

# PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ALAIN CHENCINER

## **Bifurcations de points fixes elliptiques - I. Courbes invariantes**

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 61 (1985), p. 67-127

[http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1985\\_61\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1985_61_67_0)

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# BIFURCATIONS DE POINTS FIXES ELLIPTIQUES

## I. — COURBES INVARIANTES

*par ALAIN CHENCINER*

### TABLE DES MATIÈRES

0.1. Introduction générale .....	68
0.2. Courbes invariantes et courbes translatées .....	69
0.3. Bulles .....	70
1.1. Points fixes elliptiques.....	71
1.2. Déformations .....	72
1.3. Les ensembles $C_\omega$ et $\tilde{C}_\omega$ .....	77
1.4. Systèmes de coordonnées adaptés à un $\omega$ .....	82
2.1. Courbes fermées invariantes de $P_{\mu, a}$ lorsque $(\mu, a)$ est voisin de $\gamma_\omega$ .....	86
2.2. Courbes invariantes non normalement hyperboliques .....	98
2.3. Bons chemins de bifurcation transverses à $\Gamma$ .....	103
APPENDICE : Courbes invariantes normalement hyperboliques obtenues par la méthode des transformées de graphe .....	113
3.1. Existence et bassins .....	113
3.2. Nombres de rotation .....	118
CONCLUSION .....	125
RÉFÉRENCES .....	126

### 0.1. Introduction générale

Cet article constitue la première partie d'une étude consacrée aux propriétés dynamiques de certaines familles à deux paramètres génériques de germes de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^2$ .

Le phénomène que nous mettons en évidence est illustré très heuristiquement par la figure 1 (la figure 2 représente dans le même esprit une classique « bifurcation de Hopf ») : « le long » d'une certaine courbe  $\Gamma$  de l'espace des paramètres, on retrouve « déployée » toute la complexité que présente, au voisinage d'un point fixe elliptique, la dynamique d'un germe de difféomorphisme générique de  $\mathbf{R}^2$  préservant les aires (dans le cas de Hopf, remplacer ce dernier par le difféomorphisme « solution au temps 1 » d'un germe de champ hamiltonien).

Qu'un tel phénomène soit possible est rendu manifeste par la remarque suivante, que nous avons systématisée : dans l'étude locale d'un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  au voisinage d'un de ses points fixes elliptiques, la condition de conservation de l'aire, bien que de codimension infinie, joue le rôle d'une condition de codimension 1 (la codimension infinie se retrouve en ce que ce rôle est joué pour chaque ensemble invariant, c'est-à-dire une infinité de fois). Ceci était au moins connu depuis la démonstration de Rüssmann du théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (recherche d'une courbe « translatée » et annulation de la translation à cause de la conservation de l'aire, voir [15], [20]) ; nous montrerons dans les articles suivants qu'il en est de même pour le théorème de Zehnder sur l'existence générique de points homoclines [23] (le paramètre sera ici un frottement dans l'équation différentielle du pendule [3], [10]), pour le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff (qui peut être à bon droit considéré comme un théorème concernant certaines familles à un paramètre d'homéomorphismes de l'anneau, voir [4] et [5]), et pour le théorème d'Aubry-Mather (voir [6], [9]).

Le lecteur habitué aux difféomorphismes conservatifs aura reconnu dans ces exemples les théorèmes fournissant respectivement des courbes invariantes de nombre de rotation diophantien, des points homoclines relatifs à des points périodiques de « petites » périodes, des points périodiques de « grandes » périodes, et des ensembles de Cantor invariants de nombre de rotation de Liouville.

Les résultats que nous démontrons précisent ceux annoncés dans [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] ; le contexte et la philosophie ont été en partie discutés dans [7] et [8].

Ce premier article traite des courbes invariantes et donne aux résultats de [1], [2] leur forme définitive : on s'est en particulier débarrassé des hypothèses diophantiennes parasites sur  $\omega_0$ .

## 0.2. Courbes invariantes et courbes translatées

La persistance, sous de petites perturbations, d'un point fixe d'un difféomorphisme s'obtient en général comme conséquence du théorème classique des fonctions implicites. Il n'en est plus de même pour des variétés invariantes de dimension supérieure à 0 qui ne persistent systématiquement que si elles sont « normalement hyperboliques » ([16], [17]) (la méthode des « transformées de graphe » permet alors de les obtenir comme point fixe d'une contraction dans un espace fonctionnel bien choisi). Cette dernière propriété est largement utilisée en théorie des bifurcations (de Hopf par exemple ([19], [11])), le problème étant d'évaluer l'ordre de grandeur de l'attractivité normale d'une variété invariante d'une « forme normale tronquée »  $N$  par rapport à celui de la distance à  $N$  du difféomorphisme  $P$  considéré.

Une telle méthode ne permet de comparer les diagrammes de bifurcation d'une famille de difféomorphismes et de la famille de « formes normales tronquées » associée qu'en dehors de certains voisinages, infiniment effilés à l'origine, des hypersurfaces de bifurcation de cette dernière (ces voisinages ne se réduisent à l'hypersurface elle-même que lorsque la bifurcation se fait à partir d'un point fixe) (fig. 5).

Le présent article étudie ces voisinages effilés dans le cas particulier de la collision de deux courbes fermées invariantes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée qui les crée simultanément : l'espace des paramètres  $(\mu, a)$  est de dimension deux, et le long d'une courbe  $\Gamma$  issue de  $(0, 0)$  (fig. 4) naît un cercle invariant non normalement hyperbolique (« saddle-node ») de la forme normale tronquée  $N_{\mu, a}$ . Nous montrons que dans une famille générique proche  $P_{\mu, a}$ ,  $\Gamma$  est remplacée par un ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$  (les points  $\tilde{\gamma}_\omega$  de la figure 10) de valeurs des paramètres pour lesquelles  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée invariante non normalement hyperbolique. Le rôle joué précédemment par l'attractivité normale des courbes invariantes d'une forme normale tronquée est maintenant tenu par le cisaillement tangentiel (twist) le long d'une telle courbe, et le théorème de point fixe cède à son tour la place à un théorème de fonctions implicites (celui de Nash, Moser, Hamilton) ([13], [15]).

Plus précisément, nous utilisons le théorème de la courbe translatée, dû à Rüssmann ([20], [15]), qui implique le théorème du « twist » de Kolmogorov, Arnold, Moser, et n'est autre qu'un théorème du « twist » non conservatif. Alors que la propriété de conservation de l'aire implique directement qu'une courbe fermée envoyée sur sa translatée est invariante, c'est ici la présence d'un paramètre transverse à  $\Gamma$  qui nous permet d'affirmer que pour certaines valeurs de ce dernier la translation est nulle.

Notons que la recherche de courbes fermées translatées semble bien naturelle dans l'étude des bifurcations de familles de difféomorphismes de  $(\mathbf{R}^2, 0)$  : dans le cas elliptique, les formes normales qui interviennent laissent invariant le feuilletage des cercles centrés à l'origine et appliquent ces cercles les uns sur les autres par des rotations dont l'angle varie en général avec le rayon du cercle (« twist » non conservatif).

### 0.3. Bulles

Ce travail a pris naissance lors d'un colloque sur les systèmes dynamiques et la turbulence organisé en juillet 1980 par l'Université de Warwick. Une question de Jack Hale sur la possibilité de remplacer dans les familles à deux paramètres considérées ici le voisinage effilé de la courbe de bifurcation  $\Gamma$  de la famille de formes normales par une infinité de bulles a été séminale : dans les premières versions de ce travail je doutais de la justesse de cette intuition et ce n'est que tout récemment [7] que je me suis aperçu de la possibilité de prouver l'existence de ces bulles à l'extérieur desquelles  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à une forme normale (fig. 11) : à presque tout chemin de l'espace  $(\mu, a)$  passant par un des points  $\tilde{\gamma}_\omega$  de  $\tilde{\Gamma}$  correspond une famille de difféomorphismes  $P_{\mu, a}$  se comportant comme la famille de formes normales  $N_{\mu, a}$  associée à un chemin transverse à  $\Gamma$ , c'est-à-dire présentant de manière franche le phénomène de disparition par collision d'un couple de courbes invariantes. La preuve nécessite une nouvelle étude de bifurcation *à partir des points de  $\tilde{\Gamma}$*  ; elle peut être considérée comme un prolongement de [11] et montre en particulier que certaines des situations étudiées dans ce dernier article se présentent plus souvent qu'on n'aurait pu le croire.

Dans l'optique de l'introduction, l'ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$  est l'analogue de l'ensemble

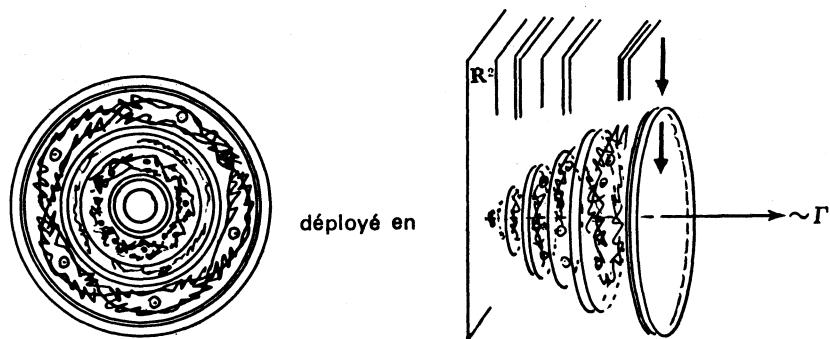


FIG. 1

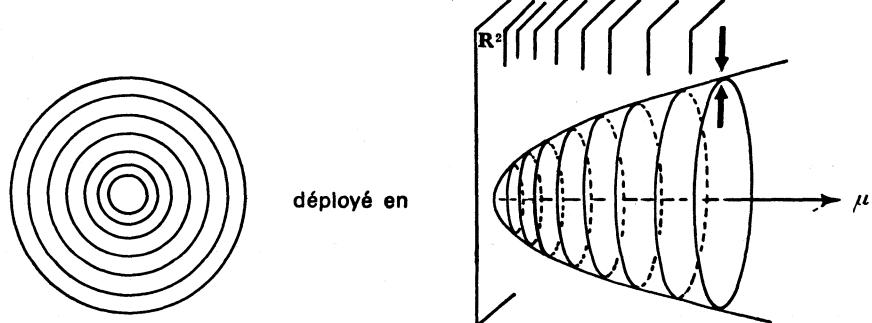


FIG. 2

de Cantor de courbes invariantes fourni dans la situation conservative par le théorème de K.A.M.; quant aux bulles, ce sont les analogues des domaines d'instabilité de Birkhoff : nous verrons dans [9] et [10] que leur structure est tout aussi fascinante.

Des discussions avec Michel Herman sur les « petits twists » ont été fondamentales (ainsi que son cours à l'E.N.S.); il sait combien je lui en suis reconnaissant.

*Quelques notations :*

$\mu \in \mathbf{R}^k$ ,  $\mathbf{o}$  désigne un paramètre voisin de  $\mathbf{o}$  dans  $\mathbf{R}^k$ .

$f: A, a \rightarrow B, b$  désigne une application  $f$  définie sur un voisinage de  $a$ , à valeurs dans  $B$ , et vérifiant  $f(a) = b$ .

$\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ .

$C^k(N, \mathbf{R})$  est l'espace des fonctions de classe  $C^k$  sur  $N$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  muni, si  $N$  est compacte, de la topologie de la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  dans les cartes d'un atlas.

$\text{Diff}_+^k(\mathbf{T}^n)$  est l'espace des difféomorphismes de classe  $C^k$ ,  $C^k$ -isotopes à l'identité, de  $\mathbf{T}^n$ .

On identifiera à un voisinage de l'Identité dans  $\text{Diff}_+^k(\mathbf{T}^1)$  un voisinage de  $\mathbf{o}$  dans  $C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$  par l'application  $\varphi \mapsto \text{Id} + \varphi$ .

L'application inverse est  $h \mapsto h - \text{Id}$ , où on note encore  $h$  un relèvement de  $h$  en un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$ .

Enfin, si  $\omega \in \mathbf{R}$ ,  $R_\omega \in \text{Diff}_+(\mathbf{T}^1)$  désigne la rotation  $\theta \mapsto \theta + \omega$  (mod. 1), et lisse signifie  $C^\infty$ .

*Principales notations définies dans le texte :*

$N_{\mu, a}, P_{\mu, a}, \Gamma, \mathcal{V}, \mathcal{H}, f(\mu, a, X), g(\mu, a, X), f_p^\pm(\mu, a, X) \dots$	§ 1.2
$\eta_0, \gamma_\omega = (\mu_\omega, a_\omega), \rho_\omega, C_\omega, \tilde{C}_\omega \dots$	1.3
$r(\omega, \mu, a), \tau(\omega, \mu, a), \tau_\omega, (v, \varepsilon) = \Delta_\omega(\mu, a), s(\omega, \mu, a), \mathcal{D}_\omega, \mathcal{C}_{\omega, \mu, a} \dots$	1.4
$v', \varepsilon', s', \tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a} \dots$	2.1
$\tilde{\gamma}_\omega, \tilde{\Gamma} \dots$	2.2
$\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}_\omega, \mathcal{B}_\omega \dots$	2.3
$r(\mu, a), \bar{\delta}(\mu, a), \tau(\mu, a), \omega(\mu, a) \dots$	3.1

### 1.1. Points fixes elliptiques

Soit  $P: \mathbf{R}^2, \mathbf{o} \rightarrow \mathbf{R}^2, \mathbf{o}$  un difféomorphisme local  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  fixant  $\mathbf{o}$ ; on suppose que les valeurs propres de la dérivée  $DP(\mathbf{o})$  sont de la forme  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0, \lambda_0 = e^{2\pi i \omega_0}$  non réel (l'origine est un point fixe elliptique); on suppose également que  $\lambda_0^q \neq 1$  pour  $1 \leq q \leq 2n + 3$ , ou, ce qui revient au même, que  $\omega_0 \neq \frac{p}{q}$  pour  $1 \leq q \leq 2n + 3$  (l'origine est un point fixe « suffisamment » non résonnant) : les résultats qui suivent seront valables dès que  $n \geq 15$ .

La théorie des formes normales (voir [8] chapitre II) fournit une identification locale (polynomiale) de  $\mathbf{R}^2$  à  $\mathbf{C}$  dans laquelle

$$(1) \quad P(z) = z[\lambda_0 + \sum_{i=1}^n c_i |z|^{2i}] + O(|z|^{2n+3}),$$

où les  $c_i$  sont des nombres complexes et le reste une fonction  $C^\infty$  de  $z$  et  $\bar{z}$ .

Une écriture plus agréable (coordonnées polaires) est

$$(2) \quad P(z) = z[1 + f(|z|^2) + O(|z|^{2n+2})] e^{2\pi i[g(|z|^2) + O(|z|^{2n+2})]},$$

ou encore

$$(3) \quad \begin{cases} P(re^{2\pi i\theta}) = Re^{2\pi i\Theta}, \\ \Theta = \theta + g(r^2) + O(r^{2n+2}), \\ R = r(1 + f(r^2) + O(r^{2n+2})), \end{cases}$$

formules dans lesquelles  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré  $n$  à coefficients réels de la forme

$$(4) \quad \begin{cases} f(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n, \\ g(X) = \omega_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n. \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera que les fonctions  $R(\theta, r)$  et  $\Theta(\theta, r)$  sont définies et  $C^\infty$  sur tout un voisinage de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  (et pas seulement pour  $r > 0$  comme il pourrait le croire).

*Remarque.* —  $\omega_0$  étant un nombre réel, les formules (3) et (4) définissent un relèvement de la restriction  $P|_{\mathbf{R}^2 - \{0\}}$  au revêtement universel  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$  de  $\mathbf{R}^2 - \{0\} \cong \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ . Tous les relèvements de déformations de  $P$  seront définis par continuité à partir de celui-ci. *Nous parlerons donc sans ambiguïté de nombres de rotation réels.*

## 1.2. Déformations

Nous considérons maintenant des familles  $P_\mu$ ,  $C^\infty$  en  $\mu \in \mathbf{R}^k$ ,  $0$ , de difféomorphismes locaux déployant  $P_0 \equiv P$ .

Puisque le spectre de  $DP(0)$  ne contient pas  $1$ , on déduit du théorème usuel des fonctions implicites que toute perturbation  $C^1$  de  $P$  possède encore un point fixe proche de  $0$ . Si  $\mu$  est assez proche de  $0$  dans  $\mathbf{R}^k$ , les valeurs propres  $\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu$  de la dérivée de  $P_\mu$  en ce point fixe vérifient encore  $\lambda_\mu^q \neq 1$  pour  $1 \leq q \leq 2n+3$ ; après l'application éventuelle d'une famille à deux paramètres de changements de coordonnées  $C^\infty$ , on peut donc écrire le germe de déformation  $P_\mu$  sous la forme

$$(5) \quad P_\mu(z) = z[1 + f(\mu, |z|^2) + O(|z|^{2n+2})] e^{2\pi i[g(\mu, |z|^2) + O(|z|^{2n+2})]},$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré  $n$  en la deuxième variable à coefficients réels dépendant différentiablement des paramètres  $\mu$

$$(6) \quad \begin{cases} f(\mu, X) = a_0(\mu) + a_1(\mu) X + \dots + a_n(\mu) X^n, \quad a_0(0) = 0, \\ g(\mu, X) = b_0(\mu) + b_1(\mu) X + \dots + b_n(\mu) X^n, \quad b_0(0) = \omega_0. \end{cases}$$

L'écriture de (5) sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} P_\mu(z) = N_\mu(z) + O(|z|^{2n+3}), \\ N_\mu(z) = z[1 + f(\mu, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, |z|^2)}, \end{cases}$$

fait apparaître la famille  $P_\mu$  comme une perturbation de la famille  $N_\mu$  de « formes normales » (tronquées).

La propriété caractéristique des difféomorphismes locaux de la famille  $N_\mu$  est l'équivariance sous l'action du groupe des rotations, qui se traduit par les deux propriétés suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} (i) \text{ le feuilletage des cercles de centre } o \text{ est invariant (le cercle } |z| = r \text{ est envoyé sur le cercle } |z| = r(1 + f(\mu, r^2)); \\ (ii) \text{ un cercle de centre } o \text{ est envoyé sur un autre cercle de centre } o \text{ par une rotation (pour le cercle de rayon } r, \text{ la rotation est d'un angle de } 2\pi g(\mu, r^2)). \end{cases}$$

L'étude de la dynamique de tels difféomorphismes se réduit donc à un problème en dimension 1, la variable angulaire n'intervenant que de façon triviale.

Supposons qu'il existe  $K \leq n$  tel que

$$(9) \quad \begin{cases} a_0(\mathbf{o}) = a_1(\mathbf{o}) = \dots = a_{K-1}(\mathbf{o}) = 0, \\ a_K(\mathbf{o}) \neq 0 \text{ (cette condition implique que } o \text{ est un attracteur ou un répulseur pour } N_0 \text{ et pour } P_0). \end{cases}$$

Nous dirons que  $P_0$  est formellement de codimension  $K$  (référence à la seule variable radiale). Pour une famille générique  $P_\mu$  dépendant de  $K$  paramètres (*i.e.* d'un paramètre  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_{K-1}) \in \mathbf{R}^K, \mathbf{o}$ ) l'application de  $\mathbf{R}^K, \mathbf{o}$  dans  $\mathbf{R}^K, \mathbf{o}$

$$\mu \mapsto (a_0(\mu), \dots, a_{K-1}(\mu))$$

est un difféomorphisme local; on peut donc prendre  $a_0(\mu), \dots, a_{K-1}(\mu)$  comme paramètres locaux de la déformation. *Dans la suite, nous noterons*  $\mu = (\mu, a, a_2, \dots, a_{K-1}) \in \mathbf{R}^K, \mathbf{o}$  *ces paramètres, ce qui donne*

$$(10) \quad \begin{cases} f(\mu, X) = \mu + aX + \dots + a_{K-1}X + a_K(\mu)X^K + \dots + a_n(\mu)X^n, \\ a_K(\mathbf{o}) \neq 0, \end{cases}$$

*et nous supposerons*  $a_K(\mathbf{o}) = -1$  : à conjugaison linéaire près, cela revient à supposer que  $a_K(\mathbf{o}) < 0$ . Le lecteur transposera aisément nos résultats aux cas où  $a_K(\mathbf{o}) > 0$ .

Dans ces conditions, il est facile de déterminer les courbes fermées invariantes (proches de  $o$ ) de  $N_\mu$ : d'une part la propriété caractéristique (8) (i) implique qu'une telle courbe est nécessairement un cercle de centre  $o$ ; d'autre part les rayons  $r$  des cercles invariants sont les solutions de l'équation  $f(\mu, r^2) = 0$ .

Lorsque  $K = 1$ , on retrouve la classique bifurcation de Hopf des difféomorphismes ([19], [8]).

Lorsque  $K = 2$ , *cas auquel nous nous limiterons désormais*, les formules (6), (7), (10) deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}(z) = N_{\mu, a}(z) + O(|z|^{2n+3}), \\ N_{\mu, a}(z) = z[1 + f(\mu, a, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, a, |z|^2)}, \\ f(\mu, a, X) = \mu + aX + a_2(\mu, a) X^2 + \dots + a_n(\mu, a) X^n, \\ \quad a_2(0, 0) = -1, \\ g(\mu, a, X) = b_0(\mu, a) + b_1(\mu, a) X + \dots + b_n(\mu, a) X^n, \\ \quad b_0(0, 0) = \omega_0. \end{cases}$$

Les figures 3 et 4 indiquent la forme de la surface d'équation  $f(\mu, a, r^2) = 0$  dans  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ , le nombre de cercles invariants par  $N_{\mu, a}$  en fonction de la position de  $\mu = (\mu, a)$  dans  $\mathbf{R}^2$ , et la dynamique de  $N_{\mu, a}$ ; on n'oubliera pas en lisant ces figures que tout est local au voisinage de  $(\mu, a, r) = (0, 0, 0)$ .

La demi-droite  $\mu = 0, a < 0$  (resp.  $\mu = 0, a > 0$ ) correspond à des bifurcations de Hopf génériques supercritiques (resp. sous-critiques) : pour  $\mu > 0$  l'unique cercle invariant est un attracteur.

La courbe  $\Gamma$  obtenue en éliminant  $X$  entre les équations

$$(12) \quad f(\mu, a, X) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, X) = 0, \quad a \geq 0,$$

correspond aux situations où deux cercles invariants viennent se confondre. Remarquons que  $\Gamma$  est lisse et tangente en  $(0, 0)$  à  $\mu = 0$ ; on déduit en effet du théorème des fonctions implicites que  $\Gamma$  est donnée par une équation de la forme

$$(13) \quad \mu = -\frac{a^2}{4} + O(|a|^3), \quad a \geq 0.$$

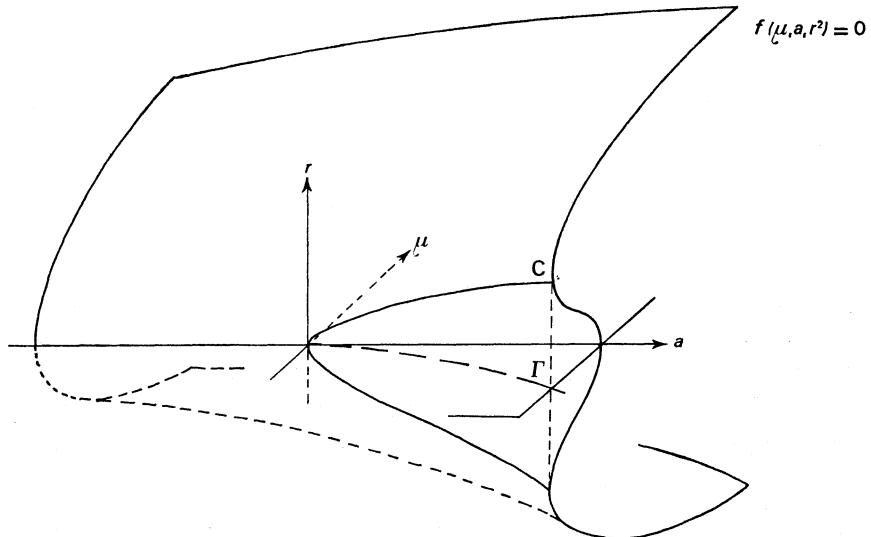


FIG. 3

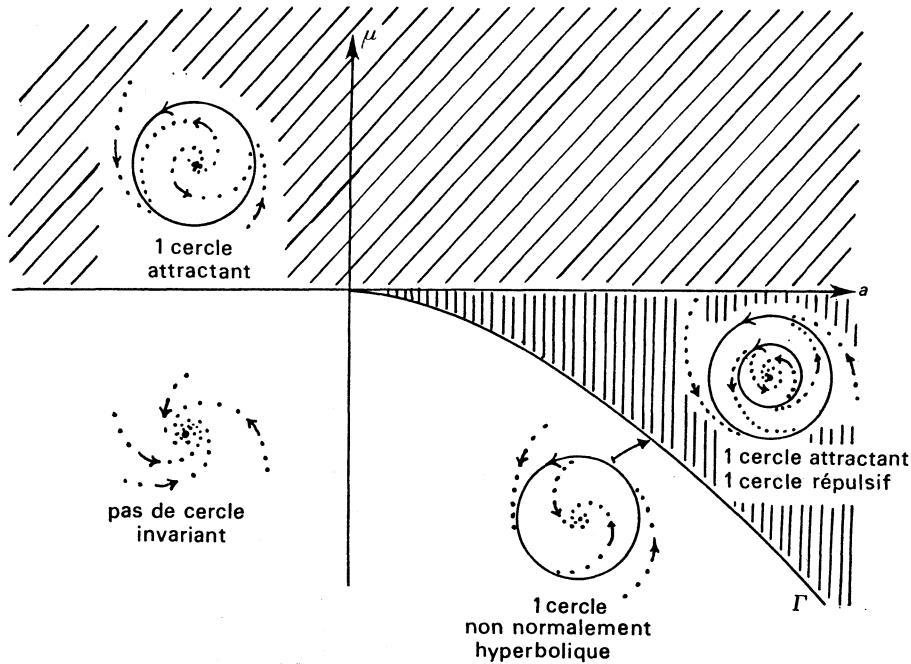


FIG. 4

Cette courbe  $\Gamma$  n'est autre que celle mentionnée dans l'introduction : le long de  $\Gamma$ , l'unique cercle laissé invariant par  $N_{\mu, a}$  n'est pas normalement hyperbolique, ce qui lui laisse une chance de courir des aventures hamiltoniennes dans la perturbation  $P_{\mu, a}$  de  $N_{\mu, a}$ .

C'est plus précisément dans un voisinage effilé  $\mathcal{V}$  de  $\Gamma$  que se situe notre intérêt : si  $p$  est un nombre réel positif, on définit  $f_p^\pm$  par

$$(14) \quad f_p^\pm(\mu, a, X) = f(\mu, a, X) \pm X^p.$$

Dans la partie du plan des  $z$  définie par  $f_n^+(\mu, a, |z|^2) \leq 0$  ou  $f_n^-(\mu, a, |z|^2) \geq 0$ ,  $|N_{\mu, a}(z)| - |z| = |zf(\mu, a, |z|^2)|$  l'emporte sur la perturbation  $O(|z|^{2n+3})$ ; la dynamique radiale de  $P_{\mu, a}$  y est donc analogue à celle de  $N_{\mu, a}$ . Notons  $\Gamma_n^\pm$  le contour apparent (privé de l'axe  $\mu = 0$ ) de la surface  $f_n^\pm = 0$ . Si  $\mu \leq 0$  et  $a \leq 0$  ou si  $\mu \leq 0$ ,  $a \geq 0$  et  $(\mu, a)$  est en dessous de  $\Gamma_n^+$ , tout point  $z$  vérifie  $f_n^+(\mu, a, |z|^2) \leq 0$  et  $0$  est un attracteur global pour  $P_{\mu, a}$  (pour un énoncé précis, voir la partie o) du théorème 4). Si  $\mu < 0$ ,  $a \geq 0$  et  $(\mu, a)$  est au-dessus de  $\Gamma_n^-$ , les deux équations  $f_n^+ > 0$ ,  $f_n^- < 0$  définissent deux anneaux hors desquels les dynamiques radiales de  $N_{\mu, a}$  et  $P_{\mu, a}$  sont analogues; entre  $\Gamma_n^+$  et  $\Gamma_n^-$ , au contraire, ces deux anneaux se fondent en un seul, d'équation  $f_n^+ > 0$ .

Soit  $\mathcal{V}$  le voisinage effilé de  $\Gamma$  défini par  $\Gamma_n^+$  et  $\Gamma_{n-3}^-$  (figure 5). Nous montrerons dans le paragraphe 3 (théorème 4) que son complémentaire  $\mathcal{H}$  dans un voisinage de  $0$  est un *domaine d'hyperbolicité normale* au sens de ([8] chap. III) : dans  $\mathcal{H}$ , l'hyperbolicité normale (attractivité ou répulsivité) des cercles invariants de  $N_{\mu, a}$  est assez forte pour

que ceux-ci résistent à la perturbation que représente le passage de  $N_{\mu, a}$  à  $P_{\mu, a}$ ; dans un voisinage *uniforme* de 0 dans  $\mathbf{R}^2$ ,  $P_{\mu, a}$  a alors autant de courbes fermées invariantes que  $N_{\mu, a}$  et les partitions en bassins d'attraction ou de répulsion sont analogues.

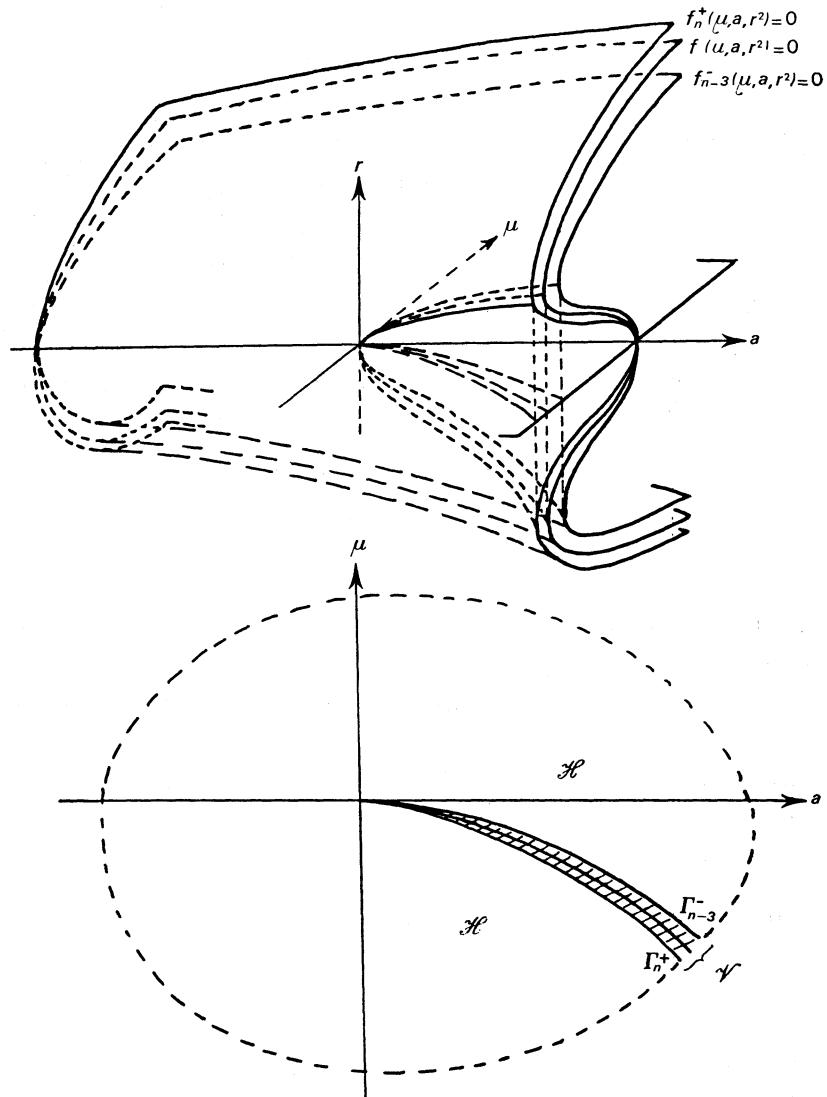


FIG. 5

*Remarque 1.* — L'identification locale de  $\mathbf{R}^2$  à  $\mathbf{C}$  dans laquelle  $P_0$  prend la forme (5) n'est pas uniquement déterminée; cependant, la notion de codimension formelle est définie sans ambiguïté : si dans un système de coordonnées  $P_0$  s'écrit

$$(15) \quad \begin{cases} P_0(z) = z(1 + a_k |z|^{2k}) e^{2\pi i g(|z|^2)} + O(|z|^{2k+3}), \\ a_k \in \mathbf{R}, \quad a_k \neq 0, \end{cases}$$

l'entier  $k$  et le signe de  $a_k$  sont des invariants de conjugaison  $C^\infty$  locale. On peut le voir, par exemple, en remarquant qu'une conjugaison locale entre deux difféomorphismes du type (15) s'écrit nécessairement

$$(16) \quad h(z) = z\alpha(|z|^2) e^{2i\beta(|z|^2)} + O(|z|^{2k+3}).$$

De même si

$$(17) \quad \begin{cases} g(|z|^2) = \omega_0 + b_\ell |z|^{2\ell} + O(|z|^{2\ell+2}), \\ b_\ell \in \mathbf{R}, \quad b_\ell \neq 0, \\ \ell \leq k, \end{cases}$$

l'entier  $\ell$  et le signe de  $b_\ell$  sont des invariants de conjugaison  $C^\infty$  locale (le couple  $(a_k, b_\ell)$  est en fait bien défini à la multiplication près de chacun de ses éléments par le même nombre réel *positif*).

*Remarque 2.* — Dans une famille à  $K$  paramètres « générique » de difféomorphismes d'une surface, on pourra rencontrer, pour des valeurs isolées des paramètres, des difféomorphismes dont le germe en l'un de leurs points fixes soit de codimension formelle  $K$ .

Dans la suite de cet article, on considère uniquement le cas où  $K = 2$ .

### 1.3. Les ensembles $C_\omega$ et $\tilde{C}_\omega$

L'étude de  $P_{\mu,a}$  pour  $(\mu, a) \in \mathcal{V}$  exige qu'on s'intéresse aux nombres de rotation il sera commode d'introduire la notation

$$(18) \quad \begin{cases} g_\omega(\mu, a, X) = g(\mu, a, X) - \omega, \quad \text{c'est-à-dire} \\ N_{\mu,a}(z) = e^{2\pi i \omega} z [1 + f(\mu, a, |z|^2)] e^{2\pi i g_\omega(\mu, a, |z|^2)}. \end{cases}$$

En éliminant  $X \geq 0$  entre les équations

$$(19) \quad f(\mu, a, X) = 0, \quad g_\omega(\mu, a, X) = 0,$$

on obtient l'ensemble  $C_\omega$  des valeurs de  $(\mu, a)$  pour lesquelles le difféomorphisme local  $N_{\mu,a}$  possède, au voisinage de 0, un cercle invariant  $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$  sur lequel il induit la rotation  $R_\omega$  (ceci suppose que  $\omega$  soit proche de  $\omega_0$ ). Par analogie, on définit  $\tilde{C}_\omega$  comme l'ensemble des valeurs de  $(\mu, a)$  pour lesquelles le difféomorphisme local  $P_{\mu,a}$  possède une courbe fermée invariante continue, coupant chaque demi-droite issue de 0 en un seul point, sur laquelle il induit un homéomorphisme de nombre de rotation  $\omega$ .

*A partir de maintenant on fait les hypothèses (génériques) suivantes :*

$$(20) \quad \begin{cases} b_1(0, 0) \neq 0 \quad (\text{rappelons qu'on a déjà supposé } a_2(0, 0) = -1), \\ \eta_0 = 2 \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) + b_1(0, 0) \neq 0; \end{cases}$$

(Ces hypothèses jouent le rôle de l'hypothèse de « twist » dans la théorie K.A.M.)

$C_\omega$  est alors une courbe lisse et l'enveloppe des diverses courbes  $C_\omega$  pour  $\omega$  voisin de  $\omega_0$ ,  $\frac{1}{\eta_0}(\omega - \omega_0) \geq 0$ , n'est autre que  $\Gamma$  : pour démontrer ceci, on commence par remarquer qu'en un point  $(\mu, a) \in \Gamma$  le rayon  $r$  de l'unique cercle invariant proche de  $o$  de  $N_{\mu, a}$  vérifie

$$(21) \quad r^2 = \frac{a}{2} + O(|a|^2).$$

La rotation induite par  $N_{\mu, a}$  sur ce cercle a donc pour angle

$$(22) \quad 2\pi \left[ b_0(\mu, a) + \frac{b_1(\mu, a)}{2}a + O(|a|^2) \right] = 2\pi \left[ \omega_0 + \frac{1}{2}\eta_0 a + O(|a|^2) \right].$$

Ainsi, si  $\eta_0 \neq 0$  et  $\frac{1}{\eta_0}(\omega - \omega_0) \geq 0$ , l'intersection  $\Gamma \cap C_\omega$  est formée d'un unique point  $\gamma_\omega$  de coordonnées

$$(23) \quad \begin{cases} a = a_\omega = \frac{2}{\eta_0}(\omega - \omega_0) + O(|\omega - \omega_0|^2), \\ \mu = \mu_\omega = -\frac{1}{\eta_0^2}(\omega - \omega_0)^2 + O(|\omega - \omega_0|^3). \end{cases}$$

Notant  $F_\omega = (f, g_\omega) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , on peut décrire  $C_\omega$  comme la projection sur le plan  $(\mu, a)$  de

$$C'_\omega = F_\omega^{-1}(o, o) \cap \{(\mu, a, X) \mid X \geq 0\} \subset \mathbf{R}^3.$$

D'après (21),  $\gamma_\omega$  est la projection d'un unique point  $\gamma'_\omega$  de  $C'_\omega$  proche de l'origine, dont les coordonnées sont

$$\mu_\omega, a_\omega, \rho_\omega^2 = \frac{a_\omega}{2} + O(|a_\omega|^2).$$

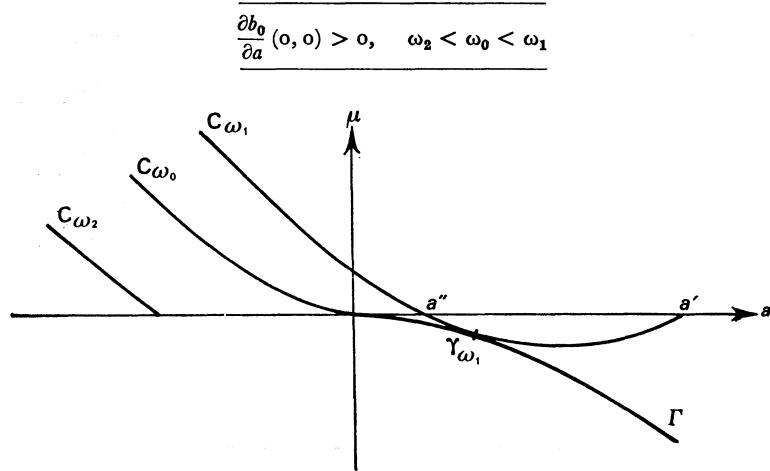
L'ensemble  $C'_\omega$  est lisse au voisinage de  $\gamma'_\omega$  car

$$(24) \quad DF_\omega(\gamma'_\omega) = \begin{pmatrix} 1 + O(|\omega - \omega_0|^2) & O(|\omega - \omega_0|) & O(|\omega - \omega_0|) \\ O(1) & O(1) & b_1(o, o) + O(|\omega - \omega_0|) \end{pmatrix}$$

est de rang 2, et la dérivée en  $\gamma'_\omega$  de l'application  $(\mu, a, X) \mapsto (F_\omega, \mu, a)$  de  $\mathbf{R}^3$  dans  $\mathbf{R}^4$  est de rang maximum car  $\frac{\partial g_\omega}{\partial X}(\gamma'_\omega) = b_1(o, o) + O(|\omega - \omega_0|) + o$  :  $C_\omega$  est donc lisse en  $\gamma_\omega$ . Enfin,  $C'_\omega$  rencontre en  $\gamma'_\omega$  le lieu critique  $\Gamma'$  de la projection sur le plan  $(\mu, a)$  de la surface  $f^{-1}(o) \subset \mathbf{R}^3$ , ce qui montre que  $C_\omega$  est tangente en  $\gamma_\omega$  à  $\Gamma$ .

Plus généralement, les évaluations de  $\det DF_\omega(\mu, a, X)$  et de  $\frac{\partial g_\omega}{\partial X}(\mu, a, X)$  au voisinage de  $(o, o, o)$  montrent qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $(o, o)$  dans le plan  $(\mu, a)$  et un voisinage  $\Omega$  de  $\omega_0$  dans  $\mathbf{R}$  tels que  $C_\omega \cap \mathcal{W}$  soit lisse dès que  $\omega \in \Omega$ .

Les figures 6.1 à 6.7 indiquent, dans le cas où  $b_1(0, 0) = 1$ , les différentes situations qui se présentent en fonction de la valeur de  $\frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0)$ . Les valeurs particulières  $-1$  et  $0$  apparaissent lorsqu'on étudie la concavité en  $(0, 0)$  de la courbe  $C_{\omega_0}$ ; pour les trois valeurs  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$  nous avons représenté une situation non générique particulièrement simple à étudier.



$$b_0(0, a') = \omega_1 \quad (\text{ cercle de rayon } 0) \\ b_0(0, a'') + a'' + o(a''^2) = \omega_1 \quad (\text{ cercle de rayon } a'' + o(a''^2))$$

FIG. 6.1

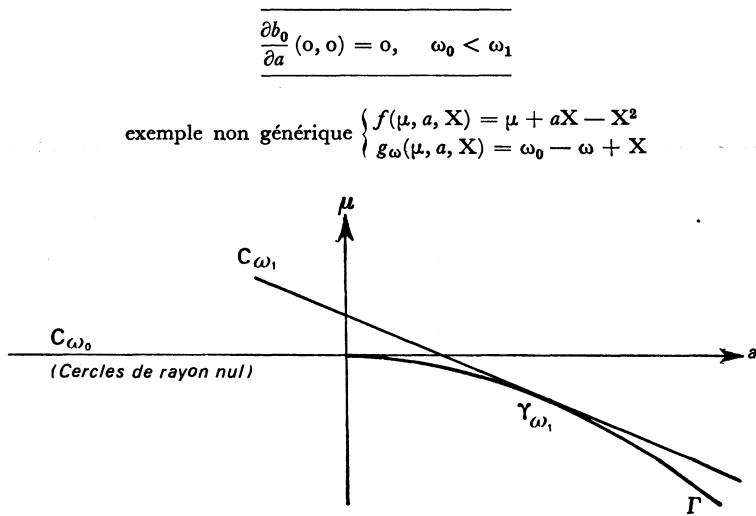


FIG. 6.2

$$\boxed{-\frac{1}{2} < \frac{\partial b_0}{\partial a}(0,0) < 0, \quad \omega_2 < \omega_0 < \omega_1}$$

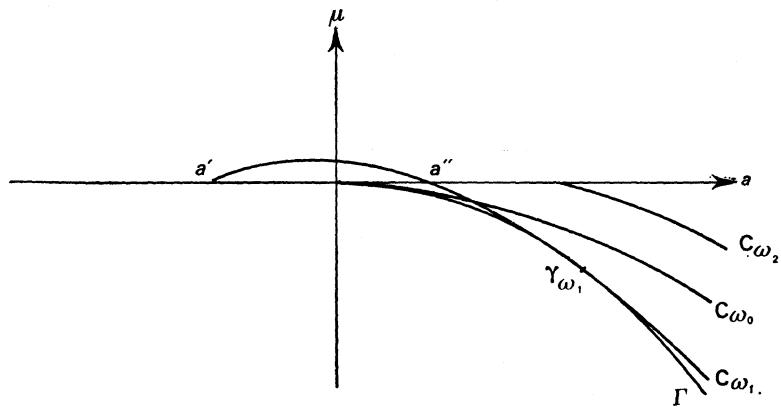
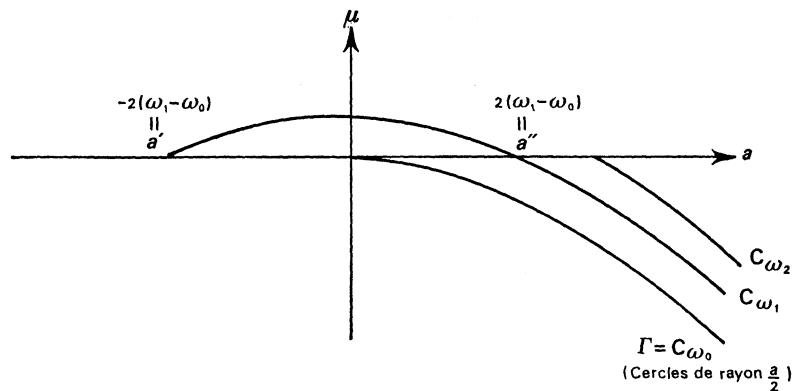


FIG. 6.3

$$\boxed{\frac{\partial b_0}{\partial a}(0,0) = -\frac{1}{2}, \quad \omega_2 < \omega_0 < \omega_1}$$

Exemple non générique

$$\begin{cases} f(\mu, a, X) = \mu + aX - X^2 \\ g_\omega(\mu, a, X) = \omega_0 - \frac{a}{2} - \omega + X \end{cases}$$



$$-1 < \frac{\partial b_0}{\partial a}(0,0) < -\frac{1}{2}, \quad \omega_2 < \omega_0 < \omega_1$$

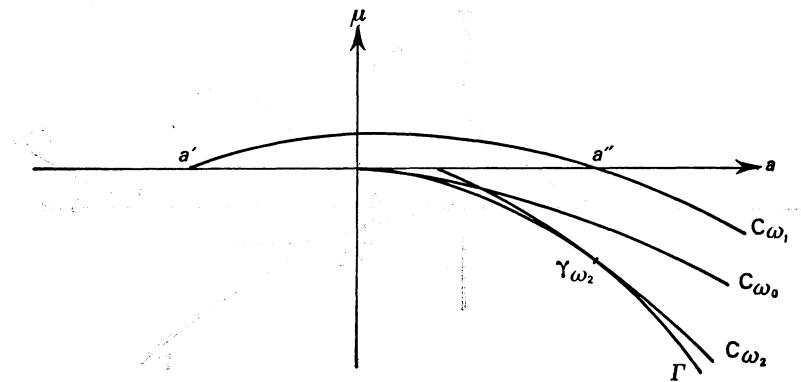


FIG. 6.5

$$\frac{\partial b_0}{\partial a}(0,0) = -1, \quad \omega_2 < \omega_0 < \omega_1$$

Exemple non générique  $\begin{cases} f(\mu, a, X) = \mu + aX - X^2 \\ g_\omega(\mu, a, X) = \omega_0 - a - \omega + X \end{cases}$

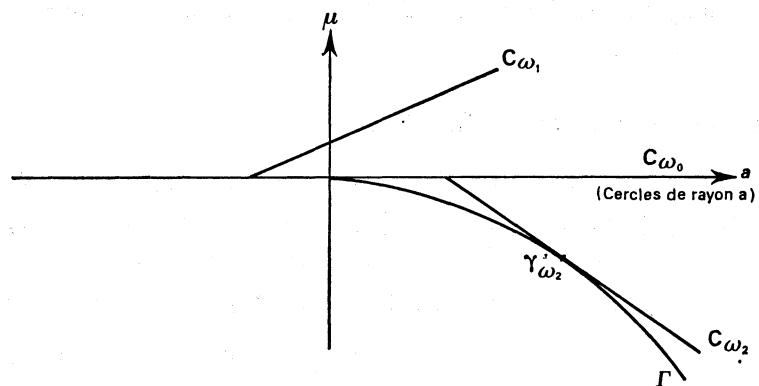
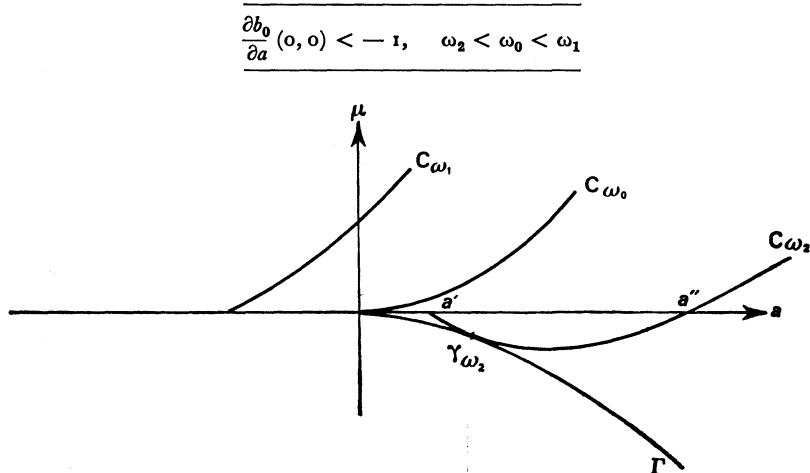


FIG. 6.6



$$b_0(0, a') = \omega_1 \quad (\text{ cercle de rayon } 0) \\ b_0(0, a'') + a'' + O(a''^2) = \omega_2 \quad (\text{ cercle de rayon } a'' + O(a''^2))$$

FIG. 6.7

Un résultat essentiel du présent article est que, pourvu que  $\omega$  satisfasse une certaine condition diophantienne et soit assez proche de  $\omega_0$  (ces conditions sont compatibles), l'ensemble  $\tilde{C}_\omega$  est une courbe lisse connexe proche de  $C_\omega$ , et correspond à des valeurs de  $(\mu, a)$  telles que  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée lisse invariante  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  proche de  $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$  sur laquelle il induise un difféomorphisme  $C^\infty$ -conjugué à la rotation  $R_\omega$  (corollaire du théorème 5).

Nous commençons par l'étude de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$ , plus difficile, et reléguons à l'appendice l'étude de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ .

#### 1.4. Systèmes de coordonnées adaptés à un $\omega$

La propriété caractéristique des difféomorphismes de la famille  $N_{\mu, a}$  est d'appliquer chaque cercle  $|z| = r$  sur un cercle  $|z| = r + \zeta$  par une rotation; la rotation  $\omega$  et la translation  $\zeta$  associées, pour  $N_{\mu, a}$ , au cercle de rayon  $r$  sont données par

$$(25) \quad \omega = g(\mu, a, r^2) = b_0(\mu, a) + b_1(\mu, a) r^2 + \dots + b_n(\mu, a) r^{2n},$$

$$(26) \quad \zeta = rf(\mu, a, r^2) = r[\mu + ar^2 + a_2(\mu, a) r^4 + \dots + a_n(\mu, a) r^{2n}].$$

Si on fixe maintenant  $\omega \neq \omega_0$  proche de  $\omega_0$  et  $(\mu, a)$  proche de  $(0, 0)$ , l'équation (25) définit au plus un cercle  $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$  proche de  $0$ , dont on note le rayon  $r(\omega, \mu, a)$  et la translation associée  $\zeta(\omega, \mu, a)$ ; avec les notations de (18) on a donc :

$$(27) \quad g_\omega(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) = 0,$$

$$(28) \quad \zeta(\omega, \mu, a) = r(\omega, \mu, a) f(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2).$$

Bien entendu, on ne s'intéresse qu'aux triplets  $(\omega, \mu, a)$  tels que  $r(\omega, \mu, a)$  soit réel, c'est-à-dire (d'après (27))

$$(29) \quad r(\omega, \mu, a)^2 = \frac{\omega - b_0(\mu, a)}{b_1(\mu, a)} + O(|\omega - \omega_0| + |\mu| + |a|)^2 \geq 0.$$

Puisque  $r(\omega, \mu_\omega, a_\omega)^2 = \rho_\omega^2 = \frac{\omega - \omega_0}{\eta_0} + O(|\omega - \omega_0|^2) \neq 0$ , ceci est toujours vérifié pour  $(\mu, a)$  assez voisin de  $\gamma_\omega$  ( $\omega > \omega_0$  si  $\eta_0 > 0$ ,  $\omega < \omega_0$  sinon). Notons que la fonction  $(\omega, \mu, a) \mapsto r(\omega, \mu, a)^2$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $(\omega_0, 0, 0)$  puisque  $\frac{\partial g_\omega}{\partial X}(0, 0, 0) = b_1(0, 0) \neq 0$ .

Afin d'étudier  $N_{\mu, a}$  et  $P_{\mu, a}$  au voisinage du cercle  $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$ , on pose

$$(30) \quad z = re^{2\pi i\theta}, \quad r = r(\omega, \mu, a) \sqrt{1 + \sigma},$$

où, par exemple,  $\sigma \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ .

Notons  $\bar{v}, \bar{\delta}, \bar{s}, \tau$  les fonctions  $C^\infty$  de  $\omega, \mu, a$  définies par

$$(31) \quad \begin{cases} f(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) = \bar{v}(\omega, \mu, a), \\ \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) r(\omega, \mu, a)^2 = \bar{\delta}(\omega, \mu, a), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) r(\omega, \mu, a)^4 = \bar{s}(\omega, \mu, a) < 0, \\ \frac{\partial g_\omega}{\partial X}(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) r(\omega, \mu, a)^2 = \tau(\omega, \mu, a) \neq 0. \end{cases}$$

Le plongement  $(\theta, \sigma) \mapsto (\Theta, \Sigma)$  (encore noté  $N_{\mu, a}$ ) de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  défini par

$$r(\omega, \mu, a) \sqrt{1 + \sigma} e^{2\pi i\theta} = N_{\mu, a}(r(\omega, \mu, a) \sqrt{1 + \sigma} e^{2\pi i\theta})$$

est donné par les formules suivantes obtenues à partir du développement de Taylor en  $X$  au point  $r(\omega, \mu, a)^2$  des fonctions  $f(\mu, a, X)$  et  $g_\omega(\mu, a, X)$  :

$$(32) \quad \begin{cases} \Theta = \theta + \omega + \tau(\omega, \mu, a) \sigma + r(\omega, \mu, a)^4 T(\omega, \mu, a, \sigma) \\ \Sigma = 2\bar{v}(\omega, \mu, a) + \bar{v}^2(\omega, \mu, a) + [1 + 2\bar{v}(\omega, \mu, a) \\ \quad + \bar{v}^2(\omega, \mu, a) + 2\bar{\delta}(\omega, \mu, a)(1 + \bar{v}(\omega, \mu, a))] \sigma \\ \quad + \{\bar{s}(\omega, \mu, a) + 2\bar{\delta}(\omega, \mu, a)\}[1 + \bar{v}(\omega, \mu, a)] + \bar{\delta}^2(\omega, \mu, a) \sigma^2 \\ \quad + r(\omega, \mu, a)^4 S(\omega, \mu, a, \sigma); \end{cases}$$

$S(\omega, \mu, a, \sigma)$  et  $T(\omega, \mu, a, \sigma)$  sont des polynômes en  $\sigma$  à coefficients  $C^\infty$  en  $(\omega, \mu, a)$ , commençant respectivement par des termes en  $\sigma^3$  et  $\sigma^2$ .

Quant à  $P_{\mu, a}$ , il définit un plongement de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  de la forme

$$(33) \quad \begin{aligned} P_{\mu, a}(\theta, \sigma) &= N_{\mu, a}(\theta, \sigma) \\ &+ (r(\omega, \mu, a)^{2n+2} u(\omega, \mu, a, \theta, \sigma), r(\omega, \mu, a)^{2n+2} v(\omega, \mu, a, \theta, \sigma)) \end{aligned}$$

où  $u, v$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\omega, \mu, a, r(\omega, \mu, a), \theta, \sigma$ ; les deux composantes du reste  $P_{\mu, a}(\theta, \sigma) - N_{\mu, a}(\theta, \sigma)$  sont donc seulement des fonctions de classe  $C^{n+1}$  des variables  $\omega, \mu, a$  (elles sont évidemment  $C^\infty$  en tous les points où  $r(\omega, \mu, a)$  ne s'annule pas).

Bien entendu, (32) et (33) définissent en fait les relèvements de  $N_{\mu, a}$  et  $P_{\mu, a}$  au revêtement universel  $\mathbf{R} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dont il est question dans la remarque qui clot le paragraphe 1.1.

Les formules (32) rendent naturelle l'étude de l'application  $\Delta_\omega : (\mathbf{R}^2, \gamma_\omega) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$  définie au voisinage de  $\gamma_\omega$  par

$$(34) \quad \begin{cases} \Delta_\omega(\mu, a) = (v(\omega, \mu, a), \varepsilon(\omega, \mu, a)) = (v, \varepsilon), \\ v = 2\bar{v}(\omega, \mu, a) + \bar{v}^2(\omega, \mu, a), \\ \varepsilon = v + 2\bar{\delta}(\omega, \mu, a)(1 + \bar{v}(\omega, \mu, a)). \end{cases}$$

En vue du paragraphe 2.3 on posera également

$$(34 \text{ bis}) \quad s = s(\omega, \mu, a) = [\bar{s}(\omega, \mu, a) + 2\bar{\delta}(\omega, \mu, a)][1 + \bar{v}(\omega, \mu, a)] + \bar{\delta}^2(\omega, \mu, a).$$

L'application  $\Delta_\omega$  se révèle être un difféomorphisme local  $C^\infty$ : elle s'écrit en effet  $\Delta_\omega = A_\omega \circ \Phi_\omega$ , où les applications

$$(35) \quad \begin{cases} \Phi_\omega(\mu, a) = (\bar{v}(\omega, \mu, a), \bar{\delta}(\omega, \mu, a)), \\ A_\omega(\bar{v}, \bar{\delta}) = (2\bar{v} + \bar{v}^2, v + 2\bar{\delta}(1 + \bar{v})), \end{cases}$$

ont respectivement pour dérivées

$$(36) \quad \begin{cases} D\Phi_\omega(\mu_\omega, a_\omega) = \begin{pmatrix} 1 + O(\rho_\omega^4) & \rho_\omega^2 + O(\rho_\omega^4) \\ O(\rho_\omega^2) & \rho_\omega^2 \frac{\eta(\mu_\omega, a_\omega)}{b_1(\mu_\omega, a_\omega)} + O(\rho_\omega^4) \end{pmatrix}, \\ DA_\omega(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où

$$(37) \quad \eta(\mu, a) = b_1(\mu, a) - 2a_2(\mu, a) \frac{\partial b_0}{\partial a}(\mu, a).$$

Puisque la dépendance de  $\Phi_\omega$  en  $\omega$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $\omega_0$ , la différence  $\left| \det D\Phi_\omega(\mu_\omega, a_\omega) - \rho_\omega^2 \frac{\eta(\mu_\omega, a_\omega)}{b_1(\mu_\omega, a_\omega)} \right|$  admet une majoration uniforme du type

(constante  $\times \rho_\omega^4$ ); si  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ ,  $\text{Det } D \Delta_\omega(\mu_\omega, a_\omega)$  est donc différent de 0 dès que  $\eta(0, 0) = \eta_0 \neq 0$ , ce qu'on a supposé.

La figure 7 donne, sous des hypothèses analogues à celles faites pour la figure 6.1  $\left( \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) > 0 \text{ et } b_1(0, 0) = 1 \right)$ , l'allure du système de coordonnées locales  $v, \varepsilon$  ainsi défini au voisinage de  $\gamma_\omega$ .

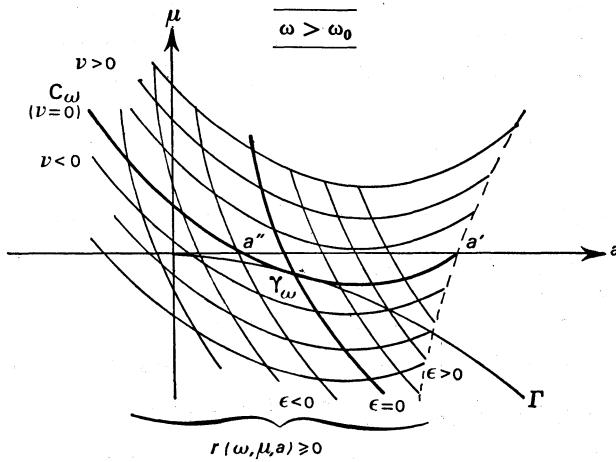


FIG. 7

Nous donnons maintenant les estimations qui, lorsque  $|v|$  et  $|\varepsilon|$  sont assez petits, font apparaître la restriction de  $P_{\mu, a}$  à l'anneau  $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$  (c'est-à-dire  $\sqrt{\frac{1}{2}} r(\omega, \mu, a) \leq |z| \leq \sqrt{\frac{3}{2}} r(\omega, \mu, a)$ ) comme perturbation d'un difféomorphisme « twist » préservant les aires de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ; il est important de remarquer que la partie de cette perturbation dépendant effectivement de la coordonnée angulaire est d'ordre  $\rho_\omega^{2n+2}$ . Plutôt que  $\rho_\omega$ , nous avons choisi comme paramètre la « distorsion »  $\tau_\omega$  de  $N_{\gamma_\omega}$  (dans les coordonnées  $\theta, \sigma$ ) au voisinage de son unique cercle invariant.

*Lemme 1.* — Si  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$  et si  $(\mu, a) = \Delta_\omega^{-1}(v, \varepsilon)$  appartient au « carré »  $\mathcal{D}_\omega$  défini par  $|v| \leq \rho_\omega^6$ ,  $|\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ , les plongements  $N_{\mu, a}$  et  $P_{\mu, a}$  de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  s'écrivent

$$(38) \quad \begin{cases} N_{\mu, a}(\theta, \sigma) = (\theta + \omega + \tau_\omega \sigma + \tau_\omega^2 A_{\omega, \mu, a}(\sigma), \sigma + \tau_\omega^2 B_{\omega, \mu, a}(\sigma)), \\ P_{\mu, a}(\theta, \sigma) = N_{\mu, a}(\theta, \sigma) + (\tau_\omega^{n+1} \alpha_{\omega, \mu, a}(\theta, \sigma), \tau_\omega^{n+1} \beta_{\omega, \mu, a}(\theta, \sigma)), \end{cases}$$

où  $\tau_\omega = \tau(\omega, \mu_\omega, a_\omega) = b_1(\mu_\omega, a_\omega) \rho_\omega^2 + O(\rho_\omega^4)$ ,  $A$  et  $B$  sont des polynômes en  $\sigma$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions  $C^\infty$  de  $\theta, \sigma$ , et où les fonctions  $A, B, \alpha, \beta$  sont bornées en norme  $C^k$  (pour tout  $k$ ) sur  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  uniformément par rapport à  $\omega, \mu, a$  dans le domaine considéré.

Enfin,  $\tau_\omega^2 A_{\omega, \mu, a}(0) = 0$ ,  $\tau_\omega^2 B_{\omega, \mu, a}(0) = v$ , et  $\tau_\omega^2 \frac{\partial B_{\omega, \mu, a}}{\partial \sigma}(0) = \varepsilon$ .

*Démonstration.* — Les conditions sur  $\nu$  et  $\varepsilon$  définissent un voisinage de  $\gamma_\omega$  dans lequel  $r(\omega, \mu, a)$  diffère peu de  $\rho_\omega$ ; plus précisément, montrons qu'il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\omega, \mu, a$ , telle que, si  $(\omega, \mu, a)$  est assez voisin de  $(\omega_0, 0, 0)$  et si  $(\nu, \varepsilon) = \Delta_\omega(\mu, a)$  vérifie  $|\nu| \leq \rho_\omega^6, |\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ , on ait

$$(39) \quad |r(\omega, \mu, a)^2 - \rho_\omega^2| \leq C\rho_\omega^4.$$

Puisque  $r(\omega, \mu, a)^2 = \rho_\omega^2 + x_1(\omega, \mu, a)(\mu - \mu_\omega) + y_1(\omega, \mu, a)(a - a_\omega)$ , avec  $x_1, y_1$  fonctions  $C^\infty$  de  $\omega, \mu, a$ , il suffit de majorer  $|\mu - \mu_\omega| + |a - a_\omega|$  en fonction de  $|\nu| + |\varepsilon|$ , c'est-à-dire de majorer  $\|\mathbf{D}\Delta_\omega(\mu, a)^{-1}\|$ . En écrivant

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mu, a, r(\omega, \mu, a)^2) = x_2(\omega, \mu, a)(\mu - \mu_\omega) + y_2(\omega, \mu, a)(a - a_\omega),$$

avec  $x_2, y_2$  fonctions  $C^\infty$  de  $\omega, \mu, a$ , on voit qu'il existe une constante  $c$  telle que  $|\det \mathbf{D}\Phi_\omega(\mu, a)| \geq \frac{\eta_0}{2b_1(0, 0)} \rho_\omega^2$  dès que  $(\omega, \mu, a)$ , assez voisin de  $(\omega_0, 0, 0)$ , vérifie  $|\mu - \mu_\omega| + |a - a_\omega| \leq c\rho_\omega^2$  et  $|\nu| \leq \rho_\omega^6, |\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ .

Mais alors, sous cette hypothèse, il existe une constante  $D$  telle que

$$|\mu - \mu_\omega| + \rho_\omega^2 |a - a_\omega| \leq D(|\nu| + |\varepsilon|);$$

puisque  $\mathcal{D}_\omega = \Delta_\omega^{-1}([- \rho_\omega^6, \rho_\omega^6]^2)$  est connexe, on en déduit que  $\mathcal{D}_\omega$  est contenu (pour  $\omega$  assez proche de  $\omega_0$ ) dans le domaine  $|\mu - \mu_\omega| + \rho_\omega^2 |a - a_\omega| \leq 2D\rho_\omega^6$ , d'où suit (39).

En particulier, le « carré »  $\mathcal{D}_\omega$  est tout entier situé dans le quart de plan  $\mu < 0, a > 0$ .

On déduit de (39) une estimation analogue pour  $\tau(\omega, \mu, a)$ : il existe une constante  $F$  indépendante de  $\omega, \mu, a$  telle que, si  $(\omega, \mu, a)$  est assez voisin de  $(\omega_0, 0, 0)$  et si  $|\nu| \leq \rho_\omega^6, |\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ , on ait

$$(40) \quad |\tau(\omega, \mu, a) - \tau_\omega| \leq F\rho_\omega^4,$$

ainsi que

$$(41) \quad |\tau_\omega - b_1(\mu_\omega, a_\omega) \rho_\omega^2| \leq F\rho_\omega^4$$

(on suppose bien entendu que  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$  pour que  $|b_1(\mu_\omega, a_\omega)|$  soit, par exemple, compris entre  $\frac{1}{2} |b_1(0, 0)|$  et  $\frac{2}{3} |b_1(0, 0)|$ ).

La démonstration du lemme 1 est alors évidente à partir des formules (32), (33), (34), (34 bis), qui font apparaître  $P_{\mu, a}$  comme une perturbation du plongement

$$(42) \quad (\theta, \sigma) \mapsto (\theta + \omega + \tau(\omega, \mu, a) \sigma, \nu + (\iota + \varepsilon) \sigma + s\sigma^2).$$

## 2.1. Courbes fermées invariantes de $P_{\mu, a}$ lorsque $(\mu, a)$ est voisin de $\gamma_\omega$

Nous faisons dans ce qui suit les hypothèses du lemme 1. Le plongement  $N_{\mu, a}$  applique le cercle  $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$  d'équation  $\sigma = 0$  sur le cercle d'équation  $\sigma = \tau_\omega^2 B_{\omega, \mu, a}(0) = \nu$  par la rotation  $R_\omega$ .

Nous allons montrer que la perturbation  $P_{\mu, a}$  de  $N_{\mu, a}$  possède une propriété analogue, à condition que  $\omega$  soit « suffisamment » mal approché par les rationnels (dans un sens précisé plus loin).

Il sera commode de faire un ultime changement de coordonnées : le difféomorphisme (dépendant de  $(\omega, \mu, a)$ )

$$(43) \quad (\theta, \sigma) \mapsto (\theta, \rho = \sigma + \tau_\omega A_{\omega, \mu, a}(\sigma) + \tau_\omega^n \alpha_{\omega, \mu, a}(\theta, \sigma))$$

est bien défini sur un voisinage de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  pour  $\omega$  assez proche de  $\omega_0$ ; il transforme  $P_{\mu, a}$  en un plongement de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  de la forme

$$(44) \quad P_{\mu, a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a}(\rho) + \tau_\omega^n \zeta_{\omega, \mu, a}(\theta, \rho)).$$

Si  $|\nu| \leq \rho_\omega^6$ ,  $|\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ ,  $r(\omega, \mu, a)$  ne s'annule pas (voir (39)) : on suppose  $\omega \neq \omega_0$  proche de  $\omega_0$ ; le polynôme  $\Pi_{\omega, \mu, a}$  et la fonction  $C^\infty \zeta_{\omega, \mu, a}$  ont donc une dépendance  $C^\infty$  en  $\mu, a$  pour  $\omega + \omega_0$  fixé. De plus,  $\Pi_{\omega, \mu, a}$  et  $\zeta_{\omega, \mu, a}$  sont bornés en norme  $C^k$  (pour tout  $k$ ) sur  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  uniformément par rapport à  $\omega, \mu, a$  dans le domaine considéré.

Nous considérerons  $P_{\mu, a}$  comme une perturbation de

$$(45) \quad \begin{cases} N_{\mu, a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a}(\rho)) \\ \quad = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \nu' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \dots), \\ \text{où } \nu' = \nu(1 + O(\tau_\omega)), \quad 1 + \varepsilon' = (1 + \varepsilon)(1 + \nu O(\tau_\omega)), \\ \quad s' = s(1 + O(\tau_\omega)) \end{cases}$$

(il s'agit du transformé de  $N_{\mu, a}$  par  $(\theta, \sigma) \mapsto (\theta, \rho = \sigma + \tau_\omega A_{\omega, \mu, a}(\sigma))$ , tronqué au degré  $n$ ).

Le théorème suivant est analogue au « théorème de la courbe translatée » de Rüssmann [15] à ceci près que  $N_{\mu, a}$  est non conservatif, que la taille de la perturbation  $\tau_\omega^n \zeta_{\omega, \mu, a}$  est liée à celle de la « distortion » et de la « constante diophantienne », et qu'on s'intéresse à la dépendance différentiable en  $\mu, a$  de la translation.

La question de la taille de la perturbation se rencontre déjà dans le problème de la stabilité des points fixes elliptiques dans le cas conservatif, mais non la dépendance différentiable en des paramètres, fondamentale ici.

*Théorème 1.* — Fixons  $C > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Soit  $\omega \neq \omega_0$ , proche de  $\omega_0$ , tel que

- 1)  $\frac{1}{\tau_{\omega_0}} (\omega - \omega_0) > 0$ ,
- 2) pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  ( $(p, q) = 1$ ), on ait  $\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C |\tau_\omega|}{|q|^{2+\beta}}$ .

Il existe  $\varepsilon(C, \beta) > 0$  tel que, si  $n \geq 11$ ,  $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$ , et  $|\omega - \omega_0| \leq \varepsilon(C, \beta)$ , il existe  $\bar{\Psi}_{\omega, \mu, a} \in C^\infty \left( \mathbf{T}^1, \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$ ,  $\bar{\lambda}_{\omega, \mu, a} \in \mathbf{R}$ ,  $h_{\omega, \mu, a} \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$  ayant les propriétés suivantes :

- 1) la courbe fermée  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  d'équation  $\rho = \bar{\Psi}_{\omega, \mu, a}(\theta)$  a pour image par  $P_{\mu, a}$  la courbe « translatée » d'équation  $\rho = \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a} + \bar{\Psi}_{\omega, \mu, a}(\theta)$ ,
- 2) la restriction de  $P_{\mu, a}$  à  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  est conjuguée par  $h_{\omega, \mu, a}$  à la rotation  $R_\omega : \theta \mapsto \theta + \omega$ , ce qui signifie que, pour tout  $\theta \in \mathbf{T}^1$ ,  $\theta + \omega + \tau_\omega \bar{\Psi}_{\omega, \mu, a}(\theta) = h_{\omega, \mu, a}^{-1} \circ R_\omega \circ h_{\omega, \mu, a}(\theta)$ ,
- 3) il existe un entier  $R$  et, pour tout  $m$ , une constante  $C_m$  indépendante de  $\omega, \mu, a$  vérifiant les hypothèses, tels que

$$(85) \quad \tau_\omega |\bar{\lambda}_{\omega, \mu, a} - \nu'(\omega, \mu, a)| + \|h_{\omega, \mu, a} - \text{Id}\|_m \leq C_m \tau_\omega^{n-3} \|\zeta_{\omega, \mu, a}\|_{m+R},$$

- 4) pour  $\omega$  fixé, l'application

$$(\mu, a) \mapsto (\bar{\Psi}_{\omega, \mu, a}, \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}, h_{\omega, \mu, a})$$

est de classe  $C^\infty$  sur son domaine de définition ; considérée (via  $\Delta_\omega^{-1}$ ) comme fonction de  $(\nu, \varepsilon)$  elle vérifie les majorations suivantes, où  $S$  est un entier et, pour tout  $m$ ,  $C_m$  une constante indépendante de  $\omega, \mu, a$  vérifiant les hypothèses :

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_\omega \left| \frac{\partial \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu} - \frac{\partial \nu'}{\partial \nu}(\omega, \mu, a) \right| + \left\| \frac{\partial h_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu} \right\|_m \\ \leq C_m \left( \tau_\omega^{n-12} \|\zeta_{\omega, \mu, a}\|_{m+S} + \tau_\omega^{n-5} \left\| \frac{\partial \zeta_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu} \right\|_{m+S} \right) \end{array} \right.$$

(les normes  $\|\cdot\|_m$  se rapportent aux variables  $\theta, \rho$ ).

On a des majorations analogues pour les dérivées par rapport à  $\varepsilon$ .

*Corollaire 1.* — Sous les hypothèses du théorème 1, si  $n \geq 14$  et si  $|\omega - \omega_0|$  est assez petit, il existe une fonction  $t_\omega : [-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6] \rightarrow [-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6]$  de classe  $C^\infty$  telle que, si  $(\nu, \varepsilon) = \Delta_\omega(\mu, a)$  vérifie  $|\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ ,  $\nu = t_\omega(\varepsilon)$ ,  $P_{\mu, a}$  laisse invariante la courbe  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  et y induise un difféomorphisme conjugué à la rotation  $R_\omega$ . De plus l'intersection avec  $\mathcal{V}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}_\omega$  est exactement l'intersection avec  $\mathcal{V}$  du graphe de  $t_\omega$ .

#### Démonstration du théorème 1

Nous suivrons la démonstration de Herman [15] du théorème de Rüssmann : basée sur la version du théorème des fonctions implicites de Nash-Moser donnée par Hamilton ([13], [15]) elle fournit automatiquement la dépendance  $C^\infty$  des paramètres. Le problème principal est d'évaluer la taille des perturbations auxquelles s'applique la méthode.

Pour faciliter la lecture de ce qui suit, nous omettrons temporairement les indices  $\omega, \mu, a$ ; nous noterons donc

$$(46) \quad \begin{cases} P(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau\rho, \rho + \tau^2 \Pi(\rho) + \tau^n \zeta(\theta, \rho)), \\ N(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau\rho, \rho + \tau^2 \Pi(\rho)). \end{cases}$$

Sans changer  $\zeta$  sur  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ , on peut supposer que  $\zeta$  est définie sur  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  tout entier et  $\mathbf{Z}$ -périodique en  $\rho$ , c'est-à-dire  $\zeta \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ . On peut de même supposer que  $\Pi \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$  (fonction indépendante de  $\theta$ ).

On cherche  $\bar{\lambda}, \bar{\psi}, h$ , respectivement proches de  $0, 0$ , Identité, tels que

$$(47) \quad \begin{cases} f(\theta) \equiv \theta + \omega + \tau\bar{\psi}(\theta) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta), \\ \bar{\psi}(\theta) + \tau^2 \Pi(\bar{\psi}(\theta)) + \tau^n \zeta(\theta, \bar{\psi}(\theta)) = \bar{\lambda} + \bar{\psi}(f(\theta)). \end{cases}$$

Posons, ce qui revient à faire le changement de variables  $r = \tau\rho$ ,

$$(48) \quad \begin{cases} \psi(\theta) = \tau\bar{\psi}(\theta), \\ \lambda = \tau\bar{\lambda}. \end{cases}$$

Les équations deviennent

$$(49) \quad \begin{cases} f(\theta) \equiv \theta + \omega + \psi(\theta) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta), \\ \psi(\theta) + \tau^3 \Pi\left(\frac{1}{\tau} \psi(\theta)\right) + \tau^{n+1} \zeta\left(\theta, \frac{1}{\tau} \psi(\theta)\right) = \lambda + \psi(f(\theta)). \end{cases}$$

La deuxième s'écrit encore

$$(50) \quad F(\tau^2 \Pi + \tau^n \zeta, \lambda, \psi) = 0,$$

où l'application  $F : C^k(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{R}) \rightarrow C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$  est définie, pour tout  $k$ , par

$$(51) \quad F(\varphi, \lambda, \psi)(\theta) = \psi(\theta) - \psi(f(\theta)) - \lambda + \tau\varphi\left(\theta, \frac{1}{\tau} \psi(\theta)\right).$$

On notera  $G : C^k(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^k(\mathbf{T}^1) \rightarrow C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$  l'application définie, pour tout  $k$ , par

$$(52) \quad \begin{cases} G(\varphi, \lambda, h) = F(\varphi, \lambda, \psi), \\ \psi(\theta) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta) - \theta - \omega. \end{cases}$$

On se limitera bien sûr à un voisinage de l'identité dans  $\text{Diff}_+^k(\mathbf{T}^1)$ , qui sera identifié à un voisinage de  $0$  dans  $C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$  par l'application  $h \mapsto h - \text{Id}$  (après choix convenable d'un relèvement de  $h$  en un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$ ).

L'application  $\mathcal{G} : C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$  définie par

$$(53) \quad \mathcal{G}(\varphi, \lambda, h) = (\varphi, G(\varphi, \lambda, h))$$

est une « bonne » application de classe  $C^2$  (voir [15]) qui vérifie

$$(54) \quad \mathcal{G}(\tau^2 \Pi, \tau^2 \Pi(0), \text{Identité}) = (\tau^2 \Pi, 0).$$

Il s'agit de prouver que c'est un difféomorphisme d'un voisinage de  $(\tau^2 \Pi, \tau^2 \Pi(0), \text{Identité})$  sur un voisinage de  $(\tau^2 \Pi, 0)$  d'une taille suffisante pour qu'il contienne les couples de la forme  $(\tau^2 \Pi + \tau^n \zeta, 0)$  dès que  $\tau$  est assez petit.

La démonstration de Hamilton [13] montre que cette taille dépend de la norme « tame » dans une certaine topologie  $C^k$  ( $k$  fini) de  $D\mathcal{G}$ ,  $D^2\mathcal{G}$ ,  $(D\mathcal{G})^{-1}$ .

*Lemme 2.* — *Il existe un nombre réel positif  $\alpha$ , un entier positif  $\ell$  et, pour tout  $m$ , une constante  $C_m$  indépendante de  $\tau$  (et de  $\omega$  vérifiant les hypothèses du théorème 1), tels que les estimations suivantes soient vérifiées dès que*

$$\begin{aligned}
 & \|\varphi\|_\ell \leq \alpha\tau, \quad |\lambda| \leq \alpha\tau, \quad \|h - \text{Id}\|_\ell \leq \alpha\tau, \\
 & \|\Delta\varphi\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta'\varphi\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta h\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta' h\|_2 \leq 1, \\
 & \|\Delta\eta\|_1 \leq 1 : \\
 (55) \quad & \|\mathcal{D}\mathcal{G}(\varphi, \lambda, h)(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h)\|_m \\
 & \leq C_m(\|\varphi\|_{m+1} + \|h - \text{Id}\|_{m+2} + \|\Delta\varphi\|_m + |\lambda| + \|\Delta h\|_m + 1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \|\mathcal{D}^2\mathcal{G}(\varphi, \lambda, h)[(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h), (\Delta'\varphi, \Delta'\lambda, \Delta'h)]\|_m \\ & \leq C_m \left[ \frac{1}{\tau} (\|\varphi\|_{m+2} + \|h - \text{Id}\|_{m+3}) + \|\Delta\varphi\|_{m+1} + \|\Delta'\varphi\|_{m+1} \right. \\ & \quad \left. + \|\Delta h\|_{m+1} + \|\Delta' h\|_{m+1} + 1 \right], \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (57) \quad & \|\mathcal{D}\mathcal{G}(\varphi, \lambda, h)^{-1}(\Delta\varphi, \Delta\eta)\|_m \\
 & \leq \frac{C_m}{\tau^3} [\|\varphi\|_{m+\ell} + |\lambda| + \|h - \text{Id}\|_{m+\ell} + \|\Delta\varphi\|_{m+\ell} + \|\Delta\eta\|_{m+\ell} + 1].
 \end{aligned}$$

Ces inégalités expriment que  $D\mathcal{G}$ ,  $D^2\mathcal{G}$ ,  $(D\mathcal{G})^{-1}$  sont de « bonnes » applications, ce qui est montré dans [15]. Notre seul problème est de suivre la dépendance en  $\tau$  des constantes lors des diverses estimations; c'est pourquoi nous explicitons lesdites applications.

L'application  $K : h \mapsto \psi = h^{-1} \circ R_\omega \circ h - R_\omega \equiv K(h)$  est une bonne application de classe  $C^\infty$  d'un voisinage de l'identité dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$  (identifié par  $h \mapsto h - \text{Id}$  à un voisinage de 0 dans  $C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ ) à valeurs dans  $C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ ;  $h, \Delta h, \Delta' h$  étant donnés, nous noterons  $\psi = K(h)$ ,  $\Delta\psi = DK(h) \Delta h$ ,  $\Delta'\psi = DK(h) \Delta' h$ .

Avec ces notations, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & \Delta\psi = (Dh^{-1} \circ R_\omega \circ h)[\Delta h - \Delta h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h], \\
 (59) \quad & \left\{ \begin{aligned} & D^2 K(h)(\Delta h, \Delta' h) \\ & = (D^2 h^{-1} \circ R_\omega \circ h)(\Delta h - \Delta h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h)(\Delta' h - \Delta' h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h) \\ & - (Dh^{-1} \circ R_\omega \circ h)^2 (D \Delta h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h)(\Delta' h - \Delta' h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h) \\ & - (Dh^{-1} \circ R_\omega \circ h)^2 (D \Delta' h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h)(\Delta h - \Delta h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h), \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} D\mathcal{G}(\varphi, \lambda, h)(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h) = (\Delta\varphi, DG(\varphi, \lambda, h)(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h)), \\ DG(\varphi, \lambda, h)(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h) = DF(\varphi, \lambda, \psi)(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta\psi) \\ \quad = \tau \Delta\varphi \left( \cdot, \frac{1}{\tau} \psi \right) - \Delta\lambda + X \Delta\psi - \Delta\psi \circ f, \quad \text{où} \\ X(\theta) = 1 - D\psi(f(\theta)) + \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \left( \theta, \frac{1}{\tau} \psi(\theta) \right), \quad f(\theta) = \theta + \omega + \psi(\theta) \end{array} \right.$$

(l'interprétation de  $X$  est donnée dans la formule (96)).

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2 \mathcal{G}(\varphi, \lambda, h)[(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h), (\Delta' \varphi, \Delta' \lambda, \Delta' h)] \\ \quad = (0, D^2 G(\varphi, \lambda, h)[(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h), (\Delta' \varphi, \Delta' \lambda, \Delta' h)]), \\ D^2 G(\varphi, \lambda, h)[(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h), (\Delta' \varphi, \Delta' \lambda, \Delta' h)] \\ \quad = D^2 F(\varphi, \lambda, \psi)[(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta\psi), (\Delta' \varphi, \Delta' \lambda, \Delta' \psi)] \\ \quad \quad + \frac{\partial F}{\partial\psi}(\varphi, \lambda, \psi)[(D^2 K(h)(\Delta h, \Delta' h))] \\ \quad = \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial\varphi} \left( \cdot, \frac{1}{\tau} \psi \right) \cdot \Delta' \psi + \frac{\partial(\Delta' \varphi)}{\partial\varphi} \left( \cdot, \frac{1}{\tau} \psi \right) \cdot \Delta\psi + Y \cdot \Delta\psi \cdot \Delta' \psi \\ \quad \quad - [(D \Delta\psi) \circ f] \cdot \Delta' \psi - [(D \Delta' \psi) \circ f] \cdot \Delta\psi \\ \quad \quad + \frac{\partial F}{\partial\psi}(\varphi, \lambda, \psi)[D^2 K(h)(\Delta h, \Delta' h)], \quad \text{où} \\ Y(\theta) = - D^2 \psi(f(\theta)) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\varphi^2} \left( \theta, \frac{1}{\tau} \psi(\theta) \right), \quad f(\theta) = \theta + \omega + \psi(\theta). \end{array} \right.$$

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} (D\mathcal{G}(\varphi, \lambda, h))^{-1}(\Delta\varphi, \Delta\eta) = (\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h), \quad \text{où} \\ (\Delta\lambda, \Delta h) = \left( \frac{\partial G}{\partial(\lambda, h)}(\varphi, \lambda, h) \right)^{-1} \left( \Delta\eta - \tau \Delta\varphi \left( \cdot, \frac{1}{\tau} \psi \right) \right). \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer le lemme 2 à partir des formules ci-dessus par application répétée des inégalités qui expriment que la composition, le passage à l'inverse et la multiplication sont de « bonnes » (= tame) applications au sens de Hamilton ([13], [15]), à savoir

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|f \circ g\|_m \leq C_m(\|f\|_m \cdot \|g\|_1^m + \|f\|_1 \cdot \|g\|_m + \|f\|_0), \\ \|h^{-1} - \text{Id}\|_m \leq C_m(\|h - \text{Id}\|_m + 1) \quad \text{si } \|h - \text{Id}\|_1 \leq 1, \\ \|f \cdot g\|_m \leq C_m(\|f\|_m \cdot \|g\|_0 + \|f\|_0 \cdot \|g\|_m); \end{array} \right.$$

ces dernières se démontrent par récurrence en utilisant les inégalités de convexité de Hadamard ([15]).

Dans ce qui suit,  $C_m$  désigne une constante dépendant de  $m$  et indépendante de  $\tau$ , mais pouvant changer d'une formule à l'autre (il suffira à la fin de prendre la plus grande du nombre fini ainsi écrit).

Tout d'abord, puisque  $K$  ne fait pas intervenir  $\tau$ , les constantes intervenant dans les majorations « tame » de  $K$ ,  $DK$ ,  $D^2 K$  sont indépendantes de  $\tau$ . Plus précisément,

$$(64) \quad \begin{cases} \text{si } \|h - \text{Id}\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta h\|_1 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|\Delta \psi\|_m \leq C_m(\|h - \text{Id}\|_{m+1} + \|\Delta h\|_m + 1), \end{cases}$$

$$(65) \quad \text{si } \|h - \text{Id}\|_2 \leq 1, \quad \text{on a } \|\psi\|_m \leq C_m \|h - \text{Id}\|_{m+1}.$$

On obtient (65) à partir de (64) en utilisant le théorème 4 de [13]. De même,

$$(66) \quad \begin{cases} \text{si } \|h - \text{Id}\|_3 \leq 1, \quad \|\Delta h\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta' h\|_2 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|D^2 K(h)(\Delta h, \Delta' h)\|_m \\ \quad \leq C_m(\|h - \text{Id}\|_{m+2} + \|\Delta h\|_{m+1} + \|\Delta' h\|_{m+1} + 1). \end{cases}$$

Pour majorer  $DF$  et  $D^2 F$ , on commence par majorer  $X$  et  $Y$  définis dans les formules (60), (61); on trouve que

$$(67) \quad \begin{cases} \text{si } \|\varphi\|_2 \leq \tau, \quad \|\psi\|_1 \leq \tau, \quad \|\psi\|_2 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|X\|_m \leq C_m(\|\varphi\|_{m+1} + \|\psi\|_{m+1} + 1), \quad \text{et} \end{cases}$$

$$(68) \quad \begin{cases} \text{si } \|\varphi\|_3 \leq \tau, \quad \|\psi\|_1 \leq \tau, \quad \|\psi\|_3 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|Y\|_m \leq C_m \left[ \frac{1}{\tau} (\|\varphi\|_{m+2} + \|\psi\|_m) + \|\psi\|_{m+2} + 1 \right], \end{cases}$$

d'où on déduit

$$(69) \quad \begin{cases} \text{si } \|\varphi\|_2 \leq \tau, \quad \|\psi\|_1 \leq \tau, \quad \|\psi\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta \varphi\|_1 \leq 1, \quad \|\Delta \psi\|_1 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|DF(\varphi, \lambda, \psi)(\Delta \varphi, \Delta \lambda, \Delta \psi)\|_m \\ \quad \leq C_m(\|\varphi\|_{m+1} + \|\psi\|_{m+1} + \|\Delta \varphi\|_m + \|\Delta \lambda\| + \|\Delta \psi\|_m + 1), \end{cases}$$

$$(70) \quad \begin{cases} \text{si } \|\varphi\|_3 \leq \tau, \quad \|\psi\|_1 \leq \tau, \quad \|\psi\|_3 \leq 1, \quad \|\Delta \varphi\|_2 \leq 1, \\ \quad \|\Delta' \varphi\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta \psi\|_2 \leq 1, \quad \|\Delta' \psi\|_2 \leq 1, \quad \text{on a} \\ \quad \|D^2 F(\varphi, \lambda, \psi)[(\Delta \varphi, \Delta \lambda, \Delta \psi), (\Delta' \varphi, \Delta' \lambda, \Delta' \psi)]\|_m \\ \quad \leq C_m \left[ \frac{1}{\tau} (\|\varphi\|_{m+2} + \|\psi\|_m) + \|\psi\|_{m+2} + \|\Delta \varphi\|_{m+1} + \|\Delta' \varphi\|_{m+1} \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \|\Delta \psi\|_{m+1} + \|\Delta' \psi\|_{m+1} + 1 \right]. \end{cases}$$

On voit facilement que (64), (65), (66), (69), (70) impliquent (55) et (56) (avec  $\ell = 4$ ).

Il reste à étudier  $\left[ \frac{\partial G}{\partial(\lambda, h)}(\varphi, \lambda, h) \right]^{-1}$  pour qui on suit les calculs de [15]; les deux seules différences concernent :

1<sup>o</sup> la présence de  $\tau$  dans l'expression de  $X$ , qui ne fait pas problème à cause de la majoration (67);

2<sup>o</sup> la présence de  $\tau$  dans la constante de la condition diophantienne sur  $\omega$ , qui, elle, intervient inéluctablement chaque fois qu'on doit résoudre une équation aux différences; on en déduit que, si on note

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta\lambda, \Delta h) = \left[ \frac{\partial G}{\partial(\lambda, h)} (\varphi, \lambda, h) \right]^{-1} (\Delta\eta), \\ \text{il existe un entier } \ell, \text{ un nombre réel positif } \alpha, \text{ et pour tout } m \text{ un nombre} \\ \text{réel positif } C_m \text{ tels que si } \|\varphi\|_\ell \leq \alpha\tau, \quad \|h - \text{Id}\|_\ell \leq \alpha\tau, \quad |\lambda| \leq \alpha\tau, \\ \|\Delta\eta\|_1 \leq 1, \quad \text{on ait} \\ |\Delta\lambda| + \|\Delta h\|_m \\ \leq \frac{C_m}{\tau} [\|\varphi\|_{m+\ell} + |\lambda| + \|h - \text{Id}\|_{m+\ell} + \|\Delta\eta\|_{m+\ell} + 1]. \end{array} \right.$$

Quitte à remplacer  $\ell$  par  $\ell + 1$  à cause de la perte d'une dérivée dans la majoration lipschitzienne (65), on déduit (57) de (62) et (71), ce qui termine la démonstration du lemme 2.

Afin d'exploiter ce lemme, nous utiliserons les notations suivantes :

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1), \quad F = C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R}), \\ x_0 = (\tau^2 \Pi, \tau^2 \Pi(o), \text{Id}) \in E, \quad y_0 = (\tau^2 \Pi, o) \in F, \\ x = (\varphi, \lambda, h) \in E, \quad y = (\varphi, \eta) \in F, \\ \|x\|_m = \|\varphi\|_m + |\lambda| + \|h - \text{Id}\|_m, \quad \|y\|_m = \|\varphi\|_m + \|\eta\|_m. \end{array} \right.$$

Rappelons que  $\mathcal{G}(x_0) = y_0$ .

On déduit du lemme 2, après homogénéisation et modification des constantes  $C_m$  (comparer au théorème 3 de [13]), que  $\mathcal{G}: E \rightarrow F$  vérifie

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|D\mathcal{G}(x) u\|_m \leq C_m (\|x\|_{m+2} \|u\|_2 + \|u\|_m) \\ \quad \text{(ici } \|u\|_2 \text{ peut être remplacé par } \|u\|_1\text{),} \\ \|D^2 \mathcal{G}(x)(u, v)\|_m \\ \leq \frac{C_m}{\tau} (\|x\|_{m+3} \|u\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_{m+1} \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_{m+1}), \\ \|D\mathcal{G}(x)^{-1} w\|_m \leq \frac{C_m}{\tau^3} (\|x\|_{m+\ell} \|w\|_1 + \|w\|_{m+\ell}) \\ \quad \text{dès que } \|x\|_\ell \leq \alpha\tau. \end{array} \right.$$

Puisque  $\Pi \equiv \Pi_{\omega, \mu, \alpha}$  est borné en norme  $C^\ell$  sur  $\mathbf{T}^2$  uniformément par rapport à  $\omega, \mu, \alpha$  (pourvu que  $\omega$  soit proche de  $\omega_0$ ,  $|\nu| \leq \rho_\omega^6$  et  $|\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ ),  $\|x_0\|_\ell < \frac{\alpha}{2}\tau$  dès que  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ , ce que nous supposerons. Les inégalités (73) sont donc valables pour les  $x \in E$  tels que  $\|x - x_0\|_\ell \leq \frac{\alpha}{2}\tau$ .

Avec les inégalités (73), la démonstration de Hamilton montre seulement que  $\mathcal{G}$

est un « bon » difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $y_0$  dont la taille est exponentiellement petite en  $\tau$  (voir [13], lemmes 1 et 2), ce qui ne lui permet pas de contenir les couples  $(\tau^2 \Pi + \tau^n \zeta, 0)$  qui nous intéressent. Heureusement, une astuce due à Michel Herman va nous permettre d'améliorer cette conclusion : au lieu d'appliquer le théorème de Hamilton à  $\mathcal{G}$ , on l'applique à

$$(74) \quad \mathcal{H}(x) = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \frac{1}{\tau^p} [\mathcal{G}(x_0 + \tau^p x) - \mathcal{G}(x_0)],$$

où  $p$  est un entier que l'on choisira ultérieurement (noter que  $\mathcal{H} : E \rightarrow E$ ).

On déduit de la formule de Taylor les formules :

$$(75) \quad \begin{cases} \mathcal{H}(x) = x + \tau^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \int_0^1 D^2 \mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)(x, x) dt, \\ D\mathcal{H}(x) u = u + \tau^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \int_0^1 D^2 \mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)(u, x) dt, \\ D^2 \mathcal{H}(x)(u, v) = \tau^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} D^2 \mathcal{G}(x_0 + \tau^p x)(u, v), \\ D\mathcal{H}(x)^{-1}(w) = w + \tau^p \int_0^1 D(D\mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0) w)(x) dt; \end{cases}$$

d'autre part,

$$(76) \quad \begin{cases} D(D\mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0) w)(x) = - D\mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)^{-1} D^2 \mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x) \\ \quad (D\mathcal{G}(x_0 + t\tau^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0) w, x). \end{cases}$$

De (73), (75), (76) découlent les propriétés suivantes de  $\mathcal{H}$  (les constantes  $D_m$  dépendent de  $m$  mais non de  $\tau$ ) :

$$(77) \quad \begin{cases} \|D\mathcal{H}(x) u\|_m \leq D_m \tau^{p-4} (\|x\|_{m+\ell+3} \|u\|_2 + \|u\|_{m+\ell+1}), \\ \|D^2 \mathcal{H}(x)(u, v)\|_m \leq D_m \tau^{p-4} (\|x\|_{m+\ell+3} \|u\|_2 \|v\|_2 \\ \quad + \|u\|_{m+\ell+1} \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_{m+\ell+1}), \\ \|D\mathcal{H}(x)^{-1} w\|_m \leq D_m \tau^{p-7} (\|x\|_{m+\ell+1} \|w\|_{\ell+2} + \|w\|_{m+\ell+1}) \\ \quad \text{dès que } \|x\|_{\ell+2} \leq 1 \text{ (ne pas oublier que } \ell \text{ est certainement supérieur} \\ \quad \text{à } 2\text{).} \end{cases}$$

Si  $p \geq 7$ ,  $D\mathcal{H}$ ,  $D^2 \mathcal{H}$ , et  $D\mathcal{H}^{-1}$  vérifient donc, pour  $\|x\|_{\ell+2} \leq 1$ , des estimations « tame » avec des constantes *indépendantes de  $\tau$* ;  $\mathcal{H}$  est donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 de la forme  $\|z\|_L \leq \delta$ , où  $\delta$  est *indépendant de  $\tau$* . Revenant en arrière, on constate que  $\mathcal{G}$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $y_0$  de la forme  $\|y - y_0\|_{L+\ell} \leq \delta' \tau^{p+3}$ . Si  $p = 7$  et  $n \geq 11$ , un tel voisinage contient les couples  $(\tau^2 \Pi + \tau^n \zeta, 0)$  qui nous occupent dès que  $\tau$  est assez petit. (Se rappeler que  $\|\zeta\|_{L+\ell}$  est borné indépendamment de  $\omega, \mu, a$  pourvu que  $\omega$  soit proche de  $\omega_0$ ,  $|\nu| \leq \rho_\omega^6$ ,  $|\varepsilon| \leq \rho_\omega^6$ ).

La première partie du théorème 1 est ainsi démontrée; en ce qui concerne la dépendance  $C^\infty$  en  $(\mu, a)$  à  $\omega$  fixé, c'est une conséquence directe du théorème de Hamilton : il est en effet évident que  $\mathcal{G}$  est une « bonne » application  $C^\infty$  (noter qu'on n'a plus à

s'inquiéter de la dépendance en  $\tau$  des constantes intervenant dans les estimations « tame » de  $D^3 \mathcal{G}$ ,  $D^4 \mathcal{G}$ , etc.). Quant aux estimations lipschitziennes, nous les démontrerons en même temps que le corollaire 1.

La figure 8 résume schématiquement notre connaissance de l'application  $\mathcal{G}$  :

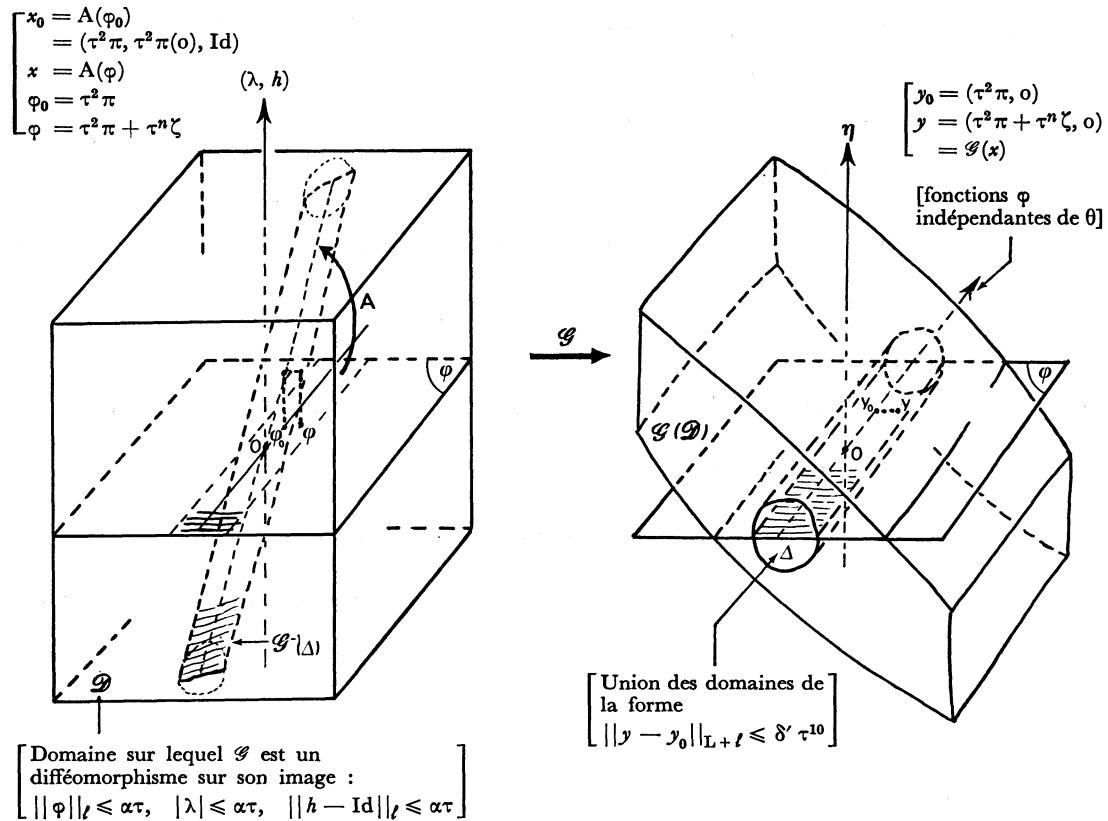


FIG. 8

*Estimations lipschitziennes et démonstration du corollaire 1.* — La restriction de  $\mathcal{G}$  aux couples de la forme  $(\tau_\omega^2 \Pi + \tau_\omega^n \zeta, o)$  définit une « bonne » application  $C^\infty$   $\varphi \mapsto \mathcal{A}(\varphi) = (\lambda, h)$  telle que  $G(\varphi, \mathcal{A}(\varphi)) \equiv o$  (c'est-à-dire  $\mathcal{G}^{-1}(\varphi, o) = (\varphi, \mathcal{A}(\varphi))$ ).

Le couple  $(\bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}, h_{\omega, \mu, a})$  dont le théorème 1 affirme l'existence est défini par

$$(78) \quad (\tau_\omega \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}, h_{\omega, \mu, a}) = \mathcal{A}(\tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a} + \tau_\omega^n \zeta_{\omega, \mu, a}).$$

Nous noterons  $\bar{\Lambda}_\omega$  et  $H_\omega$  les applications  $C^\infty$  définies sur  $[-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6]^2$  par

$$(79) \quad \begin{cases} \bar{\Lambda}_\omega(v, \varepsilon) = \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}, H_\omega(v, \varepsilon) = h_{\omega, \mu, a}, & \text{où} \\ (\mu, a) = \Delta_\omega^{-1}(v, \varepsilon). \end{cases}$$

Si  $P_{\mu, a}$  est remplacé par  $N_{\mu, a}$  défini en (45) (ce qui revient à faire  $\zeta \equiv 0$ ) les applications  $\bar{\Lambda}_\omega^0$  et  $H_\omega^0$  correspondantes sont données par

$$(80) \quad \begin{cases} \bar{\Lambda}_\omega^0(v, \varepsilon) = v' = v(I + O(\rho_\omega^2)), \\ H_\omega^0(v, \varepsilon) = \text{Identité}. \end{cases}$$

(Le  $O(\rho_\omega^2)$  est uniforme en  $\omega, \mu, a$  dans leur domaine de variation.)

Nous allons montrer que  $\bar{\Lambda}_\omega^{-1}(0)$  est « suffisamment » proche de

$$(\bar{\Lambda}_\omega^0)^{-1}(0) = \{ (v, \varepsilon) \in [-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6]^2, v = 0 \}$$

dès que  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ .

Tout d'abord,  $\mathcal{H}$  est un « bon » difféomorphisme  $C^\infty$ , satisfaisant, ainsi que ses dérivées, des estimations « tame » dont les constantes sont indépendantes de  $\tau_\omega$ . D'après le théorème de Hamilton, il en est de même de  $\mathcal{H}^{-1}$ .

En particulier,  $\mathcal{H}^{-1}$  a des estimations lipschitziennes de la forme suivante (comparer [13] théorème 4 ou lemme 6) :

$$(81) \quad \|\mathcal{H}^{-1}(\tilde{z}) - \mathcal{H}^{-1}(z)\|_m \leq C_m (\|\tilde{z} - z\|_{m+s} + \|z\|_{m+s} \|\tilde{z} - z\|_r)$$

dès que  $\|z\|_L \leq \delta$ ,  $\|\tilde{z}\|_L \leq \delta$ , c'est-à-dire

$$(82) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{I}{\tau_\omega^p} [\mathcal{G}^{-1}(\gamma_0 + \tau_\omega^p D\mathcal{G}(x_0) \tilde{z}) - \mathcal{G}^{-1}(\gamma_0 + \tau_\omega^p D\mathcal{G}(x_0) z)] \right\|_m \\ \leq C_m (\|\tilde{z} - z\|_{m+s} + \|z\|_{m+s} \|\tilde{z} - z\|_r). \end{aligned}$$

Choisissons

$$(83) \quad \begin{cases} \tilde{z} = D\mathcal{G}(x_0)^{-1}(\tau_\omega^{n-p} \zeta, 0) & (\text{où } \zeta = \zeta_{\omega, \mu, a}), \\ z = 0. \end{cases}$$

On déduit de (73)

$$\|\tilde{z} - z\|_m = \|\tilde{z}\|_m \leq C_m \tau_\omega^{n-p-3} (\|x_0\|_{m+\ell} \|\zeta\|_1 + \|\zeta\|_{m+\ell}),$$

qu'après un changement de constante on peut écrire

$$(84) \quad \begin{aligned} \|\tilde{z} - z\|_m = \|\tilde{z}\|_m &\leq C_m \tau_\omega^{n-p-3} \|\zeta\|_{m+\ell} \\ &= C_m \tau_\omega \|\zeta\|_{m+\ell} \quad \text{si } n = 11, p = 7. \end{aligned}$$

On déduit alors de (82) (en changeant encore de constante et en posant  $R = \ell + s$ ) que

$$(85) \quad |\tau_\omega \bar{\Lambda}_\omega(v, \varepsilon) - \tau_\omega \bar{\Lambda}_\omega^0(v, \varepsilon)| + \|H_\omega(v, \varepsilon) - \text{Id}\|_m \leq C_m \tau_\omega^{n-3} \|\zeta_{\omega, \mu, a}\|_{m+R},$$

qui est la première estimation lipschitzienne du théorème 1.

En particulier, si  $n \geq 11$  et si  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ ,

$$|\bar{\Lambda}_\omega(v, \varepsilon) - v[I + O(\rho_\omega^2)]| \leq \text{cste.} \cdot \tau_\omega^7 \leq \frac{1}{2} \rho_\omega^{12};$$

on peut donc assurer que

$$(86) \quad \text{si } (\nu, \varepsilon) \in \bar{\Lambda}_\omega^{-1}(0), \quad |\nu| \leq \rho_\omega^{12}.$$

Il nous faut contrôler de même  $\frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon)$ ; on a

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \tau_\omega \frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon), \frac{\partial H_\omega}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon) \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, D\mathcal{A}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = D\mathcal{G}^{-1}(\varphi, 0) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, 0 \right), \quad \text{où} \\ \varphi = \tau_\omega^2 \Pi + \tau_\omega^n \zeta \quad (\Pi = \Pi_{\omega, \mu, a}, \zeta = \zeta_{\omega, \mu, a}, (\mu, a) = \Delta_\omega^{-1}(\nu, \varepsilon)), \end{array} \right.$$

que l'on va comparer à l'expression analogue lorsque  $\zeta = 0$ ,

$$(88) \quad \left( \tau_\omega^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}, \tau_\omega \frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega^0}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon), \frac{\partial H_\omega^0}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon) \right) = \left( \tau_\omega^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}, \tau_\omega [I + O(\rho_\omega^2)], 0 \right)$$

(le  $O(\rho_\omega^2)$  est uniforme en  $\omega, \mu, a$  dans leur domaine de définition : utiliser pour faire ce calcul la majoration  $\|D\Delta_\omega(\mu, a)^{-1}\| \leq \frac{D}{\rho_\omega^2}$  obtenue dans la démonstration du lemme 1).

On procède comme précédemment : l'application  $(z, u) \mapsto D\mathcal{H}^{-1}(z) u$  satisfait des estimations « tame » dont les constantes ne dépendent pas de  $\tau_\omega$  et a donc des estimations lipschitziennes de la forme

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|D\mathcal{H}^{-1}(\tilde{z}) \tilde{u} - D\mathcal{H}^{-1}(z) u\|_m \leq C_m (\|\tilde{z} - z\|_{m+s_1} + \|\tilde{u} - u\|_{m+s_1} \\ \qquad \qquad \qquad + (\|z\|_{m+s_1} + \|u\|_{m+s_1}) (\|\tilde{z} - z\|_{r_1} + \|\tilde{u} - u\|_{r_1})). \end{array} \right.$$

On choisit  $\tilde{z}$  et  $z$  comme en (83), et

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \left( \tau_\omega^2 \frac{\partial \Pi_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu} + \tau_\omega^n \frac{\partial \zeta_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu}, 0 \right), \\ u = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \left( \tau_\omega^2 \frac{\partial \Pi_{\omega, \mu, a}}{\partial \nu}, 0 \right). \end{array} \right.$$

On obtient, en utilisant (73), (84), (89) et en changeant encore de constantes

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\| \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \tau_\omega \frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon), \frac{\partial H_\omega}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon) \right) - \left( \tau_\omega^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}, \tau_\omega \frac{\partial \nu'}{\partial \nu}, 0 \right) \right\|_m \\ \leq C_m \left[ \tau_\omega^{n-p-3} \|\zeta\|_{m+\ell+s_1} + \tau_\omega^{n-3} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \right\|_{m+\ell+s_1} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \tau_\omega^{n-p-4} \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right\|_{m+\ell+s_1} \|\zeta\|_{\ell+r_1} + \tau_\omega^{n-4} \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right\|_{m+\ell+s_1} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \right\|_{\ell+r_1} \right]. \end{array} \right.$$

Il reste à remarquer que, par construction,  $\Pi_{\omega, \mu, a}$  est  $C^\infty$  en  $\mu, a$  pour  $(\omega, \mu, a)$  voisin de  $(\omega_0, 0, 0)$ , alors que  $\zeta_{\omega, \mu, a}$  est  $C^\infty$  en  $\mu, a, r(\omega, \mu, a)$  (voir (32) et (33)), et que  $r(\omega, \mu, a)^2$  est  $C^\infty$  en  $\mu, a$ .

A l'aide de la majoration de  $\|D\Delta_\omega(\mu, a)^{-1}\|$  qui vient d'être rappelée on en déduit l'existence pour tout  $k$  d'une constante  $C_k$  indépendante de  $\omega, \mu, a$  telle que

$$(92) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial v} \right\|_k \leq \frac{C_k}{\rho_\omega^2}, & \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right\|_k \leq \frac{C_k}{\rho_\omega^3} \\ \text{si } |\omega - \omega_0| \text{ est assez petit, et } |v| \leq \rho_\omega^6, |\varepsilon| \leq \rho_\omega^6. \end{cases}$$

Finalement, après un dernier changement de constantes, et faisant  $p = 7, S = \ell + s_1$ ,

$$(93) \quad \begin{cases} \tau_\omega \left| \frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial v} (v, \varepsilon) - \frac{\partial v'}{\partial v} \right| + \left\| \frac{\partial H_\omega}{\partial v} (v, \varepsilon) \right\|_m \\ \leq C_m \left( \tau_\omega^{n-12} \|\zeta\|_{m+8} + \tau_\omega^{n-5} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right\|_{m+8} \right), \end{cases}$$

qui est la deuxième estimation lipschitzienne du théorème 1.

Si  $n \geq 14$ , on en déduit que, pour  $\omega$  assez proche de  $\omega_0$ ,

$$(94) \quad \left| \frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial v} (v, \varepsilon) - (1 + O(\rho_\omega^2)) \right| \leq \text{cste} \times \tau_\omega \leq \frac{1}{2}.$$

Le début du corollaire 1 est évident à partir de (86) et (94) par application du théorème des fonctions implicites usuel. Quant à l'assertion concernant  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$ , elle est démontrée dans un cadre plus général dans [9, § 2] : on commence par voir que  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$  est contenu dans l'intérieur de  $\mathcal{D}_\omega$ , puis qu'un point  $(\mu, a)$  de  $\mathcal{D}_\omega$  n'appartenant pas au graphe de  $t_\omega$  ne peut appartenir à  $\tilde{C}_\omega$ ; ce dernier fait découle, via la remarque 4.1.5 du chapitre III de [14], de l'existence pour un tel  $(\mu, a)$  de la courbe effectivement translatée  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  (non invariante) et de la propriété de distorsion vérifiée par  $P_{\mu, a}$ .

## 2.2. Courbes invariantes non normalement hyperboliques

Les courbes  $v = v_0$  qui correspondent aux couples  $(\mu, a)$  pour lesquels il existe (dans les coordonnées  $(\theta, \sigma)$ ) un cercle soumis par  $N_{\mu, a}$  à la rotation  $R_\omega$  et la translation  $v_0$  ont donc leur équivalent pour  $P_{\mu, a}$  (dans les coordonnées  $(\theta, \rho)$ ) à condition que  $\omega$  soit assez proche de  $\omega_0$  et suffisamment irrationnel, et  $v_0$  assez petit.

Nous montrons maintenant que, sous des hypothèses analogues, les courbes  $\varepsilon = \varepsilon_0$  d'« équihyperbolité » du cercle translaté par  $N_{\mu, a}$  ont également leur analogue pour  $P_{\mu, a}$ ; on en déduit en particulier le

*Corollaire 2.* — *Sous les hypothèses du théorème 1, si  $n \geq 15$  et si  $|\omega - \omega_0|$  est assez petit, il existe une unique valeur  $\varepsilon_0 \in [-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6]$  de  $\varepsilon$  telle que la courbe invariante  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \Delta_\omega^{-1}(t_\omega(\varepsilon_0), \varepsilon_0)}$  de  $P_{\Delta_\omega^{-1}(t_\omega(\varepsilon_0), \varepsilon_0)}$  ne soit pas normalement hyperbolique.*

On notera  $\tilde{\gamma}_\omega = \Delta_\omega^{-1}(t_\omega(\varepsilon_0), \varepsilon_0)$ ; bien entendu  $\tilde{\gamma}_\omega \in \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$ .

*Démonstration.* — Dans les conditions d'application du théorème 1 le difféomorphisme local (dépendant de  $\omega, \mu, a$ )

$$(95) \quad (\theta, \rho) \mapsto (\xi = h_{\omega, \mu, a}(\theta), x = \rho - \bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta))$$

transforme  $P_{\mu, a}$  en un plongement de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  de la forme

$$(96) \quad P_{\mu, a}(\xi, x) = (\xi + \omega + O(|x|), \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a} + X_{\omega, \mu, a}(h_{\omega, \mu, a}^{-1}(\xi))x + O(|x|^2)),$$

$$\text{où} \quad X_{\omega, \mu, a}(\theta) = 1 - \tau_\omega D\bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta + \omega + \tau_\omega \bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta)) + \frac{\partial \varphi_{\omega, \mu, a}}{\partial \rho}(\theta, \bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta))$$

a été défini dans la formule (60), et  $\varphi_{\omega, \mu, a} = \tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a} + \tau_\omega^n \zeta_{\omega, \mu, a}$  (ne pas oublier que  $\psi = \tau \bar{\psi}$ ).

Rappelons que,  $\omega$  étant irrationnel, la courbe fermée invariante  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \Delta_\omega^{-1}(t_\omega(\varepsilon), \varepsilon)}$  (c'est-à-dire  $x = 0$ ) de  $P_{\Delta_\omega^{-1}(t(\varepsilon), \varepsilon)}$  est normalement hyperbolique si et seulement si  $\chi_\omega(t(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ , où

$$(97) \quad \chi_\omega(v, \varepsilon) = \left[ \exp \int_0^1 \log X_{\omega, \mu, a}(h_{\omega, \mu, a}^{-1}(\xi)) d\xi \right] - 1,$$

avec toujours  $(v, \varepsilon) = \Delta_\omega(\mu, a)$  (voir [11], § II :  $1 + \chi_\omega(t(\varepsilon), \varepsilon)$  n'est autre que le rayon du spectrographe associé au cercle invariant  $x = 0$  de  $P_{\Delta_\omega^{-1}(t(\varepsilon), \varepsilon)}$ ).

Soit  $J_\omega : [-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'application définie par

$$(98) \quad J_\omega(v, \varepsilon) = (\bar{\Lambda}_\omega(v, \varepsilon), \chi_\omega(v, \varepsilon)).$$

Si  $P_{\mu, a}$  est remplacé par  $N_{\mu, a}$ , c'est-à-dire si  $\zeta = 0$ , le changement de variables (95) devient l'identité et  $J_\omega$  est remplacé par le difféomorphisme  $J_\omega^0$  défini par

$$(99) \quad J_\omega^0(v, \varepsilon) = (v', \varepsilon') = (v, \varepsilon) + v(O(\rho_\omega^2), O(\rho_\omega^2)).$$

Nous allons montrer que, sous les hypothèses du corollaire 2,  $J_\omega$  est assez proche de  $J_\omega^0$  pour (i) être un difféomorphisme sur son image, (ii) contenir  $(0, 0)$  dans son image. Le corollaire 2 sera ainsi démontré, le point  $\tilde{\gamma}_\omega = (t_\omega(\varepsilon_0), \varepsilon_0)$  cherché étant  $J_\omega^{-1}(0, 0)$ .

Pour majorer  $|J_\omega(v, \varepsilon) - J_\omega^0(v, \varepsilon)|$  et  $|\det J_\omega(v, \varepsilon) - \det J_\omega^0(v, \varepsilon)|$  il nous reste à obtenir des majorations lipschitziennes sur  $\chi_\omega(v, \varepsilon)$  et  $\frac{\partial \chi_\omega}{\partial v}(v, \varepsilon)$  (les majorations sur  $\frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial \varepsilon}$  et  $\frac{\partial \chi_\omega}{\partial \varepsilon}$  sont analogues à celles sur  $\frac{\partial \bar{\Lambda}_\omega}{\partial v}$  et  $\frac{\partial \chi_\omega}{\partial v}$  respectivement).

## Des formules

$$(100) \quad \begin{aligned} \mathbf{DX}(\varphi, \psi)(\Delta\varphi, \Delta\psi) &= -\mathbf{D}^2\psi(\mathbf{R}_\omega + \psi)\Delta\psi - \mathbf{D}\Delta\psi(\mathbf{R}_\omega + \psi) \\ &\quad + \frac{1}{\tau_\omega} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} \left( \cdot, \frac{1}{\tau} \psi \right) \Delta\psi + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\rho} \left( \cdot, \frac{1}{\tau_\omega} \psi \right), \end{aligned}$$

et

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{D}^2\mathbf{X}(\varphi, \psi)[(\Delta\varphi, \Delta\psi), (\Delta'\varphi, \Delta'\psi)] &= -\mathbf{D}^3\psi(\mathbf{R}_\omega + \psi)\Delta\psi\Delta'\psi \\ &\quad + \frac{1}{\tau_\omega^2} \frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho^3} \left( \cdot, \frac{1}{\tau_\omega} \psi \right) \Delta\psi\Delta'\psi - \mathbf{D}^2\Delta'\psi(\mathbf{R}_\omega + \psi)\Delta\psi \\ &\quad - \mathbf{D}^2\Delta\psi(\mathbf{R}_\omega + \psi)\Delta'\psi + \frac{1}{\tau_\omega} \frac{\partial^2\Delta'\varphi}{\partial\rho^2} \left( \cdot, \frac{1}{\tau_\omega} \psi \right) \Delta\psi \\ &\quad + \frac{1}{\tau_\omega} \frac{\partial^2\Delta\varphi}{\partial\rho^2} \left( \cdot, \frac{1}{\tau_\omega} \psi \right) \Delta'\psi, \end{aligned} \right.$$

on déduit des estimations lipschitziennes « tame » pour les applications

$$(\varphi, \psi) \mapsto \mathbf{X}(\varphi, \psi) \quad \text{et} \quad (\varphi, \psi, \Delta\varphi, \Delta\psi) \mapsto \mathbf{DX}(\varphi, \psi)(\Delta\varphi, \Delta\psi)$$

de la forme suivante (les constantes  $C_m$  dépendent de  $\|\varphi_0\|_{m+3}$ ,  $\|\psi_0\|_{m+3}$ ,  $\|\Delta\varphi_0\|_{m+2}$ ,  $\|\Delta\psi_0\|_{m+2}$ , et les formules valent si  $\|\varphi\|_4 \leq \tau$ ,  $\|\varphi_0\|_4 \leq \tau$ ,  $\|\psi\|_4 \leq \tau$ ,  $\|\psi_0\|_4 \leq \tau$ ) :

$$(102) \quad \|\mathbf{X}(\varphi, \psi) - \mathbf{X}(\varphi_0, \psi_0)\|_m \leq \frac{C_m}{\tau_\omega} (\|\varphi - \varphi_0\|_{m+2} + \|\psi - \psi_0\|_{m+2}),$$

$$(103) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\mathbf{DX}(\varphi, \psi)(\Delta\varphi, \Delta\psi) - \mathbf{DX}(\varphi_0, \psi_0)(\Delta\varphi_0, \Delta\psi_0)\|_m \\ \leq \frac{C_m}{\tau_\omega^2} [\|\varphi - \varphi_0\|_{m+3} + \|\psi - \psi_0\|_{m+3} + \|\Delta\varphi - \Delta\varphi_0\|_{m+2} \\ + \|\Delta\psi - \Delta\psi_0\|_{m+2}]. \end{aligned} \right.$$

Puisque les estimations « tame » de  $h \mapsto \psi = K(h)$  et ses dérivées ont des constantes indépendantes de  $\tau$ , on a des formules analogues à (102), (103) pour  $\mathbf{X}(\varphi, K(h))$ , à condition de remplacer  $\|\psi - \psi_0\|_m$  par  $\|h - h_0\|_{m+1}$ . On en déduit des formules analogues pour  $\chi$  (défini en (97)) considéré comme fonction de  $\varphi$  et de  $h$ , et donc

$$(104) \quad |\chi_\omega(v, \varepsilon) - \varepsilon'| \leq \frac{C_0}{\tau_\omega} (\tau_\omega^n \|\zeta\|_2 + \|H_\omega(v, \varepsilon) - \text{Id}\|_3),$$

$$(105) \quad \begin{aligned} \left| \frac{\partial\chi_\omega}{\partial v}(v, \varepsilon) - \frac{\partial\varepsilon'}{\partial v} \right| \\ \leq \frac{C_0}{\tau_\omega^2} \left[ \tau_\omega^n \|\zeta\|_3 + \|H_\omega(v, \varepsilon) - \text{Id}\|_4 + \tau_\omega^n \left\| \frac{\partial\zeta}{\partial v} \right\|_2 + \left\| \frac{\partial H_\omega}{\partial v}(v, \varepsilon) \right\|_3 \right], \end{aligned}$$

et de même pour  $\left| \frac{\partial\chi_\omega}{\partial\varepsilon}(v, \varepsilon) - \frac{\partial\varepsilon'}{\partial\varepsilon} \right|$ .

Utilisant (85) et (93), on obtient enfin des constantes (notées C) telles que

$$(106) \quad |\chi_\omega(v, \varepsilon) - \varepsilon'| \leq C\tau_\omega^{n-4} \|\zeta\|_{3+\mathbb{R}},$$

$$(107) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \chi_\omega}{\partial v} - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial v} \right| \leq C \left[ \tau_\omega^{n-14} \|\zeta\|_{3+\mathbb{R}} + \tau_\omega^{n-7} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right\|_{3+\mathbb{R}} \right], \\ \left| \frac{\partial \chi_\omega}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varepsilon} \right| \leq C \left[ \tau_\omega^{n-14} \|\zeta\|_{3+\mathbb{R}} + \tau_\omega^{n-7} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} \right\|_{3+\mathbb{R}} \right], \end{cases}$$

et donc

$$(108) \quad \begin{cases} |\det J_\omega(v, \varepsilon) - \det J_\omega^0(v, \varepsilon)| = |\det J_\omega(v, \varepsilon) - (1 + O(\rho_\omega^2))| \\ \leq C \left[ \tau_\omega^{n-14} \|\zeta\|_{3+\mathbb{R}} + \tau_\omega^{n-7} \left( \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right\|_{3+\mathbb{R}} + \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} \right\|_{3+\mathbb{R}} \right) \right]. \end{cases}$$

Si  $n \geq 15$  et si  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ , on aura

$$(109) \quad \|J_\omega(v, \varepsilon) - (v', \varepsilon')\| \leq (C\tau_\omega^{11}, C\tau_\omega^{11}) \leq (\rho_\omega^{20}, \rho_\omega^{20})$$

$$(110) \quad |\det J_\omega(v, \varepsilon) - (1 + O(\rho_\omega^2))| \leq C\tau_\omega \leq \frac{1}{2},$$

ce qui démontre le corollaire 2.

La figure 9 résume les deux corollaires.

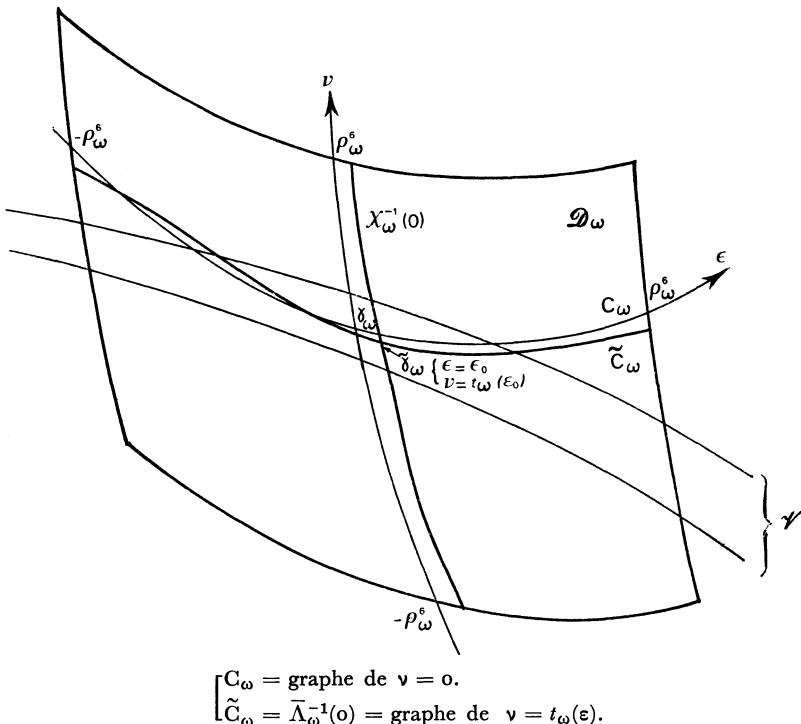


FIG. 9

Il nous reste à montrer que des  $\omega$  satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 et de ses corollaires existent effectivement, c'est-à-dire qu'on peut choisir les constantes  $C$  et  $\beta$  du théorème 1 telles que l'ensemble des  $\omega$  satisfaisant les hypothèses 1 et 2 du théorème admette  $\omega_0$  comme point d'accumulation (c'est bien entendu un ensemble de Cantor). En particulier, l'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  des points  $\tilde{\gamma}_\omega$  fournis par le corollaire 2 est un ensemble de Cantor contenant  $(0, 0)$ .

L'argument est classique et se trouve par exemple dans ([21], § 33). Fixons  $\beta > 0$  et notons

$$(111) \quad \Delta_d = \left\{ \omega \mid \frac{1}{\eta_0} (\omega - \omega_0) > 0, \frac{d}{2} < |\omega - \omega_0| < d \right\}.$$

Puisque (voir (23) et la définition de  $\tau_\omega$ )

$$(112) \quad \tau_\omega = \frac{b_1(o, o)}{\eta_0} (\omega - \omega_0) + O(|\omega - \omega_0|^2),$$

il suffit de considérer l'intersection avec  $\Delta_d$  de l'ensemble

$$(113) \quad A = \left\{ \omega \mid \forall \frac{p}{q}, \left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{2C |b_1(o, o)|}{|q|^{2+\beta} |\eta_0|} (\omega - \omega_0) \right\}$$

ou encore de majorer la mesure de Lebesgue de l'intersection avec  $\Delta_d$  de son complémentaire ou, *a fortiori*, de majorer la mesure de Lebesgue de l'intersection avec  $\Delta_d$  de

$$(114) \quad \Sigma_d = \left\{ \omega \mid \exists \frac{p}{q}, \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \frac{C |b_1(o, o)| d}{|q|^{2+\beta} |\eta_0|} \right\}.$$

Mais,  $q$  étant fixé, dès que  $C < \frac{|\eta_0|}{|b_1(o, o)|}$  et  $d < 1$ , il y a au plus  $q + 1$  entiers  $p$  tels que l'intervalle centré en  $\frac{p}{q}$  de largeur  $\frac{2C |b_1(o, o)| d}{|q|^{2+\beta} |\eta_0|}$  rencontre  $\Delta_d$ ; on en déduit l'inégalité

$$(115) \quad \text{mesure} (\Delta_d \cap \Sigma_d) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} (q + 1) \frac{2C |b_1(o, o)| d}{|q|^{2+\beta} |\eta_0|}$$

et donc

$$(116) \quad \text{mesure} (\Delta_d - \Delta_d \cap \Sigma_d) \geq \frac{d}{2} \left[ 1 - \frac{8 |b_1(o, o)|}{\eta_0} C \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|q|^{1+\beta}} \right) \right]$$

qui peut être rendu aussi proche de  $\frac{d}{2}$  que l'on veut par un bon choix de  $C$ .

A chaque choix de  $C$  correspond  $\delta_C = \varepsilon(C, \beta)$  (tendant vers 0 avec  $C$ ) tel que le théorème 1 et ses corollaires soient vrais pour  $|\omega - \omega_0| \leq \delta_C$ . On déduit de (116) que la densité des  $\omega$  auxquels s'appliquent leurs conclusions tend vers 1 lorsqu'on s'approche de  $\omega_0$  (du côté où  $\frac{1}{\eta_0} (\omega - \omega_0) > 0$ ).

La figure 10 montre une partie de l'ensemble des courbes  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$  ci-dessus, c'est-à-dire des valeurs de  $(\mu, a)$  proches de  $\Gamma$  pour lesquelles on peut assurer que  $P_{\mu, a}$  possède au moins une courbe fermée  $C^\infty$  invariante (normalement hyperbolique si  $(\mu, a)$  n'est pas un des points  $\tilde{\gamma}_\omega$  de l'ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$ ).

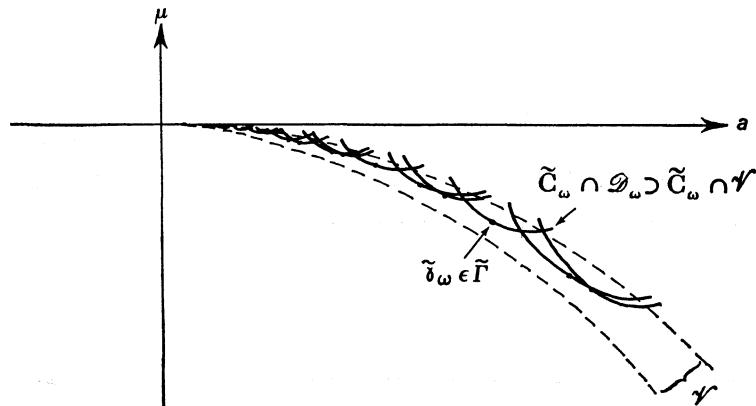


FIG. 10

Résumons les résultats obtenus sous la forme d'un théorème :

**Théorème 2.** — *On considère la famille à deux paramètres de difféomorphismes locaux  $P_{\mu, a}$  de  $(\mathbf{R}^2, 0)$  définie par la formule (11). On suppose que  $b_1(0, 0) \neq 0$  et  $\eta_0 = 2 \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) + b_1(0, 0) \neq 0$ ; on suppose de plus que  $n \geq 15$ , ce qui est licite dès que  $\omega_0 = b_0(0, 0)$  n'est pas un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  de dénominateur  $q \leq 33$ . Il existe alors un ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$  voisin de la courbe  $\Gamma$  et contenu dans un petit voisinage de  $(0, 0)$ , tel que, si  $(\mu, a) \in \tilde{\Gamma}$ ,  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée  $C^\infty$  invariante non normalement hyperbolique. Par chacun des points  $\tilde{\gamma}_\omega$  de cet ensemble de Cantor passe un morceau de courbe lisse  $(\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega)$  correspondant à des valeurs de  $(\mu, a)$  pour lesquelles  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée  $C^\infty$  invariante normalement hyperbolique (attractante si  $(\mu, a)$  est d'un côté de  $\tilde{\gamma}_\omega$ , répulsive s'il est de l'autre).*

*Remarque.* — Nous verrons en fait dans le paragraphe suivant que, si  $(\mu, a)$  appartient à l'une des courbes  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$  ci-dessus (ou même simplement à  $\tilde{C}_\omega$ , voir le paragraphe 3), la dynamique de  $P_{\mu, a}$  ressemble à celle de  $N_{\mu', a'}$  pour un  $(\mu', a')$  appartenant à  $C_\omega$ ; en particulier, si  $\tilde{\gamma}_\omega \in \tilde{\Gamma}$ , la dynamique de  $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$  ressemble à celle de  $N_{\gamma_\omega}$ .

### 2.3. Bons chemins de bifurcation transverses à $\Gamma$

Nous montrons dans ce paragraphe et le suivant (théorème 3 et théorème 4) que l'ensemble  $\mathcal{N}$  des valeurs de  $(\mu, a)$  proches de  $(0, 0)$  pour lesquelles  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à une forme normale  $N_{\mu', a'}$  ( $(\mu', a')$  proche de  $(\mu, a)$ ) contient la réunion des courbes  $\tilde{C}_\omega$  ( $\omega$  satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 et du théorème 2), donc en particulier

l'ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$  du théorème 2, ainsi que le complémentaire d'une infinité de « bulles » adhérentes à  $\tilde{\Gamma}$  et contenues dans  $\mathcal{V}$  (fig. 11). Par « ressemble » il faut entendre ici que  $P_{\mu, a}$  et  $N_{\mu', a'}$  ont le même nombre de courbes fermées invariantes au voisinage de  $o$  et la même décomposition en bassins d'un voisinage uniforme (indépendant de  $(\mu, a)$ ) de  $o$ . Bien entendu, la dynamique sur les courbes invariantes est différente, générique dans un cas et rotation dans l'autre, ainsi que la régularité des courbes,  $C^k$  ou même seulement lipschitzienne dans un cas et analytique dans l'autre. Puisqu'il découle de [3] et [10] qu'en général le complémentaire  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{N}$  contient effectivement une infinité d'ouverts disjoints (« bulles »), on peut considérer la figure 11 comme assez représentative de la décomposition réelle d'un voisinage de  $(o, o)$  dans le plan  $(\mu, a)$  pour une famille  $P_{\mu, a}$  générique du type décrit dans la formule (11).

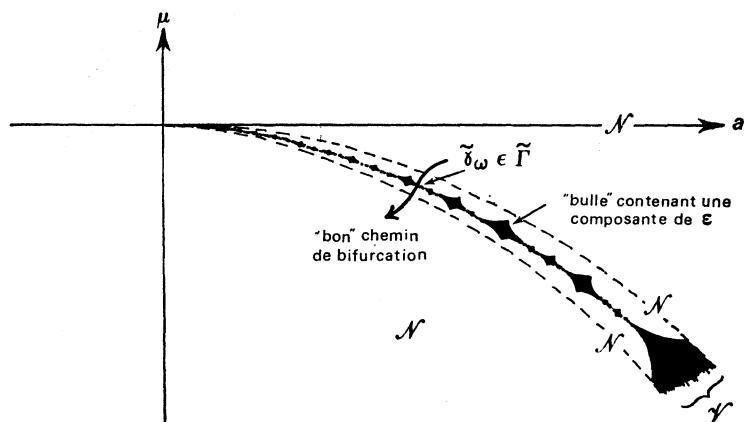


FIG. 11

Tout chemin  $\sigma$  passant par un point  $\tilde{\gamma}_\omega \in \tilde{\Gamma}$  sans rencontrer les bulles correspond à une famille de difféomorphismes présentant de manière franche le phénomène d'élimination d'un couple de courbes invariantes (*i.e.* admet  $\tilde{\gamma}_\omega$  pour unique point de bifurcation).

Nous étudions dans ce paragraphe  $\mathcal{N} \cap \mathcal{V}$ , en fait les diverses intersections  $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}_\omega$  pour les  $\omega$  satisfaisant aux hypothèses des théorèmes 1 et 2, et laissons pour le paragraphe suivant la démonstration, plus facile, de l'inclusion  $\mathcal{H} \subset \mathcal{N}$ .

Nous avons déjà remarqué (§ 1.2, définition de  $\mathcal{V}$ ) que les dynamiques de  $P_{\mu, a}$  et  $N_{\mu, a}$  se « ressemblent » à l'extérieur de l'anneau  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$  défini dans les coordonnées  $z, \bar{z}$  par

$$(117) \quad \mathbf{A}_n^+(\mu, a) = \{z, f_n^+(\mu, a, |z|^2) > 0\}.$$

On voit facilement (comparer au § 3.1) que l'épaisseur radiale de cet anneau est majorée par  $C \sqrt{\frac{\rho_\omega^6}{\rho_\omega^2}} = C\rho_\omega^2$  ( $C$  est une constante indépendante de  $\omega$ ) dès que  $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$  : en effet, les estimations de la démonstration du corollaire 1 au § 1.4 fournissent  $|\mu - \mu_\omega| < C\rho_\omega^6$  et  $|a - a_\omega| < C\rho_\omega^4$ .

Pour tout point  $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$ , la restriction de  $P_{\mu, a}$  à un anneau de largeur de l'ordre de  $\rho_\omega$ , donc contenant  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$ , est définie dans le système de coordonnées  $(\xi, x)$  par la formule suivante, obtenue en précisant (96) (on a supprimé ces indices  $\omega, \mu, a$ , par exemple  $h = h_{\omega, \mu, a}$ ,  $f(\theta) = \theta + \omega + \tau_\omega \bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta)$ , etc. et on a noté  $\theta = h^{-1}(\xi)$ ).

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a}(\xi, x) = [h(h^{-1}(\xi + \omega) + \tau_\omega x), \bar{\psi}(\theta) - \bar{\psi}(f(\theta) + \tau_\omega x) \\ \quad + x + \varphi(\theta, \bar{\psi}(\theta) + x)] \\ = [\xi + \omega + \sum_{i=1}^K B_{\omega, \mu, a}^{(i)}(\xi) x^i + O(|\tau_\omega|^K |x|^{K+1}), \bar{\lambda} + x \\ \quad + \sum_{i=1}^K A_{\omega, \mu, a}^{(i)}(\xi) x^i + O(|\tau_\omega|^K |x|^{K+1})], \\ B^{(i)}(\xi) = \frac{\tau_\omega^i}{i!} D^i h(h^{-1}(\xi + \omega)), \quad A^{(i)}(\xi) = \frac{1}{i!} X^{(i)}(\theta), \\ X^{(i)}(\theta) = -\tau_\omega^i D^i \bar{\psi}(f(\theta)) + \frac{\partial^i \varphi}{\partial \rho^i}(\theta, \bar{\psi}(\theta)), \quad \text{en particulier} \\ 1 + X^{(1)}(\theta) = X(\theta) \quad \text{défini dans la formule (96),} \\ 2 \leq K \leq n. \end{array} \right.$$

Si la perturbation  $\zeta$  (voir (44)) est identiquement nulle,  $P_{\mu, a}$  coïncide avec  $N_{\mu, a}$  qui s'écrit

$$(119) \quad \left\| \begin{array}{l} N_{\mu, a}(\xi, x) = (\xi + \omega + \tau_\omega x, v' + (1 + \varepsilon') x + s' x^2 + \sum_{i=3}^n a'_i x^i), \quad \text{où} \\ (45) \quad v' \sim v, \quad \varepsilon' \sim \varepsilon, \quad s' \sim -C \tau_\omega^2, \quad |a'_i| \leq C |\tau_\omega|^{i-1} \quad \text{pour } 3 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

On déduit d'estimations lipschitziennes analogues à celles utilisées pour démontrer les corollaires 1 et 2 que les fonctions (de  $\xi$ )  $A_{\omega, \mu, a}^{(i)}$ ,  $B_{\omega, \mu, a}^{(i)}$  sont  $C^m$ -proches de leurs analogues pour la forme normale  $N_{\mu, a}$ , c'est-à-dire presque égales à des constantes (dépendant de  $\omega, \mu, a$ ) :

$$(120) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|B_{\omega, \mu, a}^{(1)} - \tau_\omega\|_m \leq C_m |\tau_\omega|^{n-2}, \\ \|B_{\omega, \mu, a}^{(i)}\|_m \leq C_m |\tau_\omega|^{n-3+i}, \quad 2 \leq i \leq K, \\ \|A_{\omega, \mu, a}^{(1)} - \varepsilon'\|_m \leq C_m |\tau_\omega|^{n-4}, \\ \|A_{\omega, \mu, a}^{(2)} - s'\|_m \leq C_m |\tau_\omega|^{n-4}, \\ \|A_{\omega, \mu, a}^{(i)} - a'_i\|_m \leq C_m |\tau_\omega|^{n-4}, \quad 3 \leq i \leq K, \end{array} \right. \quad \text{où les constantes } C_m \text{ dépendent de } m.$$

L'application  $P_{\mu, a}$  s'écrit comme la composée

$$(121) \quad P_{\mu, a} = \mathcal{E}_{\mu, a} \circ \mathcal{I}_{\mu, a}$$

d'une application  $\mathcal{I}_{\mu, a}$  laissant le cercle  $x = 0$  invariant et de la translation

$$(122) \quad \mathcal{E}_{\mu, a}(\xi, x) = (\xi, x + \bar{\lambda}_{\omega, \mu, a});$$

les hypothèses sur  $\omega$  impliquent l'existence d'une unique solution  $C^\infty b_{\omega, \mu, a}(\xi)$  de l'équation suivante ( $\chi_\omega(v, \varepsilon)$  est défini en (97)) :

$$(123) \quad \frac{b_{\omega, \mu, a}(\xi + \omega)}{b_{\omega, \mu, a}(\xi)} (1 + \chi_\omega(\Delta_\omega(\mu, a))) = X_{\omega, \mu, a}(h_{\omega, \mu, a}^{-1}(\xi)), \quad b_{\omega, \mu, a}(0) = 1.$$

Le changement de variables

$$(124) \quad (\xi, x) \mapsto \left( \xi, y = \frac{1}{b_{\omega, \mu, a}(\xi)} x \right)$$

transforme  $\mathcal{J}_{\mu, a}$  en une application de la forme

$$(125) \quad \begin{cases} \mathcal{J}_{\mu, a}(\xi, y) = (\xi + \omega + \sum_{i=1}^K \beta_i(\xi) y^i + O(|\tau_\omega|^K |y|^{K+1}), (1 + \chi) y \\ \quad + \sum_{i=2}^K \alpha_i(\xi) y^i + O(|\tau_\omega|^K |y|^{K+1})), \quad \text{où} \\ \chi = \chi_\omega(\Delta_\omega(\mu, a)) = \varepsilon' + O(|\tau_\omega|^{n-5}), \quad \alpha_2(\xi) = s' + O(|\tau_\omega|^{n-4}), \\ \alpha_i(\xi) = a'_i + O(|\tau_\omega|^{n-4}) \quad \text{pour } 3 \leq i \leq K, \quad \beta_1(\xi) = \tau_\omega + O(|\tau_\omega|^{n-4}), \\ \beta_i(\xi) = O(|\tau_\omega|^{n-3+i}) \quad \text{pour } 2 \leq i \leq K. \end{cases}$$

Les estimations sont valables dans les topologies  $C^m$  (mais dépendent de  $m$ ). En effet, la résolution de l'équation aux différences satisfait par  $\log b_{\omega, \mu, a}(\xi)$  fournit

$$\|b_{\omega, \mu, a} - 1\|_m \leq D \cdot \frac{1}{|\tau_\omega|} \cdot \|A_{\omega, \mu, a}^{(1)} - \varepsilon'\|_{m+m'} \quad (\text{où } m' > 2 + \beta).$$

De même, il existe une unique solution  $C^\infty \gamma_{\omega, \mu, a}(\xi) = \gamma(\xi)$ , dépendant différentiablement de  $(\mu, a)$  par l'intermédiaire de  $\chi$ , de l'équation

$$(126) \quad (1 + \chi)^2 \gamma(\xi + \omega) - (1 + \chi) \gamma(\xi) + \alpha_2(\xi) = \bar{\alpha}_2 = \int_0^1 \alpha_2(\xi) d\xi \\ = s' + O(|\tau_\omega|^{n-4});$$

cette solution vérifie  $\|\gamma_{\omega, \mu, a}\|_m \leq D \cdot \frac{1}{|\tau_\omega|} \cdot \|\alpha_2 - s'\|_{m+m'} \quad (\text{où } m' > 2 + \beta)$ . Le changement de variables

$$(127) \quad (\xi, y) \mapsto (\xi, y + \gamma(\xi) y^2)$$

remplace dans  $\mathcal{J}_{\mu, a}$  le coefficient  $\alpha_2(\xi)$  par la constante (dépendant de  $\omega, \mu, a$ )  $\bar{\alpha}_2$ . Plus généralement, en composant des changements de variables de la forme

$$(128) \quad \begin{cases} (\xi, y) \mapsto (\xi, y + \gamma^{(i)}(\xi) y^i), \\ (1 + \chi)^i \gamma^{(i)}(\xi + \omega) - (1 + \chi) \gamma^{(i)}(\xi) + \alpha_i(\xi) = \bar{\alpha}_i = \int_0^1 \alpha_i(\xi) d\xi, \quad \text{et} \end{cases}$$

$$(129) \quad \begin{cases} (\xi, y) \mapsto (\xi + w^{(i)}(\xi) y^i, y), \\ (1 + \chi)^i w^{(i)}(\xi + \omega) - w^{(i)}(\xi) + \beta_i(\xi) = \bar{\beta}_i = \int_0^1 \beta_i(\xi) d\xi, \end{cases}$$

on rend indépendants de  $\xi$  tous les coefficients  $\alpha_i(\xi)$  et  $\beta_i(\xi)$  :

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_{\mu, a}(\eta, u) = (\eta + \omega + \sum_{i=1}^K \bar{\beta}_i u^i + O(|\tau_\omega|^K |u|^{K+1}), (1 + \chi) u \\ \quad + \sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i + O(|\tau_\omega|^K |u|^{K+1})), \\ \bar{\beta}_1 = \tau_\omega + O(|\tau_\omega|^{n-4}) \neq 0, \quad \bar{\beta}_i = O(|\tau_\omega|^{n-4}) \quad \text{pour } 2 \leq i \leq K, \\ \chi = \varepsilon' + O(|\tau_\omega|^{n-5}), \\ \bar{\alpha}_2 = s' + O(|\tau_\omega|^{n-4}), \quad \bar{\alpha}_i = a'_i + O(|\tau_\omega|^{n-4}) = O(|\tau_\omega|^{i-1} + |\tau_\omega|^{n-4}) \\ \quad \text{pour } 3 \leq i \leq K. \end{array} \right.$$

(Remarquons qu'on aurait eu à résoudre moins d'équations aux différences si on avait d'abord remplacé la première composante de  $\mathcal{I}_{\mu, a}$  par  $\xi + \omega + \tau_\omega x$  à l'aide d'un changement de variables analogue à (43)).

Lorsque  $(\mu, a)$  parcourt  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$ ,  $P_{\mu, a}$  coïncide avec  $\mathcal{I}_{\mu, a}$  et nous sommes dans une situation analogue à la situation résonante étudiée dans ([11], Théorème IV.2.2).

Généralisant cet article, nous allons démontrer par une étude de bifurcation à partir de  $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ , le théorème suivant (rappelons que d'après la démonstration du corollaire 2,  $(\chi, \bar{\lambda})$  est un système de coordonnées dans  $\mathcal{D}_\omega$ ) :

*Théorème 3. — On fait les hypothèses du corollaire 2. Soient  $\mathcal{A}_\omega$  et  $\mathcal{B}_\omega$  les deux parties de  $\mathcal{D}_\omega$  (fig. 12) définies par*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega &= \{(\chi, \bar{\lambda}) \in \mathcal{D}_\omega, \quad \chi^2 - 2\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda} \leq 0\}, \\ \mathcal{B}_\omega &= \{(\chi, \bar{\lambda}) \in \mathcal{D}_\omega, \quad \chi^2 - 5\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda} \geq 0\}. \end{aligned}$$

*Si  $(\mu, a) \in \mathcal{A}_\omega \cup \mathcal{B}_\omega$ ,  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à une forme normale ayant 0, 1, ou 2 cercles invariants suivant que  $(\mu, a) \in \mathcal{A}_\omega - \{\tilde{\gamma}_\omega\}$ ,  $(\mu, a) = \tilde{\gamma}_\omega$ , ou  $(\mu, a) \in \mathcal{B}_\omega - \{\tilde{\gamma}_\omega\}$ . Autrement dit,  $\mathcal{A}_\omega \cup \mathcal{B}_\omega \subset \mathcal{N}$ .*

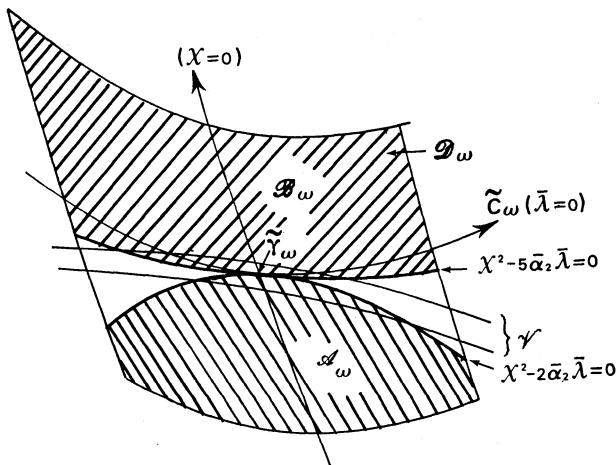


FIG. 12

Le corollaire suivant du théorème 3 (et du théorème 4, § 3) dit simplement que  $\tilde{C}_\omega \subset \mathcal{N}$  pour tous les  $\omega$  satisfaisant aux hypothèses des théorèmes 1 et 2; il n'en est pas moins étonnant (il rend en particulier caduque le résultat de [5], mais non celui de [6] et [9]):

*Corollaire.* — *Si  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée invariante continue coupant chaque demi-droite issue de 0 en un seul point, sur laquelle il induit un homéomorphisme dont le nombre de rotation satisfait aux hypothèses des théorèmes 1 et 2,  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à une forme normale. En particulier, si ladite courbe est normalement hyperbolique,  $P_{\mu, a}$  en possède nécessairement une seconde, également normalement hyperbolique, et de stabilité opposée.*

*Démonstration du théorème 3.*

1)  $P_{\tilde{\gamma}_\omega} \llcorner \tilde{\gamma}_\omega \llcorner \mathcal{N}_{\tilde{\gamma}_\omega}$ . La démonstration est évidente à partir de (130): au point  $\tilde{\gamma}_\omega$ , on a  $P_{\mu, a} = \mathcal{I}_{\mu, a}$  (i.e.  $\bar{\lambda} = 0$ ) et  $\chi = 0$ ; dans l'anneau  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$  défini en (117),  $\sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i + O(|\tau_\omega|^K |u|^{K+1}) < 0$  dès que  $u \neq 0$  (i.e. si on n'est pas sur la courbe invariante).

2) Lorsque  $(\mu, a)$  n'appartient pas à  $\tilde{C}_\omega$  (i.e. si  $\bar{\lambda} \neq 0$ ), il ne semble pas possible de mettre  $P_{\mu, a}$  sous une aussi jolie forme que  $\mathcal{I}_{\mu, a}$ .

L'idée de notre méthode est d'utiliser toute la force du théorème d'existence dans  $\mathcal{D}_\omega$  de la fonction de translation  $\bar{\lambda}$ : nous faisons sur  $P_{\mu, a}$  les changements de coordonnées que nous venons de décrire pour  $\mathcal{I}_{\mu, a}$ , et ce, même si  $(\mu, a)$  n'appartient pas à  $\tilde{C}_\omega$ . Nous obtenons ainsi une expression de  $P_{\mu, a}$  qui se réduit à (130) si  $(\mu, a)$  appartient à  $\tilde{C}_\omega$ : *en particulier, toute la dépendance angulaire des coefficients de  $u^i$ ,  $i \leq K$ , s'annule avec  $\bar{\lambda}$ .*

Plus précisément, on obtient pour  $P_{\mu, a}$  une expression de la forme

$$(131) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}(\eta, u) = (\eta', u'), \\ \eta' = \eta + \omega + \sum_{i=1}^K \bar{\beta}_i u^i + O(|\bar{\lambda}| |\tau_\omega|^{n-5} + |\tau_\omega|^K |u|^{K+1}), \\ u' = \bar{\lambda} + (1 + \chi) u + \sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i + O(|\bar{\lambda}| |\tau_\omega|^{n-5} + |\tau_\omega|^K |u|^{K+1}), \end{cases}$$

dans laquelle la dépendance non triviale en l'angle est tout entière dans les termes  $O(\dots)$  qui s'écrivent  $\bar{\lambda} \tau_\omega^{n-5} p(\eta, u) + \tau_\omega^K u^{K+1} q(\eta, u)$ , les fonctions  $p$  et  $q$  étant  $C^m$ -bornées indépendamment de  $(\mu, a)$  dans l'anneau  $|u| \leq \frac{1}{2}$  (et les bornes ne dépendant de  $\omega$  que par l'intermédiaire des constantes diophantiennes  $C$  et  $\beta$  du théorème 1).

Il ne reste plus qu'à moissonner les conséquences de (131).

Calculons

$$(132) \quad \begin{cases} u' - u = \bar{\lambda}[1 + O(|\tau_\omega|^{n-5})] + [\chi + \bar{\lambda}O(|\tau_\omega|^{n-5})] u \\ \quad + [\bar{\alpha}_2 + \bar{\lambda}O(|\tau_\omega|^{n-5})] u^2 + O(|\tau_\omega|^2 |u|^3). \end{cases}$$

Dans  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$  (qui est contenu dans un anneau de la forme  $|u| \leq C\rho_\omega$ ),  $u' - u$  est négatif dès que  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$  et

$$(133) \quad \bar{\lambda}[1 + O(|\tau_\omega|^{n-5})] + [\chi + \bar{\lambda}O(|\tau_\omega|^{n-5})]u + \frac{3}{4}\bar{\alpha}_2 u^2 < 0;$$

$$\left( \text{dans } \mathcal{D}_\omega, \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2(\omega, \mu, a) = \frac{2a_2(\gamma_\omega)}{b_1^2(\gamma_\omega)} \tau_\omega^2 + O(|\tau_\omega|^3) \text{ avec } \frac{2a_2(\gamma_\omega)}{b_1^2(\gamma_\omega)} = \frac{-2}{b_1^2(0, 0)} + O(|\omega - \omega_0|) < 0 \right).$$

Ceci est en particulier réalisé si le discriminant du trinôme (133) est négatif pour tout  $\eta$  (la variable  $\eta$  apparaît dans les  $O(|\tau_\omega|^{n-5})$ ), c'est-à-dire

$$(134) \quad [\chi + \bar{\lambda}O(|\tau_\omega|^{n-5})]^2 - 3\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}[1 + O(|\tau_\omega|^{n-5})] < 0,$$

qui est *a fortiori* vérifié si  $(\mu, a)$  appartient à  $\mathcal{A}_\omega - \{\tilde{\gamma}_\omega\}$ . On notera que l'annulation avec  $\bar{\lambda}$  des termes en  $O(|\tau_\omega|^{n-5})$  est fondamentale : on n'atteindrait autrement qu'une région n'allant pas jusqu'à  $\tilde{\gamma}_\omega$  et se trouvant même en dehors de  $\mathcal{V}$ , ce qui ôterait tout intérêt à la démarche.

Supposons enfin que  $(\mu, a)$  appartienne à  $\mathcal{B}_\omega - \{\tilde{\gamma}_\omega\}$  et notons  $\bar{N}_{\mu, a}$  la forme normale

$$(135) \quad \bar{N}_{\mu, a}(\eta, u) = (\eta + \omega + \sum_{i=1}^K \bar{\beta}_i u^i, \bar{\lambda} + (1 + \chi)u + \sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i)$$

dont  $P_{\mu, a}$  est de façon naturelle une perturbation dans l'anneau  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$ . On a les estimations  $\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda} > 0$  et  $-\frac{1}{4} \leq \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}} \leq 1$ . En particulier,

$$(136) \quad \begin{cases} |\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}| \leq \chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}, \\ |-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}| \leq (1 + \sqrt{5}) \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}. \end{cases}$$

Si  $(\mu, a)$  appartient à  $\mathcal{B}_\omega - \{\tilde{\gamma}_\omega\}$ ,  $\bar{N}_{\mu, a}$  possède deux cercles invariants,  $u = u^+$  et  $u = u^-$ , dont on peut estimer la taille :

$$(137) \quad u^\pm = u_0^\pm + \frac{O(|\tau_\omega|^2 |u_0^\pm|^3)}{\sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}} = u_0^\pm + O(|u_0^\pm|^2), \quad u_0^\pm = \frac{-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}}{2\bar{\alpha}_2}.$$

(Ces formules sont naturelles : si par exemple  $u_0^+ = 0$ ,  $\bar{\lambda} = 0$  donc  $u^+ = 0$ ; de plus, trouver toujours deux cercles ne doit pas nous étonner puisque les estimations du paragraphe 1.4 montrent que  $\mathcal{D}_\omega$  est dans la partie  $\mu < 0$ ,  $a > 0$  du plan  $(\mu, a)$ .)

On commence par définir deux anneaux, voisinages respectifs de ces deux cercles, hors desquels il est évident que  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à  $\bar{N}_{\mu, a}$ , puis on conclut dans ces sous-anneaux par la méthode des transformées de graphes : cette démarche est analogue à celle qui a permis de définir  $\mathcal{V}$  et est utilisée également dans l'appendice (dans une situation plus simple). Les bords des deux sous-anneaux sont de la forme  $u = u_0$ , où  $u_0$  est une racine de l'une des équations

$$(138^\pm) \quad \bar{\lambda} + \chi u + \sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i \pm (|\tau_\omega|^p |\bar{\lambda}| + |\tau_\omega|^{K-\frac{1}{2}} |u|^{K+1}), \quad p \leq n-6.$$

Dans l'anneau  $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$ , le terme  $|\tau_\omega|^p |\bar{\lambda}| + |\tau_\omega|^{K-\frac{1}{2}} |u|^{K+1}$  l'emporte sur la perturbation  $O(|\bar{\lambda}| |\tau_\omega|^{n-5} + |\tau_\omega|^K |u|^{K+1})$ , ce qui permet de contrôler la composante radiale de la dynamique à l'extérieur des deux sous-anneaux (comparer au § 3.1). La figure 13 (à comparer à la figure 5) montre les sous-anneaux pour les différentes valeurs de  $(\mu, a) \in \mathcal{B}_\omega$  et indique la dynamique radiale dans leur complémentaire (tout étant invariant par rotation, on n'a pas représenté la variable angulaire).

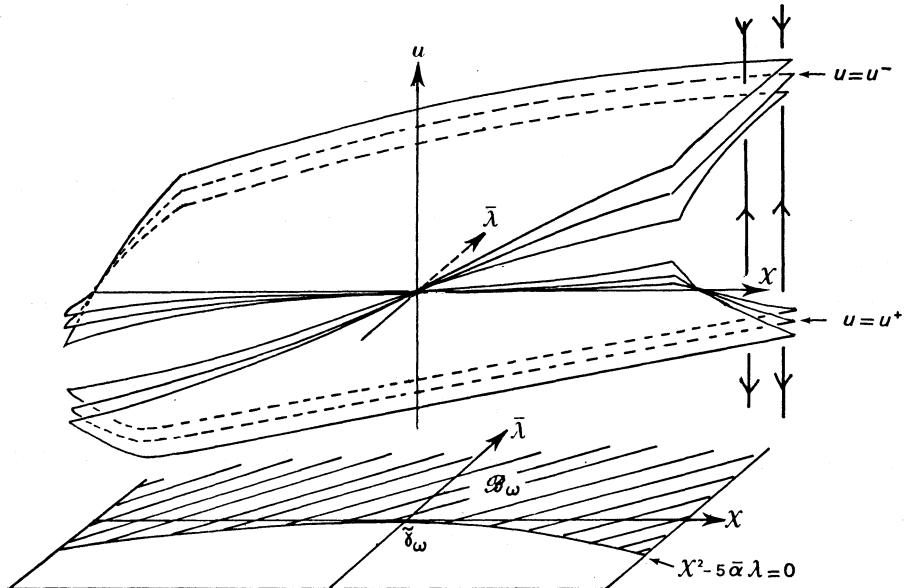


FIG. 13

Une évaluation simple montre que l'épaisseur  $E^\pm$  de chacun des sous-anneaux admet une majoration de la forme

$$(139) \quad E^\pm \leq C \frac{|\tau_\omega|^p |\bar{\lambda}| + |\tau_\omega|^{K-\frac{1}{2}} |u^\pm|^{K+1}}{\sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}\bar{\lambda}}} \quad (C \text{ est une constante});$$

on en déduit, en utilisant (136) et (41), que

$$(140) \quad E^\pm \leq C \rho_\omega \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}$$

dès que  $p \geq \frac{5}{2}$  et  $(\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda})^{\frac{K-1}{2}} < C |\tau_\omega|^{K+3}$ .

Puisque  $|\chi|$  et  $|\bar{\lambda}|$  sont majorés dans  $\mathcal{B}_\omega$  par  $C |\tau_\omega|^3$ , (140) est vérifié dès que  $p \geq \frac{5}{2}$  et  $K \geq 4$ , ce que l'on supposera.

Pour appliquer la méthode des « transformées de graphes » (voir par exemple [12]

ou [19], ainsi que le paragraphe 3) on fait un dernier changement de variables. Soit  $\pi(u)$  le polynôme défini par

$$(141) \quad \pi(u) = \pi_{\mu, a}(u) = \bar{N}_{\mu, a}(u) - u = \bar{\lambda} + \chi u + \sum_{i=2}^K \bar{\alpha}_i u^i;$$

on note  $\pi'(u)$  sa dérivée, c'est-à-dire

$$(142) \quad \pi'(u) = \chi + \sum_{i=2}^K i \bar{\alpha}_i u^{i-1} = \chi + 2\bar{\alpha}_2 u + O(\tau_\omega^2 u^2),$$

et on pose

$$(143) \quad u = u^\pm + \pi'(u^\pm) w.$$

On déduit de (137) que

$$(144) \quad \pi'(u^\pm) = \pm \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}} + O(\tau_\omega^2 |u_0^\pm|^2)$$

qui, grâce à (136) et à la majoration  $|u_0^\pm| \leq C_{\rho_\omega}$  valable dans  $\mathcal{B}_\omega$ , s'écrit

$$(145) \quad \pi'(u^\pm) = \pm \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}} + O(\rho_\omega \sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}).$$

Remarquons qu'une évaluation analogue fournit

$$(146) \quad u^+ - u^- = \frac{\sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}}{2\bar{\alpha}_2} + O\left(\rho_\omega \frac{\sqrt{\chi^2 - 4\bar{\alpha}_2 \bar{\lambda}}}{2\bar{\alpha}_2}\right);$$

Si on compare (143) au changement de variables plus classique (A4) du paragraphe 3, on constate que le rayon du cercle invariant de la forme normale est maintenant remplacé par la distance entre les deux cercles invariants de la forme normale; celle-ci définit en effet la taille des bassins d'attraction ou de répulsion de ces cercles.

Dans l'anneau  $|w| \leq 1$ , le difféomorphisme  $P_{\mu, a}$  s'écrit

$$(147) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}(\eta, w) = (\eta', w'), \\ \eta' = \eta + \omega + \square(u^\pm) + O(|\tau_\omega \pi'(u^\pm)|) + O(|\bar{\lambda}| |\tau_\omega|^{n-5} + |\tau_\omega|^K |u|^{K+1}), \\ w' = (1 + \pi'(u^\pm)) w + O(|\tau_\omega^2 \pi'(u^\pm)|) + O\left(\frac{|\bar{\lambda}| |\tau_\omega|^{n-5}}{|\pi'(u^\pm)|} + \frac{|\tau_\omega|^K |u|^{K+1}}{|\pi'(u^\pm)|}\right). \end{cases}$$

De majorations identiques à celles faites pour  $E^\pm$  on déduit que si  $n \geq 8$  et  $K \geq 4$ , on a

$$(148) \quad \begin{cases} \eta' = \eta + \omega + \square(u^\pm) + O(\rho_\omega |\pi'(u^\pm)|), \\ w' = (1 + \pi'(u^\pm)) w + O(\rho_\omega |\pi'(u^\pm)|). \end{cases}$$

La méthode s'applique alors sans difficulté dans l'anneau  $|w| \leq 1$  et fournit au voisinage de  $u^-$  (resp.  $u^+$ ) une courbe fermée invariante de  $P_{\mu, a}$  dont le bassin d'attraction (resp. répulsion) contient l'anneau  $|w| \leq 1$  (comparer au § 3). La comparaison de (145)

à (140) montre que cet anneau contient, si  $\omega$  est assez proche de  $\omega_0$ , l'anneau d'épaisseur  $E^-$  (resp.  $E^+$ ) introduit en (138 $^\pm$ ); le théorème 3 est donc démontré.

*Remarque.* — Les courbes invariantes ainsi obtenues sont de classe  $C^m$  avec  $m$  d'autant plus grand que  $\omega$  est proche de  $\omega_0$  (ne pas oublier que dans les estimations (148) les  $O(\dots)$  sont valables dans toute topologie  $C^m$  mais avec des majorations dépendant de  $m$ ).

**APPENDICE. COURBES INVARIANTES  
NORMALEMENT HYPERBOLIQUES  
OBTENUES PAR LA MÉTHODE  
DES « TRANSFORMÉES DE GRAPHES »**

**3.1. Existence et bassins**

Il s'agit d'étudier  $P_{\mu, a}$  (défini en (11)) pour des valeurs de  $(\mu, a)$  appartenant à  $\mathcal{H}$  (figure 5) et de montrer que  $P_{\mu, a}$  « ressemble » à la forme normale  $N_{\mu, a}$  au sens du § 2.3 : contrairement à ce qu'on a fait dans  $\mathcal{V}$ , c'est bien pour la même valeur de  $(\mu, a)$  qu'on compare les applications  $P$  et  $N$ ; bien entendu ceci n'est possible que parce que nous ne comparons que les dynamiques normales et non les dynamiques sur les courbes invariantes.

La méthode étant classique (voir par exemple [12] ou [19]), nous ne donnons, comme au § 2.3, que de rapides indications.

N.B. — Comme précédemment, « courbe lipschitzienne » (resp. « courbes  $C^k$  ») désigne le graphe dans  $\mathbf{R}^2 - \{O\} \cong \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  d'une application lipschitzienne (resp.  $C^k$ ) de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$ .

*Théorème 4.* —  $n \geq 6$  étant fixé, il existe un voisinage  $\mathcal{U}_n$  de  $(0, 0)$  dans le plan  $(\mu, a)$  et un voisinage  $\Omega_n$  de  $0$  dans  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$  ayant les propriétés suivantes :

- o) Si  $(\mu, a) \in \mathcal{U}_n$  est en dessous de la région limitée par la demi-droite  $\mu = 0, a \leq 0$  et la courbe  $\Gamma_n^+$  (voir figure 5), et si  $z \in \Omega_n$ , il en est de même de  $P_{\mu, a}(z)$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_{\mu, a}^m(z) = 0$  : en particulier  $P_{\mu, a}$  ne possède aucune courbe fermée invariante non triviale dans  $\Omega_n$ .
- 1) Si  $(\mu, a) \in \mathcal{U}_n$  vérifie  $\mu > 0, P_{\mu, a}$  possède dans  $\Omega_n$  une courbe fermée lipschitzienne invariante normalement hyperbolique et attractante dont le bassin d'attraction contient  $\Omega_n - \{0\}$ .
- 2) Si  $(\mu, a) \in \mathcal{U}_n$  est contenu dans l'intérieur de la région bordée par la demi-droite  $\mu = 0, a \geq 0$  et la courbe  $\Gamma_{n-3}^-$ ,  $P_{\mu, a}$  possède dans  $\Omega_n$  deux courbes fermées lipschitziennes invariantes normalement hyperboliques, l'une attractante, l'autre répulsive, et la réunion du bassin d'attraction de la première et du bassin de répulsion de la deuxième contient  $\Omega_n - \{0\}$ .

*Complément.* — Il existe une filtration  $\dots \mathcal{U}_{n, k+1} \subset \mathcal{U}_{n, k} \subset \dots \subset \mathcal{U}_{n, 1} \subset \mathcal{U}_n$  de  $\mathcal{U}_n$  par des voisinages de  $(0, 0)$  telle que si  $(\mu, a) \in \mathcal{U}_{n, k}$  les courbes fermées de 1) et 2) soient de classe  $C^k$ .

*Esquisse de démonstration du théorème 4*

o) La région indiquée est caractérisée par la propriété suivante : pour tout  $r$  assez voisin de 0 et tout  $(\mu, a)$  assez voisin de  $(0, 0)$ ,  $f_n^+(\mu, a, r^2) \leq 0$ , c'est-à-dire

$$(A1) \quad f(\mu, a, r^2) \leq -r^{2n}.$$

Ceci implique que pour tout  $z$  assez voisin de 0 dans  $\mathbf{C}$  et tout  $(\mu, a)$  assez voisin de  $(0, 0)$ , on ait

$$(A2) \quad \begin{cases} |P_{\mu, a}(z)| = |z| \cdot |1 + f(\mu, a, |z|^2) + O(|z|^{2n+2})| \\ \leq |z| \cdot \left(1 - \frac{1}{2} |z|^{2n}\right). \end{cases}$$

La conclusion suit aisément (nous avons déjà fait ce raisonnement au § 1.2).

1) et 2) Soit  $r = r(\mu, a)$  une solution proche de 0 de l'équation

$$(A3) \quad f(\mu, a, r^2) = 0,$$

qu'on pourra suivre par continuité sans ambiguïté si  $(\mu, a)$  est au-dessus de  $\Gamma_p^-$ . Le changement de variables (comparer à (30))

$$(A4) \quad z = r e^{2\pi i \theta}, \quad r = r(\mu, a) \sqrt{1 + \alpha \sigma}$$

transforme  $P_{\mu, a}$  en un plongement de  $\mathbf{T}^1 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  ( $\mathbf{T}^1 \times [-1, +1]$  si  $\alpha < 1$ ) dans  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  de la forme

$$(A5) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}(\theta, \sigma) = (\Theta, \Sigma), \\ \Theta = \theta + \omega(\mu, a) + \tau(\mu, a) \alpha \sigma + r(\mu, a)^4 T(\mu, a, \alpha \sigma) \\ \quad + r(\mu, a)^{2n+2} u(\mu, a, \theta, \alpha \sigma), \\ \Sigma = [1 + 2\bar{\delta}(\mu, a)] \sigma + 2\bar{\delta}(\mu, a) \alpha \sigma^2 + \frac{r(\mu, a)^4}{\alpha} S(\mu, a, \alpha \sigma) \\ \quad + \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\alpha} v(\mu, a, \theta, \alpha \sigma) \end{cases}$$

(comparer à (32) ;  $\bar{\delta}$  et  $\tau$  sont définis comme en (31) au remplacement près de  $r(\omega, \mu, a)$  par  $r(\mu, a)$  ;  $\omega(\mu, a) = g(\mu, a, r(\mu, a)^2)$  ;  $T(\mu, a, X)$  et  $S(\mu, a, X)$  sont des polynômes en  $X$  à coefficients  $C^\infty$  en  $(\mu, a)$ , commençant par un terme de degré supérieur ou égal à 2).

En particulier, si

$$(A6) \quad \alpha = \bar{\delta}(\mu, a), \quad \text{et si}$$

$$(A7) \quad r(\mu, a)^{2n+2} = o(\bar{\delta}(\mu, a)^2),$$

on obtient

$$(A8) \quad \begin{cases} \Theta = \theta + \omega(\mu, a) + o(\bar{\delta}(\mu, a)), \\ \Sigma = [1 + 2\bar{\delta}(\mu, a)] \sigma + o(\bar{\delta}(\mu, a)), \end{cases}$$

ce qui permet d'appliquer la méthode des « transformées de graphes » dans l'anneau  $|\sigma| \leq 1$  pourvu que  $\bar{\delta}(\mu, a)$  soit assez petit (on comparera (A8) à (38)).

Il s'agit donc de comparer  $\bar{\delta}(\mu, a) = \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, r(\mu, a)^2) r(\mu, a)^2$  à une puissance de  $r(\mu, a)$ .

Si  $a \leq 0$ , il est clair que, au voisinage de  $(\mu, a) = (0, 0)$ , on a

$$(A9) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \right| \geq 2(|a| + 2r(\mu, a)^2) \geq kr(\mu, a)^2.$$

Si  $a > 0$ , et si  $(\mu, a)$  est au-dessus de  $\Gamma_p^-$ , on a

$$(A10) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \right| \geq kr(\mu, a)^p,$$

où  $k$  est une constante.

Pour voir ce dernier point, introduisons  $M$  et  $R$  par les formules (voir fig. 14)

$$(A11) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial X}(M, a, R^2) \right| = 0, \quad f(M, a, R^2) = 0.$$

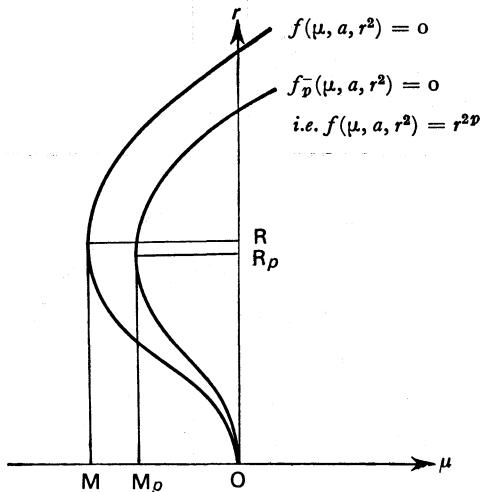


Fig. 14 :  $a > 0$  est fixé

Des développements limités de  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial X}$  au voisinage de  $(M, a, R^2)$  montrent que,

si  $f(\mu, a, R^2) = 0$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, a, R^2) \right|$  est de l'ordre de  $|R^2 - R_p^2|$ , ou encore de  $|\mu - M|^{1/2}$ . D'autre part, si on définit  $M_p$  et  $R_p$  (fig. 14) par  $\frac{\partial f_p^-}{\partial X}(M_p, a, R_p^2) = 0$ ,  $f_p^-(M_p, a, R_p^2) = 0$

(où  $f_p^-(\mu, a, X) = f(\mu, a, X) - X^p$ ), des calculs analogues montrent que  $|M_p - M|$  est d'ordre  $R^{2p}$ . L'estimation (A10) se montre alors facilement en remarquant que

$\left| \frac{\partial f}{\partial X} (\mu, a, r(\mu, a)^2) \right| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial X} (M_p, a, r(M_p, a)^2) \right|$  si  $M_p \leq \mu \leq 0$  et qu'on peut supposer  $r(\mu, a) \leq 3R$  dans le domaine considéré.

Pour obtenir (A7) (et donc (A8)), il suffit que  $r(\mu, a)^{2n+2} = o(r(\mu, a)^{2p+4})$ , qui est vérifié dès que  $p \leq n-2$ .

Le raisonnement classique de « transformée de graphes » nous fournit alors une courbe invariante lipschitzienne dont le bassin d'attraction (ou de répulsion) contient l'anneau  $|\sigma| \leq 1$  entourant le cercle  $r = r(\mu, a)$ . La largeur de cet anneau est de l'ordre de  $r(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a) \geq kr(\mu, a)^{p+3}$ .

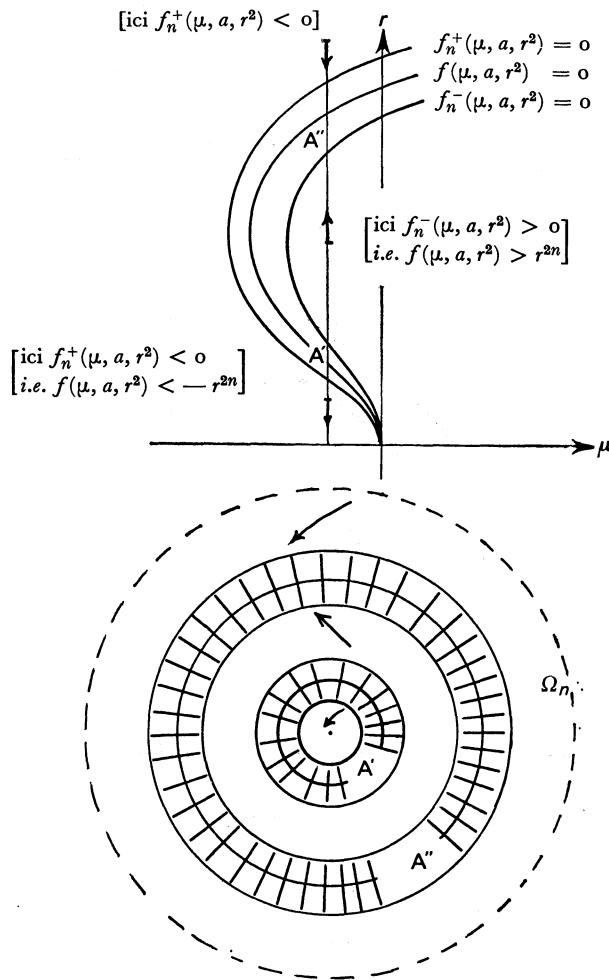


FIG. 15 : cas où  $a > 0$

Pour avoir le résultat global sur les bassins, remarquons que les équations  $f_n^\pm(\mu, a, r^2) = 0$  définissent des voisinages tubulaires des cercles  $r = r(\mu, a)$  (figure 15)

dont la largeur est majorée par  $\frac{r(\mu, a)^{2n+1}}{|\bar{\delta}(\mu, a)|}$  et qui sont donc contenues dans les domaines d'attraction (ou de répulsion) des courbes invariantes de  $P_{\mu, a}$  dès que  $\frac{r(\mu, a)^{2n+1}}{|\bar{\delta}(\mu, a)|} \leq k' r(\mu, a)^{p+3}$  qui, d'après (A9) et (A10), est sûrement vérifiée si  $p \leq n - 3$ .

Une estimation analogue à celle faite en (A2) (voir § 1.2 ou [8]) montre alors que la réunion des bassins d'attraction et de répulsion de ces voisinages tubulaires couvre un voisinage uniforme de  $o$  dans  $\mathbf{C}$  (à l'exception du point  $\{o\}$ ) (voir fig. 15), ce qui démontre les parties 1 et 2 du théorème 4.

Enfin, le complément est classique à partir de (A8) si on remarque que les  $\circ(|\bar{\delta}(\mu, a)|)$  sont valables dans la topologie  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq +\infty$ . Bien entendu,  $|\bar{\delta}(\mu, a)|$  doit être supposé d'autant plus petit que  $k$  est grand. La forme des voisinages  $\mathcal{U}_n$  ou  $\mathcal{U}_{n,k}$  est donc dictée par celles des lignes de niveau de la fonction  $(\mu, a) \mapsto \bar{\delta}(\mu, a)$  : ces lignes de niveau sont représentées sur la figure 16 (il y a deux cas suivant que  $r(\mu, a)$  correspond au cercle invariant répulsif ou au cercle invariant attractif de  $N_{\mu, a}$ ).

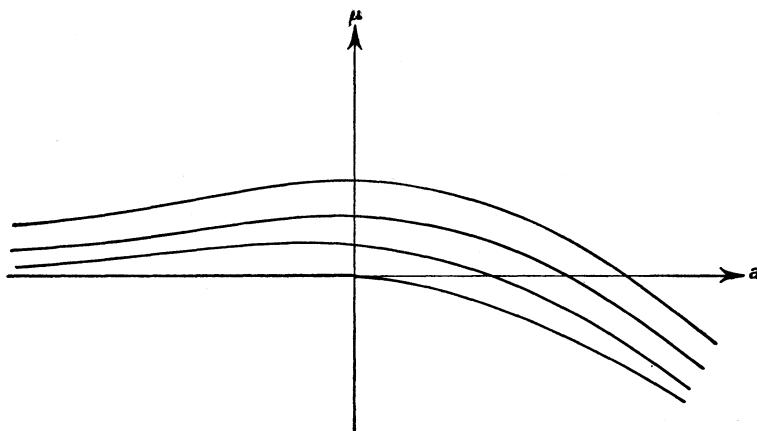


FIG. 16.1 : cercle attractant

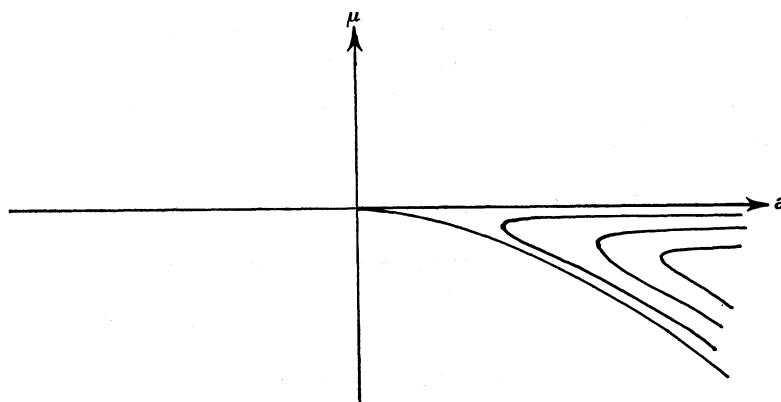


FIG. 16.2 : cercle répulsif

*Remarques.* — (1) Les domaines couverts respectivement par les théorèmes 2 et 3 et par le théorème 4 se recouvrent dès que  $\rho$  est choisi assez grand (*i.e.* la figure 12 est réaliste).

(2) La méthode des transformées de graphes ne fournit dans les théorèmes 3 et 4 que des courbes invariantes de classe  $C^k$  ( $k$  fini, d'autant plus grand que  $(\mu, a)$  est proche de  $(0, 0)$ ).

Si la restriction  $h$  de  $P_{\mu, a}$  à une telle courbe invariante  $C$  a des points périodiques hyperboliques, il n'y a pas d'espoir de trouver mieux par une autre méthode, car le comportement de  $P_{\mu, a}$  normalement à  $C$  ne l'emporte sur le comportement de  $P'_{\mu, a}$  tangentielle à  $C$  (*c'est-à-dire* sur le comportement de  $h'$ ) que si  $r \leq k$  pour un certain  $k$  fini, d'autant plus grand que  $(\mu, a)$  est proche de  $(0, 0)$  (puisque alors  $h$  est proche d'une rotation).

Au contraire, si le nombre de rotation de  $h$  est irrationnel et si  $C$  est de classe  $C^1$ , on déduit de [16] que  $C$  est  $C^\infty$  : le comportement de n'importe quel itéré de  $h$  est en effet sous-exponentiel [14] alors que le comportement de  $P_{\mu, a}$  normalement à  $C$  est exponentiel (hyperbolicité normale).

Lorsqu'on entre dans le voisinage effilé  $\mathcal{V}$  de  $\Gamma$ , on peut s'attendre à ce que les courbes correspondant à la première situation perdent leur régularité jusqu'à disparaître au profit de connexions homoclines transversales; c'est bien ce qui se passe génériquement : nous l'avons montré dans [3] et le détaillerons prochainement dans [10]. On en déduit que certaines courbes correspondant à la deuxième situation disparaissent également dans  $\mathcal{V}$ . Elles sont alors remplacées par des ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather (voir [6] et [9]) mais la manière dont elles disparaissent génériquement est loin d'être élucidée.

### 3.2. Nombres de rotation

Nous établissons dans ce paragraphe la forme des ensembles  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  ( $\mathcal{H}$  désigne ici le complémentaire de  $\mathcal{V}$  défini par  $\Gamma_n^+$  et  $\Gamma_{n-3}^-$  dans le  $\mathcal{U}_n$  du théorème 4 ou dans un voisinage de  $(0, 0)$  éventuellement plus petit).

Dans le cas où les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites, nous en déduisons la forme globale de  $\tilde{C}_\omega$ .

*Théorème 5.* —  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  a autant de composantes connexes que  $C_\omega \cap \mathcal{H}$  (une si  $\frac{1}{\eta_0}(\omega - \omega_0) \leq 0$ , deux sinon) et est contenu dans un voisinage effilé de  $C_\omega \cap \mathcal{H}$  de la forme  $|\omega(\mu, a) - \omega| \leq \text{constante} \times \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\delta(\mu, a)}$  ( $= \circ(|\bar{\delta}(\mu, a)|)$ ; en un point  $(\mu, a)$  voisin de  $(\mu_0, a_0) \in C_\omega \cap \mathcal{H}$ ,  $r(\mu, a)$  est défini sans ambiguïté par continuité à partir du rayon  $r(\mu_0, a_0)$  du cercle invariant sur lequel  $N_{\mu_0, a_0}$  induit la rotation  $R_\omega$ ).

De plus :

- 1) Si  $\omega$  est irrationnel, chaque composante de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  est une courbe lipschitzienne, graphe d'une fonction  $\mu = \mu(a)$  dont le rapport de Lipschitz est uniformément borné indépendamment de  $(\omega, \mu, a)$  voisin de  $(\omega_0, 0, 0)$ .
- 2) Si  $\omega$  est rationnel, chaque composante de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  est en général « épaisse » (morceau de « langue d'Arnold », voir figure 17.2).

*Corollaire.* — Si les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites,  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{U}_{n,1}$  est une courbe  $C^\infty$  connexe proche de  $C_\omega$  et correspond à des valeurs de  $(\mu, a)$  pour lesquelles  $P_{\mu, a}$  possède une courbe fermée  $C^\infty$  invariante  $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  telle que  $P_{\mu, a} \mid \tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$  soit  $C^\infty$ -conjuguée à la rotation  $R_\omega$ .

La figure 17 résume le théorème 5 et le corollaire dans le cas de la figure 6.1 :

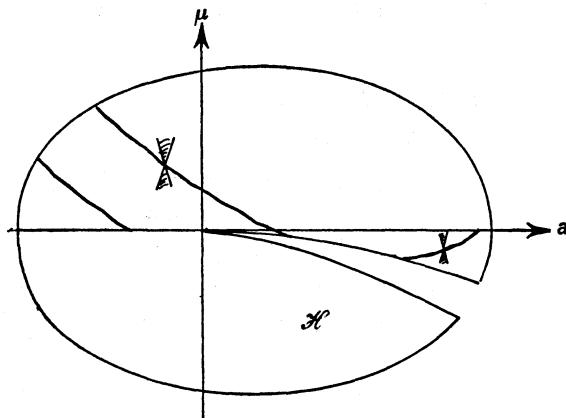


FIG. 17.1 :  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ ,  $\omega$  irrationnel

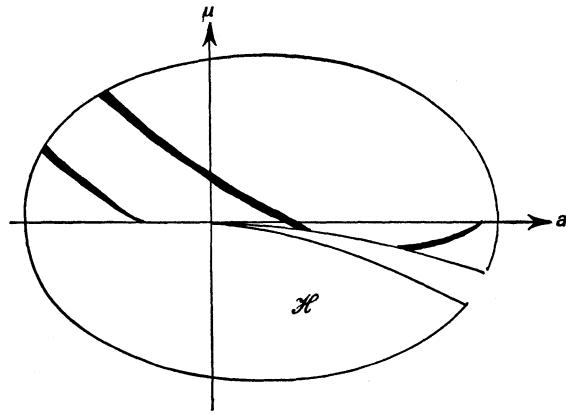
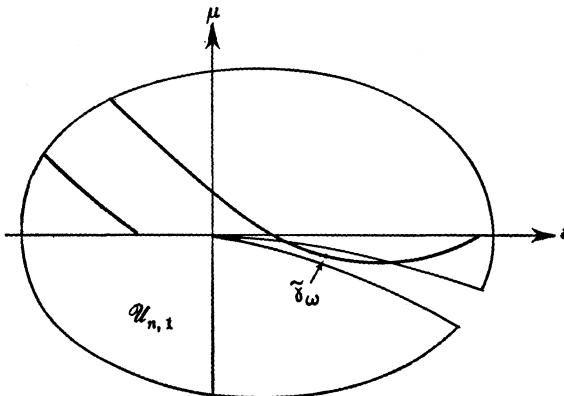


FIG. 17.2 :  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ ,  $\omega$  rationnel

FIG. 17.3 :  $\tilde{C}_\omega \cap U_{n,1}$ ,  $\omega$  diophantien

*Démonstration du théorème 5.* — La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté particulière : l'estimation du voisinage effilé de  $C_\omega \cap \mathcal{H}$  contenant  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  est immédiate à partir de l'estimation en  $O\left(\frac{r(\mu, a)^{2n+1}}{\delta(\mu, a)}\right)$  de la largeur de l'anneau découpé par  $f_n^\pm(\mu, a, r^2) = 0$  autour du cercle  $r = r(\mu, a)$  : il en résulte en effet que le nombre de rotation sur une courbe fermée invariante contenue dans cet anneau et coupant chaque demi-droite issue de 0 en un seul point est compris entre

$$\omega(\mu, a) - \text{constante} \times \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\delta(\mu, a)} \quad \text{et} \quad \omega(\mu, a) + \text{constante} \times \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\delta(\mu, a)}$$

(bien entendu, l'estimation  $|\omega(\mu, a) - \omega| \leq \circ(|\delta(\mu, a)|)$  était une conséquence directe de (A8)).

En ce qui concerne le nombre et la forme des composantes connexes de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ , on suit la démonstration qu'a donnée Hall [12] dans le cas de la bifurcation de Hopf classique; nous laisserons donc au lecteur la vérification des majorations annoncées. L'idée est essentiellement de montrer la monotonie aux valeurs irrationnelles de la fonction « nombre de rotation » lorsque,  $a$  étant fixé,  $\mu$  varie et qu'on suit continûment l'une des courbes fermées invariantes de  $P_{\mu, a}$  (par exemple celle qui est attractante). Cette monotonie étant assurée pour la famille de formes normales  $N_{\mu, a}$ , il suffit de montrer que la perturbation apportée par le passage de  $N_{\mu, a}$  à  $P_{\mu, a}$  ne la détruit pas. En fait, on montre que cette monotonie est vérifiée dans tout  $\mathcal{H}$  pourvu que  $(\mu, a)$  se déplace dans un certain cône d'axe vertical (figure 17.1).

On est amené pour cela à comparer les restrictions  $h_1 = g_{\mu, a}$  et  $h_2 = g_{\mu + \Delta\mu, a + \Delta a}$  de  $P_{\mu, a}$  et  $P_{\mu + \Delta\mu, a + \Delta a}$  à une de leurs courbes fermées invariantes et à montrer une relation du type  $h_1(\theta) > h_2(\theta)$  (resp.  $h_1(\theta) < h_2(\theta)$ ) pour tout  $\theta$  dès que  $(\mu + \Delta\mu, a + \Delta a)$  est dans le cône centré sur  $(\mu, a)$  (voir (A25)). On conclut comme dans [12] en utilisant la remarque 4.1.5 du chapitre III de [14].

Techniquement, il est commode de travailler dans les coordonnées  $\theta, \sigma$  définies par (A4), c'est-à-dire avec l'application  $P_{\mu, a}$  définie par (A5) : ces coordonnées sont centrées sur un cercle invariant  $r = r(\mu, a)$  de  $N_{\mu, a}$  qu'on suivra par continuité lorsque  $(\mu, a)$  varie dans  $\mathcal{H}$ . Comme en 3.1 on choisit  $\alpha = \bar{\delta}(\mu, a)$ .

Les estimations principales sont les suivantes : si  $\sigma = \xi_{\mu, a}(\theta)$  est une courbe fermée invariante de  $P_{\mu, a}$  et si  $(\mu, a) \in \mathcal{H}$ , on a

$$(A12) \quad \|\xi_{\mu, a}\|_{C^0} \leq A_0 \frac{r(\mu, a)^{2n}}{\bar{\delta}(\mu, a)^2},$$

$$(A13) \quad \text{Lip } \xi_{\mu, a} \leq A_1 \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)^2},$$

où  $A_0, A_1$  sont des constantes indépendantes de  $(\mu, a)$  assez voisin de  $(0, 0)$  et

$$\|\xi\|_{C^0} = \sup_{\theta \in \mathbf{T}^1} |\xi(\theta)|, \quad \text{Lip } \xi = \sup_{\theta_1 \neq \theta_2 \in \mathbf{T}^1} \frac{|\xi(\theta_1) - \xi(\theta_2)|}{|\theta_1 - \theta_2|}$$

(dans la définition de  $\text{Lip } \xi$  on peut considérer  $\theta$  comme une variable réelle).

Remarquons qu'au-dessus de  $\Gamma_{n-3}^-$  on a, d'après les estimations précédentes,  $\bar{\delta}(\mu, a) \geq \text{constante} \times r(\mu, a)^{n-1}$ , donc  $\|\xi_{\mu, a}\|_{C^0} \leq \text{constante} \times r(\mu, a)^2$  et  $\text{Lip } \xi_{\mu, a} \leq \text{constante} \times r(\mu, a)^4$ .

(A12) découle du raisonnement précédent (taille des anneaux découpés par  $f_n^\pm(\mu, a, r^2) = 0$ ); (A13) vient d'une estimation directe sur l'équation fonctionnelle qui exprime l'invariance de  $\xi_{\mu, a}$ , c'est-à-dire

$$(A14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_{\mu, a}(g_{\mu, a}(\theta)) = [1 + 2\bar{\delta}(\mu, a)] \xi_{\mu, a}(\theta) + 2\bar{\delta}(\mu, a)^2 \xi_{\mu, a}(\theta)^2 \\ \quad + \frac{r(\mu, a)^4}{\bar{\delta}(\mu, a)} S(\mu, a, \bar{\delta}(\mu, a) \xi_{\mu, a}(\theta)) \\ \quad + \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)} v(\mu, a, \theta, \bar{\delta}(\mu, a) \xi_{\mu, a}(\theta)), \end{array} \right.$$

où on a noté  $g_{\mu, a}$  l'homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1$  induit par  $P_{\mu, a}$  sur le graphe de  $\xi_{\mu, a}$  :

$$(A15) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\mu, a}(\theta) = \theta + \omega(\mu, a) + \tau(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a) \xi_{\mu, a}(\theta) \\ \quad + r(\mu, a)^4 T(\mu, a, \bar{\delta}(\mu, a) \xi_{\mu, a}(\theta)) \\ \quad + r(\mu, a)^{2n+2} u(\mu, a, \theta, \bar{\delta}(\mu, a) \xi_{\mu, a}(\theta)). \end{array} \right.$$

Supposons  $\bar{\delta}(\mu, a) > 0$  (courbe répulsive; l'autre cas est analogue) et notons  $\ell = \text{Lip } \xi_{\mu, a} > 0$ ,  $M_+ = \text{Lip } g_{\mu, a} > 0$ ,  $m = \|\xi_{\mu, a}\|_{C^0} > 0$ .

*Remarque importante.* — D'après (A12) et la remarque qui suit, on a

$$m \leq \text{constante} \times r(\mu, a)^2 = o(1).$$

D'autre part,  $\xi_{\mu, a}$  est point fixe de la « transformée de graphes » qui est une contraction sur l'espace des fonctions  $\sigma = \sigma(\theta)$  de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  qui vérifient  $\|\sigma\|_{C^0} \leq 1$  et  $\text{Lip } \sigma \leq 1$  ([8], [19]). On sait donc *a priori* que  $0 \leq \ell \leq 1$ .

On déduit de (A14) et (A15) les estimations

$$(A16) \quad \left\{ \begin{array}{l} [1 + 2\bar{\delta}(\mu, a)]\ell \leq \ell M_+ + 4\bar{\delta}(\mu, a)^2 m\ell \\ \quad + r(\mu, a)^4 \sum_{i=2}^n (K_i \bar{\delta}(\mu, a)^{i-1} i m^{i-1}) \ell + \bar{K} \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)}, \end{array} \right.$$

$$(A17) \quad \begin{aligned} M_+ \leq 1 + \tau(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a) \ell + r(\mu, a)^4 \sum_{i=2}^n (L_i \bar{\delta}(\mu, a)^i i m^{i-1}) \ell \\ \quad + \bar{L} r(\mu, a)^{2n+2}, \end{aligned}$$

où  $K_i, L_i, \bar{K}, \bar{L}$  sont des constantes indépendantes de  $(\mu, a)$  assez voisin de  $(0, 0)$ .

On peut encore les écrire

$$(A'16) \quad [1 + 2\bar{\delta}(\mu, a) - o(\bar{\delta}(\mu, a)) - M_+] \ell \leq \bar{K} \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)},$$

$$(A'17) \quad M_+ \leq 1 + [|\tau(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a)| + o(|\tau(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a)|)] \ell + \bar{L} r(\mu, a)^{2n+2}.$$

Si  $(\mu, a)$  est assez proche de  $(0, 0)$  on en déduit

$$(A18) \quad -2|\tau(\mu, a) \bar{\delta}(\mu, a)|\ell^2 + \bar{\delta}(\mu, a) \ell - K \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)} \leq 0,$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $(\mu, a)$ .

Sachant *a priori* que  $0 \leq \ell \leq 1$  (remarque ci-dessus) on en déduit immédiatement

$$(A19) \quad \ell \leq \frac{1}{4|\tau(\mu, a)|} \left[ 1 - \sqrt{1 - 8K|\tau(\mu, a)| \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)^2}} \right]$$

et donc (A13).

Nous aurons également besoin des identités obtenues en dérivant les identités  $f(\mu, a, r(\mu, a)^2) = 0$  et  $g(\mu, a, r(\mu, a)^2) = \omega(\mu, a)$  :

$$(A20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu, a) = -\frac{1}{2} \frac{r(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} \frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \\ \quad = -\frac{1}{2} \frac{r(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} (1 + O(r(\mu, a)^4)), \\ \frac{\partial r}{\partial a}(\mu, a) = -\frac{1}{2} \frac{r(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} \frac{\partial f}{\partial a}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \\ \quad = -\frac{1}{2} \frac{r(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} (r(\mu, a)^2 + O(r(\mu, a)^4)). \end{array} \right.$$

$$(A_{21}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \mu}(\mu, a) = \frac{\partial g}{\partial \mu}(\mu, a, r(\mu, a)^2) - \frac{\tau(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} \frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \\ \qquad \qquad \qquad = O(1) - \frac{\tau(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} (1 + O(r(\mu, a)^4)), \\ \frac{\partial \omega}{\partial a}(\mu, a) = \frac{\partial g}{\partial a}(\mu, a, r(\mu, a)^2) - \frac{\tau(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} \frac{\partial f}{\partial a}(\mu, a, r(\mu, a)^2) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\partial b_0}{\partial a}(\mu, a) + O(r(\mu, a)^2) - \frac{\tau(\mu, a)}{\bar{\delta}(\mu, a)} (r(\mu, a)^2 + O(r(\mu, a)^4)). \end{array} \right.$$

Remarquons que, puisque  $\bar{\delta}(\mu, a) = ar(\mu, a)^2 + O(r(\mu, a)^4) = o(\tau(\mu, a))$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \mu}(\mu, a)$  est, lorsque  $b_1(0, 0) > 0$ , du signe opposé à celui de  $\bar{\delta}(\mu, a)$ , ce qui n'est pas une surprise (figure 6) ; de même,  $\frac{\partial \omega}{\partial a}(\mu, a)$  est un  $o\left(\left|\frac{\partial \omega}{\partial \mu}(\mu, a)\right|\right)$ .

Munis des estimations (A12), (A13), (A20), (A21), il est facile, bien que fastidieux, de montrer en suivant la méthode de [12] que, pour  $|\Delta \mu|$  et  $|\Delta a|$  assez petits, on a

$$(A_{22}) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\xi_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}(\theta) - \xi_{\mu, a}(\theta)| \\ \qquad \qquad \qquad \leq \text{Sup} \left( \frac{r(\mu, a)^{2n}}{\bar{\delta}(\mu, a)^3}, \frac{r(\mu, a)^{2n+4}}{\bar{\delta}(\mu, a)^4} \right) [E |\Delta \mu| + F r(\mu, a)^2 |\Delta a|] \end{array} \right.$$

où E et F sont des constantes indépendantes de  $(\mu, a)$  voisin de  $(0, 0)$ .

Nous nous contenterons de rappeler l'idée : soit  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  la courbe fermée invariante de  $P_{\mu, a}$  que l'on considère (par exemple la courbe attractante). On localise à l'aide du théorème des fonctions implicites classique la position de l'unique courbe  $\mathcal{C}'$  proche de  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  dont chaque point  $x$  soit à la même distance radiale de  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  que son image  $P_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}(x)$  ; une telle courbe fournit l'anneau de largeur minimale centré sur  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  qui soit envoyé dans lui-même par  $P_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}$  et permet donc d'estimer la distance radiale de  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  à son homologue  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}$  pour  $P_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}$ .

De (A22) on déduit enfin

$$(A_{23}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\mu + \Delta \mu, a + \Delta a}(\theta) - g_{\mu, a}(\theta) = \omega(\mu + \Delta \mu, a + \Delta a) - \omega(\mu, a) + R, \\ |R| \leq \text{Sup} \left( \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)^2}, \frac{r(\mu, a)^{2n+6}}{\bar{\delta}(\mu, a)^3} \right) (E' |\Delta \mu| + F' r(\mu, a)^2 |\Delta a|), \end{array} \right.$$

où E' et F' sont des constantes indépendantes de  $(\mu, a)$  voisin de  $(0, 0)$ .

En particulier

$$(A_{24}) \quad |R| \leq x(\mu, a) |\Delta \mu| + y(\mu, a) |\Delta a| \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des } o\left(\left|\frac{\partial \omega}{\partial \mu}(\mu, a)\right|\right).$$

Il existe donc une constante  $M$  telle que, si  $(\mu, a) \in \mathcal{H}$  est assez voisin de  $(0, 0)$ , et si  $|\Delta\mu|$  et  $|\Delta a|$  sont assez petits et vérifient  $|\Delta a| \leq M |\Delta\mu|$  (cônes hachurés de la figure 17.1), on ait

$$(A25) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } \theta, g_{\mu + \Delta\mu, a + \Delta a}(\theta) - g_{\mu, a}(\theta) \text{ est non nul} \\ \text{et du signe de } \omega(\mu + \Delta\mu, a + \Delta a) - \omega(\mu, a). \end{cases}$$

En vertu de ce qui a été dit au début du paragraphe, ceci termine la démonstration de ce que  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  a autant de composantes connexes (et pas plus) que  $C_\omega \cap \mathcal{H}$ . Le caractère lipschitzien de  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  pour  $\omega$  irrationnel est une conséquence directe de l'existence des cônes ci-dessus dans lesquels  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$  ne rentre pas. Enfin, l'assertion concernant les  $\omega$  rationnels est une conséquence classique de l'existence de « paliers rationnels » pour le nombre de rotation d'une famille générique de difféomorphismes du cercle (zones de stabilité structurelle).

*Démonstration du corollaire.*

J'ai déjà remarqué à la fin de 3.1 que si  $(\mu, a) \in \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{U}_{n,1}$  et si  $\omega$  est irrationnel, la courbe fermée invariante  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  de  $P_{\mu, a}$  telle que le nombre de rotation de la restriction  $P_{\mu, a} | \tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  soit égal à  $\omega$  est de classe  $C^\infty$ .

Si, de plus,  $\omega$  vérifie une condition diophantienne du type de celle du théorème 1,  $P_{\mu, a} | \tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  est  $C^\infty$ -conjuguée à la rotation  $R_\omega$  : on peut déduire ceci du théorème local de conjugaison  $C^\infty$  à une rotation d'un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation diophantien mais alors le voisinage de  $(0, 0)$  auquel doit appartenir  $(\mu, a)$  dépend, comme dans le théorème 1, de la condition diophantienne; pour obtenir un résultat valable dans tout  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{U}_{n,1}$  on peut invoquer le théorème global de conjugaison  $C^\infty$  de Herman [14] et son amélioration par Yoccoz [22].

Si les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites,  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$  et  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{U}_{n,1}$  se recollent par unicité, ce qui montre que  $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{U}_{n,1}$  est une courbe connexe et correspond à des valeurs de  $(\mu, a)$  pour lesquelles  $P_{\mu, a} | \tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  est  $C^\infty$ -conjuguée à  $R_\omega$ . Enfin, si  $(\mu, a) \in \tilde{C}_\omega$ , les propriétés qui précèdent permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites de Nash-Moser-Hamilton à la recherche de courbes translatées de nombre de rotation  $\omega$  proches de  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu, a}$  pour  $P_{\mu, \Delta\mu, a + \Delta a}$  lorsque  $|\Delta\mu|$  et  $|\Delta a|$  sont petits. Un argument du type de celui qu'on a utilisé pour prouver le corollaire 1 du théorème 1 montre alors le caractère  $C^\infty$  de  $\tilde{C}_\omega$  au voisinage de  $(\mu, a)$ .

Bien entendu, la conclusion du corollaire vaut également si  $\frac{1}{\eta_0} (\omega - \omega_0) \leq 0$ .

## CONCLUSION

L'étude qui vient d'être faite, traduite en termes d'équations différentielles, apporte un début de réponse à la question suivante : comment un couple de tores invariants normalement hyperboliques s'élimine-t-il génériquement dans une famille à 1 paramètre d'équations différentielles ?

La réponse est bien connue dans le cas où on remplace tore invariant par orbite périodique : il y a génériquement un unique point de bifurcation en lequel l'équation possède une orbite périodique non normalement hyperbolique.

Nous avons montré qu'au voisinage d'une situation de codimension deux où les deux tores naissent en même temps à partir d'une orbite périodique par une bifurcation de Hopf dégénérée, il y a encore beaucoup de bons chemins d'élimination. On pourrait en effet prouver que, comme dans le cas conservatif, la projection sur l'axe des  $a$  de l'ensemble de Cantor  $\tilde{\Gamma}$  a une mesure positive; un chemin générique transverse à  $\Gamma$  a donc une chance non nulle de passer par un tel point et ne rencontrera en général aucune « bulle ».

Dans les articles suivants nous étudierons les points périodiques et les ensembles de Cantor invariants de  $P_{\mu, a}$  (orbites périodiques et orbites « étranges » pour l'équation différentielle correspondante) lorsque  $(\mu, a)$  appartient à une « bulle ».

Il serait intéressant de montrer que, dans certains cas,  $P_{\mu, a}$  possède des attracteurs analogues à ceux construits par Birkhoff en composant un difféomorphisme A préservant l'aire avec un difféomorphisme B ayant une courbe fermée invariante très légèrement attractante séparant en deux une « zone d'instabilité » de A. L'existence d'ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather est peut-être un premier pas dans cette voie ([6], [9]). On trouvera d'autres arguments dans [10].

Une autre direction d'application de ces idées est l'étude des bifurcations d'un tore  $\mathbf{T}^2$  en un tore  $\mathbf{T}^3$  dans des familles à deux paramètres d'équations différentielles où ils apparaissent par bifurcation à partir d'orbites périodiques. De telles familles ont été étudiées par Jost et Zehnder (*Helvetica Physica Acta* 45, 258-276 (1972)) et par Iooss et Langford (à paraître) : ici aussi des voisinages effilés de courbes de bifurcation formelle demandent à être étudiés. Une difficulté supplémentaire est cependant le remplacement du  $\mathbf{X}(\theta)$  de la formule (96) par une famille de matrices : même à nombre de rotation fixé, il n'y a plus de raison pour que le changement de stabilité du tore  $\mathbf{T}^2$  invariant se fasse en un seul point.

Remarquons pour finir que l'utilisation du théorème des fonctions implicites nous a forcés à analyser les structures qui, dans la famille de formes normales, sont susceptibles de persister : ce ne sont pas les plus évidentes comme par exemple la courbe  $\Gamma$  de bifurcation, mais les systèmes de coordonnées adaptés aux « bons » points de  $\Gamma$ , toutes choses qui ne figurent pas d'habitude dans les diagrammes de bifurcation.

C'est l'analogue de ce qui se produit dans le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser : une étude locale à l'origine est insuffisante ; il faut une seconde localisation au voisinage d'un « bon » cercle formellement invariant.

*Paris, le premier jour du Printemps 1984.*

#### RÉFÉRENCES

- [1] A. CHENCINER, *Courbes invariantes non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $(\mathbb{R}^2, 0)$* , Paris VII, Preprint Université, déc. 1980.
- [2] A. CHENCINER, *ibid.*, C.R.A.S. **292** (mars 1981), série I, 507-510.
- [3] A. CHENCINER, Points homoclines au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , C.R.A.S. **294** (février 1982), série I, 269-272.
- [4] A. CHENCINER, Sur un énoncé dissipatif du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff, C.R.A.S. **294** (février 1982), série I, 243-245.
- [5] A. CHENCINER, Points périodiques de longues périodes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , C.R.A.S. **294** (mai 1982), série I, 661-663.
- [6] A. CHENCINER, Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , C.R.A.S. **297** (novembre 1983), série I, 465-467.
- [7] A. CHENCINER, Hamiltonian-like phenomena in saddle-node bifurcations of invariant curves for plane diffeomorphisms, *Proceedings of the conference Singularities and dynamical systems* (Heraklion, 1983), to appear at North-Holland in 1984.
- [8] A. CHENCINER, *Bifurcations de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  au voisinage d'un point fixe elliptique*, Cours à l'École des Houches, juillet 1981, North Holland, 1983.
- [9] A. CHENCINER, Bifurcations de points fixes elliptiques, II : Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants, *Inventiones Math.*, à paraître.
- [10] A. CHENCINER, *Bifurcations de points fixes elliptiques*, III : Orbites homoclines (en préparation).
- [11] A. CHENCINER et G. IOSS, Bifurcations de tores invariants, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, **69** (2) (1979), 109-198, et **71**, n° 4, 1979, 301-306.
- [12] G. R. HALL, *Bifurcation of an attracting invariant circle : a Denjoy attractor*, Preprint University of Minnesota.
- [13] R. S. HAMILTON, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Preprint Cornell University, 1974.
- [14] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **49** (1979), 5-234.
- [15] M. HERMAN, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, chapitre VIII, *Astérisque*, à paraître.
- [16] M. W. HIRSCH, C. C. PUGH and M. SHUB, Invariant manifolds, *Lecture Notes in Mathematics*, **583**, Springer, 1977.
- [17] R. MAÑE, Persistent Manifolds are normally hyperbolic, *Bulletin A.M.S.* **80** (1974), 90-91.
- [18] J. MATHER, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology*, **21**, n° 4 (1982), 457-467.
- [19] D. RUELLE and F. TAKENS, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, **20** (1971), 167-192.

- [20] H. RÜSSMANN, Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes, *Nachr. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* (1970), 67-105.
- [21] C. L. SIEGEL and J. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971.
- [22] J. C. Yoccoz, Conjugaison des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, *Annales de l'E.N.S.*, 4<sup>e</sup> série, **17** (1984), 333-359.
- [23] E. ZENDHER, Homoclinic points near elliptic fixed points, *C.P.A.M.* **26** (1973), 131-182.

Département de Mathématiques,  
Université Paris VII,  
2, place Jussieu,  
75251 Paris Cédex 05

*Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> janvier 1983.*

*Révisé le 30 mars 1984.*