PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JACQUES DIXMIER

Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 6 (1960), p. 13-25

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__6__13_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPÉRATEURS DE RANG FINI DANS LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

par JACQUES DIXMIER

INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe, K un sous-groupe compact maximal de G, et π une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G dans un espace hilbertien H. On sait ([5] et [6]) que si χ est un caractère de K identifié à une mesure bornée sur G, l'opérateur $\pi(\chi)$ est de rang fini. De ce fait, on peut déduire [5] des propriétés intéressantes des idéaux de $L^1(G)$ associés à π (noyau de π dans $L^1(G)$, annulateurs dans $L^1(G)$ des éléments de H).

Étant donné un groupe localement compact G, nous envisagerons la propriété suivante :

(P) L'ensemble des $f \in L^1(G)$, telles que $\pi(f)$ soit de rang fini pour toute représentation unitaire continue topologiquement irréductible π de G, est partout dense dans $L^1(G)$.

Le théorème rappelé plus haut entraîne aussitôt qu'un groupe de Lie semi-simple connexe possède la propriété (P). Le premier but de ce mémoire est de montrer qu'un groupe de Lie nilpotent connexe G la possède aussi. On sait déjà [2] que, si $f \in L^1(G)$, et si π est une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G, l'opérateur $\pi(f)$ est compact. Pour passer de là à la propriété (P), nous établissons l'existence d'un « calcul symbolique » dans $L^1(G)$: si $f \in L^1(G)$ et si φ est une fonction analytique dans un voisinage du spectre de f vérifiant $\varphi(0) = 0$, on sait bien d'après la théorie générale des algèbres de Banach, qu'on peut définir un élément $\varphi\{f\} \in L^1(G)$; moyennant quelques conditions sur f, nous montrons ici qu'on peut encore définir $\varphi\{f\}$ lorsque φ satisfait à des conditions convenables de différentiabilité. On utilise pour cela une intégrale vectorielle de Fourier déjà considérée par G. E. Silov dans [13], et utilisée récemment par P. Malliavin [12] dans le cas où G est abélien discret ; le point essentiel est de majorer la croissance à l'infini de la fonction de variable réelle $\lambda \to ||e^{*i\lambda f}||$ (cf. ci-dessous pour les notations).

Le second but de ce mémoire est de développer quelques conséquences de la propriété (P). On verra par exemple que, si G possède la propriété (P), deux représentations unitaires continues topologiquement irréductibles de G, qui ont même noyau dans $L^1(G)$, sont unitairement équivalentes.

Notations

Si G est un groupe localement compact, on choisit une fois pour toutes une mesure de Haar invariante à gauche sur G, et $L^p(G)$ est l'espace de Banach des fonctions complexes de puissance p-ième intégrable sur G pour cette mesure ; on désigne par $||\ ||_p$ la norme dans cet espace. On désigne par $\widetilde{L}^1(G)$ l'algèbre de Banach déduite de $L^1(G)$ par adjonction d'un élément unité. On note $*$ le produit de convolution. Si $f \in L^1(G)$, on pose $f^{*n} = f*f* \ldots *f$ (n facteurs), $e^{*f} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} f^{*n} \in \widetilde{L}^1(G)$, et $\widetilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})}\ \Delta(s^{-1})$ (où Δ est le module de G) ; on sait que $f \to \widetilde{f}$ est une involution isométrique de $L^1(G)$. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si φ est une fonction complexe intégrable de variable réelle, on pose

$$(\mathscr{F}\varphi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\varphi(x)\,dx.$$

§ 1. Les puissances d'une partie compacte dans un groupe de Lie nilpotent.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{R}$, et G le groupe de Lie simplement connexe correspondant. Rappelons que la formule de Hausdorff $xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots$ dans $\mathfrak{g}$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, que la loi de composition $(x, y) \to xy$ définit sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe, et que l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G est un isomorphisme pour cette structure de groupe.

Lemme 1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{R}$ de dimension n, et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ une suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ de dimensions $n, n-1, \ldots, 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}_i$. Si x, y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, les coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ du produit de Hausdorff $z = xy$ sont fournies par des égalités de la forme*

$$z_i = x_i + y_i + P_i(x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{1}$$

où les P_i sont des polynômes indépendants de x et y.

Le lemme est évident pour $n = 1$. Supposons-le établi pour les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n-1$. Appliquant cette hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$, on voit qu'on a des formules du type (1) pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. D'autre part, $\mathfrak{g}_n$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Donc, dans la formule de Hausdorff $xy = x + y + \Phi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ ne dépend que des classes de x et y modulo $\mathfrak{g}_n$. Ainsi, $z_n - x_n - y_n$ est la n-ième coordonnée de $\Phi(x_1e_1 + \ldots + x_{n-1}e_{n-1}, y_1e_1 + \ldots + y_{n-1}e_{n-1})$, c'est-à-dire un polynôme en $x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}$. D'où le lemme.

Dans le lemme 2, nous conservons les notations du lemme 1. En outre, si $x \in \mathfrak{g}$, nous noterons systématiquement $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées, et nous poserons

$$||x|| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

LEMME 2. — *Soit* H *une partie compacte de* $\mathfrak{g}$. *Considérons les ensembles* H, H^2, ..., H^m, ... *(où* H^m *se définit relativement au produit de Hausdorff de* $\mathfrak{g}$*). Il existe un entier* N, *dépendant de* $\mathfrak{g}$, *mais pas de* H, *tel que* $\sup_{x\in H^m} ||x|| = O(m^N)$ *quand* $m \to +\infty$.

Le lemme est évident pour $n = \dim \mathfrak{g} = 1$. Supposons-le établi pour les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n-1$. Appliquant cette hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$, on voit qu'il existe des constantes $A>0$, $\alpha>0$, telles que

$$\sup_{x\in H^m}(\sup(|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|)) \leqslant A(1+m^\alpha). \tag{2}$$

En outre, la constante α est indépendante de H. D'autre part, il existe des constantes $B>0$, $\beta>0$, indépendantes de H, telles que

$$|P_n(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})| \leqslant B(1+\sup(|x_1|, |y_1|, \ldots, |x_{n-1}|, |y_{n-1}|))^\beta. \tag{3}$$

Posons $f(m) = \sup_{x\in H^m} ||x||$. Si $x \in H^m$, on a $x = x'x''$ avec $x' \in H^{m-1}$, $x'' \in H$. Alors

$$\sup(|x'_1|, \ldots, |x'_{n-1}|) \leqslant A(1+(m-1)^\alpha)$$

d'après (2). Compte tenu de (3), on a (en posant $\sup_{x\in H} ||x|| = a$)

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x'_n + x''_n + P_n(x'_1, x''_1, \ldots, x'_{n-1}, x''_{n-1})| \\ &\leqslant |x'_n| + a + B[1+a+A(1+(m-1)^\alpha)]^\beta \\ &\leqslant f(m-1) + a + B[1+a+A(1+(m-1)^\alpha)]^\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Rapprochant ceci de (2), on voit que

$$f(m) \leqslant f(m-1) + P(m),$$

où P est un polynôme dont le degré est indépendant de H. Donc

$$f(m) \leqslant f(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(m),$$

et le second membre de cette inégalité est, comme il est bien connu, un polynôme en m (dont le degré est indépendant de H). D'où le lemme.

LEMME 3. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent connexe,* μ *la mesure de Haar de* G. *Il existe un entier* N, *ne dépendant que de* G, *tel que, pour toute partie compacte* H *de* G, *on ait* $\mu(H^m) = O(m^N)$ *quand* $m \to +\infty$.

Supposons d'abord G simplement connexe. Identifions alors G à son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni du produit de Hausdorff. On a

$$\mu(H^m) = \iint \ldots \int_{H^m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

où P est un polynôme ([2], lemme 1*d*). L'existence de l'entier N du lemme 3 résulte alors aussitôt du lemme 2.

Passons au cas général. Soit G' le groupe de recouvrement universel de G. Soit φ l'application canonique de G' sur G. Il existe une partie compacte H' de G' telle que

$\varphi(H') = H$. Alors, $\varphi(H'^m) = H^m$ pour tout m. Soit μ' la mesure de Haar de G'. Pour une normalisation convenable de μ et μ', on a

$$\mu'(H'^m) = \int_G p(g)\, d\mu(g)$$

où p est une fonction à valeurs entières sur G, majorant 1 sur H^m. Donc $\mu(H^m) \leqslant \mu'(H'^m)$, et il suffit d'appliquer la première partie de la démonstration.

§ 2. Calcul symbolique dans l'algèbre L^1 d'un groupe de Lie nilpotent.

Pour tout $t \in \mathbf{C}$, posons $u(t) = e^{it} - 1$. La fonction u est entière et s'annule à l'origine. Donc, si A est une algèbre de Banach et si $x \in A$, l'élément $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$ existe dans A. Nous appliquerons ceci :

1° Au cas où A est une algèbre uniformément fermée d'opérateurs dans un espace hilbertien ;

2° Au cas où A est l'algèbre L^1 d'un groupe localement compact.

Lemme 4. — *Soient* H *un espace hilbertien,* T *un opérateur hermitien continu dans* H. *On a* $u(T)u(T)^* \leqslant T^2$.

Soit $T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de T. On a

$$u(T)u(T)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(\lambda)|^2 dE_\lambda.$$

Or $|u(\lambda)|^2 = |e^{i\lambda} - 1|^2 \leqslant \lambda^2$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc

$$u(T)u(T)^* \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dE_\lambda = T^2.$$

Lemme 5. — *Soient* G *un groupe localement compact unimodulaire, et* f *un élément de* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *tel que* $\tilde{f} = f$. *Alors,* $u(f) \in L^1(G) \cap L^2(G)$ *et* $||u(f)||_2 \leqslant ||f||_2$.

On sait que $L^1(G) \cap L^2(G)$ est muni de manière naturelle d'une structure d'algèbre hilbertienne. Soit $\mathfrak{A} \subset L^2(G)$ l'algèbre hilbertienne achevée déduite de $L^1(G) \cap L^2(G)$. (Pour cette notion, et pour les propriétés utilisées des algèbres hilbertiennes, cf. par exemple [3], chapitre I, §§ 5 et 6). Soit A l'algèbre de von Neumann associée à gauche à $\mathfrak{A}$. Soit $x \to L_x$ l'application canonique de $\mathfrak{A}$ dans A. Soit φ la trace naturelle sur A^+ définie par $\mathfrak{A}$. Rappelons que les opérateurs de A « de carré traçable » pour φ forment un idéal bilatère de A, que ce sont exactement les opérateurs de la forme L_x avec $x \in \mathfrak{A}$, et que $\varphi(L_x L_x^*) = ||x||^2$ pour $x \in \mathfrak{A}$. Pour $g \in L^1(G)$, nous noterons aussi L_g l'opérateur de convolution à gauche par g dans $L^2(G)$ (notation cohérente avec la précédente si $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$). Comme $||L_g|| \leqslant ||g||_1$ pour $g \in L^1(G)$, on a $L_{u(f)} = u(L_f) \in A$. Comme $f = \tilde{f}$, l'opérateur L_f est hermitien. D'après le lemme 4, $L_{u(f)} L_{u(f)}^* \leqslant L_f^2$. Or L_f^2 est traçable pour φ, donc ([3], chapitre I, § 1, proposition 10) $L_{u(f)} L_{u(f)}^*$ est traçable

pour φ, autrement dit $L_{u(f)}$ est de carré traçable pour φ. Par suite, il existe un $a \in \mathfrak{A}$ tel que $L_{u(f)} = L_a$. Pour tout $x \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a

$$u(f) * x = L_{u(f)} x = L_a x = a * x.$$

Prenons la fonction x positive, d'intégrale 1, nulle en dehors d'un voisinage de plus en plus petit de l'élément neutre. Alors $u(f) * x$ tend vers $u(f)$ dans $L^1(G)$, et $a * x$ tend vers a dans $L^2(G)$. Donc $u(f) = a \in L^2(G)$. En outre

$$||u(f)||_2^2 = \varphi(L_{u(f)} L_{u(f)}^*) \leqslant \varphi(L_f^2) = ||f||_2^2.$$

LEMME 6. — *Soient* G *un groupe localement compact unimodulaire, e son élément neutre,* μ *sa mesure de Haar,* A *une partie mesurable de* G *telle que* $e \in A$, *et f une fonction de* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *nulle hors de* A, *telle que* $\tilde{f} = f$. *On suppose qu'il existe un entier* N *tel que* $\mu(A^n) = O(n^N)$ *quand* $n \to +\infty$. *Alors, dans* $\tilde{L}^1(G)$,

$$||e^{*i\lambda f}||_1 = O(|\lambda|^{N+1})$$

quand $|\lambda| \to +\infty$.

En multipliant f par un scalaire convenable, on peut supposer $||f||_1 \leqslant 1$. Soit n un entier > 0. On a

$$||u(nf)||_1 = \int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx + \int_{G-A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx.$$

Compte tenu du lemme 5,

$$\int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx \leqslant \left(\int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{A^{n^2-1}} 1.dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant ||u(nf)||_2 (\mu(A^{n^2-1}))^{1/2} \leqslant ||nf||_2 (\mu(A^{n^2-1}))^{1/2} = O(n^{N+1}).$$

D'autre part

$$\int_{G-A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx = \int_{G-A^{n^2-1}} \left|\sum_{p=1}^{\infty} (p!)^{-1} i^p n^p f^{*p}(x)\right| dx.$$

Or f^{*p} est nulle hors de A^p. Comme $e \in A$, on a $A \subset A^2 \subset \ldots$ Donc $f, f^{*2}, \ldots, f^{*(n^2-1)}$ sont nulles sur $G-A^{n^2-1}$. Donc :

$$\int_{G-A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx \leqslant \left|\left|\sum_{p=n^2}^{\infty} (p!)^{-1} i^p n^p f^{*p}\right|\right|_1$$
$$\leqslant \sum_{p=n^2}^{\infty} (p!)^{-1} n^p \leqslant \frac{n^{n^2}}{(n^2)!} e^n = O(n^{n^2} e^n (n^2)^{-n^2} e^{n^2} n^{-1})$$
$$= O(n^{-n^2-1} e^{n^2+n})$$

donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, $||u(nf)||_1 = O(n^{N+1})$ quand $n \to +\infty$. Désignons par $[\lambda]$ la partie entière d'un nombre réel λ ; on a

$$||e^{*i\lambda f}||_1 \leqslant ||e^{*i[\lambda]f}||_1\, ||e^{*i(\lambda-[\lambda])f}||_1$$
$$\leqslant (1 + ||u([\lambda]f)||_1) e^{||f||_1} = O(|[\lambda]|^{N+1}) = O(|\lambda|^{N+1})$$

quand $|\lambda| \to +\infty$.

REMARQUE 1. — Quand G est un groupe abélien discret, le lemme 6 a été établi dans [11], page 67, lignes 15-18, grâce à un calcul explicite utilisant les fonctions de Bessel.

REMARQUE 2. — On ne peut, dans le lemme 6, prendre pour f une fonction quelconque de $L^1(G)$ telle que $f=\widetilde{f}$ (cf. [9], lemme 5).

LEMME 7. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent connexe,* N *un entier possédant la propriété du lemme 3, et f une fonction de* $L^1(G)\cap L^2(G)$ *à support compact, telle que* $\widetilde{f}=f$. *Soit* $t\to\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre* $\leqslant N+3$, *continues et intégrables sur* $\mathbf{R}$.

i. *L'intégrale* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{*i\lambda f}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$ *converge absolument dans* $\widetilde{L}^1(G)$ *vers un élément* $\varphi\{f\}$. *Si* $\varphi(0)=0$, *on a* $\varphi\{f\}\in L^1(G)$.

ii. *Soit* π *une représentation unitaire continue de* G. *On a*

$$\pi(\varphi\{f\})=\varphi(\pi(f))$$

où $\varphi(\pi(f))$ *est défini par le calcul opérationnel usuel sur l'opérateur hermitien* $\pi(f)$.

iii. *Si* $\varphi(t)=t^p$ *pour* $|t|\leqslant||f||_1$, *on a* $\varphi\{f\}=f^{*p}$.

Les hypothèses faites sur φ entraînent l'existence d'une constante A telle que

$$|(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)|\leqslant A(1+|\lambda|^{N+3})^{-1}$$

quel que soit $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors, compte tenu du lemme 6,

$$||e^{*i\lambda f}||_1\,|(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)|\leqslant A'(1+|\lambda|^{N+1})(1+|\lambda|^{N+3})^{-1}$$

donc l'intégrale définissant $\varphi\{f\}$ est bien absolument convergente dans $\widetilde{L}^1(G)$. Si $\varphi(0)=0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)=0$, d'où

$$\varphi\{f\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(f)(\lambda)(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda\in L^1(G).$$

Ceci prouve (i).

Comme π est une représentation continue de $\widetilde{L}^1(G)$, on a

$$\pi(\varphi\{f\})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(e^{*i\lambda f})(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\pi(f)}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda.$$

Or, cette intégrale opératorielle est égale à $\varphi(\pi(f))$; en effet, si χ est un caractère de la C*-algèbre commutative engendrée par 1 et $\pi(f)$, le nombre $\chi(\pi(f))$ est réel et on a

$$\chi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\pi(f)}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(e^{i\lambda\pi(f)})(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\chi(\pi(f))}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda=\varphi(\chi(\pi(f)))=\chi(\varphi(\pi(f)).$$

Ceci prouve (ii).

Enfin, supposons $\varphi(t)=t^p$ pour $|t|\leqslant||f||_1$. Soit π la représentation régulière de G dans $L^2(G)$. On a $||\pi(f)||\leqslant||f||_1$, donc $\varphi(\pi(f))=\pi(f)^p$. D'après (ii), ceci s'écrit $\pi(\varphi\{f\})=\pi(f^{*p})$, d'où $\varphi\{f\}=f^{*p}$ puisque π est fidèle sur $L^1(G)$.

§ 3. Opérateurs de rang fini dans les représentations des groupes de Lie nilpotents.

LEMME 8. — *Soit* $t\to\varphi_0(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre* $\leqslant r$ *continues et intégrables sur* **R**, *telle que* $\varphi_0(t)=t^{r+1}$ *dans un voisinage de* 0. *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe une fonction complexe* $t\to\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° $\varphi(t)=\varphi_0(t)$ *pour* $|t|\geqslant 1$;
2° $\varphi(t)=0$ *dans un voisinage de* 0 ;
3° φ *admet des dérivées d'ordre* $\leqslant r$ *continues et intégrables sur* **R** ;
4° $|\varphi^{(\alpha)}(t)-\varphi_0^{(\alpha)}(t)|\leqslant\varepsilon$ *quels que soient t et* $\alpha=0, 1, \ldots, r$.

Soit a un nombre tel que $0<a<1$ et tel que $\varphi_0(t)=t^{r+1}$ pour $|t|\leqslant a$. Il existe une fonction ψ définie sur $[-a, a]$, nulle dans un voisinage de 0, admettant des dérivées d'ordre $\leqslant r$ continues, et telle que $|\psi^{(\alpha)}(t)-(t^{r+1})^{(\alpha)}|\leqslant\varepsilon$ pour $|t|\leqslant a$ et $0\leqslant\alpha\leqslant r$. (Ceci est évident pour $r=0$, et on passe de r à $r+1$ en remplaçant ψ par la fonction $t\to(r+1)\int_0^t\psi(t)dt$). On définit alors φ de la manière suivante :

1° $\varphi(t)=\psi(t)$ pour $|t|\leqslant a$;
2° $\varphi(t)=\varphi_0(t)$ pour $|t|\geqslant 1$;
3° On « raccorde » convenablement dans les intervalles $[-1, -a]$ et $[a, 1]$.

Soit maintenant G un groupe localement compact. Soit I l'ensemble des $f\in L^1(G)$ telles que $\pi(f)$ soit de rang fini pour toute représentation unitaire continue topologiquement irréductible π de G. Il est clair que I est un idéal bilatère de $L^1(G)$ stable pour l'involution $f\to\tilde{f}$.

THÉORÈME 1. — *Tout groupe de Lie nilpotent connexe* G *possède la propriété suivante :*

(P) *L'idéal bilatère* I *est partout dense dans* $L^1(G)$.

a. Soit N un entier possédant la propriété du lemme 3. Soit E l'ensemble des fonctions f de $L^1(G)\cap L^2(G)$ à support compact, telles que $\tilde{f}=f$. Soit E′ l'ensemble des fonctions complexes $t\to\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$, nulles dans un voisinage de 0, admettant des dérivées d'ordre $\leqslant N+3$ continues et intégrables sur **R**. Soient $f\in E$ et $\varphi\in E'$. On a $\varphi\{f\}\in L^1(G)$ (lemme 7 (i)). On va voir que $\varphi\{f\}\in I$. Soit π une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G. L'opérateur $\pi(f)$ est hermitien et compact ([2], corollaire 3 du théorème 1). Puisque φ s'annule dans un voisinage de 0, $\varphi(\pi(f))$ est de rang fini. Or $\varphi(\pi(f))=\pi(\varphi\{f\})$ (lemme 7 (ii)).

b. Soit V un voisinage de l'élément neutre e de G. Nous allons montrer qu'il existe une fonction positive non négligeable de $L^1(G)$, à support contenu dans V, et adhérente à I.

Il existe un voisinage compact W de e tel que $W^{N+4} \subset V$. Soit f une fonction positive non négligeable de $L^1(G) \cap L^2(G)$ à support contenu dans W, telle que $f = \tilde{f}$. Soit $t \to \varphi_0(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre $\leqslant N+3$ continues et intégrables sur $\mathbf{R}$, telles que $\varphi_0(t) = t^{N+4}$ pour $|t| \leqslant ||f||_1$. On a $\varphi_0\{f\} = f^{*(N+4)}$ (lemme 7 (iii)), donc $\varphi_0\{f\}$ est une fonction positive non négligeable de $L^1(G)$ à support contenu dans V. Reste à prouver, ce qui établira notre assertion, que $\varphi_0\{f\} \in \overline{I}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 8, il existe une $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(t) = \varphi_0(t)$ pour $|t| \geqslant 1$ et telle que $|\varphi^{(\alpha)}(t) - \varphi_0^{(\alpha)}(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t et pour $\alpha = 0, 1, \ldots, N+3$. Alors

$$2\pi ||\varphi_0\{f\} - \varphi\{f\}||_1 = ||\int_{-\infty}^{+\infty} e^{*i\lambda f}(\mathcal{F}\varphi_0 - \mathcal{F}\varphi)(\lambda) d\lambda||_1$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} ||e^{*i\lambda f}||_1 |(\mathcal{F}\varphi_0 - \mathcal{F}\varphi)(\lambda)| d\lambda.$$

Or $||e^{*i\lambda f}||_1 \leqslant A(1 + |\lambda|^{N+1})$, où A est une constante indépendante de ε. D'autre part,

$$(1+\lambda^2)(1+|\lambda|^{N+1})|(\mathcal{F}\varphi_0 - \mathcal{F}\varphi)(\lambda)|$$
$$\leqslant |\mathcal{F}(\varphi_0 - \varphi)(\lambda)| + |\mathcal{F}(\varphi_0'' - \varphi'')(\lambda)| + |\mathcal{F}(\varphi_0^{(N+1)} - \varphi^{(N+1)})(\lambda)|$$
$$+ |\mathcal{F}(\varphi_0^{(N+3)} - \varphi^{(N+3)})(\lambda)| \leqslant 2\varepsilon,$$

quel que soit λ ; donc

$$2\pi ||\varphi_0\{f\} - \varphi\{f\}||_1 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} 2A\varepsilon(1+\lambda^2)^{-1} d\lambda = 2A\varepsilon\pi.$$

Or $\varphi\{f\} \in I$ d'après la partie (*a*) de la démonstration. Donc $\varphi_0\{f\} \in \overline{I}$.

c. Soient $g \in L^1(G)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V de e dans G tel que, si h est une fonction positive de $L^1(G)$ d'intégrale 1 à support contenu dans V, on ait $||g - g*h||_1 \leqslant \varepsilon$. D'après la partie (*b*) de la démonstration, on peut choisir $h \in \overline{I}$. Alors $g*h \in \overline{I}$. Ceci prouve que $\overline{I}$ est partout dense dans $L^1(G)$, d'où $\overline{I} = L^1(G)$.

§ 4. Irréductibilité topologique et irréductibilité algébrique.

Les théorèmes 2, 3 et 4 ci-dessous seront établis pour les groupes localement compacts satisfaisant à la propriété (P). Cette classe de groupes contient les groupes de Lie nilpotents connexes d'après le théorème 1. Elle contient aussi les groupes de Lie semi-simples connexes (cf. [6], lemme 33, et [5], théorème 2 et démonstration du théorème 7), ainsi que les « groupes de mouvements » (cf. [5], théorème 5 et démonstration du théorème 7), c'est-à-dire les groupes de la forme K.N, où K et N sont des sous-groupes (non nécessairement distingués) respectivement compacts et abéliens.

Pour les groupes semi-simples et les groupes de mouvements, les résultats (i), (ii), (iii) ci-dessous se trouvent essentiellement dans [5], pages 512-515 ; toutefois, la définition utilisée dans [5] du sous-espace H' fait intervenir un sous-groupe compact de G.

THÉORÈME 2. — *Soient* G *un groupe localement compact possédant la propriété* (P), π *une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de* G *dans un espace hilbertien* H, *et* J *l'ensemble des* $f \in L^1(G)$ *telles que* $\pi(f)$ *soit de rang fini. Soit* H′ *l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la forme* $\pi(f)\xi$, *où* $\xi \in H$ *et* $f \in J$.

i. H′ *est partout dense dans* H ;

ii. H′ *est stable pour les opérateurs* $\pi(s)$ ($s \in G$), *et aussi pour les opérateurs* $\pi(f)$ ($f \in L^1(G)$). *Pour* $f \in L^1(G)$, *notons* $\pi'(f)$ *la restriction de* $\pi(f)$ *à* H′ ;

iii. H′ *est le plus petit sous-espace vectoriel non nul de* H *stable pour les opérateurs* $\pi(f)$ ($f \in J$). *En particulier, la représentation* π' *de* $L^1(G)$ *dans* H′ *est algébriquement irréductible.*

iv. *L'ensemble des opérateurs* $\pi(f)$, *où* $f \in J$, *est exactement l'ensemble des opérateurs linéaires continus* T *de rang fini dans* H *tels que* $T(H) \subset H'$ *et* $T^*(H) \subset H'$.

Puisque G possède la propriété (P), J est partout dense dans $L^1(G)$, d'où aussitôt (i).

Si $f \in J$ et si μ est une mesure bornée sur G, l'opérateur $\pi(\mu * f) = \pi(\mu)\pi(f)$ est de rang fini, donc $\mu * f \in J$. En particulier, si $\xi \in H$, $f \in J$ et $f' \in L^1(G)$, on a $\pi(f')(\pi(f)\xi) = \pi(f' * f)\xi \in H'$, donc $\pi(f')(H') \subset H'$. De même, si $\xi \in H$, $f \in J$ et $s \in G$, on a $\pi(s)(\pi(f)\xi) = \pi(\varepsilon_s * f)\xi \in H'$ (en notant ε_s la mesure de Dirac au point s), donc $\pi(s)(H') \subset H'$. Ceci prouve (ii).

Soit H″ un sous-espace vectoriel non nul de H stable pour les opérateurs $\pi(f)$ ($f \in J$). Soit ξ un élément non nul de H″. On va montrer, ce qui prouvera (iii), que $\pi(J)\xi \supset H'$. Soit $g \in J$. Il suffit de prouver que $\pi(J)\xi \supset \pi(g)(H)$. Or les vecteurs $\pi(f)\xi$ ($f \in J$) forment un sous-espace vectoriel partout dense de H puisque J est partout dense dans $L^1(G)$ et que π est topologiquement irréductible. Donc les vecteurs $\pi(g * f)\xi = \pi(g)\pi(f)\xi$ ($f \in J$) forment un sous-espace vectoriel de $\pi(g)(H)$, partout dense dans $\pi(g)(H)$, donc égal à $\pi(g)(H)$ puisque $\dim \pi(g)(H) < +\infty$. D'où notre assertion.

Prouvons (iv). Il est clair que, si $k \in J$, on a $\tilde{k} \in J$, donc $\pi(k)(H)$ et $\pi(k)^*(H)$ sont des sous-espaces de dimension finie de H′. Il s'agit d'établir une réciproque de cette propriété.

Soit K l'ensemble des opérateurs linéaires (continus ou non) dans H′ permutables aux $\pi'(f)$, où f parcourt J. Montrons d'abord que $K = \mathbf{C}$. (Le raisonnement qui suit, plus simple que mon raisonnement initial, est dû à J. Dieudonné). D'après (iii) et le lemme de Schur, K est un corps, extension de $\mathbf{C}$. Soit $f \in J$ telle que $\pi'(f) \neq 0$. Soit $H_1 = \pi'(f)(H')$, qui est un sous-espace vectoriel non nul de dimension finie de H′. Tout $v \in K$ laisse stable H_1. Soit v' la restriction de v à H_1. L'application $v \to v'$ est un homomorphisme de K dans l'algèbre des opérateurs linéaires de H_1, qui transforme 1 en 1. Comme K est un corps, cet homomorphisme est injectif. Donc K est de rang fini sur $\mathbf{C}$ et par suite $K = \mathbf{C}$.

Alors, d'après le théorème de densité ([7], page 31), si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont des éléments linéairement indépendants de H′ et $\eta_1, \ldots, \eta_m$ des éléments quelconques de H′, il existe une $f \in J$ telle que $\pi'(f)\xi_1 = \eta_1, \ldots, \pi'(f)\xi_n = \eta_n$. Soit ξ un élément non nul de H′. Il existe une $f \in J$ telle que $\pi'(f)\xi = \xi$. Soit $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ une base de $\pi(f)(H) \subset H'$. Il existe

une $f' \in J$ telle que $\pi'(f')\xi = \xi$, $\pi'(f')\xi_1 = \ldots = \pi'(f')\xi_p = 0$. Alors $\pi(f'*f)(H) = \mathbf{C}\xi$. Soit $g = f'*f \in J$. L'opérateur $\pi(g*\tilde{g}) = \pi(g)\pi(g)^*$ est hermitien $\geqslant 0$, et son image est $\mathbf{C}\xi$. En multipliant g par un scalaire convenable, on a donc construit un $h \in J$ tel que $\pi(h)$ soit le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}\xi$. Soit alors T un opérateur linéaire continu de rang fini dans H tel que $T(H) \subset H'$ et $T^*(H) \subset H'$. Alors $\frac{1}{2}(T + T^*)$ et $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ sont des opérateurs hermitiens de rang fini dont les images sont contenues dans H'. Donc T est combinaison linéaire finie de projecteurs orthogonaux sur des droites de H'. D'après ce qui précède, $T = \pi(k)$ avec une $k \in J$. Le théorème est démontré.

REMARQUE 3. — Nous allons montrer que $H' \neq H$ en général. Soit Γ_3 le groupe de Lie nilpotent de dimension 3 étudié dans [1], paragraphe 4. Ses points sont définis par 3 coordonnées réelles (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et la loi de composition est

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\sigma_1 + \rho_1, \sigma_2 + \rho_2, \sigma_3 + \rho_3 - \sigma_1\rho_2).$$

Ce groupe admet une représentation unitaire continue topologiquement irréductible π dans $H = L^2(\mathbf{R})$, définie de la manière suivante : si $\gamma \in \Gamma_3$ admet les coordonnées ρ_1, ρ_2, ρ_3, et si $\xi \in L^2(\mathbf{R})$, on a :

$$(\pi(\gamma)\xi)(\theta) = e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\theta + \rho_1).$$

Soit H' le sous-espace introduit dans le théorème 2. Soit $\xi_0 \in H'$, avec $||\xi_0|| = 1$. Il existe une $F \in L^1(\Gamma_3)$ telle que $\pi(F)$ soit le projecteur sur la droite $\mathbf{C}\xi_0$ (théorème 2 (iv)). Pour $\xi, \eta \in H$, on a

$$(5) \qquad (\pi(F)\xi \,|\, \eta) = ((\xi \,|\, \xi_0)\xi_0 \,|\, \eta) = (\xi \,|\, \xi_0)(\xi_0 \,|\, \eta) = \iint \overline{\xi_0(\rho_1)}\xi_0(\theta)\xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\, d\rho_1 d\theta,$$

et d'autre part

$$(6) \qquad \begin{aligned} (\pi(F)\xi \,|\, \eta) &= \int_{\Gamma_3} (\pi(\gamma)\xi \,|\, \eta) F(\gamma)\, d\gamma \\ &= \iiint F(\rho_1, \rho_2, \rho_3)\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \int e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\theta + \rho_1)\overline{\eta(\theta)}\, d\theta \\ &= \iiiint F(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3) e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\theta \\ &= \iint \Big[\iint F(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3) e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)} d\rho_2 d\rho_3 \Big] \xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\, d\rho_1 d\theta. \end{aligned}$$

Comparant (5) et (6), on voit que, pour presque toutes les valeurs de ρ_1 et θ, on a

$$\overline{\xi_0(\rho_1)}\xi_0(\theta) = \iint F(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3) e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)} d\rho_2 d\rho_3$$

donc aussi

$$\overline{\xi_0(\rho_1 + \theta)}\xi_0(\theta) = G(\rho_1, \theta, -1)$$

et désignant par G la transformée de Fourier de F par rapport aux deux dernières variables. Pour presque tout ρ_1, la fonction $\theta \to G(\rho_1, \theta, -1)$ est continue. Donc, pour presque tout ρ_1, la fonction $\theta \to \overline{\xi_0(\rho_1 + \theta)}\xi_0(\theta)$ est presque partout égale à une fonction

continue. Or, il est immédiat qu'il existe des éléments de H qui ne possèdent pas cette propriété.

REMARQUE 4. — Utilisons les notations du théorème 2. Si ξ est un élément non nul de H', l'annulateur de ξ dans $L^1(G)$ est un idéal à gauche maximal régulier puisque la représentation π' de $L^1(G)$ dans H' est algébriquement irréductible. Mais, puisque $H' \neq H$ en général d'après la remarque 3, l'annulateur dans $L^1(G)$ d'un élément quelconque de H *n'est pas en général un idéal à gauche maximal régulier.* Ce phénomène avait été prévu par R. Godement ([5], page 513, lignes 9-10).

Rappelons par contre que, si on étend π à la C^*-algèbre de G (cf. [4]), la représentation ainsi obtenue de cette C^*-algèbre dans H est algébriquement irréductible ([8], théorème 1).

REMARQUE 5. — Reprenons l'exemple de la remarque 3. Soit $D \subset H$ l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour π. On peut montrer que $D \subset H'$, $D \neq H'$. Comme D est stable pour les opérateurs $\pi(s)$ $(s \in G)$, on voit que H' n'est pas algébriquement irréductible pour les opérateurs $\pi(s)$ $(s \in G)$.

J'ignore si l'inclusion $D \subset H'$ est un fait général.

REMARQUE 6. — En modifiant très légèrement la démonstration du théorème 2, on voit qu'on peut supprimer l'hypothèse que G possède la propriété (P), et supposer seulement qu'il existe des $f \in L^1(G)$ telles que $\pi(f)$ soit de rang fini et non nul.

§ 5. Noyaux des représentations irréductibles.

Le théorème 3 (sauf en ce qui concerne le socle de $L^1(G)/N$) est établi dans [5] pour les groupes semi-simples et les groupes de mouvements.

THÉORÈME 3. — *On conserve les hypothèses et les notations du théorème 2. Soit en outre* $N \subset L^1(G)$ *le noyau de* π *considérée comme représentation de* $L^1(G)$.

i. N *est un idéal primitif de* $L^1(G)$, *et* J/N *est le socle de* $L^1(G)/N$ *et le plus petit idéal bilatère non nul de* $L^1(G)/N$.

ii. N *est maximal parmi les idéaux bilatères fermés de* $L^1(G)$ *distincts de* $L^1(G)$.

Utilisons les notations du théorème 2. Alors N est aussi le noyau de π' (théorème 2 (i)). Comme π' est algébriquement irréductible (théorème 2 (iii)), N est primitif. L'algèbre $L^1(G)/N$ est isomorphe à l'algèbre A des opérateurs $\pi(f)$ $(f \in L^1(G))$. Dans cet isomorphisme, J/N correspond à l'ensemble des opérateurs de rang fini de A, ensemble qui est algébriquement dense dans l'ensemble de tous les opérateurs linéaires de H' (théorème 2 (iv)). D'après [7], page 75 (« structure theorem »), J/N est le socle de $L^1(G)/N$ et le plus petit idéal bilatère non nul de $L^1(G)/N$. D'où (i). Par suite, tout idéal bilatère de $L^1(G)$ contenant N et distinct de N contient J. Comme $\overline{J} = L^1(G)$ d'après la propriété (P), on obtient aussitôt (ii).

REMARQUE 7. — Soit I l'ensemble des $f \in L^1(G)$ telles que $\rho(f)$ soit de rang fini pour *toute* représentation unitaire continue topologiquement irréductible ρ de G. Alors, avec les notations précédentes, on a $J = I + N$. En effet, il est clair que $I + N \subset J$. D'autre part, $(I+N)/N$ est un idéal bilatère de $L^1(G)/N$, non nul puisque $\overline{I} = L^1(G)$, donc égal à J/N d'après le théorème 3 (i).

REMARQUE 8. — Soit G le groupe des transformations affines $x \to ax + b$ $(a \neq 0)$ de $\mathbf{R}$. On sait que la représentation régulière π de G dans $L^2(G)$ est somme de représentations topologiquement irréductibles deux à deux équivalentes. Le noyau N de π dans $L^1(G)$ est $\{0\}$. Mais G possède des représentations unitaires continues de dimension 1, donc N n'est pas maximal parmi les idéaux bilatères fermés de $L^1(G)$. Ainsi, G ne possède pas la propriété (P).

THÉORÈME 4. — *Soient* G *un groupe localement compact possédant la propriété* (P), π *et* π_1 *deux représentations unitaires continues topologiquement irréductibles de* G *dans des espaces hilbertiens, telles que les noyaux de* π *et* π_1 *dans* $L^1(G)$ *soient égaux. Alors* π *et* π_1 *sont unitairement équivalentes.*

Soient H et H_1 les espaces de π et π_1, et $N \subset L^1(G)$ leur noyau commun. Introduisons les notations H', π' du théorème 2, et les notations analogues H_1', π_1' relatives à π_1. Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

a. π' et π_1' définissent deux représentations algébriquement irréductibles fidèles de $L^1(G)/N$. Le socle de $L^1(G)/N$ est non nul. Donc ([7], page 45, proposition 2) ces deux représentations sont algébriquement équivalentes.

b. D'après le théorème 2 (iv), il existe un élément hermitien f_0 de $L^1(G)$ tel que $\pi(f_0)$ soit un projecteur orthogonal sur un sous-espace $\mathbf{C}\xi$ de dimension 1 de H'. D'après (*a*), l'opérateur $\pi_1'(f_0)$ est idempotent et de rang 1 ; donc $\pi_1(f_0)$, qui est hermitien, est un projecteur orthogonal sur un sous-espace $\mathbf{C}\xi_1$ de dimension 1 de H_1'. Les vecteurs ξ et ξ_1 admettent le même annulateur $\mathfrak{m}$ dans $L^1(G)$.

c. Pour $f \in L^1(G)$, posons $\varphi(f) = (\pi(f)\xi \mid \xi)$, $\varphi_1(f) = (\pi_1(f)\xi_1 \mid \xi_1)$. Alors φ et φ_1 sont des formes positives élémentaires sur $L^1(G)$. Pour prouver le théorème 4, il suffit de prouver que φ et φ_1 sont proportionnelles.

Transposant à notre situation un raisonnement de R. V. Kadison sur les C*-algèbres ([8], page 275, lignes 20-27), nous allons montrer que le noyau Q de φ est $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$ (où $\widetilde{\mathfrak{m}}$ est l'image de $\mathfrak{m}$ par l'involution $\sim$ dans $L^1(G)$). D'abord, il est clair que $\mathfrak{m} \subset Q$, donc $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \widetilde{Q} = Q$, donc $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}} \subset Q$. Maintenant, soit $h \in Q$. On a $(\pi(h)\xi \mid \xi) = 0$, donc $\pi(f_0 * h)\xi = \pi(f_0)\pi(h)\xi = 0$, donc $f_0 * h \in \mathfrak{m}$. D'autre part,

$$\pi(\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0)\xi = \pi(\widetilde{h})\xi - \pi(\widetilde{h})\xi = 0$$

puisque $\pi(f_0)\xi = \xi$, donc $\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0 \in \mathfrak{m}$. Alors, tenant compte du fait que $\widetilde{f_0} = f_0$, on a $\widetilde{h} = (\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0) + (f_0 * h)^{\sim} \in \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Donc $Q = \widetilde{Q} \subset \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$.

On a donc prouvé que $Q = \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Le même raisonnement, appliqué à φ_1, montre que le noyau de φ_1 est $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Donc φ et φ_1 sont proportionnelles.

REMARQUE 9. — Soit A la C*-algèbre de G (cf. [4]). Si on étend à A les représentations unitaires irréductibles de G, les analogues des théorèmes 3 et 4 sont vrais. Cela résulte du fait évident qu'un groupe qui possède la propriété (P) est un CCR-groupe (cf. [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, III, *Canadian J. Math.*, t. 10, 1958, pp. 321-348.

[2] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, V, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, pp. 65-79.

[3] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[4] J. M. G. FELL, The dual spaces of C*-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[5] R. GODEMENT, A theory of spherical functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1952, pp. 496-556.

[6] HARISH-CHANDRA, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, pp. 185-243.

[7] N. JACOBSON, Structure of rings. — Providence, American mathematical Society, 1956 (*Amer. math. Soc. Colloquium Publ.*, 37).

[8] R. V. KADISON, Irreducible operator algebras, *Proc. nat. Acad. Sc.*, U.S.A., t. 43, 1957, pp. 273-276.

[9] J.-P. KAHANE, Sur un théorème de Wiener-Lévy, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 246, 1958, pp. 1949-1951.

[10] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, pp. 219-255.

[11] P. MALLIAVIN, Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts, *Publ. math. Inst. Hautes Études scient.*, t. II, 1959, pp. 61-68.

[12] P. MALLIAVIN, Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$, *Bull. Soc. Math. France*, t. 87 (1959), pp. 187-190.

[13] G. E. ŠILOV, *Sur les anneaux normés réguliers*, Travaux de l'Inst. math. de Stekloff, 1947.

Reçu le 23 février 1960.