V_k)$. On définit des ensembles singuliers $\Sigma_{s_0 \dots s_k}^{V_0 \dots V_k}$. Le résultat se formule de manière analogue à l'énoncé du théorème sur les 2-formes moyennant des hypothèses du type (*) sur $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$ et l'hypothèse supplémentaire : la 1-forme ne s'annule pas en restriction aux différents ensembles singuliers. Tous ces résultats sont développés dans le § 2.7.

Nous allons indiquer comment sont établis tous ces théorèmes. Comme pour les singularités de Thom-Boardman, leur démonstration se ramène, grâce aux théorèmes de transversalité de Thom, à la construction de singularités convenables dans un espace de jets, selon le développement rappelé maintenant.

Soient L_k le groupe des $(k+1)$ -jets en 0 de difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ conservant l'origine et Λ_k^2 l'espace des k -jets en 0 de 2-formes dans $\mathbf{R}^n$. On construit une singularité $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ dans l'espace Λ_k^2 , c'est-à-dire une sous-variété L_k -invariante. L'espace $\Lambda_k^2(M)$ des k -jets de 2-formes sur une variété M est l'espace total d'une fibration $\Lambda_k^2(M) \rightarrow M$ de fibre type Λ_k^2 et de groupe structural L_k . La singularité $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ étant L_k -invariante, elle permet de construire un sous-ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(M)$ de $\Lambda_k^2(M)$ fibré sur M de fibre type $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$. Les théorèmes classiques de transversalité de Thom assurent la genericité des résultats annoncés. Avant d'indiquer comment est définie $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$, précisons les données algébriques utilisées.

Soit ω un germe en $o \in \mathbf{R}^n$ de 2-forme. Par définition, $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ est l'ensemble des points de $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$ tels que

$$\dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)] = s_i^j$$

(voir les notations introduites avant le théorème sur les 2-formes). Pour définir $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ à partir de $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$, il suffit de l'idéal de définition σ_ω^k de $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$ et de la famille d'espaces

$$[K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)] \quad 0 \leq i \leq k.$$

Par récurrence, la définition de $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ nécessite les idéaux de définitions $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ des ensembles $\Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$ et la famille d'espaces $[K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_j}(\omega)]$ $0 \leq i \leq j \leq k$ ou, de manière équivalente, la famille des espaces orthogonaux $[K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_j}(\omega)]^\perp$ $0 \leq i \leq j \leq k$.

Si maintenant on considère $\omega \in \Lambda_k^2$ comme un germe à coefficient polynomial, l'idéal σ_ω^1 sera défini modulo $\mathfrak{m}^{k+1}$ ($\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de l'anneau des germes de fonctions en $o \in \mathbf{R}^n$). D'une manière générale, σ_ω^j sera défini modulo $\mathfrak{m}^{k-j+1}$.

Nous allons maintenant indiquer comment est construit $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ (Chap. II). Soit A_k l'anneau des k -jets en o de fonction sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathfrak{m}_k$ son idéal maximal. A tout k -jet ω appartenant à Λ_k^2 on va associer canoniquement, c'est-à-dire de façon invariante pour l'action du groupe L_k :

- 1° Des idéaux $\sigma_\omega^j \subset \mathfrak{m}_{k-j+1}$ $1 \leq j \leq k$.
- 2° Une famille d'espaces $A_i^j(\omega) \subset (\mathbf{R}^n)^*$ $0 \leq i \leq j \leq k$.

Le symbole du k -jet ω est $(S_0, \dots, S_k)$ avec $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ si $s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega)$.

Dans chaque espace Λ_h^2 , $0 \leq h \leq k$, on définit les ensembles semi-algébriques $\bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_h} = \{\omega \text{ dont le symbole est } (S_0, \dots, S_h)\}$.

L'ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ annoncé est alors

$$\{\omega \in \bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_k} \mid \text{codim } \sigma_\omega^{h+1}(o) = \dim \bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_h}, 0 \leq j \leq k-1\}.$$

Par un argument de transversalité on montre facilement que

$$\text{codim}(\bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_k} - \Sigma_{s_0 \dots s_k}) > n.$$

En d'autres termes seul « l'ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ apparaît génériquement ». Comme $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ est L_k -invariant, il faut montrer qu'il est une variété : c'est l'objet du chapitre III.

Ce travail est décomposé en trois chapitres. Dans le premier, on rappelle les résultats de classification des orbites de $GL_n(\mathbf{R})$ sur $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^* \times D_k$. On introduit ensuite la notion fondamentale de symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux

emboîtés. On construit enfin par récurrence une famille d'idéaux emboîtés $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$, associés à tout germe de 2-forme ω , et caractérisés par le fait que, $\sigma_\omega^{\ell+1}$ est l'idéal de définition de l'ensemble singulier $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ si $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell$ sont réguliers. Le chapitre II est le chapitre essentiel de ce travail. On y définit d'abord le symbole et l'étendard d'un k -jet de 2-forme, à partir du symbole d'un germe $\tilde{\omega}$ et de la famille $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ d'idéaux associés. On définit ensuite les singularités $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ et $\xi_{s_0 \dots s_k}$ de 2-formes et de 2-formes fermées. Enfin, on énonce les résultats de généricité obtenus. Dans ce chapitre, on rappelle également les résultats sur les singularités de classe d'équations de Pfaff et de 1-formes de [15]. Enfin dans le chapitre III, on donne une esquisse de démonstration des résultats sur les singularités $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ et $\xi_{s_0 \dots s_k}$ de 2-formes et de 2-formes fermées.

Les résultats sur la stabilité des formes et la construction de modèles [6], [10], [16] s'appuient sur les propriétés des ensembles singuliers définis par J. Martinet. On peut espérer que ce travail permettra d'obtenir de nouveaux résultats de stabilité ou d'obtenir une écriture sous formes normales des 1-formes et 2-formes génériques construites. Par exemple, on pourra peut-être ainsi donner une réponse au problème de la stabilité des 2-formes fermées, problème qui reste encore ouvert à ma connaissance.

Dans [8], Jakubczyk et Przytycki ont défini des singularités de k -uples de champs de vecteurs. Ils ont montré qu'il existe une bijection entre les singularités génériques de deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ et les singularités de classe de l'équation de Pfaff définie par ces deux champs. Il est bien certain que les singularités de champs de vecteurs ne se ramènent pas à l'étude des singularités de formes et inversement. Cependant, il existe certaines relations entre elles. Par exemple, la donnée de $n - 1$ champs de vecteurs indépendants sur $\mathbf{R}^n$ équivaut à la donnée d'une équation de Pfaff sur $\mathbf{R}^n$. On peut se demander s'il existe certaines correspondances entre les singularités définies dans [8] et les singularités d'équations de Pfaff que nous définissons. La détermination de formes normales dans un cas permettrait d'obtenir des formes normales dans l'autre cas.

I. — SYMBOLE D'UN GERME DE 2-FORME

1.1. Symbole et étendard d'une 2-forme extérieure sur un drapeau [15]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Son dual est noté E^* et on identifie $\Lambda^p E^*$ à l'espace des p -formes alternées sur E . Le produit intérieur de $\omega \in \Lambda^p E^*$ par x de E est noté $x \lrcorner \omega$. On appelle *support* (resp. *noyau*) de ω l'image S_ω (resp. le noyau K_ω) de l'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E^*, \\ x &\rightarrow x \lrcorner \omega. \end{aligned}$$

Le *rang* (resp. le *corang*) de ω est la dimension de S_ω (resp. K_ω). Pour les éléments de $\Lambda^2 E^*$ rappelons que l'on a le résultat suivant :

1.1.1. Proposition [5] [10]. — *Le rang de $\omega \in \Lambda^2 E^*$ est pair et on a les équivalences suivantes :*

- (i) *le rang de ω est $2r$;*
- (ii) *$\omega^r \neq 0$ et $\omega^{r+1} = 0$ où $\omega^r = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ r fois;*
- (iii) *il existe des 1-formes indépendantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2r}$ telles que*

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \dots + \alpha_{2r-1} \wedge \alpha_{2r}.$$

Pour tout élément g du groupe $GL(E)$ des automorphismes de E , on note g^* l'automorphisme de $\Lambda^p E^*$ induit par g . Le rang d'une p -forme est invariant sous l'action de $GL(E)$ sur $\Lambda^p E^*$. Soit Σ_r l'ensemble des éléments de $\Lambda^2 E^*$ dont le rang est égal à r . On peut reformuler la proposition 1.1.1 de la manière suivante :

1.1.1'. Proposition. — *Les ensembles Σ_r , $0 \leq r \leq n$, s'identifient aux orbites de l'action de $GL(E)$ sur $\Lambda^2 E^*$.*

Soit $i: F \rightarrow E$ l'inclusion d'un sous-espace vectoriel F de codimension $p < n$. Etant donné une q -forme ω sur E , on note $\bar{\omega} = i^* \omega$ la restriction de ω à F . Le noyau $K_{\bar{\omega}}$ contient l'intersection $K_\omega \cap F$ mais en général l'inclusion est stricte (voir l'introduction). L'orthogonal de $K_{\bar{\omega}} \cap F$ est l'espace $S_\omega + F^\perp$. On appelle *support de ω sur F* l'espace $S_\omega(F) = (K_{\bar{\omega}})^\perp$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ est une base de $F^\perp$, on voit immédiatement que $S_\omega(F)$ est égal au support de la $(p+q)$ -forme $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega$. Le résultat suivant se démontre facilement :

1.1.2. Lemme. — Soit ω une 2-forme sur E et F un sous-espace vectoriel de E .

(1) On a l'inclusion $S_\omega(F) \subset S_\omega + F^\perp$.

(2) La dimension de $S_\omega(F)$ est de la forme $p + 2r$ et les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim S_\omega(F) = p + 2r$;

(ii) $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega^r \neq 0$ et $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega^{r+1} = 0$;

(iii) le rang de la restriction de ω à F est $2r$.

(3) Pour tout automorphisme g de E ,

$$S_{g^*\omega}[g^{-1}(F)] = g^*[S_\omega(F)].$$

Au couple (ω, F) formé d'une 2-forme et d'un sous-espace de E on a associé les espaces $(S_\omega, S_\omega(F), S_\omega + F^\perp)$. Les dimensions de ces espaces sont des invariants de l'action de $GL(E)$ sur le produit $\Lambda^2 E^* \times \Gamma_p(E)$ où $\Gamma_p(E)$ est la grassmannienne des $(n - p)$ -plans de E . On verra plus loin que ces invariants caractérisent complètement les orbites de l'action de $GL(E)$ sur ce produit d'espaces. Plus généralement, on se propose dans ce paragraphe de rappeler la construction d'un système d'invariants qui caractérisent complètement les orbites de $GL(E)$ sur $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$ (théorème 1.1.4) où $D_k(E)$ est l'ensemble des drapeaux de longueur k de E (c'est-à-dire des suites d'espaces $F_0 = E \supset F_1 \supset \dots \supset F_k$).

Soit $F_0 = E \supset F_1 \supset \dots \supset F_k$ un drapeau de E et ω une 2-forme sur E . Comme précédemment, à $(\omega, F_0, \dots, F_k)$ on associe la famille d'espaces

$$S_\omega(F_i) + F_j^\perp \quad 0 \leq i \leq j \leq k.$$

En utilisant le lemme 1.1.2 (1) et (3) on démontre facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l}
 a) \{0\} = F_0^\perp \subset S_\omega \subset S_\omega + F_1^\perp \subset \dots \subset S_\omega + F_i^\perp \subset \dots \subset S_\omega + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad F_1^\perp \subset S_\omega(F_1) \subset \dots \subset S_\omega(F_1) + F_i^\perp \subset \dots \subset S_\omega(F_1) + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \subset \dots \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad F_i^\perp \subset S_\omega(F_i) \subset \dots \subset S_\omega(F_i) + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \subset \dots \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad F_k^\perp \subset S_\omega(F_k)
 \end{array}$$

b) La famille $S_\omega(F_i) + F_j^\perp$ est équivariante sous l'action de $GL(E)$.

1.1.3. Définition. — Soit ω une 2-forme sur E et $(F_0, \dots, F_k)$ un drapeau de longueur k .

- (i) La famille $S_\omega(F_i) + F_j^\perp$, $0 \leq i \leq j \leq k$, est appelée *étendard* de ω sur $(F_0, \dots, F_k)$.
- (ii) On appelle *symbole* de ω sur $(F_0, \dots, F_k)$ l'élément $(S_0, \dots, S_k)$ de $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \quad \text{si } s_i^j = \text{codim } S_\omega(F_i) + F_j^\perp.$$

A partir des propriétés *a)* ci-dessus et du lemme 2.1.2 *b)*, on montre facilement que le symbole $(S_0, \dots, S_k)$ d'une 2-forme ω sur $(F_0, \dots, F_k)$ vérifie :

- c)* $n \geq s_j^j \geq \dots \geq s_i^j \geq \dots \geq s_0^j$,
- d)* $n \geq \dim F_i \geq s_i^i \geq s_i^{i+1} \geq \dots \geq s_i^i \geq \dots \geq s_i^k$,
- e)* il existe une suite décroissante d'entiers $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_k$ tels que :

$$\dim F_i - s_i^i = 2\ell_i \quad 0 \leq i \leq k.$$

On a alors le résultat suivant (voir [15]).

1.1.4. Théorème. — Soient ω et ω' des 2-formes sur E et $(F_0, \dots, F_k)$, $(F'_0, \dots, F'_k)$ des drapeaux de E de longueur k . Il existe un automorphisme g de E tel que

$$g(F'_i) = F_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \text{et } g^* \omega = \omega',$$

si et seulement si

- (i) $\dim F_i = \dim F'_i$, $i = 0, 1, \dots, k$,
- (ii) le symbole de ω sur $(F_0, \dots, F_k)$ est égal au symbole de ω' sur $(F'_0, \dots, F'_k)$.

Etant donné $(S_0, \dots, S_k, T_k)$ appartenant à $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$, on désigne par $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$ l'ensemble des $(\omega, F_0, \dots, F_k)$ de $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$ tels que :

$$\bullet \dim F_i = t_i \quad \text{si } T_k = \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix},$$

- le symbole de ω sur $(F_0, \dots, F_k)$ est $(S_0, \dots, S_k)$.

Le théorème 1.1.4 peut également se formuler de la manière suivante :

1.1.4. Théorème. — La partition de $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$ définie par les ensembles $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$ s'identifie à la partition de cet ensemble par les orbites de l'action de $GL(E)$.

Nous allons terminer ce paragraphe par la *définition du symbole, en un point, d'une 2-forme différentielle sur une famille de variétés emboîtées*. Soit M une variété C^∞ de dimension n et $\Lambda^2 T^*M$ le fibré des 2-formes différentielles sur M . Le *noyau*, le *support*, le *rang* de ω en $x \in M$ sont respectivement le noyau $K_\omega(x)$, le support $S_\omega(x)$ et le rang de la 2-forme extérieure $\omega(x)$. Soient $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$ des sous-variétés emboîtées de M . On note ω_ℓ la 2-forme sur M_ℓ induite par la 2-forme ω , pour $0 \leq \ell \leq k$.

1.1.5. Définition. — On appelle *symbole* $(S_0, \dots, S_k)$ de ω sur $(M_0, \dots, M_k)$ en $x \in M_k$ le symbole (au sens de 1.1.3) de la 2-forme extérieure $\omega(x)$ sur le drapeau $(T_x M_0, T_x M_1, \dots, T_x M_k)$ de $T_x M$ c'est-à-dire :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ si et seulement si } \begin{aligned} s_0^j &= \dim[K_{\omega_0}(x) \cap T_x M_j], \\ s_i^j &= \dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_j], \\ s_j^j &= \dim[K_{\omega_j}(x) \cap T_x M_j]. \end{aligned}$$

Pour tout $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$ on désigne par $\Sigma_S^\omega(M_0, \dots, M_k)$ l'ensemble des x de M_k tels que l'on ait

$$\dim[K_{\omega_\ell}(x) \cap T_x M_k] = s_\ell \quad 0 \leq \ell \leq k.$$

Par exemple, l'ensemble $\Sigma_{s_0}^\omega(M)$, pour $S_0 = (s_0^0)$, est l'ensemble des points x de M où le rang de ω est $n - s_0^0$. Si cet ensemble est une variété, $\Sigma_{s_1}^\omega(M, \Sigma_{s_0}^\omega(M))$, pour $S_1 = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ s_1^1 \end{pmatrix}$, est l'ensemble des points x de $\Sigma_{s_0}^\omega(M)$ où le symbole de ω sur $(M, \Sigma_{s_0}^\omega(M))$ est (S_0, S_1) . D'une manière générale, si $M_0 = M$, $M_1 = \Sigma_{s_0}^\omega(M)$, $M_2 = \Sigma_{s_1}^\omega(M, M_1)$, $\dots$, $M_k = \Sigma_{s_{k-1}}^\omega(M_0, \dots, M_{k-1})$ sont des sous-variétés de M , $\Sigma_{s_k}^\omega(M_0, M_1, \dots, M_k)$ est l'ensemble des x de M_k où le symbole de ω sur $(M_0, \dots, M_k)$ est $(S_0, \dots, S_k)$. Cet ensemble sera désigné par $\Sigma_{s_0 \dots s_k}^\omega(\omega)$.

1.2. Symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux emboîtés

Etant donné un germe de 2-forme en o dans $\mathbf{R}^n$ et une famille $J_0, \dots, J_k$ d'idéaux emboîtés, on va définir une famille de modules de 1-formes et un symbole en $x \in \mathbf{R}^n$ voisin de $o \in \mathbf{R}^n$. Pour ce, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

1.2.1. Soit $\mathbf{A}$ l'anneau des germes de fonction C^∞ en $o \in \mathbf{R}^n$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On désigne par Λ^p , $1 \leq p \leq n$ (resp. χ), le module des germes en o de formes différentielles de degré p (resp. de champ de vecteurs) sur $\mathbf{R}^n$. Etant donné un sous-

module M de Λ^1 , de type fini, engendré par $\omega_1, \dots, \omega_\ell$, on note $M(x)$ le sous-espace de $(\mathbf{R}^n)^*$ engendré par $\omega_1(x), \dots, \omega_\ell(x)$ pour x voisin de o . Le *rang* de M est par définition la dimension de l'espace $M(o)$.

L'idéal jacobien d'un sous-module de type fini M de Λ^1 est l'idéal $jc(M)$ engendré par les $(r+1) \times (r+1)$ mineurs de la matrice $(\alpha(X))$ ($\alpha \in M$, $X \in \chi$) où r est le rang de M . A tout idéal J de $\mathbf{A}$, on associe le sous-module dJ de Λ^1 engendré par les différentielles df , pour $f \in J$. On dira que J est *régulier*, s'il possède un système de r générateurs où r est le rang de dJ . Le *support* d'une p -forme $\omega \in \Lambda^p$ est le sous-module S_ω de Λ^1 engendré par l'image de l'application

$$\begin{aligned} \chi^{p-1} &\rightarrow \Lambda^1 \\ (X_1 \dots X_{p-1}) &\rightarrow \omega(X_1, \dots, X_{p-1}). \end{aligned}$$

Par exemple le support d'une 2-forme ω est le sous-module engendré par les 1-formes $\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \cdot \right)$, $i = 1, \dots, n$, si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^n$. Le *rang* du module S_ω est le rang de la matrice antisymétrique $\left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mid 0 \leq i < j \leq n \right)$ en o , c'est-à-dire le rang de la 2-forme extérieure $\omega(o)$.

Enfin le *support* $S_\omega(J)$ d'une 2-forme $\omega \in \Lambda^2$ *relativement* à un idéal J de $\mathbf{A}$ est le sous-module de Λ^1 engendré par les sous-modules $S_{\alpha \wedge \omega}$ où α est un élément de $\Lambda^r dJ$, $r = \text{rang de } dJ$. Par exemple, si J est régulier, $[S_\omega(J)]^\perp(o)$ est égal à $K_{\bar{\omega}}(o)$ où $\bar{\omega}$ est la forme induite par ω sur la variété définie par $J = 0$.

1.2.2. Soit ω un germe de 2-forme et $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_k \subset \mathbf{A}$ une suite d'idéaux emboîtés. Si $J_0, \dots, J_k$ sont réguliers et définissent des variétés $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_k$, les espaces tangents $T_x V_0, \dots, T_x V_k$ en $x \in V_k$ voisin de o forment un drapeau de $T_x V_0$. La 2-forme extérieure $\omega(x)$ et ce drapeau déterminent un *étendard* et un *symbole* dépendant de x , appelé *symbole* de $(\omega, J_0, \dots, J_k)$ en x .

Ces définitions s'étendent en fait, de manière naturelle, aux cas où $J_0 \subset \dots \subset J_k$ sont des idéaux quelconques (de type fini) en utilisant les notions de support relatif, idéaux jacobiens... introduites précédemment. On désigne toujours par V_i l'ensemble des zéros de J_i et on procède comme suit :

- a) On forme les sous-modules $S_\omega(J_i)$ qui définissent, si J_i est régulier, les noyaux des restrictions ω_i de ω aux variétés V_i .
- b) On forme ensuite les sous-modules $S_\omega(J_i) + dJ_j$, $0 \leq i < j \leq k$, qui définissent (dans le cas régulier) la position relative du noyau de ω_i et de l'espace tangent à V_j .

c'est-à-dire

$$V_{\ell+1} = \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_\ell}(\omega)$$

(voir les notations introduites à la fin du § 1.1).

D'autre part, l'idéal σ_ω^1 étant l'idéal jacobien de S_ω , il ne dépend que du 1-jet de ω en o . De même, les modules $S_1^1(\omega) = S_\omega(\sigma_\omega^1)$ et $S_0^1(\omega) = S_\omega + d\sigma_\omega^1$ ne dépendent que du 1-jet de ω . D'une manière générale, σ_ω^k étant engendré par σ_ω^{k-1} et les idéaux jacobiens des modules $S_i^j(\omega)$ pour $0 \leq i \leq j \leq k-1$, l'idéal σ_ω^k et les $S_0^k(\omega), \dots, S_i^k(\omega), \dots, S_k^k(\omega)$ ne dépendront que du k -jet de ω en o . On obtient ainsi la

Proposition 1.3.2. — Soit ω un germe en $o \in \mathbf{R}^n$ de 2-forme. Son symbole $(S_0, \dots, S_k)$ d'ordre k en o ne dépend que du k -jet de ω . Si les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ sont réguliers, chaque ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ défini plus haut est une sous-variété régulière de $\mathbf{R}^n$ d'équation $\sigma_\omega^{\ell+1} = 0$ pour $1 < \ell < k$.

Lorsque les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^{\ell-1}$ sont réguliers, l'ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ est l'ensemble des x de $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$, voisins de o , pour lesquels on a :

$$\begin{aligned} \dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)] &= s_i^\ell \\ &= \dim[K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)] \text{ si } S_\ell = \begin{pmatrix} s_0^\ell \\ \vdots \\ s_i^\ell \\ \vdots \\ s_\ell^\ell \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour définir $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ à partir de $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$, il suffit donc de l'idéal de définition de $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$, c'est-à-dire σ_ω^ℓ , et de la famille d'espaces

$$K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega), \quad 0 \leq i \leq \ell,$$

c'est-à-dire $[S_i^\ell(\omega)](o)$ par passage à l'orthogonal. On a ainsi établi :

Proposition 1.3.3. — Soit ω un germe de 2-forme. Si les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ sont réguliers, les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$, $0 \leq \ell \leq k$, sont complètement caractérisés par les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell$ et la famille d'espaces $[S_i^j(\omega)](o)$, $0 \leq i \leq j \leq \ell$, $(S_0, \dots, S_k)$ étant le symbole d'ordre k de ω .

II. — SINGULARITÉS DE RANG DES 2-FORMES ET 2-FORMES FERMÉES SINGULARITÉS DE CLASSE D'ÉQUATIONS DE PFAFF ET DE 1-FORMES

2.1. Notations, généralités

On désigne par $\mathbf{A}_k$, $\mathfrak{m}_k$, Λ_k^p (resp. L_k) l'espace des k -jets (resp. $(k+1)$ -jets) en $o \in \mathbf{R}^n$ d'éléments de $\mathbf{A}$, $\mathfrak{m}$, Λ^p (resp. L) et par π_k la projection des espaces de germes sur les espaces de k -jets. Soit ω un k -jet de 2-forme et choisissons un germe $\tilde{\omega}$ dont le k -jet $\pi_k \tilde{\omega}$ est égal à ω . Comme dans le § 1.3, on peut associer à $\tilde{\omega}$:

- 1) les idéaux $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^k$ qui sont définis modulo $\mathfrak{m}^k, \dots, \mathfrak{m}^{k-\ell+1}, \dots$, respectivement,
- 2) les modules $S_0^0(\tilde{\omega}), \dots, S_i^\ell(\tilde{\omega}), 0 \leq i \leq \ell, \dots, S_i^k(\tilde{\omega}), 0 \leq i \leq k$, définis modulo $\mathfrak{m}^k \Lambda^1, \dots, \mathfrak{m}^{k-\ell} \Lambda^1, \dots, \mathfrak{m} \Lambda^1$ respectivement,
- 3) un symbole $(S_0, \dots, S_k)$: le symbole d'ordre k de $\tilde{\omega}$.

Si les idéaux $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^{k-1}$ sont réguliers (ce qui ne dépend que de ω), les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\tilde{\omega}), 0 \leq \ell \leq k$, sont caractérisées par $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$ et par les espaces $[S_i^\ell(\tilde{\omega})](o)$ pour $0 \leq i \leq \ell$ (voir proposition 1.3.3). D'autre part, si $\tilde{\omega}'$ est un autre germe de k -jet ω , les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\tilde{\omega})$ et $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\tilde{\omega}')$ ont un contact d'ordre $k - \ell$ en o (proposition 1.3.2).

Ainsi lorsque les idéaux $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^{k-1}$ sont réguliers, les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\tilde{\omega}), 0 \leq \ell \leq k$ sont déterminés à l'ordre « $k - \ell + 1$ près » par les idéaux $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$ et les espaces $[S_i^1(\tilde{\omega})](o), 0 \leq i \leq j \leq \ell$.

A tout k -jet ω de Λ_k^2 on va donc associer :

- 1) les idéaux $\sigma_\omega^0 = \{0\}, \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell, \dots, \sigma_\omega^k$, où $\sigma_\omega^\ell = \pi_{k-\ell} \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$ est un idéal de l'anneau quotient $\mathbf{A}_{k-\ell}$;
- 2) des espaces vectoriels $A_i^j(\omega) = [S_i^j(\tilde{\omega})](o) \subset \Lambda_0^1 = (\mathbf{R}^n)^*, 0 \leq i \leq j \leq k$, où $\tilde{\omega}$ est un germe de 2-forme de k -jet ω .

Si B_ω^ℓ désigne l'espace $[d\sigma_\omega^\ell](o), 0 \leq \ell \leq k$, l'étendard de la 2-forme extérieure $\omega(o)$ sur $(B_\omega^{0,1}, \dots, B_\omega^{k,1})$ (voir déf. 1.1.3) est égal à

$$[A_0^0(\omega), \dots, A_i(\omega), \dots, A_k(\omega)].$$

Le symbole de $\omega(o)$ sur $(B_\omega^{01}, \dots, B_\omega^{k1})$ est égal à $(S_0, \dots, S_k)$, où

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_i^j \end{pmatrix} \quad \text{si } s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega).$$

Définition. — Soit ω un élément de Λ_k^2 .

i) On appelle *étendard* de ω la famille d'espaces

$$A_0^0(\omega), \dots, A_i^j(\omega), \dots, A_k^k(\omega).$$

ii) On appelle *symbole* de ω , l'élément $(S_0, \dots, S_k)$ de $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \quad \text{où } s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega).$$

2.2. Singularités du rang des 2-formes

Etant donné $(S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$ on désigne par $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$ l'ensemble des ω de Λ_k^2 dont le symbole est $(S_0, \dots, S_k)$ et tels que :

$$\dim B_\omega^i = t_i, \quad 0 \leq i \leq k, \quad \text{si } T = \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}.$$

On note G_ℓ la grassmannienne des $n - \ell$ plans de $(\mathbf{R}^n)^*$ et $G_{s_\ell} = G_{s_0^\ell} \times \dots \times G_{s_\ell^\ell}$

le produit des grassmanniennes $G_{s_0^\ell}, \dots, G_{s_\ell^\ell}$ où $S = \begin{pmatrix} s_0^\ell \\ \vdots \\ s_\ell^\ell \end{pmatrix}$. L'application

$$\sigma_{s_0 \dots s_k T} : \varepsilon_{s_0 \dots s_k T} \rightarrow G_{s_0} \times G_{s_1} \times \dots \times G_{s_k} \times G_T = G_{s_0 \dots s_k T}$$

qui à ω associe $(A_0^0(\omega), A_0^1(\omega), A_1^1(\omega), \dots, A_0^k(\omega), \dots, A_k^k(\omega), B_\omega^0, \dots, B_\omega^k)$ commute avec l'action de L_k sur $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$ et sur $G_{s_0 \dots s_k T}$. (L'action de L_k sur $G_{s_0 \dots s_k T}$ est définie via la projection $\pi_k : L_k \rightarrow L_0 \equiv GL_n(\mathbf{R})$.)

Comme $(A_0^j(\omega), \dots, A_0^k(\omega), \dots, A_k^k(\omega))$ est l'étendard de la 2-forme extérieure $\omega(o)$ sur le drapeau $(B_\omega^{01}, \dots, B_\omega^{k1})$, l'image $D_{s_0 \dots s_k T} = \sigma_{s_0 \dots s_k T}(\varepsilon_{s_0 \dots s_k T})$ de $\sigma_{s_0 \dots s_k T}$ est

une orbite de l'action de L_k sur $G_{s_0 \dots s_k T}$ (voir [15] chap. II). Il est facile de voir que, s'il est non vide, l'ensemble $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$ est un ensemble semi-algébrique. Pour tout

$I = \begin{pmatrix} i_0 \\ \vdots \\ i_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$, on note I_ℓ l'élément $\begin{pmatrix} i_0 \\ \vdots \\ i_\ell \end{pmatrix}$ de $\mathbf{N}^{\ell+1}$ correspondant.

Etant donné $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ on définit $\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$ de la manière suivante :

$$\tau_0 = n$$

$$\tau_i = \inf \{ \text{codim } B_\omega^i, \omega \in \pi_{i-1}^{-1}(\varepsilon_{s_0 \dots s_{i-1} \tau_{i-1}}) \} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k.$$

On a alors le résultat suivant :

2.2.1. Théorème. — 1) S'il est non vide, l'ensemble $\varepsilon_{s_0 \dots s_k \tau_k}$ est une sous-variété régulière de Λ_k^2 dont la codimension $\nu_{s_0 \dots s_k}$ ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$ et on a :

$$\tau_i = n - \nu_{s_0 \dots s_{i-1}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k.$$

En fait, $\nu_{s_0 \dots s_k}$ est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \nu_{s_0} &= \frac{s_0^0(s_0^0 - 1)}{2}, \\ \nu_{s_0 \dots s_k} &= \nu_{s_0 \dots s_{k-1}} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^{k-1})}{2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_i^k) \\ &\quad + s_{k-1}^k (\nu_{s_0 \dots s_{k-1}} - \nu_{s_0 \dots s_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k), \end{aligned}$$

avec $\nu_{s_0 \dots s_{k-2}} = 0$ pour $k = 1$.

2) S'il est non vide, l'ensemble semi-algébrique $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$ pour $T \neq \mathcal{E}_k$ est de codimension strictement plus grande que n .

(Pour la démonstration de ce théorème voir le chapitre III.)

Puisque les ensembles $\varepsilon_{s_0 \dots s_k \tau_k}$ sont invariants par l'action de L_k et sont des sous-variétés régulières de Λ_k , chacun d'eux est, par définition, une singularité d'ordre k de 2-formes que l'on notera $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ (la dimension de $\varepsilon_{s_0 \dots s_k \tau_k}$ ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ soit non vide sont les suivantes :

2.2.2. Théorème. — La singularité $\Sigma_{s_0 \dots s_k} \subset \Lambda^2 k$ est non vide si et seulement si :

- 1) les $(s_j^j, \dots, s_i^j, \dots, s_0^j)$, et $(\nu_{s_0 \dots s_i}, s_j^j, s_j^{j+1}, \dots, s_j^k)$ sont des suites décroissantes d'entier ;
- 2) $\nu_{s_0 \dots s_i} - \nu_{s_0 \dots s_{i-1}} \geq \sup \{ s_{i-1}^{i-1} - s_{i-1}^i, s_{i-1}^{i-1} - s_i^i, s_{i+1}^{i+1} + s_i^i - 2s_1^{i+1} \}$ pour $1 \leq i \leq k-1$,
 $\nu_{s_0 \dots s_k} \geq s_k^k - s_{k-1}^k$ et $\nu_{s_0} \geq s_0^0 + s_1^1 - 2s_0^1$;

$$3) \quad n \geq \left\{ \sup_{i,j} s_i^j - s_{i-1}^{j-1} - s_{i-1}^j, \sum_{\ell=0}^{i-2} s_\ell^\ell - s_{\ell+1}^{\ell+1}, v_{s_0 \dots s_i} + \sum_{\ell=0}^{i-1} s_\ell^\ell - s_{\ell+1}^{\ell+1}, v_{s_0 \dots s_i} + s_i^i \right\};$$

4) il existe une suite décroissante $(r_0, \dots, r_k)$ d'entiers tels que :

$$n - s_0^0 = 2r_0 \quad \text{et} \quad n - v_{s_0 \dots s_i} - s_{i+1}^{i+1} = 2r_{i+1} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1$$

où

$$S_i = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \quad \text{et } v_{s_0 \dots s_i} \text{ est la codimension de } \Sigma_{s_0 \dots s_i} \subset \Lambda_i^2.$$

(Pour la démonstration de ce résultat, voir [15].)

Voici quelques exemples de symboles $(S_0, \dots, S_k)$ pour lesquels $\Sigma_{s_0 \dots s_k} \neq \emptyset$ avec la valeur de la codimension $v_{s_0 \dots s_k}$. En outre, on cite toutes les singularités qui existent pour $n \leq 6$.

Pour n pair

$k = 1$

21	22	40	41	41	42	43	44
1	3	0	2	4	4	4	4
codim 1	codim 3	codim 6	codim 9	codim 12	codim 16	codim 21	codim 24
						(fermée 20)	(fermée 20)

$k = 2$

220	221	222	222	222
31	31	32	33	33
1	1	3	3	3
codim 3	codim 4	codim 7	codim 9	codim 10

$k = 3$

2210	2211	2220	2221	2220	2220
310	311	320	321	321	330
10	11	30	31	31	50
0	2	1	1	3	0
codim 4	codim 5	codim 7	codim 10	codim 11	codim 10

$k = 4$

22110	22110
3110	31110
110	1110
21	210
1	10
	0
codim 5	codim 6

Pour n impair

$k = 1$

30	31	32	32	33	33
0	2	2	4	4	6
codim 3	codim 4	codim 7	codim 10	codim 12	codim 15

$k = 2$

310	311	311	320	320	330	330
21	21	22	20	20	40	40
1	1	1	0	2	1	3
codim 4	codim 5	codim 5	codim 7	codim 8	codim 12	codim 15

$k = 3$

3110	3111	3110	3110	3111
210	211	220	221	222
10	11	31	31	32
0	2	1	1	3
codim 5	codim 6	codim 6	codim 7	codim 10

$k = 4$

31110	31110	31110	31110	31110
2110	2110	2110	2111	2111
110	111	111	111	111
21	21	22	21	22
1	1	3	1	3
codim 6	codim 7	codim 8	codim 7	codim 8

2.3. Relation entre les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ d'un germe de 2-forme et les singularités $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$

Soit $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$ le fibré des k -jets de 2-formes sur $\mathbf{R}^n$. Ce fibré a pour fibre type Λ_k^2 et pour groupe structural L_k . Chaque singularité $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ étant L_k -invariante va donner naissance à un sous-fibré $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$ de $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$ de fibre type $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$; $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$ est une sous-variété régulière de $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$ de codimension $v_{s_0 \dots s_k} = \text{codim } \Sigma_{s_0 \dots s_k}$. On a alors :

2.3.1. Théorème. — Soit ω un germe de 2-forme sur $\mathbf{R}^n$ dont le k -jet $j_k \omega$ est transverse à $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$ en o :

- 1) $j_\ell \omega$ est transverse à $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n)$ en o pour $0 \leq \ell \leq k$;
- 2) l'ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ (défini à la fin du § 1.3) est égal à la variété $(j_\ell \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n))$.
En particulier, le symbole de ω sur $(\mathbf{R}^n, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega))$ est $S_0, \dots, S_\ell$ en tout point de $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ pour $1 \leq \ell \leq k$.

Démonstration. — Soit $\pi_{k\ell}$ la projection canonique de $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$ sur $\Lambda_\ell^2(\mathbf{R}^n)$; $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$ est une sous-variété de $\pi_{k-\ell}^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n))$. La transversalité de $j_k \omega$ à $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$ en o implique donc la transversalité de $j_\ell \omega = \pi_{k\ell} \circ j_k \omega$ à $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n)$ en o .

Au germe de 2-forme ω sont associés les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$. Puisque $j_k \omega(o)$ appartient à $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$, par définition de $\Sigma_{s_0 \dots s_k} = \varepsilon_{s_0 \dots s_k} \subset \Lambda_k^2$, on a :

$$\begin{aligned} n - \tau_{\ell+1} &= \dim d\sigma_\omega^{\ell+1}(o) = \sup\{\dim \sigma_\alpha^{\ell+1}(o), \alpha \in \pi_\ell^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell})\} \\ &= \nu_{s_0 \dots s_\ell} = \text{codim } \Sigma_{s_0 \dots s_\ell} \end{aligned}$$

(voir aussi le théorème 2.2.1). Ainsi tous les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ sont réguliers et on a $\dim d\sigma_\omega^{\ell+1}(x) = \nu_{s_0 \dots s_\ell}$ pour $1 \leq \ell \leq k$.

D'après la proposition 1.3.2, chaque ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$, $1 \leq \ell \leq k$ est donc une sous-variété régulière de $\mathbf{R}^n$ de codimension $\nu_{s_0 \dots s_\ell}$. Démontrons l'égalité

$$\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega) = (j_\ell \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell} \mathbf{R}^n) \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq k.$$

Rappelons que $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}$ est l'ensemble des ℓ -jets $\omega \in \Lambda_\ell^2$ tels que :

- le symbole de $\omega(o)$ sur $\{[d\sigma_\omega^0(o)]^\perp, [d\sigma_\omega^1(o)]^\perp, \dots, d\sigma_\omega^\ell(o)]^\perp\}$ est $(S_0, \dots, S_\ell)$;
- $\dim[d\sigma_\omega^i(o)] = n - \tau_i = \nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$, $1 \leq i \leq \ell$.

Les idéaux σ_ω^i , $0 \leq i \leq k$, étant réguliers on a, d'autre part,

$$[d\sigma_\omega^i(x)]^\perp = T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &(j_\ell \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)) \\ &= \{x \text{ voisins de } o \text{ tels que } j_\ell \omega(x) \text{ appartient à la fibre } \Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(x)\} \\ &= \{x \text{ voisins de } o \text{ tels que le symbole de } \omega(x) \\ &\quad \text{sur } (T_x \mathbf{R}^n, \dots, T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{k+1}}(\omega)) \text{ est } (S_0 \dots S_k)\} \\ &= \Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega) \quad (\text{par définition de } \Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega), \text{ voir la fin du } \S 1.1) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

2.4. Cas des 2-formes fermées

La stratification $\{\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}, (S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}\}$ de Λ_k^2 induit une stratification $\{\varepsilon'_{s_0 \dots s_k T}, (S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}\}$ dans l'espace Ω_k^2 des k -jets de 2-formes fermées. Comme dans Λ_k^2 , étant donné

$(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ on définit encore $\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= n, \\ \tau_i &= \inf\{\text{codim } B_\omega^i, \omega \in \pi_{i,i-1}^{-1}(\varepsilon'_{s_0 \dots s_{i-1}} \sigma_{i-1}')\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Dans ce cas on a seulement le résultat partiel suivant :

2.4.1. Théorème. — Pour $k = 0, 1$, s'il est non vide, l'ensemble $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k$ est une sous-variété régulière de Ω_k^2 dont la codimension $v_{s_0 \dots s_k}$ ne dépend que de $(S_0 \dots S_k)$; plus précisément on a :

$$v_{s_0} = \frac{s_0(s_0 - 1)}{2},$$

$$v_{s_0 s_1} = (s_0^1 + 1) v_{s_0} + \frac{(s_1^1 - s_0^1)(s_1^1 - s_0^1 - 1)}{2} - s_0^1(s_0^1 - s_1^1) - \rho_1$$

avec $\rho_1 = 0$ si $0 \leq s_0^1 \leq 2$ et $\rho_1 = \frac{s_0^1(s_0^1 - 1)(s_0^1 - 2)}{6}$ pour $2 \leq s_0^1$.

Les autres strates $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k T}$ pour $T \neq \varepsilon_k$ sont de codimension strictement plus grande que n .

Pour $k \geq 2$, soit $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ possédant la propriété suivante

sauf pour au plus un entier $1 \leq j \leq k$: $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ est tel que

$$s_0^1 \leq 2 \quad \text{si } j = 1 \quad \text{et} \quad \{s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1, s_i^j \leq 1, 0 \leq i \leq j-2\}$$

$$\text{si } 2 \leq j \leq k.$$

Dans cette hypothèse, si $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k$ n'est pas vide, c'est une sous-variété régulière de Ω_k^2 dont la codimension $v_{s_0 \dots s_k}$ ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$ et on a $n - v_{s_0 \dots s_{i-1}} = \tau_i$, $1 \leq i \leq k$. Plus précisément, $v_{s_0 \dots s_k}$ est définie à partir de $v_{s_0 \dots s_{k-1}} \varepsilon_{k-1}$ par la formule :

$$\begin{aligned} v_{s_0 \dots s_k} &= v_{s_0 \dots s_{k-1}} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ &\quad + s_{k-1}^k (v_{s_0 \dots s_{k-1}} - v_{s_0 \dots s_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_{i-1}^k) - \rho_k, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)}{6} (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1)(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 2) \\ &\quad + (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) \frac{s_{k-2}^k}{2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-3} (s_i^{k-2} - s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-2} + s_{i-1}^{k-1})(s_{i-1}^k - 1) \frac{s_{i-1}^k}{2} \\ &\quad + (v_{s_0 \dots s_{k-2}} - v_{s_0 \dots s_{k-3}} - s_{k-2}^{k-2} - s_{k-1}^{k-1} + 2s_{k-2}^{k-1})(s_{k-3}^k - 1) \frac{s_{k-3}^k}{2}. \end{aligned}$$

(en particulier $\rho_k = 0$ si $s_{k-1}^k - s_{k-2}^k \leq 1$ et $s_i^k \leq 1$ pour $0 \leq i \leq k-2$).

Les ensembles $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k T}$ pour $T \neq \varepsilon_k$ sont de codimension strictement plus grande que n .

(Pour la démonstration de ce résultat voir le chapitre III.)

Si $(S_0, \dots, S_k)$ est tel que pour chaque $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ on a

$$\left. \begin{array}{l} s_0^j \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \end{array} \right\} 2 \leq j \leq k,$$

le terme ρ_j est nul dans l'expression de $v_{s_0 \dots s_j}$ en fonction de $v_{s_0 \dots s_{j-1}}$ et des s_i^j . La codimension de $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$ dans Λ_j^2 est alors égale à la codimension de $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j \cap \Omega_j^2$ dans Ω_j^2 et ainsi $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$ est transverse à Ω_j^2 pour tout $1 \leq j \leq k$. Par contre dès que, pour un entier $1 \leq j \leq k$, $s_{j-1}^j - s_{j-2}^j > 1$ ou $s_i^j > 1$, alors $\rho_j \neq 0$ et $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$ n'est plus transverse à Ω_j^2 et toutes les variétés $\varepsilon_{s_0 \dots s_h} \sigma_h$ ne sont pas transverses à Ω_h^2 pour $j \leq h \leq k$. Comme dans le § 2.3, chaque ensemble $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k} \sigma_k$ (pour $(S_0, \dots, S_k)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.4.1) définit une singularité dans Ω_k^2 que l'on désigne par $\zeta_{s_0 \dots s_k}$. On dira que $\zeta_{s_0 \dots s_k}$ est une singularité de k -jet de 2-formes fermées. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de ces singularités sont les mêmes que pour les singularités de rang de 2-formes.

Cependant, il faut remarquer que si $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j \subset \Lambda_j^2$ n'est pas transverse à Ω_j^2 pour un certain entier $1 \leq j \leq k$, la codimension de $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$ dans Λ_j^2 est plus grande que la codimension de $\varepsilon'_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$ dans Ω_j^2 . Par suite si par exemple $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ est non vide, en général $\zeta_{s_0 \dots s_k}$ sera vide. Voici des exemples de symboles pour lesquels $\zeta_{s_0 \dots s_k}$ n'est pas vide et la valeur de leurs codimensions : on pourra comparer avec les symboles dans le cas des 2-formes. (On trouvera toutes les singularités qui existent pour $n \leq 6$).

Pour n pair

$k = 1$

21	22	40	41	41	42	43	44
1	3	0	2	4	4	4	4
codim 1	codim 3	codim 6	codim 9	codim 12	codim 16	codim 20	codim 20
						(codim 21 dans Λ_1^2)	(codim 24 dans Λ_1^2)

$k = 2$

220	221	222	222	222
31	31	32	33	33
1	1	3	3	5
codim 3	codim 4	codim 6	codim 8	codim 9
		(codim 7 dans Λ_2^2)	(codim 9 dans Λ_2^2)	(codim 10 dans Λ_2^2)

$k = 3$

2210	2211	2220	2220	2221	2220
310	311	320	320	321	330
10	11	30	31	31	50
0	2	0	2	2	1
codim 4	codim 5	codim 6	codim 7	codim 8	codim 9

(n'existent pas dans Λ_3^2)

$k = 4$	$k = 5$
22110	221110
3110	31110
110	1110
21	210
1	10
	0
codim 5	codim 6

Pour n impair

$k = 1$					
30	31	32	32	33	33
0	2	2	4	4	6
codim 3	codim 4	codim 7	codim 10	codim 11 (codim 12 dans Λ_1^2)	codim 14 (codim 15 dans Λ_1^2)
$k = 2$					
310	311	311	320	320	330
21	21	22	20	20	40
1	1	1	0	2	3
codim 4	codim 5	codim 5	codim 7	codim 8	codim 15
$k = 3$					
3110	3111	3110	3110	3111	
210	211	220	221	222	
10	11	31	31	32	
0	2	1	1	3	
codim 5	codim 6	codim 6	codim 7	codim 9 (codim 10 dans Λ_3^2)	
$k = 4$					
31110	31110	31110	31110	31110	
2110	2110	2110	2111	2111	
110	111	111	111	111	
21	21	22	21	22	
1	1	3	1	3	
codim 6	codim 7	codim 8	codim 7	codim 8	

2.5. Comportement générique du rang d'une 2-forme sur une variété. Cas des 2-formes fermées

Soit M une variété C^∞ de dimension n et $\Lambda_\infty^2(M)$ l'espace des 2-formes de classe C^∞ sur M . L'ensemble $\Lambda_k^2(M)$ des k -jet de 2-formes sur M est l'espace total d'une fibration sur M de fibre type Λ_k^2 et de groupe structurel L_k . Une *singularité* de k -jet est par définition une sous-variété Σ de Λ_k^2 , L_k -invariante. Toute singularité $\Sigma \subset \Lambda_k^2$ donne naissance à une sous-variété $\Sigma(M)$ de $\Lambda_k^2(M)$, fibrée sur M de fibre type Σ . Pour $\omega \in \Lambda_\infty^2(M)$ l'ensemble $\Sigma(\omega)$ des $x \in M$ où $M_k \omega(x)$ appartient à $\Sigma(M)$ est appelé le lieu singulier de type Σ de ω et chaque point x de $\Sigma(\omega)$ est appelé un *point singulier de type Σ de ω* . Il est bien

connu que dans $\Lambda_k^2(M)$, l'ensemble des ω pour lesquels $j_k \omega$ est transverse à $\Sigma(M)$ est un ensemble résiduel (voir [10]). De plus si la codimension c de $\Sigma(M)$ est plus petite que n et si $j_k \omega$ est transverse à $\Sigma(M)$, $\Sigma(\omega)$ est une sous-variété régulière de codimension c de M . On dira que $\Sigma(\omega)$ est génériquement une sous-variété régulière de codimension c de M . Pour les 2-formes fermées on a des résultats analogues. En appliquant ces résultats à $\Sigma_{s_0 \dots s_k} \subset \Lambda_k^2$, il résulte alors des théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 que

2.5.1. Théorème dans $\Lambda_\infty^2(M)$. — Les propriétés suivantes sont génériques. Pour tout entier k et tout élément $(S_0, \dots, S_k) \in N \times \dots \times N^{k+1}$, si n est assez grand, les ensembles $\Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ sont des sous-variétés régulières de M , l'ensemble $\Sigma_{s_0 \dots s_i}(\omega)$ étant défini par récurrence de la manière suivante :

$$\Sigma_{s_0 \dots s_i}(\omega) = \Sigma_{s_i}^\omega[M, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega)]$$

(voir les notations introduites à la fin du § 1.1). Le symbole d'un élément générique ω sur $(M, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega))$ est $(S_0, \dots, S_k)$ en chaque point de $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$. Si $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ n'est pas vide, sa codimension ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$ et sa valeur est donnée dans le théorème 3.2.1.

(On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que cette variété soit non vide dans le théorème 3.2.2.)

En utilisant les résultats analogues pour les 2-formes fermées, on a :

2.5.2. Théorème dans $\Omega_\infty^2(M)$. — Les propriétés suivantes sont génériques. Pour tout entier k et tout élément $(S_0, \dots, S_k) \in N \times \dots \times N^{k+1}$ possédant la propriété (i) donnée plus bas, les ensembles $\zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ sont des sous-variétés régulières de M , où $\zeta_{s_0 \dots s_i}(\omega)$ est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\zeta_{s_0 \dots s_i}(\omega) = \Sigma_{s_i}^\omega[M, \zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega)].$$

Le symbole d'un élément générique ω sur $(M, \zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega))$ est $(S_0, \dots, S_k)$ en chaque point de $\zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega)$. La codimension de $\zeta_{s_0 \dots s_k}$ ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$ et sa valeur est donnée dans le théorème 2.4.1.

Propriété (i) pour $(S_0 \dots S_k)$. Soit $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ pour $0 \leq j \leq k$. Sauf pour au plus

un entier $1 \leq j \leq k$, S_j vérifie les inégalités :

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1, \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \text{ pour } j = 1 \text{ et } 2 \leq j \leq k.$$

Nous allons terminer ce paragraphe par des exemples de comportement génériques de 2-formes et de 2-formes fermées pour $n = 5, 6$ et illustrer ces descriptions par un exemple de 2-formes génériques sur $\mathbf{R}^6$.

La situation générique du rang d'une 2-forme fermée en dimension $n = 4$ est décrite par J. Martinet dans [10].

Singularités génériques du rang d'une 2-forme et d'une 2-forme fermée en dimension $n = 5$

o) ω est de rang maximum sur l'ouvert $\Sigma_1(\omega)$. En tout point du complémentaire de $\Sigma_1(\omega)$ le rang de ω est 2, c'est-à-dire sur la variété $\Sigma_3(\omega)$ de dimension 2.

1) L'ensemble des points x où le noyau $K_\omega(x)$ est transverse à $T_x \Sigma_3(\omega)$ est ouvert dans $\Sigma_3(\omega)$ et le symbole de ω est alors 30 . Le complémentaire $\Sigma_3(\omega) - \Sigma_{30}(\omega)$ est la sous-variété $\Sigma_{31}(\omega)$ de dimension 1.

2) Sur $\Sigma_{310}(\omega)$ le noyau $K_\omega(x)$ et $T_x \Sigma_{31}(\omega)$ ont une intersection nulle. Le complémentaire $\Sigma_{31}(\omega) - \Sigma_{310}(\omega)$ est un ensemble de points isolés où le symbole de ω est 3110 .

Singularités génériques du rang d'une 2-forme et d'une 2-forme fermée en dimension $n = 6$

o) ω est de rang maximum sur l'ouvert $\Sigma_0(\omega)$. Sur la variété $\Sigma_2(\omega)$ de dimension 5 le rang de ω est 4 tandis qu'il s'abaisse à 2 sur un ensemble de points isolé $\Sigma_4(\omega)$.

1) Sur $\Sigma_2(\omega)$ l'ensemble des points où le noyau $K_\omega(x)$ et $T_x \Sigma_2(\omega)$ sont transverses est l'ouvert $\Sigma_{21}(\omega)$. Le complémentaire $\Sigma_2(\omega) - \Sigma_{21}(\omega)$ est la variété $\Sigma_{22}(\omega)$ de dimension 3 des points où $K_\omega(x)$ est contenu dans $T_x \Sigma_2(\omega)$ c'est-à-dire où le symbole est 22 .

En tout point de $\Sigma_4(\omega)$ le symbole de ω est 40 .

2) Dans les 2-formes fermées, $\zeta_{22}(\omega)$ est réunion de :

$\zeta_{220}(\omega)$ ouverte dans $\zeta_{22}(\omega)$;

$\zeta_{221}(\omega)$ variété de dimension 2;

$\zeta_{222}(\omega)$, ensemble de points isolés. En ces points le symbole de ω est 2220 .

Dans les 2-formes $\Sigma_{222}(\omega)$ est vide.

3) $\Sigma_{221}(\omega)$ est la réunion des variétés suivantes :

$\Sigma_{2210}(\omega)$ qui est ouverte dans $\Sigma_{221}(\omega)$.

$\Sigma_{2211}(\omega)$, variété de dimension 1.

4) Sauf sur l'ensemble $\Sigma_{22111}(\omega)$ de points isolés, le symbole de ω sur $\Sigma_{2211}(\omega)$ est

Nous allons illustrer ces descriptions par un exemple de 2-forme fermée générique sur $\mathbf{R}^6$. Précisons que la situation décrite ci-dessous est générique dans les 2-formes fermées et non dans les 2-formes : l'ensemble $\xi_{222}(\omega)$ est génériquement vide dans les 2-formes.

Sur $\mathbf{R}^6$ rapporté aux coordonnées (x, y, z, t, u, v) on considère la 2-forme fermée

$$\begin{aligned}\omega = dx \wedge dt + dy \wedge dz + d\left(yt + \frac{1}{2}z^2 - xv\right) \wedge du \\ + d\left(ux + \frac{1}{2}t^2 + zv\right) \wedge dv + d\left(yuv - \frac{1}{3}uv^3\right) \wedge du.\end{aligned}$$

Ensemble singulier du 1^{er} ordre

Le rang de ω est partout supérieur ou égal à 4. La variété $\xi_2(\omega)$ des points où ω est de rang 4 a pour équation $x = 0$: c'est la variété définie par

$$\omega^3 = 12 x dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \wedge du \wedge dv = 0.$$

Ensembles singuliers du 2^e ordre

Soit $\bar{\omega}$ la restriction de ω à $\xi_2(\omega)$. On a

$$\begin{aligned}\bar{\omega} = dy \wedge dz + d\left(yt + \frac{1}{2}z^2\right) \wedge du + d\left(zv + \frac{1}{2}t^2\right) \wedge dv \\ + d\left(yuv - \frac{1}{3}uv^3\right) \wedge du.\end{aligned}$$

L'ensemble $\xi_{22}(\omega)$ des points x de $\xi_2(\omega)$ où le symbole de ω est 22 c'est-à-dire

$\dim [K_\omega(x) \cap T_x \xi_2(\omega)] = 2$ et $\dim K_{\bar{\omega}}(x) = 3$ est la variété d'équation $x = y = t = 0$. Cette variété est définie par l'équation $\bar{\omega}^2 = 0$. Sur le complémentaire $\xi_2(\omega) - \xi_{22}(\omega)$ le symbole de ω est 21 c'est-à-dire :

$$\dim [K_\omega(x) \cap T_x \xi_2(\omega)] = \dim K_{\bar{\omega}}(x) = 1.$$

Enfin, en tout point de $\xi_4(\omega)$ le symbole de ω est 40 .

Ensembles singuliers du 3^e ordre

Soit $\bar{\omega}$ la restriction de ω à $\xi_{22}(\omega)$. On a

$$\bar{\omega} = v dz \wedge dv + z dz \wedge du + uv^2 du \wedge dv.$$

La variété $\xi_{222}(\omega)$ ($\xi_{22}(\omega) = (\text{l'hyperplan des } \{z, u, v\})$) est réduite à $0 \in \mathbf{R}^6$.

La variété $\xi_{221}(\omega)$ est le plan des coordonnées $\{z, u\}$ privé de l'origine. En tout point du complémentaire dans $\xi_{22}(\omega)$ de $\xi_{222}(\omega) \cup \xi_{221}(\omega)$ le symbole de ω est

$$\begin{array}{c} 220 \\ 31 \\ 1 \end{array}$$

Ensembles singuliers du 4^e ordre

L'ensemble des points de $\xi_{221}(\omega)$, où la restriction de ω à cette variété s'annule est la variété $\xi_{2211}(\omega)$: c'est l'axe des u privé de l'origine. Sur le complémentaire de l'axe

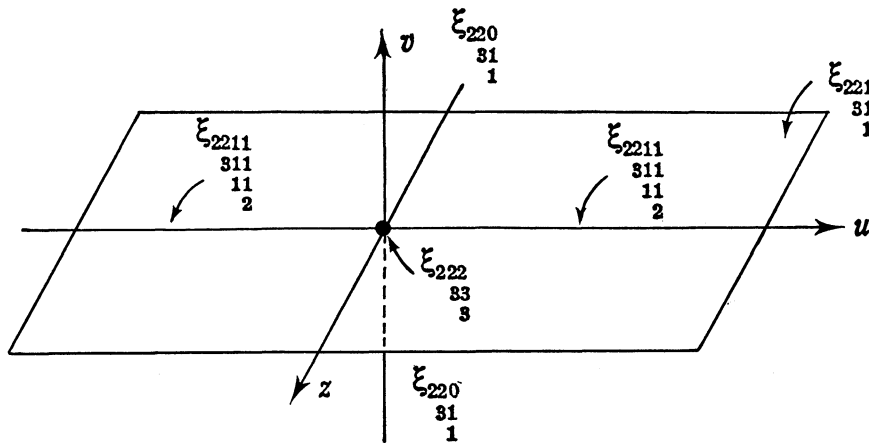
des u dans $\xi_{221}(\omega)$ (= plan des $\{z, u\}$) le symbole de ω est

$$\begin{array}{c} 2210 \\ 310 \\ 10 \\ 0 \end{array}$$

Ensemble singulier du 5^e ordre

En tout point de $\xi_{2211}(\omega)$ le noyau de la restriction de ω à $\xi_{22}(\omega)$ est transverse à cette variété.

En résumé dans $\xi_{22}(\omega) = \text{hyperplan des } \{z, u, v\}$ on a la situation suivante :

**2.6. Comportement générique de la classe d'une équation de Pfaff**

On rappelle qu'une *équation de Pfaff* sur une variété M est la donnée d'une section σ du fibré projectif PM associé au fibré vectoriel cotangent T^*M de M . Soit T_0^*M le com-

plémentaire de la section nulle de $T^*M \rightarrow TM$ et $q: T_0^*M \rightarrow PM$ la projection canonique. Etant donné une section σ de PM et U un ouvert de M , toute 1-forme γ sans zéros, définie sur U , est un relèvement de σ sur U si $\sigma = q \circ \gamma$. Une équation de Pfaff admet des relèvements locaux mais en général il n'y a pas de relèvements globaux. Si γ et γ' sont deux relèvements de σ sur U il existe une fonction f non nulle sur U telle que $\gamma' = f\gamma$. La classe d'une équation de Pfaff σ en un point x de M est l'entier r tel que $\gamma \wedge d\gamma^r(x) \neq 0$ et $\gamma \wedge d\gamma^{r+1}(x) = 0$, γ étant un relèvement local de σ en x . Il est évident que la classe de σ en x ne dépend pas du relèvement choisi. La classe de σ est un invariant qui porte sur le couple $(\gamma, d\gamma)$. Soient $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$ des sous-variétés

régulières de M et σ une équation de Pfaff sur M . Pour tout $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_\ell \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$ et $u = 0$

ou 1 on désigne par $\Sigma_u^\sigma(M_0, \dots, M_k)$ l'ensemble des x de M_k tels que :

$$\dim[K_{\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell}(x) \cap T_x M_k] = s_\ell, \quad 0 \leq \ell \leq k.$$

$$\gamma_\ell(x) = 0 \quad \text{si } u = 0,$$

$$\gamma_\ell(x) \neq 0 \quad \text{si } u = 1,$$

où γ est un relèvement local de σ en x , γ_ℓ est la 1-forme induite par γ sur M_ℓ et $K_{\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell}(x)$ est le noyau de $\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell$ en x de M_ℓ .

Le symbole de σ sur $(M_0, \dots, M_k)$ en x de M_k est l'élément $(S_0, \dots, S_k, U)$ de $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$ défini par

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } s_i^j = \dim[K_{\gamma_i \wedge d\gamma_j}(x) \cap T_x M_j],$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_j = 0 \quad \text{si } \gamma_j(x) = 0 \quad \text{et } u_j = 1 \quad \text{si } \gamma_j(x) \neq 0.$$

On désigne par $\mathcal{U}_i$ l'élément $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{N}^{i+1}$. Comme pour les 2-formes fermées on a le résultat partiel suivant :

2.6.1. Théorème. — Dans l'espace $P(M)$ des équations de Pfaff sur M , la propriété suivante est générique :

Pour tout entier k et tout élément $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ vérifiant la propriété (i) donnée plus bas les ensembles

$$\Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$$

sont des sous-variétés régulières de M , si $\Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma)$ est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma) = \Sigma_{S_{i,1}}^\sigma(M, \Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{i-1}} \omega_{i-1}(\sigma)).$$

Le symbole d'un élément générique σ sur $(M, \Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma))$ est $(S_0, \dots, S_k \omega_k)$ en tout point de $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$. La codimension de $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$ ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k)$ et sa valeur est donnée dans le théorème 3.4.2.1 de [15].

On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$ soit non vide dans le théorème 3.4.2.2 de [15]).

Propriété (i) pour $S_0, \dots, S_k$. Pour $0 \leq j \leq k$ soit $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$. Sauf pour au plus un entier $1 \leq j \leq k$, S_j vérifie les inégalités :

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \text{ pour } 2 \leq j \leq k.$$

Comme dans le cas des 2-formes, la démonstration du théorème 2.6.1 se ramène à construire des singularités convenables dans P_{k+1} .

Pour plus de détails et pour la démonstration de ces résultats, voir [15].

2.7. Quelques singularités d'ordre supérieur de la classe d'une 1-forme

Soit γ une 1-forme sur une variété M . La classe de γ en x est l'entier r défini par

$$\gamma \wedge d\gamma^k(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad d\gamma^{k+1}(x) = 0 \quad \text{si } r = 2k + 1,$$

$$d\gamma^k(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \gamma \wedge d\gamma^k(x) = 0 \quad \text{si } r = 2k.$$

Le rang de γ en x est aussi la codimension dans $T_x M$ de l'espace $H_\gamma(x) = K_\gamma(x) \cap K_{d\gamma}(x)$, $K_\gamma(x)$ et $K_{d\gamma}(x)$ étant les noyaux respectifs de $\gamma(x)$ et $d\gamma(x)$.

Soient $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$ des sous-variétés de M et γ une 1-forme sur M .

Pour tout $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbf{N}^{k+1}$ et $u = 0$ ou 1 , on désigne

par $\Sigma_{\gamma u}^\gamma(M_0, \dots, M_k)$ l'ensemble des x de M_k tels que

$$\dim[K_{\gamma_\ell}(x) \cap K_{d\gamma_\ell}(x) \cap T_x M_k] = s_\ell,$$

$$\dim[K_{\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell}(x) \cap T_x M_k] = v_\ell,$$

$$\gamma_k(x) = 0 \quad \text{si } u = 0,$$

$$\gamma_k(x) \neq 0 \quad \text{si } u = 1,$$

où γ_ℓ désigne la 1-forme induite par γ sur M_ℓ .

On appelle symbole de γ sur $(M_0, \dots, M_k)$ en $x \in M_k$ l'élément $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k, U)$ de $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$ défini par

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } s_i^j = \dim[(K_{\gamma_i}(x) + K_{d\gamma_i}(x)) \cap T_x M_j],$$

$$V_j = \begin{pmatrix} v_0^j \\ \vdots \\ v_i^j \\ \vdots \\ v_j^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } v_i^j = \dim[(K_{\gamma_i \wedge d\gamma_i}(x) + K_{d\gamma_i}(x)) \cap T_x M_j],$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_j = 0 \quad \text{si } \gamma_j(x) = 0 \quad \text{et } u_j = 1 \quad \text{si } \gamma_j(x) \neq 0.$$

Le symbole de γ sur $(M_0, \dots, M_k)$ se présente sous la forme de tableaux triangulaires.

Pour tout entier i , on désigne par $\mathcal{U}_i$ l'élément $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$ de $\mathbf{N}^{i+1}$. On a alors le résultat partiel suivant :

2.7.1. Théorème. — Dans l'espace $\Lambda_\infty^1(M)$, la propriété suivante est générique : pour tout entier k et tout élément

$$(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$$

vérifiant la propriété (ii) donnée plus bas les ensembles

$$\Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma),$$

s'ils sont non vides, sont des sous-variétés régulières de M , $\Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma)$ étant défini par

$$\Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma) = \Sigma_{S_i V_i, 1}^{\gamma}(M, \Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{i-1}}^{V_0 \dots V_{i-1}} \mathcal{U}_{i-1}(\gamma)).$$

Le symbole d'un élément générique γ sur $(M, \Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma))$ est $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k, \mathcal{U}_k)$ en tout point de $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma)$. La codimension de $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma)$, si cet ensemble est non vide, ne dépend que de $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$ et elle est donnée dans le théorème 3.5.2.1 de [15].

On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma) \neq \emptyset$ dans le théorème 3.5.1.2 de [15].

Propriété (ii) pour $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$. Soit $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ et $V_j = \begin{pmatrix} v_0^j \\ \vdots \\ v_i^j \\ \vdots \\ v_j^j \end{pmatrix}$ pour

$0 \leq j \leq k$. Sauf pour au plus un entier j , S_j et V_j vérifient les inégalités

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 1 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \\ v_i^j = s_i^j \quad 0 \leq i \leq j-1 \end{array} \right\} \text{ pour } 2 \leq j \leq k.$$

Une fois de plus, la démonstration des théorèmes 2.7.1 revient à construire des singularités convenables dans Λ_{k+1}^1 . Pour plus de détails et la démonstration de ces résultats voir [15].

III. — CONSTRUCTION DES SINGULARITÉS DANS Λ_k^2 ET Ω_k^2

Ce chapitre est consacré à la démonstration des résultats sur les singularités du rang des 2-formes et de 2-formes fermées décrits dans les § 2.2 et § 2.4. La méthode est la même que celle utilisée par Mather dans [12] pour les singularités d'applications : construction d'une fibration de chacune des singularités sur une orbite dans un produit de grassmanniennes.

3.1. Plan de démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1

Les démonstrations des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1 sont du même type. Nous allons donc faire une seule démonstration. Aussi nous adoptons des notations communes. Avec les notations des § 2.2 et 2.4 on désigne par

Λ_h un des espaces Λ_h^2 ou Ω_h^2 pour $0 \leq h \leq k$,

π_{kh} la projection canonique de Λ_k sur Λ_h ,

$X_{s_0 \dots s_h T_h} \begin{cases} \text{l'ensemble } \varepsilon_{s_0 \dots s_h T_h} \subset \Lambda_h^2 \text{ lorsque } \Lambda_h = \Lambda_h^2 \\ \text{l'ensemble } \varepsilon'_{s_0 \dots s_h T_h} \subset \Omega_h^2 \text{ lorsque } \Lambda_h = \Omega_h^2 \end{cases} \text{ pour } 0 \leq h \leq k.$

De plus lorsque $\Lambda_h = \Omega_h^2$, $(S_0 \dots S_h)$ vérifie : sauf pour au plus un entier $1 \leq j \leq h$,

$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ est tel que

$$s_0^1 \leq 2$$

$$s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 2 \quad \text{et} \quad s_j^j \leq 1 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq j-1 \text{ et } 2 \leq j \leq h.$$

Avec ces notations, les théorèmes 2.2.1 et 2.4.1 ont une version commune qui est la suivante :

3.1.1. Théorème. — 1) $X_{s_0 \dots s_k \sigma_k}$ est une sous-variété régulière de Λ_k , si elle est non vide, et sa codimension $v_{s_0 \dots s_k}$ est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} v_{s_0} &= \frac{s_0^0(s_0^0 - 1)}{2} \quad \text{pour } k = 0, \\ v_{s_0 \dots s_k} &= v_{s_0 \dots s_{k-1}} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ &\quad + s_{k-1}^k(v_{s_0 \dots s_{k-1}} - v_{s_0 \dots s_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k(s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_{i-1}^k) - \rho_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad v_{s_0 \dots s_k} &= 0 \quad \text{pour } k < 0 \\ s_i^j &= 0 \quad \text{pour } i < 0 \text{ et } j < 0, \\ \rho_k &= 0 \quad \text{si } \Lambda_k = \Omega_k^2, \end{aligned}$$

ρ_k défini comme dans 2.4.1 si $\Lambda_k = \Omega_k^2$.

2) Pour $T_k \neq \mathcal{E}_k$, la codimension de $X_{s_0 \dots s_k T_k}$ est strictement plus grande que n .

Pour $k = 0$, le théorème 4.1.1 est une version partielle des résultats de [10]. La démonstration de ce théorème va se faire par récurrence sur k en utilisant une méthode de fibration que nous allons exposer maintenant.

La construction des singularités de Thom Boardman faite par J. Mather dans [12] est du type suivant. Un ensemble $\Sigma \subset \Lambda_k$ est invariant par l'action du groupe G_k et il existe une application continue σ de Σ dans une variété D sur laquelle G_k agit transitivement. L'application σ est équivariante. On montre ensuite qu'il existe $a \in D$ tel que $V = \sigma^{-1}(a)$ soit une sous-variété régulière. Alors on en déduit que Σ est une sous-variété régulière grâce à la proposition suivante :

3.1.2. Proposition [12] [15]. — Soit Γ un sous-groupe de Lie de L_k et $\Gamma \times D \rightarrow D$ une action transitive de Γ sur une variété D . On considère un sous-ensemble Σ de Λ_k invariant par Γ et une application équivariante et continue $\sigma : \Sigma \rightarrow D$. S'il existe $a \in D$ tel que $V = \sigma^{-1}(a)$ soit une sous-variété régulière de Λ_k alors Σ est une sous-variété régulière de Λ_k et sa codimension est égale à $\text{codim } V - \dim D$. Si de plus, σ est analytique, alors σ est une fibration de Σ sur D de fibre type V .

Pour tout $0 \leq h \leq k$ on a une application $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$ de $\pi_{k,h}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h})$ dans le produit de grassmanniennes $G_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} = G_{s_0} \times \dots \times G_{s_k} \times G_{\mathcal{E}_k}$ qui à ω associe son étendard (voir § 2.2). Rappelons que l'image $D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$ de $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$ est une orbite de l'action de L_h sur $D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$. On désigne par F_h l'image réciproque du point $[(M_0^0) \dots (M_0^h, \dots, M_h^h)(N_0, \dots, N_h)]$ par la projection $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k,h}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}) & & \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h} & & \text{étendard de } \omega. \end{array}$$

Soit G_h le sous-groupe des éléments de L_h qui fixent F_h . Pour $\omega \in F_h$, les idéaux σ'_ω sont des idéaux réguliers de dimension $n - \tau_l$. On désigne par v_i la codimension dans le $\mathbf{R}$ -espace $\mathfrak{m}_{k-l+1}$ du $\mathbf{R}$ -espace σ'_ω et par $G_{v_l \mu_l}$ la grassmannienne des v_l -plans de $\mathfrak{m}_{k-l+1}$. On a une application Δ_h de F_h dans $\Lambda_0^2 \times G_{v_1 \mu_1} \times \dots \times G_{v_h \mu_h}$ qui à ω associe

$(\pi_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h)$. On va montrer que l'image de cette application est une orbite D_h de l'action de G_h sur $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$. On a alors une projection

$$\begin{array}{ccc} F_h & & \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_h & & (\pi_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h). \end{array}$$

Soit H_k l'image réciproque d'un élément $(\bar{\omega}, J_k^1, \dots, J_k^k) \in D_h$ où $\bar{\omega}$ est le modèle construit dans le chapitre II de [15]. Le schéma de démonstration de la proposition 3.1.2 est alors le suivant :

- 1) Montrer que H_k est une variété (proposition 3.1.3).
- 2) On en déduit, grâce à la proposition 3.1.2 que la projection

$$\begin{array}{c} F_k \\ \downarrow \\ D_k \end{array}$$

est une fibration de fibre-type H_k et que F_k est une variété.

- 3) En appliquant à nouveau la proposition 3.1.2 on montre que la projection :

$$\begin{array}{c} X_{s_0 \dots s_k \sigma_k} \\ \downarrow \\ D_{s_0 \dots s_k \sigma_k} \end{array}$$

est une fibration de fibre F_k .

Démonstration du théorème 3.1.1.

On se place dans l'hypothèse de récurrence suivante : (P_{k-1}) le théorème 3.1.1 est vrai dans Λ_h pour $0 \leq h \leq k-1$.

1^{re} étape. — Les propriétés de H_k contenues dans la proposition suivante sont essentielles pour les deux autres étapes.

3.1.3. Proposition. — H_k est une sous-variété régulière de Λ_k et sa codimension est donnée à partir de la codimension de H_{k-1} dans Λ_k par :

$$\text{codim } H_k = \text{codim } H_{k-1} + (\tau_k - \tau_{k-1}) \tau_k - \rho_k$$

(ρ_k est défini dans le théorème 3.1.1).

Nous admettrons ce résultat dans ce paragraphe. La démonstration sera esquissée au paragraphe suivant.

2^e étape. — Les propriétés de F_k sont rassemblées dans la proposition suivante :

3.1.4. Proposition. — 1) Pour $1 \leq i \leq k$ on a $\tau_i = n - \nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$, si $\nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$ est la codimension de la variété $X_{s_0 \dots s_{i-1}}$ dans Λ_{i-1} .

2) L'ensemble F_k est une sous-variété régulière de Λ_k et sa codimension est donnée à partir de la codimension de F_{k-1} dans Λ_k de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{codim } F_k &= \text{codim } F_{k-1} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)}{2} (s_k^k - s_{k-1}^k - 1) \\ &+ (s_k - s_k^k) (s_k^k - s_{k-1}^k) + \sum_{i=1}^{k-1} (s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-1} - s_i^k + s_{i-1}^k) (s_{i-1}^k - s_i^k) \\ &+ (\tau_{k-1} - \tau_k) \tau_k - \rho_k, \end{aligned}$$

où ρ_k a la même définition que dans le théorème 3.1.1.

Démonstration de la proposition 3.1.4.

La propriété (1) se démontre par un simple argument de transversalité (voir [15]). Nous allons établir la propriété (2). Pour $0 \leq h \leq k$, F_h est l'ensemble des ω dont l'éten-dard est égal à $[(M_0^0), \dots, (M_h^h), \dots, (M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$. Pour ω appartenant à F_h , les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h$ sont des idéaux réguliers. Il en résulte que la dimension du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\sigma_\omega^\ell \subset m_{k-\ell+1}$, $1 \leq \ell \leq h$, ne dépend que de $n - \tau_i = \dim_{\mathbf{R}}(\sigma_\omega^\ell / m_{k-\ell-1} \sigma_\omega^\ell)$. Soit ν_i (resp. μ_i) la dimension sur $\mathbf{R}$ de σ_ω^ℓ (resp. $m_{k-\ell+1}$). Comme on a vu plus haut, soit Δ_h l'application de F_h dans $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$, l'application qui à ω associe $(\pi_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h)$, ($G_{\nu_\ell \mu_\ell}$ étant la grassmannienne de ν_ℓ -plans de l'espace $m_{k-\ell+1}$). Nous allons d'abord montrer que l'image $D_h = \Delta_h(F_h)$ est une orbite de l'action de G_h sur $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$.

Soit J_h^ℓ l'idéal de $m_{k-\ell+1}$ engendré par les coordonnées $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-\tau_\ell}}$, où $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{n-\tau_\ell}}$ engendrent l'espace N_ℓ . Rappelons que le groupe G_h est l'ensemble des éléments de L_h qui laissent invariant $[(M_0^0), \dots, (M_h^h), \dots, (M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$ donc en particulier les espaces $N_1, \dots, N_\ell, \dots, N_h$. Les idéaux $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h$ étant réguliers, il existe un élément g de G_h tel que $\sigma_{g^* \omega} = J_h^\ell$, $\ell = 1, \dots, h$, pour tout élément ω de F_h . D'autre part, dans le chapitre II, § 2.3, on a vu que, pour $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ vérifiant $(S_\omega(F_i) + F_j^\perp) = M_i^j$, $0 \leq i \leq j \leq h$, et $F_\ell^\perp = N_\ell$, $1 < \ell < h$, il existe un automorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ qui fixe $[(M_0^0), \dots, (M_h^h), \dots, (M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$ et tel que $\varphi^* \omega = \bar{\omega}$ (« modèle » défini dans [15]). L'espace Λ_0^2 étant identifié à $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$, D_h est donc une orbite de l'action de G_h sur $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$. Par un argument classique de géométrie algébrique (voir [4]), on en déduit que D_h est une variété. On sait que H_h est une sous-variété régulière de Λ_k pour tout $0 \leq h \leq k$ (proposition 3.1.3 et hypothèse de récurrence P_{k-1}). En appliquant la proposition 3.1.2 à la situation $\Delta_h : F_h \rightarrow D_h$ on en déduit que F_h est une sous-variété régulière de Λ_h et que l'on a $\text{codim } F_h = \text{codim } H_h - \dim D_h$. Par suite

$$\begin{aligned} \text{codim } F_k &= \text{codim } F_{k-1} + (\text{codim } H_k - \text{codim } H_{k-1}) \\ &\quad - (\dim D_k - \dim D_{k-1}) \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1.3,

$$\text{codim } H_k = \text{codim } H_{k-1} + (\tau_{k-1} - \tau_k) \tau_k - \rho_k.$$

Il reste donc à calculer $\dim D_k - \dim D_{k-1}$. Nous allons indiquer comment on peut calculer la dimension de D_h pour $0 \leq h \leq k$.

Soit K_h le sous-groupe de G_h des éléments qui fixent $(\bar{\omega}, J_h^1, \dots, J_h^h)$. On a $\dim D_h = \dim G_h/K_h$. Désignons par K'_h le sous-groupe des éléments de G_h qui fixe $\bar{\omega}$ et K''_h le sous-groupe des éléments de G_h qui fixent $J_h^1, \dots, J_h^h$. On a évidemment $K_h = K'_h \cap K''_h$. Dans $GL_n(\mathbf{R})$ soit $\bar{K}'_h$ le sous-groupe des automorphismes de $\mathbf{R}^n$ qui fixe le modèle $\bar{\omega}$. Si π_{h0} désigne la projection canonique de L_h sur $L_0 = GL_n(\mathbf{R})$ le groupe K'_h n'est autre que $\pi_{h0}^{-1}(K'_h)$. D'autre part, puisque $\pi_{h0}(G_h) \subset GL_n(\mathbf{R})$ fixe les espaces $N_0, \dots, N_l, \dots, N_h$, on a $\pi_{h0}(K''_h) = \pi_{h0}(G_h) \supset \bar{K}'_h$. On a donc la décomposition suivante :

$$K_h = \bar{K}'_h \oplus K''_h \cap \text{Ker } \pi_{h0}.$$

La codimension de K_h dans G_h est donc égale à :

$$\begin{array}{ccc} [\text{codim } \bar{K}'_h \text{ dans } \pi_{h0}(G_h)] & + & [\text{codim } K''_h \text{ dans } G_h] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{fixe } \bar{\omega} \text{ dans } \Lambda_0^2 & & \text{fixe } J_h^1, \dots, J_h^h. \end{array}$$

On obtient ainsi [15]

$$\dim D_k - \dim D_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-1} - s_i^k + s_{i-1}^k) (s_{i-1}^k - s_i^k) + (\tau_k - s_k^k) (s_k^k - s_{k-1}^k)$$

C.Q.F.D.

3^e étape. — A partir de la proposition 3.1.4, nous allons établir le théorème 3.1.2. Il résulte de l'hypothèse de récurrence (P_{k-1}) que l'application

$$\sigma_{s_0 \dots s_h} \varepsilon_h : \pi_{kh}^{-1} X_{s_0 \dots s_h} \varepsilon_h \rightarrow D_{s_0 \dots s_h} \varepsilon_h$$

est une submersion pour $0 \leq h \leq k-1$ dont la fibre est F_h .

Pour $h = k$, $\sigma_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k : X_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k \rightarrow D_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k$ est analytique équivariante et la contre-image F_k de $[(M_0^0), \dots, (M_k^k), \dots, (M_0^k), (N_0, \dots, N_k)]$ est une variété (proposition 3.1.4). En appliquant à nouveau la proposition 3.1.2, on en déduit que cette application est une submersion de fibre-type F_k . Par suite, pour tout $0 \leq h \leq k$ on a :

$$\text{codim } \pi_{kh}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h} \varepsilon_h) = \text{codim } F_h - \dim D_{s_0 \dots s_h} \varepsilon_h.$$

Ainsi on a la formule de récurrence

$$\begin{aligned} v_{s_0 \dots s_k} &= \text{codim } X_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k = \text{codim } X_{s_0 \dots s_{k-1}} \varepsilon_{k-1} \\ &+ \text{codim } F_k - \text{codim } F_{k-1} - \dim D_{s_0 \dots s_k} \varepsilon_k - \dim D_{s_0 \dots s_{k-1}} \varepsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Par un calcul élémentaire on obtient alors le résultat annoncé.

Pour montrer que $\text{codim } X_{s_0 \dots s_k} T_k > n$ si $T_k \neq \varepsilon_k$ on utilise un simple argument de transversalité (voir [15]).

3.2. Démonstration de la proposition 3.1.3 (esquisse)

On rappelle que le système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et la base $\varepsilon_1 = dx_1, \dots, \varepsilon_n = dx_n$ de $E^* = (\mathbf{R}^n)^*$ sont fixés.

On écrit $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_\ell + \dots + \omega_k$ où ω_ℓ est un élément de Λ_k^2 à coefficients polynomiaux homogènes de degré ℓ . On pose :

$$\omega_\ell = \sum_{1 \leq u < v \leq n} b_{uv}^\ell dx_u dx_v,$$

$$b_{uv}^\ell = \sum_{|L|=\ell} b_{uv}^L x^L,$$

où $L = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^n$, $x^L = x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n}$, $|L| = \ell_1 + \dots + \ell_n$.

L'élément $(S_0, \dots, S_k, \mathcal{E}_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$ est fixé de sorte que $X_{S_0, \dots, S_k, \mathcal{E}_k} \neq \emptyset$. On rappelle que l'on a posé :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix}.$$

On se place dans l'ensemble $\mathcal{H}_k$ des $\omega \in \Lambda_k$ tels que $\pi_{k0}(\omega) = \bar{\omega}$, le modèle dans Λ_0^2 associée à $(S_0, \dots, S_k, \mathcal{E}_k)$ (voir [15]).

La démonstration de la proposition 3.1.3 se décompose en 3 parties.

1^{re} partie (voir [15]). A $\omega \in \mathcal{H}_k$ on associe une famille $(\mathbf{a}_i^j)$, $0 \leq i \leq j \leq k$, de champs de matrices des composantes de ω , sur un voisinage de $0 \in \mathbf{R}^n$ avec la propriété suivante : pour $j = 0, \dots, k-1$, soit

$$\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega) = \{x \in \Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega) \mid \text{rg } \mathbf{a}_i^j(x) = \tau_j - s_i^j, i = 0, \dots, j\}.$$

Si $\omega \in H_j$, l'idéal σ_ω^{j+1} est l'idéal des $(k-j)$ -jets en 0 de l'idéal de définition de l'ensemble $\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega)$. Par récurrence sur j , on montre que chaque matrice $\mathbf{a}_i^j$ contient une sous-matrice $\bar{\mathbf{a}}_i^j$ telle que sur $\Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)$ le rang de $\bar{\mathbf{a}}_i^j$ est égal au rang de $\mathbf{a}_i^j$. La valeur $\mathbf{a}_i^j(0)$ permet de définir dans $\mathbf{a}_i^j$ une $(\tau_j - s_i^j) \times (\tau_j - s_i^j)$ matrice de rang maximum sur $\Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)$. Comme dans [9], la condition $\text{rg } \mathbf{a}_i^j = \text{rg } \bar{\mathbf{a}}_i^j = \tau_j - s_i^j$ se traduit par une équation matricielle du type : $T_i^j - Y_i^j(X_i^j)^{-1} Z_i^j = 0$, où $\{X_i^j, Y_i^j, Z_i^j, T_i^j\}$ est une décomposition de $\bar{\mathbf{a}}_i^j$ en blocs du type

X_i^j	Y_i^j
Z_i^j	T_i^j

Par suite, l'ensemble $\psi_{j+1}(\omega)$ des $(k-j)$ -jets en o des termes de

$$\det X_i^j (T_i^j - Y_i^j (X_i^j)^{-1} Z_i^j) \quad i = 0, \dots, j$$

est alors un système générateur de σ_ω^{j+1} modulo σ_ω^j , pour $\omega \in H_j$. Modulo σ_ω^j , l'idéal σ_ω^{j+1} sera alors engendré par l'ensemble $\psi_{j+1}(\omega)$ des $(k-j)$ -jets en o des termes de $(T_i^j - Y_i^j (X_i^j)^{-1} Z_i^j) \times \det X_i^j \quad i = 0, \dots, j$ pour $\omega \in H_j$. Rappelons que H_j est l'ensemble des $\omega \in \mathcal{H}_k$ tels que :

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^\ell &\subset J_k^\ell, \quad \ell = 0, \dots, j, \\ \text{rg } \sigma_\omega^\ell &= n - \tau_\ell. \end{aligned}$$

Chaque élément de $\psi_{j+1}(\omega)$ est un polynôme dans les composantes de ω .

Comme les composantes de ω_0 sont des constantes, de tels polynômes sont fonctions des composantes

$$b_{vw} = b_{vw}^1 + \dots + b_{vw}^\ell + \dots + b_{vw}^k$$

de

$$\omega_1 = \omega_1 + \dots + \omega_\ell + \dots + \omega_k.$$

On a posé

$$b_{vw}^\ell = \sum_{|L|=\ell} b_{vw}^L x^L,$$

où $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ et $|L| = \ell_1 + \dots + \ell_n$. Un élément de $\psi_{j+1}(\omega)$ est, par l'intermédiaire des b_{vw} , un polynôme en $x_1 \dots x_n$ du type $\sum_I Q_I x^I$, où Q_I est un polynôme en b_{vw}^L pour $1 \leq v \leq w \leq n$ et $1 \leq |L| \leq |I|$. L'inclusion $\sigma_\omega^{j+1} \subset J_k^{j+1}$ va se traduire par l'annulation d'un certain nombre de Q_I c'est-à-dire des équations polynomiales en b_{vw}^L . Ainsi la fermeture $\bar{H}_k$ de H_k dans $\mathcal{H}_k$, c'est-à-dire $\{\omega \in \mathcal{H}_k \mid \sigma_\omega^{j+1} \subset J_k^{j+1} \quad j = 0, \dots, k-1\}$ est défini par un système d'équations polynomiales en b_{vw}^L , $1 \leq v \leq w \leq n$ et $1 \leq |L| \leq k$. On va montrer que l'ensemble formé par les parties linéaires de chacune de ces équations est un système de rang maximum par rapport aux b_{vw}^L ; ce rang est égal au nombre des équations du système. Dans le cas $\Lambda_k = \Omega_k^2$, les coordonnées b_{vw}^L étant indépendantes, on pourra achever la démonstration de la proposition 3.1.3.

2^e partie (voir [15]). Pour les 2-formes fermées, c'est-à-dire $\Lambda_k = \Omega_k^2$, les composantes b_{vw}^L ne sont plus indépendantes puisque ω est fermée. L'espace Ω_k^2 s'identifie au sous-espace de Λ_k^2 défini par les relations entre les b_{vw}^L exprimant que ω est fermée, b_{vw}^L étant considérée comme des formes linéaires sur Λ_k^2 . L'étude du système formé par ces relations va nous permettre de donner un critère d'indépendance de l'ensemble $\mathcal{C}_k$ des b_{uv}^L qui apparaissent dans la partie linéaire des équations de H_k . Dans les hypothèses suivantes :

pour tout entier j , $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ vérifie

$$\begin{aligned} s_0^1 &\leq 2, \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j &\leq 1 \quad \text{et} \quad s_i^j \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq j-2 \quad \text{si} \quad 2 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

on montre l'indépendance des équations qui définissent H_k . En fait, sous ces hypothèses la strate $\varepsilon_{s_0} \dots s_k \varepsilon_k \subset \Lambda_k^2$ définie dans le § 2.2 est transverse à Ω_k^2 .

3^e partie (voir [15]). Dans le cas où il existe un entier (et un seul) pour lequel S_j et V_j ne vérifient pas les inégalités précédentes, $\varepsilon_{s_0} \dots s_k \varepsilon_k \subset \Lambda_k^2$ n'est plus transverse à Ω_k^2 . L'étude du système d'équations construit dans la 1^{re} partie va nécessiter le calcul de la partie quadratique en b_{vw}^L de chaque équation. On transforme ce système en un système équivalent dont les équations sont indépendantes sous l'hypothèse qu'il existe au plus un entier j pour lequel S_j ne vérifie pas les inégalités ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. J. ARNOLD, Singularities of smooth mappings, *Russian Math. Surveys* **23** (1968), 1-43.
- [2] J.-M. BOADMAN, Singularities of Differentiable Maps, *Publ. Math. I.H.E.S.* **33** (1967), 21-57.
- [3] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.
- [4] C. CHEVALLEY, *Séminaire de géométrie algébrique*, Paris, 1955-1956.
- [5] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et Mécanique analytique*, Paris, Hermann, 1969.
- [6] M. GOLUBITSKY et O. TISCHLER, On the local stability of differential forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **223** (1976), 205-221.
- [7] M. GOLUBITSKY, et O. TISCHLER, An example of module for singular symplectic forms, *Invent. Math.* **38** (1977), 219-225.
- [8] B. JAKUBCZYK et F. PRZYTICKI, *Singularities of k-tuples of vector fields*, Preprint 15, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1978.
- [9] H. I. LEVINE, Singularities of differentiable mappings, in *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium I*, Springer, *Lecture Notes Math.* **192** (1970), 1-96.
- [10] J. MARTINET, Sur les singularités de formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier* **20** (1) (1970), 95-178.
- [11] J. MATHER, Stability of C^∞ -mappings : V-transversality, *Advances in Math.* **4** (1970), 301-336.
- [12] J. MATHER, On Thom-Boardman Singularities, in *Salvador Symposium on dynamical Systems*, 1971, 239-248 (Springer).
- [13] B. MORIN, *Calcul Jacobien*, Thèse, Orsay, 1972.
- [14] F. PELLETIER, *Comportement générique d'une 2-forme fermée en dimension paire*, Préprint, Dijon, 1978.
- [15] F. PELLETIER, *Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles*, Thèse, Dijon, 1980.
- [16] R. ROUSSARIE, Modèles locaux de champs et de formes, *Astérisque* **30** (1975).
- [17] R. THOM, Les singularités d'applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1956), 43-87.
- [18] R. THOM, Un lemme sur les applications différentiables, *Bul. Soc. Math. Mexico*, 2^e série, **1** (1956), 59-71.

Manuscrit reçu le 19 janvier 1981,

Révisé le 26 avril 1984.

Laboratoire de Topologie
 ERA CNRS n° 945
 Université de Dijon
 BP 138
 21000 Dijon Cedex
 et Université de Corse
 7, av. Jean Nicoli
 20250 Corté