PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

LUC ILLUSIE
MICHEL RAYNAUD

Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 57 (1983), p. 73-212
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1983__57__73_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES SUITES SPECTRALES ASSOCIÉES AU COMPLEXE DE DE RHAM-WITT

par Luc ILLUSIE *et* Michel RAYNAUD (*)

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 74

Notations et conventions 87

Chapitre I. — **R-Modules gradués** 89

0. Rappels de topologie générale 89
1. Généralités sur les R-modules gradués 90
2. R-modules gradués profinis 97
   A. Définitions 97
   B. R^0-modules profinis 98
   C. Structure des R-modules gradués profinis 102
   D. Dominos 107
   E. Croix 112
3. Calculs de Tor, R-modules gradués cohérents 114
   A. Calculs de Tor 114
   B. R-modules cohérents 118
4. Variantes et généralisations 121

Chapitre II. — **La première suite spectrale de de Rham-Witt** 124

1. Calcul de $R_n \overset{L}{\otimes}_R W\Omega^*_X$ 124
2. Cohérence de $'E_1$ 127
3. Dégénérescence en E_2 modulo longueur finie et survie du cœur 129

Chapitre III. — **La suite spectrale conjuguée** 138

1. Opérateurs F', V' et isomorphismes de Cartier supérieurs 138
2. Dégénérescence modulo torsion de la suite spectrale conjuguée 145
3. Complexes de Nygaard et extensions canoniques 151
4. Une suite spectrale auxiliaire 159
5. Cohérence de $''E_2$ 162
6. Applications 167

Chapitre IV. — **Comparaison des deux suites spectrales** 173

1. Cohomologie des cycles 173
2. Cohomologie des bords 178
3. Cohomologie logarithmique 190
4. Décompositions de Hodge-Witt 199

Bibliographie 211

(*) Equipe de recherche associée au C.N.R.S., n° 653.

INTRODUCTION

1. Cet article poursuit l'étude, entreprise dans [10], de la cohomologie cristalline des schémas propres et lisses sur un corps parfait à l'aide du formalisme fourni par le complexe de de Rham-Witt.

Rappelons d'abord le principe de cette technique. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt de k, σ l'automorphisme de Frobenius de W. Pour tout k-schéma propre et lisse X, on définit dans [10] un isomorphisme canonique

$$\text{(1.1)} \qquad H^*(X/W) \xrightarrow{\sim} H^*(X, W\Omega_X^\cdot)$$

entre la cohomologie cristalline de X par rapport à W et l'hypercohomologie de X (pour la topologie de Zariski) à valeurs dans un certain complexe de faisceaux de W-modules sur X, noté $W\Omega_X^\cdot$, et qu'on appelle *complexe de de Rham-Witt de* X. Ce complexe, concentré en degré $\geqslant 0$, est défini plus généralement sur tout k-schéma lisse (voire tout k-schéma), et généralise le complexe des courbes typiques de Bloch [3]. Sa composante de degré zéro n'est autre que le faisceau $W\mathcal{O}_X$ des vecteurs de Witt sur X. L'intérêt de (1.1) vient de ce que le complexe de de Rham-Witt est muni de certaines structures remarquables qui permettent notamment d'analyser l'opération σ-linéaire Φ induite sur $H^*(X/W)$ par le Frobenius de X.

Commençons par passer rapidement en revue les principaux résultats de [10] (pour un résumé plus détaillé, nous renvoyons le lecteur à [10 *bis*]).

a) Pour tout k-schéma lisse X, les composantes $W\Omega_X^i$ du complexe de de Rham-Witt sont sans p-torsion. Les opérateurs F et V sur $W\mathcal{O}_X$ se prolongent en opérateurs F et V sur les $W\Omega_X^i$, vérifiant $FV = VF = p$. L'endomorphisme $\mathfrak{F}$ du complexe $W\Omega_X^\cdot$ induit par le Frobenius de X est égal à $p^i F$ en degré i; en particulier, la relation $d\mathfrak{F} = \mathfrak{F}d$, où d est la différentielle de $W\Omega_X^\cdot$, entraîne la formule $FdV = d$ (et par suite $dF = pFd$, $pdV = Vd$). De plus, le produit sur $W\mathcal{O}_X$ se prolonge en un produit sur $W\Omega_X^\cdot$, faisant de $W\Omega_X^\cdot$ une W-algèbre différentielle graduée anti-commutative. On a $F(xy) = Fx.Fy$, et $V(xFy) = (Vx)y$.

Pour $n \geqslant 1$, le quotient

$$W_n\Omega_X^i = W\Omega_X^i/(V^n W\Omega_X^i + dV^n W\Omega_X^{i-1})$$

est un $W_n\mathcal{O}_X$-module de type fini. On a une projection canonique (notée R dans [10]) :

$$\pi : W_{n+1}\Omega_X^i \to W_n\Omega_X^i,$$

de noyau localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$, et

(1.2) $$W\Omega^i_X = \varprojlim_{\pi} W_n\Omega^i_X.$$

L'opérateur F (resp. V) induit un opérateur

$$F : W_{n+1}\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X \text{ (resp. } V : W_n\Omega^i_X \to W_{n+1}\Omega^i_X),$$

et d une différentielle qui fait des $W_n\Omega^i_X$ un complexe $W_n\Omega^\cdot_X$, appelé *complexe de de Rham-Witt de cran n*. Pour $n = 1$, ce complexe s'identifie canoniquement au complexe de de Rham usuel de X/k. Si X est de dimension $\leqslant N$, on a $W_n\Omega^i_X = 0$ pour $i > N$ et tout n.

b) Supposons X propre et lisse sur k. Alors, pour tout (i, j), le W_n-module $H^j(X, W_n\Omega^i)$ est de longueur finie, et l'on a

(1.3) $$H^j(X, W\Omega^i) = \varprojlim_{\pi} H^j(X, W_n\Omega^i).$$

Le W-module $H^j(X, W\Omega^i)$ est de type fini modulo p-torsion, et son sous-module de p-torsion est annulé par une puissance de p. Les opérateurs F et V sur $W\Omega^i$ définissent sur $H^j(X, W\Omega^i)$ une structure de module sur l'anneau de Dieudonné $W_\sigma[F, V]$. Muni de F, le W-module (libre de type fini) $H^j(X, W\Omega^i)/p$-torsion est, dans la terminologie de [13], un F-cristal de niveau $\leqslant 1$ et pentes < 1.

c) Sous les hypothèses de *b)*, considérons la suite spectrale, appelée *suite spectrale des pentes* dans [3] et [10], définie par la filtration naïve du complexe de de Rham-Witt et de l'isomorphisme (1.1) :

(1.4) $$E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega^i) \Rightarrow H^*(X/W).$$

Cette suite spectrale est compatible au Frobenius de X, opérant par Φ sur $H^*(X/W)$ et $\mathfrak{F}$ sur $W\Omega^\cdot_X$ (i.e. $p^i F$ sur $W\Omega^i$). Le résultat le plus important de [10] (généralisant le théorème principal de Bloch [3]) est qu'elle dégénère en E_1 modulo torsion et fournit des isomorphismes canoniques de F-isocristaux :

(1.5) $$(H^j(X, W\Omega^i) \otimes K, p^i F) \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes K, \Phi)_{[i, i+1[},$$

où K est le corps des fractions de W, et l'indice $[i, i+1[$ désigne la somme des facteurs de pente λ, pour $\lambda \in [i, i+1[$. Si $P^\cdot H^*(X/W)$ désigne la filtration aboutissement de (1.4), $P^i H^{i+j}(X/W) \otimes K$ est la partie de pente $\geqslant i$ de $(H^{i+j}(X/W) \otimes K, \Phi)$.

d) On a des suites exactes canoniques de pro-faisceaux pour la topologie étale sur tout k-schéma lisse X :

$$0 \to \mathbf{Z}/p^\cdot\mathbf{Z} \to W.\mathcal{O}_X \xrightarrow{1-F} W.\mathcal{O}_X \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}^*_X/\mathcal{O}^{*p^\cdot}_X \to W.\Omega^1_X \xrightarrow{1-F} W.\Omega^1_X \to 0,$$

qui permettent de relier, pour X propre et lisse sur k, la cohomologie cristalline de X aux groupes de cohomologie étale $H^*(X, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim H^*(X_{ét}, \mathbf{Z}/p^n)$ et aux groupes de

cohomologie plate $H^*(X, \mathbf{Z}_p(1)) = \varprojlim H^*(X_{fppf}, \mu_{p^n})$: si k est algébriquement clos, $H^*(X, \mathbf{Z}_p)$ est le $\mathbf{Z}_p$-module des points fixes de Φ sur $H^*(X/W)$, et $H^*(X, \mathbf{Z}_p(1)) \otimes \mathbf{Q}_p$ le $\mathbf{Q}_p$-vectoriel noyau de $\Phi - p$ sur $H^*(X/W) \otimes K$.

Les résultats précédents soulèvent plusieurs questions, qui sont à l'origine du présent travail :

(i) Dans la situation de *b)*, que peut-on dire de la « grosseur » du sous-module de p-torsion de $H^j(W\Omega^i) = H^j(X, W\Omega^i)$? On sait, d'après les résultats de Serre [22], [23], que $H^j(W\mathcal{O})$ n'est pas nécessairement de type fini sur W, mais est V-adiquement séparé et complet et de dimension finie sur k mod V, ce qui entraîne notamment que son sous-module de p-torsion est, à un module de longueur finie près, isomorphe au module de Cartier d'un groupe formel lisse unipotent connexe (donc extension successive finie de modules sur $W_\sigma[F, V]$ isomorphes à $k_\sigma[[V]]$). Par ailleurs, comme l'a montré Nygaard pour les surfaces K3 supersingulières [16 *bis*] (cf. aussi [10] (II (7.2)), il peut arriver que $H^2(W\Omega^1)$ soit annulé par V et de dimension infinie sur k. Que peut-on dire en général du sous-module de V-torsion de $H^j(W\Omega^i)$? Le quotient de $H^j(W\Omega^i)$ par ce sous-module est-il de dimension finie sur k mod V?

(ii) La formule (1.3) munit $H^j(W\Omega^i)$ d'une topologie profinie naturelle, limite projective des topologies discrètes sur les modules de longueur finie $H^j(W_n\Omega^i)$. Pour $i = 0$, cette topologie n'est autre que la topologie V-adique, mais, pour $i > 0$, la topologie V-adique peut être strictement plus fine, comme le montre encore l'exemple des K3 supersingulières, où les sous-modules $dV^nH^2(W\mathcal{O}) \subset H^2(W\Omega^1)$ forment une base de la topologie profinie de $H^2(W\Omega^1)$. Peut-on, dans le cas général, décrire la topologie profinie de $H^j(W\Omega^i)$ à l'aide des sous-modules $V^nH^j(W\Omega^i)$ et $dV^nH^j(W\Omega^{i-1})$?

(iii) La suite spectrale (1.4) est limite projective des suites spectrales de cran n

$$(1.6) \qquad {}_nE_1^{ij} = H^j(X, W_n\Omega^i) \Rightarrow H^*(X/W_n),$$

définies par la filtration naïve de $W_n\Omega^\cdot$ et l'isomorphisme

$$(1.7) \qquad H^*(X/W_n) \xrightarrow{\sim} H^*(X, W_n\Omega^\cdot)$$

construit dans [10] (et donnant (1.1) par passage à la limite). Parallèlement, on peut considérer, pour tout $n \geqslant 1$, la suite spectrale

$$(1.8) \qquad {}_nE_2^{ij} = H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \Rightarrow H^*(X/W_n)$$

définie par (1.7) et la filtration canonique de $W_n\Omega^\cdot$ (deuxième suite spectrale d'hypercohomologie de $W_n\Omega^\cdot$) (cf. Katz [14, VIII]). Les suites spectrales (1.8) forment un système projectif de suites spectrales de W-modules de longueur finie. Leur limite projective est donc une suite spectrale

$$(1.9) \qquad E_2^{ij} = \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \Rightarrow H^*(X/W),$$

que nous appelons ici *suite spectrale conjuguée* (ou *deuxième suite spectrale de de Rham-Witt*). Par analogie avec les résultats de *c)*, on peut se demander si (1.9) dégénère en E_2 modulo

torsion et quelle est la signification de la filtration aboutissement relativement aux pentes de Φ sur $H^*(X/W)$.

(iv) Ce problème suggère des questions analogues à (i) et (ii) pour les W-modules

$$\varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot), \quad \varprojlim H^i(X, ZW_n\Omega^j), \quad \varprojlim H^i(X, BW_n\Omega^j),$$

où $ZW_n\Omega^j = \operatorname{Ker} d : W_n\Omega^j \to W_n\Omega^{j+1}$, $BW_n\Omega^j = dW_n\Omega^{j-1}$: décrire leur topologie profinie naturelle et leurs composantes de torsion, ce qui amène aussi à examiner les relations entre ces modules et les $H^j(X, W\Omega^i)$ fournies par les suites exactes

(1.10.1)
$$\ldots \to \varprojlim H^i(X, ZW_n\Omega^j) \to \varprojlim H^i(X, W_n\Omega^j) \to \varprojlim H^i(X, BW_n\Omega^{j+1}) \to \ldots$$

(1.10.2)
$$\ldots \to \varprojlim H^i(X, BW_n\Omega^j) \to \varprojlim H^i(X, ZW_n\Omega^j) \to \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \to \ldots$$

(v) Pour X propre et lisse sur k, et k algébriquement clos, les $\mathbf{Z}_p$-modules $H^i(X, \mathbf{Z}_p)$ (cf. *d)*) sont de type fini, et l'on montre [10, II (5.9)] qu'il en est de même des $H^i(X, \mathbf{Z}_p(1))$ pour $i \leqslant 2$. En revanche, pour $i \geqslant 3$, $H^i(X, \mathbf{Z}_p(1))$ n'est plus nécessairement de type fini sur $\mathbf{Z}_p$: par exemple, si X est une K3 supersingulière, on a $H^3(X, \mathbf{Z}_p(1)) \xrightarrow{\sim} k$. Quelle est en général la structure de ces $\mathbf{Z}_p$-modules : sont-ils de type fini modulo torsion? quelle est la grosseur de leur torsion? comment sont-ils reliés au noyau de $1 - F$ sur $H^*(W\Omega^1)$? Les mêmes questions se posent, plus généralement, pour les « *groupes de cohomologie logarithmique* » $\varprojlim H^j(X_{ét}, W_n\Omega^i_{log})$, où $W_n\Omega^i_{log}$ est le sous-faisceau étale de $W_n\Omega^i$ engendré localement par les différentielles logarithmiques $d\log \underline{x}_1 \ldots d\log \underline{x}_i$, où $\underline{x}_j = (x_j, 0, \ldots)$ est le représentant de Teichmüller de la section locale x_j de $\mathscr{O}^*_X$, cf. [10, I (5.7)]; on a en effet des suites exactes de pro-faisceaux étales

(1.11)
$$0 \to W.\Omega^i_{log} \to W.\Omega^i \xrightarrow{1-F} W.\Omega^i \to 0$$

généralisant celles de *d)* ci-dessus.

2. Venons-en aux résultats essentiels de cet article.

(2.1) Isomorphismes de Cartier supérieurs. — Soit X un k-schéma lisse. On montre que, pour tout $n \geqslant 1$, $F^n : W_{2n}\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X$ (cf. 1 *a)*) induit un isomorphisme

(2.1.1)
$$C^{-n} : W_n\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot_X,$$

qui se réduit, pour $n = 1$, à l'isomorphisme de Cartier usuel $C^{-1} : \Omega^i_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i\Omega^\cdot_X$. Ce fait, de vérification élémentaire (III (1.4)), a des conséquences importantes :

a) Compte tenu de (1.7), valable pour tout k-schéma lisse X, (2.1.1) fournit une interprétation remarquable des composantes du complexe de de Rham-Witt : $W_n\Omega^i_X$ s'identifie canoniquement au faisceau $\mathscr{H}^i(X/W_n)$ associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U/W_n)$ ($\mathscr{H}^i(X/W_n)$ est aussi le faisceau dont la restriction à tout ouvert affine U est la « valeur commune » des faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^i_{DR}(U'/W_n)$ où U′ est un

relèvement lisse de U sur W_n). Cette interprétation peut servir de base à une nouvelle définition du complexe de de Rham-Witt (pour les k-schémas lisses), et à une reconstruction de la théorie de [10] selon un programme esquissé en (III (1.5)).

b) L'isomorphisme (2.1.1) explique, dans une certaine mesure, la grande similitude de structure qui existe, comme on va voir, entre les suites spectrales (1.4) et (1.9).

On suppose désormais que X *est un schéma propre et lisse sur* k.

(2.2) Résultats négligeant la torsion

a) La suite spectrale conjuguée (1.9) dégénère en E_2 modulo torsion. Le Frobenius de X opère sur cette suite spectrale et si $P.H^*(X/W)$ désigne la filtration (croissante) de l'aboutissement, $P_jH^{i+j}(X/W) \otimes K$ est la partie de $H^{i+j}(X/W) \otimes K$ où les pentes de Φ sont $\leqslant j$. Le W-module

$$H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) := \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \quad (1)$$

est de type fini modulo torsion, et (1.9) fournit un isomorphisme

$$\textbf{(2.2.1)} \qquad H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes K, \Phi)_{]j-1,j]}$$

(où l'indice $]j-1,j]$ désigne la partie de pente $\in]j-1,j]$).

b) On a observé dans [10] que l'endomorphisme F du pro-objet $W.\Omega^i_X$ (cf. 1 *a)*) induit un automorphisme du pro-objet $ZW.\Omega^i$ (cf. 1 (iv)). Par suite, F induit un automorphisme (σ-linéaire) du W-module

$$H^j(X, ZW\Omega^i) := \varprojlim H^j(X, ZW_n\Omega^i) \quad (2).$$

On montre que (pour tout (i,j)) ce W-module est de type fini modulo torsion (de sorte que $H^j(X, ZW\Omega^i)/p$-torsion est un F-cristal unité), et qu'on a un isomorphisme canonique entre $(H^j(X, ZW\Omega^i) \otimes K, p^iF)$ et la partie de $H^{i+j}(X/W) \otimes K$ où Φ est de pente i.

c) Notons F_1 et V_1 les endomorphismes du pro-objet $BW.\Omega^i$ (cf. 1 (iv)) induits par passage au quotient par les endomorphismes F et V de $W.\Omega^{i-1}$. Ils définissent sur

$$H^j(X, BW\Omega^i) := \varprojlim H^j(X, BW_n\Omega^i) \quad (2)$$

une structure de module sur l'anneau de Dieudonné $W_\sigma[F, V]$. On montre que (pour tout (i,j)) $H^j(X, BW\Omega^i)$ est de type fini sur W modulo torsion, que F_1 et V_1 sur $H^j(X, BW\Omega^i)/p$-torsion sont p-adiquement nilpotents, et qu'on a un isomorphisme canonique entre $(H^j(X, BW\Omega^i) \otimes K, p^{i-1}F_1)$ et la partie de $H^{i+j-1}(X/W) \otimes K$ où les pentes de Φ sont dans l'intervalle $]i-1, i[$.

---

(1) On prendra garde que $H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$, défini par le membre de droite, n'est pas en général le i-ème groupe de cohomologie de X à valeurs dans le faisceau $\mathscr{H}^j(W\Omega^\cdot)$.

(2) Même observation que pour la définition de $H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$.

d) La suite exacte (1.10.1) peut être considérée comme une suite exacte de modules sur l'anneau de Dieudonné $W_\sigma[F, V]$, F et V opérant par F et $V = pF^{-1}$ sur $H^*(X, ZW\Omega^*)$ et par F_1 et V_1 sur $H^*(X, BW\Omega^*)$. Après extension des scalaires à K, elle se scinde canoniquement et donne des isomorphismes (de F-isocristaux)

$$\textbf{(2.2.2)} \qquad H^i(X, W\Omega^j) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^i(X, ZW\Omega^j) \otimes K) \oplus (H^i(X, BW\Omega^{j+1}) \otimes K).$$

On a un résultat analogue pour (1.10.2). Tout d'abord, les endomorphismes pF et F^{-1} du pro-objet $ZW.\Omega^i_X$ induisent des endomorphismes F′ et V′ du pro-objet $\mathscr{H}^iW.\Omega^\cdot_X$, qui munissent $H^*(X, \mathscr{H}^*W\Omega^\cdot)$ (défini en *a)*) d'une structure de module sur $W_\sigma[F, V]$ (Φ correspondant à $p^{j-1}F'$ sur $H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot)$). La suite exacte (1.10.2) est linéaire par rapport à $W_\sigma[F, V]$, F et V opérant par F′ et V′ sur $H^*(X, \mathscr{H}^*W\Omega^\cdot)$, F_1 et V_1 sur $H^*(X, BW\Omega^*)$, et pF et F^{-1} sur $H^*(X, ZW\Omega^*)$. Après extension des scalaires à K, elle se scinde canoniquement et donne des isomorphismes (de F-isocristaux)

$$\textbf{(2.2.3)} \qquad H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^i(X, ZW\Omega^j) \otimes K) \oplus (H^{i+1}(X, BW\Omega^j) \otimes K).$$

(2.3) Décompositions de Hodge-Witt

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

— la suite spectrale (1.4) dégénère en E_1;
— la suite spectrale (1.9) dégénère en E_2;
— pour tout (i,j), $H^j(X, W\Omega^i)$ est de type fini sur W;
— pour tout (i,j), $H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot)$ (2.2 *a)*) est de type fini sur W;
— pour tout (i,j), $H^i(X, ZW\Omega^j)$ (2.2 *b)*) est de type fini sur W;
— pour tout (i,j), $H^i(X, BW\Omega^j)$ (2.2 *c)*) est de type fini sur W.

b) Supposons remplies les conditions de *a)*. Alors, pour tout (i,j), on a des décompositions canoniques analogues à (2.2.2) et (2.2.3), mais qui ne négligent pas la torsion :

$$\textbf{(2.3.1)} \qquad H^i(X, W\Omega^j) \xrightarrow{\sim} H^i(X, ZW\Omega^j) \oplus H^i(X, BW\Omega^{j+1}),$$

$$\textbf{(2.3.2)} \qquad H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^i(X, ZW\Omega^j) \oplus H^{i+1}(X, BW\Omega^j);$$

ces décompositions sont compatibles aux diverses structures de modules sur l'anneau de Dieudonné définies ci-dessus, F et V opérant sur $H^i(X, ZW\Omega^j)$ par F et V dans (2.3.1), par pF et F^{-1} dans (2.3.2). La décomposition (2.3.1) (resp. (2.3.2)) n'est autre que la décomposition canonique de $H^i(X, W\Omega^j)$ (resp. $H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot)$) sous l'action de F (resp. V′) en parties semi-simple et topologiquement nilpotente. De plus, pour tout n, les filtrations $P^\cdot$ et $P_\cdot$ aboutissements des suites spectrales (1.4) et (1.9) déterminent des décompositions canoniques de $H^n(X/W)$:

$$\textbf{(2.3.3)} \qquad H^n(X/W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, W\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot),$$

avec

(2.3.4) $\quad P^iH^n(X/W) \cap P_iH^n(X/W) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X, ZW\Omega^i),$

que nous appelons *décompositions de Hodge-Witt* pour leur ressemblance avec les décompositions de Hodge du cas transcendant. Toutefois, à la différence de la filtration de Hodge et de sa conjuguée, les filtrations $P^\bullet$ et $P_\bullet$ ne sont pas en général opposées, comme le montrent (2.3.3) et (2.3.4). Elles le sont si et seulement si l'on a $H^i(X, BW\Omega^j) = 0$ pour tout (i,j), condition que l'on montre être équivalente à $H^i(X, B\Omega^j) = 0$ pour tout (i,j). C'est par cette dernière condition que Kato définit les *variétés ordinaires*, cf. (IV (4.13)), [11] et le travail en préparation de Bloch-Gabber-Kato.

c) Sous les conditions de *a)*, si l'on suppose de plus que F est injectif sur les modules $H^j(X, W\Omega^i)$, on peut décrire par des suites exactes courtes les groupes de cohomologie de cran n $H^j(X, W_n\Omega^i)$, $H^j(X, \mathscr{H}^iW_n\Omega^\bullet)$, $H^j(X, ZW_n\Omega^i)$, $H^j(X, BW_n\Omega^i)$ en termes des $H^k(X, W\Omega^\ell)$ (ou $H^k(X, \mathscr{H}^\ell W\Omega^\bullet)$) munis de leur structure de module sur l'anneau de Dieudonné (IV (4.7), (4.9)).

Les conditions de *a)* sont très restrictives. Nous établissons en fait des équivalences analogues à *a)* — et des résultats analogues à *b)* et *c)* — relativement à un degré total donné (e.g. IV (4.5)).

(2.4) Structure des termes initiaux. — Les résultats mentionnés en (2.2) et (2.3) ne sont en fait que des sous-produits de résultats décrivant de manière assez précise la structure des termes initiaux des suites spectrales (1.4) et (1.9) ainsi que celle des groupes de cohomologie $H^i(X, ZW\Omega^j)$, $H^i(X, BW\Omega^j)$ définis ci-dessus. Ces résultats, qui répondent aux questions (1 (i), (ii), (iv)), constituent véritablement le cœur de ce travail.

Dans la suite, nous écrirons, pour abréger, $H^j(W\Omega^i)$, $H^j(ZW\Omega^i)$, etc., au lieu de $H^j(X, W\Omega^i)$, $H^j(X, ZW\Omega^i)$, etc.

(2.4.1) Structure des $H^j(W\Omega^i)$. — *a)* La topologie profinie de $H^j(W\Omega^i)$ (cf. (1 (ii))) est définie par les sous-modules $V^nH^j(W\Omega^i) + dV^nH^j(W\Omega^{i-1})$ (où $d : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$ est la différentielle d_1 de (1.4)) : en d'autres termes, ces sous-modules sont ouverts, et $H^j(W\Omega^i)$ est limite projective des modules de longueur finie $H^j(W\Omega^i)/(V^nH^j(W\Omega^i) + dV^nH^j(W\Omega^{i-1}))$.

b) Considérons, en degré (i,j), les sous-modules des bords et cycles du terme $E_1 : B_2^{ij} = dH^j(W\Omega^{i-1})$, $Z_2^{ij} = \mathrm{Ker}\, d : H^j(W\Omega^i) \to H^j(W\Omega^{i+1})$. Comme on a $F\,dV = d$ (conséquence de la même relation au niveau de $W\Omega^\bullet$ (1 *a)*)), le sous-module B_2^{ij} est stable par V mais non en général par F, tandis que Z_2^{ij} est stable par F mais non en général par V. Il est donc naturel d'introduire les modules $F^\infty B_2^{ij} = \bigcup F^nB_2^{ij}$, plus petit sous-module de $H^j(W\Omega^i)$ stable par F et V et contenant B_2^{ij}, et $V^{-\infty}Z_2^{ij} = \bigcap \mathrm{Ker}\, dV^n$, plus grand sous-module de $H^j(W\Omega^i)$ stable par F et V et contenu dans Z_2^{ij}. La filtration de $H^j(W\Omega^i)$ ainsi obtenue

(2.4.1.1) $\quad F^\infty B_2^{ij} \subset V^{-\infty}Z_2^{ij} \subset E_1^{ij} = H^j(W\Omega^i)$

est stable par F et V. On montre qu'elle possède les propriétés suivantes :

(i) Les quotients $F^\infty B_2^{ij}/B_2^{ij}$ et $Z_2^{ij}/V^{-\infty}Z_2^{ij}$ sont de longueur finie sur W. Le $W_o[F, V]$-module $V^{-\infty}Z_2^{ij}/F^\infty B_2^{ij}$, que nous appelons le *cœur* (de la première suite spectrale en degré (i,j)), est de type fini sur W. Il « survit » dans l'aboutissement : on a $B_\infty^{ij} \subset F^\infty B_2^{ij} \subset V^{-\infty}Z_2^{ij} \subset Z_\infty^{ij}$.

En particulier, E_r est de type fini sur W pour $r \geqslant 2$, et la suite spectrale dégénère en E_2 modulo longueur finie.

(ii) Le sous-module $F^\infty B_2^{ij}$ est fermé dans $H^j(W\Omega^i)$ et la topologie induite est définie par les $dV^n H^j(W\Omega^{i-1})$. Sur $F^\infty B_2^{ij}$, F est surjectif et V nilpotent.

(iii) Le quotient $H^j(W\Omega^i)/F^\infty B_2^{ij}$ a pour topologie quotient la topologie V-adique; il est de dimension finie sur k mod V. Sur $H^j(W\Omega^i)/V^{-\infty}Z_2^{ij}$, V est injectif et F nilpotent : ce module est le module de Cartier d'un groupe formel lisse unipotent.

De (ii) et (iii) résulte notamment que $H^j(W\Omega^i)/V$-torsion est V-adiquement séparé et complet et de dimension finie sur k mod V.

(iv) La différentielle $d : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$ induit une flèche

$$\textbf{(2.4.1.2)} \qquad H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j} \to F^\infty B_2^{ij},$$

de noyau et conoyau de longueur finie; le noyau de F sur $F^\infty B_2^{ij}$ a même dimension sur k que le conoyau de V sur $H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j}$; on a $F^\infty B_2^{ij} = 0$ si et seulement si $H^j(W\Omega^{i-1}) = V^{-\infty}Z_2^{i-1,j}$. Pour que $H^j(W\Omega^i)$ soit de type fini sur W, il faut et il suffit que $H^j(W\Omega^i) = V^{-\infty}Z_2^{ij}$ et $F^\infty B_2^{ij} = 0$, ce qui équivaut encore à

$$T^{ij} = T^{i-1,j} = 0,$$

où T^{ij} désigne la dimension du groupe formel lisse unipotent correspondant à $H^j(W\Omega^i)/V^{-\infty}Z_2^{ij}$, i.e. la dimension sur k du conoyau de V sur $H^j(W\Omega^i)/V^{-\infty}Z_2^{ij}$.

Enfin, si X est de dimension $\leqslant N$, on a

$$T^{ij} = 0 \quad \text{pour } j \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad i \geqslant N - 1,$$

ce qui généralise les résultats de dégénérescence partielle de [10, II, 2].

(2.4.2) Structure des $H^i(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$. — On a pour le terme E_2 de la suite spectrale conjuguée (1.9) des résultats analogues à ceux de (2.4.1). Ainsi, la topologie profinie de $H^i(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ (cf. 1 (iv), (2.2) *a)*) est définie par les sous-modules $F'^n H^i(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) + d_2 F'^n H^{i-2}(\mathscr{H}^{j+1} W\Omega^\cdot)$ (cf. (2.2) *d)* pour la définition de F', V'). La relation $F d_1 V = d_1$ ((2.4.1) *b)*) est remplacée par $V' d_2 F' = d_2$, et l'on a une filtration en deux crans stable par F', V' :

$$\textbf{(2.4.2.1)} \qquad V'^\infty B_3^{ij} \subset F'^{-\infty} Z_3^{ij} \subset E_2^{ij} = H^i \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot,$$

avec des propriétés analogues à celles de (2.4.1.1). En particulier, le *cœur* $F'^{-\infty}Z_3^{ij}/V'^\infty B_3^{ij}$ est de type fini sur W, isomorphe modulo longueur finie à E_3^{ij}, et survit dans l'aboutissement. Pour $r \geqslant 3$, E_r^{ij} est de type fini sur W, et la suite spectrale conjuguée dégénère en E_3 modulo longueur finie. Pour plus de détails, voir (III 5, 6).

(2.4.3) Structure des $H^j(ZW\Omega^i)$, $H^j(BW\Omega^i)$. — Le point clé est que le W-module $H^j(ZW\Omega^i)$ (cf. (2.2) *b)*), avec sa topologie profinie naturelle et son automorphisme F, peut se reconstituer à partir, au choix, de $H^j(W\Omega^i)$ ou $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$: on a des isomorphismes canoniques de W-modules profinis

$$\textbf{(2.4.3.1)} \qquad H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_F H^j(W\Omega^i),$$

$$\textbf{(2.4.3.2)} \qquad H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{V'} H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot),$$

par lesquels l'automorphisme F de $H^j(ZW\Omega^i)$ et son inverse V′ correspondent aux automorphismes des seconds membres définis par les opérateurs F sur $H^j(W\Omega^i)$ et V′ sur $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$. Compte tenu des informations assez complètes dont on dispose, comme on vient de voir, sur les $H^j(W\Omega^i)$ et $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$, ce fait permet d'expliciter la structure des $H^j(ZW\Omega^i)$ et $H^j(BW\Omega^i)$ en liaison avec les suites exactes (1.10.1) et (1.10.2). Les principaux résultats sont les suivants :

a) On a une extension canonique, compatible à F, de W-modules profinis où F opère bijectivement

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i)_u \to H^j(ZW\Omega)^i \to H^j(ZW\Omega^i)_{tf} \to 0,$$

avec $H^j(ZW\Omega^i)_{tf}$ de type fini sur W et $H^j(ZW\Omega^i)_u$ de torsion annulé par une puissance de p; le W-module $H^j(ZW\Omega^i)_{tf}$, qu'on appelle le *cœur* (de $H^j(ZW\Omega^i)$), s'identifie canoniquement au facteur semi-simple sous l'action de F (resp. V′) du cœur de $H^j(W\Omega^i)$ (resp. $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$) (cf. (2.4.1) (2.4.2)); il est égal à $H^j(ZW\Omega^i)$ (i.e. $H^j(ZW\Omega^i)_u = 0$) si et seulement si $H^j(ZW\Omega^i)$ est de type fini sur W.

b) Les opérateurs F_1 et V_1 sur le W-module profini $H^j(BW\Omega^i)$ (cf. (2.2) *c)*) sont topologiquement nilpotents. On a une extension canonique, compatible à F_1 et V_1, de W-modules profinis où F_1 et V_1 sont topologiquement nilpotents

$$0 \to H^j(BW\Omega^i)_{tf} \to H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^i)_u \to 0,$$

avec $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$ de type fini sur W et $H^j(BW\Omega^i)_u$ de torsion annulé par une puissance de p; le W-module $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$, qu'on appelle le *cœur* (de $H^j(BW\Omega^i)$), s'identifie canoniquement au facteur topologiquement nilpotent sous l'action de F (resp. V′) du cœur de $H^j(W\Omega^{i-1})$ (resp. $H^{j-1}(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$) (cf. (2.4.1) (2.4.2)); il est égal à $H^j(BW\Omega^i)$ (i.e. $H^j(BW\Omega^i)_u = 0$) si et seulement si $H^j(BW\Omega^i)$ est de type fini sur W.

c) Les différentielles $d_1 : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$ de la première suite spectrale et $d_2 : H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$ de la suite spectrale conjuguée sont reliées par un diagramme en forme de croix (IV (2.10)), de centre $H^j(ZW\Omega^i)_u$. Ce diagramme permet de montrer que les parties de torsion infinie des termes initiaux des deux suites spectrales sont de même grandeur : plus précisément, les groupes formels lisses unipotents associés à $H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j}$ et $H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot)/F'^{-\infty}Z_3^{j-2,i+1}$ (cf. (2.4.1) (2.4.2)) ont même dimension.

(2.5) Cohomologie logarithmique. — Supposons (pour simplifier) k algébriquement clos. Pour tout (i,j), on construit un k-groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^j(X, W\Omega^i_{log})$, dont le groupe des k-points est $H^j(X, W\Omega^i_{log}) = \varprojlim H^j(X_{ét}, W_n\Omega^i_{log})$ (cf. 1 (v)). On a une extension canonique de groupes pro-algébriques

$$0 \to \mathbf{H}^j(X, W\Omega^i_{log})^0 \to \mathbf{H}^j(X, W\Omega^i_{log}) \to D^{ij} \to 0,$$

où D^{ij} est pro-étale, de type fini sur $\mathbf{Z}_p$, et $\mathbf{H}^j(X, W\Omega^i_{log})^0$ quasi-algébrique unipotent connexe. Le groupe D^{ij} est le groupe des points fixes de F sur le cœur de $H^j(ZW\Omega^i)$ ((2.4.3) *a)*); c'est aussi le groupe des points fixes de F (resp. V') sur le cœur de $H^j(W\Omega^i)$ (resp. $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$); son rang (sur $\mathbf{Z}_p$) est la dimension de la partie de pente i de $H^{i+j}(X/W) \otimes K$: le groupe $D^{ij} \otimes \mathbf{Q}_p$ est le noyau de $\Phi - p^i$ sur $H^{i+j}(X/W) \otimes K$. Le groupe $\mathbf{H}^j(X, W\Omega^i_{log})^0$ a pour dimension la dimension commune $T^{i-1,j}$ des groupes formels unipotents envisagés en (2.4.3) *c)*. De plus, la suite exacte longue provenant de (1.11) fournit des suites exactes courtes

$$0 \to H^j(X, W\Omega^i_{log}) \to H^j(W\Omega^i) \xrightarrow{1-F} H^j(W\Omega^i) \to 0,$$

et l'on a des suites exactes analogues

$$0 \to H^j(X, W\Omega^i_{log}) \to H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \xrightarrow{1-V'} H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \to 0.$$

3. Bien qu'elles nécessitent la mise en œuvre d'un formalisme un peu lourd, les démonstrations sont assez simples dans leur principe.

Le point de départ est l'observation suivante. Considérons, pour j fixé, le complexe

$$E_1^{\cdot j} = (H^j(W\mathcal{O}) \to H^j(W\Omega^1) \to \ldots \to H^j(W\Omega^i) \to \ldots)$$

de la première suite spectrale (1.4). Chaque composante $H^j(W\Omega^i)$ est un module sur l'anneau de Dieudonné $W_\sigma[F, V]$, et la différentielle vérifie la relation $F\,dV = d$ (cf. (2.4.1) *b)*). On peut interpréter cette structure comme un module gradué sur une W-algèbre graduée

$$\mathbf{(3.1)} \qquad R = R^0 \oplus R^1,$$

dont la composante de degré zéro est l'anneau de Dieudonné $W_\sigma[F, V]$, et qui est engendrée par F et V en degré 0 et par un élément d en degré 1 tel que $d^2 = 0$ et $F\,dV = d$ (cf. (I (1.1))). Un R-module gradué M est donc simplement un complexe de W-modules $(\ldots \to M^i \xrightarrow{d} M^{i+1} \to \ldots)$ dont les composantes sont des R^0-modules et la différentielle vérifie $F\,dV = d$. Le résultat (2.4.1) *a)* qu'on veut établir pour E_1 conduit à étudier les R-modules gradués M qui ont la propriété que, pour tout i et tout $n \geqslant 1$, $M^i_n = M^i/(V^nM^i + dV^nM^{i-1})$ est de longueur finie sur W et $M^i = \varprojlim M^i_n$; nous appelons de tels modules $(V + dV)$-*profinis* (ou simplement *profinis*). Un R-module gradué profini concentré en degré 0 n'est autre qu'un R^0-module V-adiquement séparé et complet M tel que M/VM soit de dimension finie sur k. Il est bien connu qu'un tel module est de type fini sur W modulo p-torsion et que son sous-module de p-torsion

est, à un W-module de longueur finie près, isomorphe au module de Cartier d'un groupe formel lisse unipotent. Dans le cas général, il n'est pas difficile de montrer que, si M est un R-module gradué profini, chaque composante M^i possède une filtration en deux crans (par des sous-R^0-modules) $F^\infty B^i \subset V^{-\infty} Z^i \subset M^i$, analogue à (2.4.1.1) à cela près que le « cœur » $V^{-\infty} Z^i / F^\infty B^i$ n'est pas nécessairement de type fini sur W. On en déduit que tout R-module gradué profini à degrés bornés admet une suite de composition de quotients successifs soit concentrés en un seul degré (donc de valeur un R^0-module profini), soit concentrés en deux degrés consécutifs, avec une différentielle ayant la forme de la différentielle $d_1 : H^2(W\mathcal{O}) \to H^2(W\Omega^1)$ d'une K3 supersingulière (voir (I (2.19)) pour un énoncé précis).

Cela étant, pour prouver (2.4.1) *a)*, on est amené à considérer la flèche naturelle

$$\text{(3.2)} \qquad H^j(W\Omega^i)/(V^n H^j(W\Omega^i) + dV^n H^j(W\Omega^{i-1})) \to H^j(W_n\Omega^i).$$

Supposons X purement de dimension N. L'exactitude à droite de $H^N(X, -)$ entraîne, par définition de $W_n\Omega^i$ (cf. 1 *a)*), que (3.2) est un isomorphisme pour $j = N$, d'où (2.4.1) *a)* pour $j = N$ puisque les $H^j(W_n\Omega^i)$ sont de longueur finie. Pour $j < N$, (3.2) n'est plus nécessairement un isomorphisme. Pour étendre (2.4.1) *a)* à $j \leqslant N$, on doit donc étudier les noyau et conoyau de (3.2), ce qui conduit à examiner, d'une manière générale, le défaut d'exactitude du foncteur qui à un R-module gradué M associe le W-module gradué M_n de composantes $M_n^i = M^i/(V^n M^i + dV^n M^{i-1})$. Ce foncteur s'interprète comme un produit tensoriel (c'est d'ailleurs essentiellement pour cela que nous avons introduit l'anneau R) : on a

$$M_n = R_n \otimes_R M,$$

où R_n est le R-module à droite $R/(V^n R + dV^n R)$. Il se trouve qu'on dispose miraculeusement d'une résolution libre de R_n comme R-module à droite (I (3.2)) :

$$\text{(3.3)} \qquad 0 \to R[-1] \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} R[-1] \oplus R \xrightarrow{dV^n + V^n} R \to 0,$$

grâce à laquelle il est aisé d'expliciter les $\mathrm{Tor}_i^R(R_n, M)$. Calculant ces Tor pour les R-modules gradués profinis des types élémentaires mentionnés plus haut, on voit apparaître une classe particulièrement intéressante de R-modules gradués profinis, que nous appelons *cohérents* (bien qu'il ne s'agisse pas de cohérence par rapport à l'anneau R au sens qu'on donne d'ordinaire à cette notion). Un R-module gradué cohérent est, par définition, un R-module gradué profini M à degrés bornés vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout i, $H^i M$ est de type fini sur W;
(ii) pour tout i et tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_i^R(R_n, M)$ est un W-module gradué de longueur finie.

Avec cette terminologie, on peut reformuler l'essentiel de (2.4.1) en disant que, pour tout j, $E_1^{\cdot j}$ est un R-module gradué cohérent. Pour le prouver, on dispose de l'arsenal habituel de l'algèbre homologique, qui permet notamment d'interpréter (3.2)

comme un homomorphisme latéral dans une certaine suite spectrale. L'ingrédient essentiel, qui fait marcher la démonstration, est une résolution canonique de $W_n\Omega^i$:

$$(3.4) \qquad 0 \to W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^n + V^n} W\Omega^i \to W_n\Omega^i \to 0,$$

qui précise l'égalité $W_n\Omega^i = W\Omega^i/(V^n W\Omega^i + dV^n W\Omega^{i-1})$ et, compte tenu de (3.3), peut se récrire sous la forme

$$W_n\Omega^\cdot = R_n \overset{L}{\otimes}_R W\Omega^\cdot,$$

où $W\Omega^\cdot$ est considéré de façon naturelle comme faisceau de R-modules gradués sur X.

Pour la suite spectrale conjuguée, on procède exactement de la même manière. Une fois établie l'identité $V' d_2 F' = d_2$, on peut considérer le terme E_2 comme un module gradué sur un anneau gradué $R' = R'^0 \oplus R'^1$ analogue à R ((3.1)), avec F et V remplacés par V' et F' et σ par σ^{-1}. L'essentiel de (2.4.2) se résume en disant que le terme E_2 est un R'-module gradué cohérent, avec la transposition évidente de R à R' des définitions données ci-dessus. Bien que parallèle, la démonstration est cependant plus compliquée que celle de la cohérence du terme E_1 de la première suite spectrale, essentiellement parce que, à la différence de d_1, qui provient d'un morphisme de faisceaux, la différentielle d_2 est définie par une flèche d'une catégorie dérivée. On parvient cependant à construire, pour $\mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot$, un substitut raisonnable de la résolution clé (3.4), cf. (III (3.3.7)).

Les isomorphismes (2.4.3.1) et (2.4.3.2) se déduisent aisément du fait que F est un automorphisme du pro-objet $ZW.\Omega^i$. Les autres résultats de (2.4.3) ne mettent pas en œuvre de nouvelles idées : ils reposent sur les résultats de (2.4.1) et (2.4.2) et l'étude de l'opération qui, à une composante M^i d'un R-module gradué cohérent M, associe le R^0-module $\varprojlim_F M^i$. Il en va de même pour les résultats de (2.5), qui découlent facilement de la cohérence des termes initiaux des deux suites spectrales : signalons seulement que c'est le seul endroit, dans cet article aussi bien que dans [10], où l'on utilise de manière essentielle la commutation des faisceaux $W_n\Omega^i_X$ aux changements de bases parfaites $S \to \mathrm{Spec}(k)$.

4. Voici maintenant un bref aperçu du contenu des divers chapitres.

Le chapitre I sert de base à tout l'article. Il est logiquement indépendant de [10]. Les résultats les plus importants sont, d'une part, les théorèmes de structure des R-modules gradués profinis (I (2.9) et (2.15)), d'où résulte le théorème de dévissage (I (2.19)), d'autre part, la caractérisation (I (3.8)) des R-modules gradués cohérents. Les variantes développées au n° 4 ne jouent qu'un rôle épisodique dans la suite de l'article, en II (3.6) et III (6.4). En revanche, les notions de « domino » et de « croix » de I (2.16) (2.18) fournissent un formalisme commode pour la comparaison, au chapitre IV, des termes initiaux des deux suites spectrales.

Le chapitre II est consacré à l'étude de la suite spectrale (1.4). On y établit les résultats annoncés en (2.4.1). Les deux théorèmes principaux sont le théorème de

cohérence du terme E_1 (II (2.2)), que l'on démontre par la méthode indiquée ci-dessus, et le théorème de survie du cœur (II (3.4)). Pour ce dernier, on utilise les complexes de de Rham-Witt modifiés introduits par Nygaard [16], [17]. Une démonstration différente du même théorème est donnée au chapitre IV, comme application des théorèmes de structure des $H^j(ZW\Omega^i)$, $H^j(BW\Omega^i)$.

Au chapitre III, on décrit d'abord les opérateurs F', V' sur $ZW.\Omega^i$, $\mathscr{H}^iW.\Omega^\cdot$ indiqués en (2.2) *d)*, et l'on établit l'isomorphisme de Cartier (2.1.1). Puis, par une méthode calquée sur celle utilisée dans [10] pour prouver la dégénérescence en E_1 modulo torsion de la première suite spectrale, on démontre la dégénérescence en E_2 modulo torsion de la suite spectrale conjuguée. Bien qu'il s'agisse d'une conséquence de la cohérence de E_2, démontrée plus loin dans le chapitre, nous avons tenu à donner cette démonstration indépendante, plus élémentaire, qui ne fait pas appel aux résultats du chapitre I. Le reste du chapitre est consacré au théorème de cohérence de E_2 (III (5.2)), qui nécessite des préliminaires un peu techniques, aux n^{os} 3 et 4, pour construire un substitut à la suite exacte (3.4), et au théorème de survie du cœur (III (6.3)), qui se démontre comme son analogue du chapitre II.

Au chapitre IV, on recueille les fruits du travail précédent. On y démontre les résultats indiqués en (2.2) *b)*, *c)*, (2.3), (2.4.3) et (2.5). Les plus importants sont IV (2.10), qui compare à l'aide d'une croix les termes initiaux des deux suites spectrales, IV (3.3), qui donne la structure du groupe pro-algébrique associé à la cohomologie logarithmique, et IV (4.5), énonçant l'existence des décompositions de Hodge-Witt de $H^n(X/W)$ quand les $H^i(W\Omega^j)$ sont de type fini sur W pour $i+j=n$.

5. Nous ne donnons pas, dans ce travail, d'applications géométriques. Signalons cependant que les résultats de cet article, et plus particulièrement la notion de R-module gradué cohérent, jouent un rôle essentiel dans des travaux récents de R. Crew et T. Ekedahl : dans sa thèse (*Slope characteristics in crystalline cohomology*, Princeton University, 1981, à paraître), Crew établit une formule calculant $\chi(X, \Omega^i)$ $(= \Sigma(-1)^j h^{ij})$ (pour X propre et lisse sur k) à l'aide de nombres liés aux pentes de la cohomologie cristalline et des dimensions T^{ij} des groupes formels lisses unipotents définis par le terme initial de la première suite spectrale (cf. (2.4.1) *b)*); les travaux d'Ekedahl [7] (voir [10 *ter*] pour un aperçu des principaux résultats) comprennent notamment une formule de dualité et une formule de Künneth pour les $H^j(W\Omega^i)$, ainsi que des raffinements concernant les inégalités de Katz-Mazur-Ogus [2, § 8] entre polygones de Newton et de Hodge. Ces travaux ont entre autres des applications aux variétés unirationnelles et aux variétés abéliennes. En outre, le formalisme développé par Ekedahl pour les « complexes cohérents » (cf. I (3.10.1) et [10 *ter*]) enrichit considérablement la théorie présentée ici.

Nous remercions vivement, pour des discussions stimulantes, P. Berthelot, S. Bloch, O. Gabber, N. Katz, W. Lang, N. Nygaard, A. Ogus, et surtout T. Ekedahl, dont les travaux récents dans le prolongement de cet article nous ont procuré le plus précieux des encouragements.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans tout cet article, on fixe un nombre premier p et un corps parfait k de caractéristique p. On note :

$W(k)$ (ou W) l'anneau des vecteurs de Witt sur k;
$W_n(k)$ (ou W_n) $= W(k)/p^nW(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n;
σ l'automorphisme de Frobenius de $W(k)$ et $W_n(k)$;
$W_\sigma[[V]]$ (resp. $W_{n\sigma}[[V]]$) l'anneau de séries formelles en V à coefficients dans W (resp. W_n) avec relations $aV = Va^\sigma$, $a \in W$ (resp. W_n);
$R(k)$ (ou R) l'algèbre de Cartier-Dieudonné-Raynaud sur k (I (1.1.1));
$W_\sigma[F, V] = R^0$ l'algèbre de Cartier-Dieudonné sur k (I (1.1.1)).

Si M est un R-module gradué, on pose :

$\mathrm{Fil}^n M := V^n M + dV^n M$ (I (1.3.1));
$M_n := M/\mathrm{Fil}^n M$.

Si X est un k-schéma, on note :

$\Omega_X^\cdot$ le complexe de de Rham de X sur k;
$W_n\Omega_X^\cdot$ le complexe de de Rham-Witt de X de cran n [10, I (1.12)];
$W.\Omega_X^\cdot$ le système projectif (ou parfois le pro-objet) formé par les $W_n\Omega_X^\cdot$ et les flèches de restriction $W_{n+1}\Omega_X^\cdot \to W_n\Omega_X^\cdot$, notées R (ou π);
$W\Omega_X^\cdot := \varprojlim_R W_n\Omega_X^\cdot$, le complexe de de Rham-Witt de X.

On omet l'indice X quand il n'en peut résulter de confusion.

Si u est un endomorphisme d'un groupe abélien G, on pose :

${}_uG := \mathrm{Ker}\, u$.

Si M est un complexe (d'une catégorie abélienne), on note $M^{\leqslant i}$, $M^{\geqslant i}$, $M^{[a,b]}$ les tronqués naïfs de M, et $t_{\leqslant i}M$, $t_{\geqslant i}M$, $t_{[a,b]}M$ les tronqués canoniques de M :

$M^{\leqslant i} := (\ldots \to M^{i-1} \to M^i \to 0)$, $M^{\geqslant i} := (0 \to M^i \to M^{i+1} \to \ldots)$;
$M^{[a,b]} := (0 \to M^a \to \ldots \to M^b \to 0)$;
$t_{\leqslant i}M := (\ldots \to M^{i-1} \to Z^iM \to 0)$, $t_{\geqslant i}M := (0 \to M^i/B^iM \to M^{i+1} \to \ldots)$
(où $Z^iM = \mathrm{Ker}\, d$, $B^iM = \mathrm{Im}\, d$);
$t_{[a,b]}M := (0 \to M^a/B^aM \to M^{a+1} \to \ldots \to Z^bM \to 0)$ $(a < b)$.

Si A est un anneau, lorsqu'on parle d'un A-module sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un A-module à gauche.

Une suite de composition d'un objet M d'une catégorie abélienne C est une filtration finie de M par des objets de C, $M = F^0M \supset \ldots \supset F^nM \supset F^{n+1}M = 0$; les quotients successifs (ou quotients) sont par définition les objets $\mathrm{gr}_F^i M = F^iM/F^{i+1}M$.

Si L est un faisceau, la notation $x \in L$ signifie que x est une section locale de L.

Si E est un complexe de faisceaux abéliens sur un espace X, on écrit parfois $R\Gamma(E)$, $H^i(E)$, pour $R\Gamma(X, E)$, $H^i(X, E)$, quand il n'en peut résulter de confusion.

L'écriture $a := b$ signifie que a est défini par b.

I. — R-MODULES GRADUÉS

o. Rappels de topologie générale

Nous consignons ici quelques résultats de topologie générale dont nous aurons fréquemment à nous servir.

(o.1) Soit G un groupe commutatif muni de deux topologies T_1 et T_2 compatibles avec sa structure de groupe, T_1 étant plus fine que T_2. On suppose que G est séparé et complet pour T_2 et qu'il existe un système fondamental de voisinages de o pour T_1 qui sont fermés pour T_2. Alors G est séparé et complet pour T_1 (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. 3, § 3, n° 5, Prop. 9, cor. 2).

(o.2) Soit A un anneau. Un A-module M, muni d'une topologie A-linéaire T, est dit T-*profini* si M est séparé et complet pour T et si, pour tout sous-module ouvert N de M, le A-module M/N est de longueur finie [6, p. 560]. Si T est définie par une filtration $\mathrm{Fil}^0 M = M \supset \mathrm{Fil}^1 M \supset \ldots \supset \mathrm{Fil}^n M \supset \ldots$, M est T-profini si, pour tout n, $M/\mathrm{Fil}^n M$ est de longueur finie, et $M \xrightarrow{\sim} \varprojlim M/\mathrm{Fil}^n M$. Toute « petite » limite projective de A-modules profinis (par exemple, de longueur finie, discrets) est un A-module profini (pour la topologie limite projective).

(o.3) Si M est T-profini, tout sous-module fermé M′ est profini pour la topologie induite par T sur M′; le quotient M/M′ est profini pour la topologie quotient *(loc. cit.)*.

(o.4) Soit M un A-module, muni de deux topologies A-linéaires T_1 et T_2, T_1 étant plus fine que T_2. Si M est T_1-profini et T_2 est séparée, alors $T_1 = T_2$ [6, p. 561].

(o.5) Soit M_i un A-module T_i-profini $(i = 1, 2)$. Toute application linéaire continue $u : M_1 \to M_2$ est d'image fermée; de plus, l'application $\bar{u} : M_1/\mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{Im}\, u$ induite par u est un homéomorphisme de $M_1/\mathrm{Ker}\, u$, muni de la topologie quotient de T_1, sur $\mathrm{Im}\, u$ muni de la topologie induite par T_2. La catégorie des A-modules profinis et applications linéaires continues est une catégorie abélienne *(loc. cit.)*.

1. Généralités sur les R-modules gradués

(1.1) L'algèbre R. — On appelle *algèbre de Cartier-Dieudonné-Raynaud* [1] *sur k*, et l'on note

(1.1.1) $\mathrm{R}(k)$

(ou R) la W-algèbre graduée engendrée par des générateurs F, V en degré 0 et d en degré 1, soumis aux relations suivantes :

(1.1.2.1) $\mathrm{F}a = a^{\sigma}\mathrm{F}, \quad a\mathrm{V} = \mathrm{V}a^{\sigma} \quad (a \in \mathrm{W}), \quad \mathrm{FV} = \mathrm{VF} = p,$

(1.1.2.2) $ad = da \quad (a \in \mathrm{W}), \quad d^2 = 0, \quad \mathrm{F}d\mathrm{V} = d.$

On a donc

(1.1.3) $\mathrm{R} = \mathrm{R}^0 \oplus \mathrm{R}^1,$

où R^0 est l'algèbre de Cartier-Dieudonné sur k (non complétée), et R^1 un R^0-bimodule, engendré par d comme bimodule. Tout élément de R^0 s'écrit de manière unique

(1.1.4) $\sum_{n>0} a_{-n}\mathrm{V}^n + a_0 + \sum_{n>0} a_n\mathrm{F}^n \quad (a_i \in \mathrm{W},\ a_i = 0 \text{ pour presque tout } i).$

Tout élément de R^1 s'écrit de manière unique

(1.1.5) $\sum_{n>0} a_{-n}d\mathrm{V}^n + a_0 d + \sum_{n>0} a_n\mathrm{F}^n d \quad (a_i \in \mathrm{W},\ a_i = 0 \text{ pour presque tout } i).$

Cette écriture montre que la multiplication à gauche par F dans R^1 est un automorphisme σ-linéaire du W-module R^1. Si l'on note F^{-1} l'opérateur inverse, la multiplication à gauche par V dans R^1 est $p\mathrm{F}^{-1}$.

Observons en passant qu'à la différence de R^0, R n'est nœthérien ni à droite ni à gauche. En effet, si, pour $n \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{R}^1_{\geqslant -n}$ désigne l'ensemble des éléments de R^1 qui s'écrivent $\sum_{m \geqslant -n} a_m \mathrm{F}^m d$ (où $\mathrm{F}^m d = d\mathrm{V}^{-m}$ si $m \leqslant 0$), $\mathrm{R}^1_{\geqslant -n}$ est un idéal à gauche de R, et la suite $\ldots \subset \mathrm{R}^1_{-n} \subset \mathrm{R}^1_{-(n+1)} \subset \ldots$ n'est pas stationnaire, donc R n'est pas nœthérien à gauche ; un raisonnement analogue montre que R n'est pas nœthérien à droite.

(1.2) R-enveloppe. — Un R^0-module n'est autre qu'un W-module muni d'opérateurs F et V vérifiant (1.1.2.1). Un R-module gradué M s'interprète comme un complexe de W-modules dont les composantes M^i sont des R^0-modules et la différentielle $d : \mathrm{M}^i \to \mathrm{M}^{i+1}$ vérifie $\mathrm{F}d\mathrm{V} = d$.

Tout R^0-module L définit, par extension des scalaires, un R-module gradué, concentré en degrés zéro et un,

(1.2.0) $\mathrm{R}(\mathrm{L}) := \mathrm{R} \otimes_{\mathrm{R}^0} \mathrm{L} = \mathrm{L} \oplus (\mathrm{R}^1 \otimes_{\mathrm{R}^0} \mathrm{L}),$

---

[1] Cette terminologie est proposée par le premier auteur, qui a introduit l'anneau R pour interpréter plus commodément certaines constructions dues au second.

qu'on appelle R-*enveloppe* de L. Le foncteur R-enveloppe est adjoint à gauche du foncteur $M \mapsto M^0$: si L est un R^0-module et M un R-module gradué, on a canoniquement

$$\mathrm{Hom}_R(R(L), M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R^0}(L, M^0);$$

en d'autres termes, si N est un R^0-module, pour toute application W-linéaire $d : L \to N$ telle que $Fd V = d$, il existe une unique application R^0-linéaire de $R(L)^1$ dans N rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & R(L)^1 \\ & \searrow^{d} & \downarrow \\ & & N \end{array}$$

On posera parfois, pour abréger,

(1.2.0.1) $\qquad R^1 \otimes_{R^0} L =: \bar{L}.$

Proposition **(1.2.1).** — *Soit* L *un* R^0*-module.*

a) *L'opérateur* F *sur* $\bar{L}$ *est bijectif.*

b) *Les applications* W*-linéaires*

$$i_n : \sigma^{n*}L \to \bar{L}, \quad i_n(x) = F^n d \otimes x,$$

vérifient $i_{n+1}V = i_n$ *et induisent un isomorphisme* W*-linéaire*

(1.2.1.1) $\qquad \varinjlim_{V} \sigma^{n*}L \to \bar{L}.$

La différentielle $d : L \to \bar{L}$ *s'identifie par cet isomorphisme à l'application canonique* $L \to \varinjlim_{V} \sigma^{n*}L$. *Les endomorphismes* $\bar{F}$ *et* $\bar{V}$ *de* $\varinjlim_{V} \sigma^{n*}L$ *induits par les endomorphismes* F *et* V *du système inductif s'écrivent, avec l'identification* (1.2.1.1),

(1.2.1.2) $\qquad \bar{F} = pF, \quad \bar{V} = F^{-1}.$

L'assertion a) résulte de ce que la multiplication à gauche par F dans R^1 est un automorphisme de R^0-module à droite. La relation $i_{n+1}V = i_n$ est triviale. Notons u l'application (1.2.1.1) induite par les applications i_n. Vu l'écriture (1.1.5), il est clair que u est surjective. Notons $j_n : \sigma^{n*}L \to L' = \varinjlim_{V} \sigma^{n*}L$ l'application canonique. Par définition, l'opérateur $\bar{V}$ sur L' est bijectif, nous désignerons son inverse par F : on a donc $Fj_n = j_{n+1}$. Si l'on note V l'opérateur pF^{-1} $(= p\bar{V})$ sur L', F et V munissent L' d'une structure de R^0-module, et l'on a $Fj_0V = j_0$. Par la propriété universelle de R(L), il existe donc un unique homomorphisme R^0-linéaire $v : \bar{L} \to L'$ tel que $vd = j_0$. Il suffit de vérifier que $vu = \mathrm{Id}$. Or

$$vuj_n x = v(F^n d \otimes x) = F^n v(d \otimes x) = F^n j_0 x = j_n x,$$

donc u est un isomorphisme. Les autres assertions de b) sont claires.

On peut résumer (1.2.1) en disant que $\bar{L}$ *est déduit de* L *en rendant* V *inversible par limite inductive.* On notera $\bar{F}$, $\bar{V}$ les prolongements naturels de F, V à $\bar{L}$, qui vérifient donc $\bar{F}d = dF$, $\bar{V}d = dV$; les opérateurs F, V sur $\bar{L}$ se déduisent de $\bar{V}$ par les formules $F = \bar{V}^{-1}$ ((1.2.1.2)), $V = p\bar{V}$.

Corollaire **(1.2.2).** — *Sous les hypothèses de* (1.2.1), *soit* T *le sous-module de* V*-torsion de* L. *On a* $T = \mathrm{Ker}\, d : L \to R(L)^1$ (*donc en particulier* $R(T)^1 = 0$), *et l'application canonique* $R(L)^1 \to R(L/T)^1$ *est bijective.*

Corollaire **(1.2.3).** — *Le foncteur* R*-enveloppe* $L \mapsto R(L)$ *est exact, donc* R *est un* R^0*-module à droite plat.*

(1.3) Filtration standard. — Soit M un R-module gradué. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

(1.3.1) $$\mathrm{Fil}^n M := V^n M + dV^n M.$$

Les $\mathrm{Fil}^n M$ forment une famille décroissante de sous-complexes de W-modules de M telle que

$$F(\mathrm{Fil}^n M) \subset \mathrm{Fil}^{n-1} M, \quad V(\mathrm{Fil}^n M) \subset \mathrm{Fil}^{n+1} M,$$

dite *filtration standard, ou* V + *d*V, de M. Nous dirons que M est (V + *d*V)*-complet,* (ou, simplement, *complet*) si chaque composante M^i est séparée et complète pour la topologie, dite *topologie standard,* définie par les $\mathrm{Fil}^n M^i = V^n M^i + dV^n M^{i-1}$. Pour M concentré en un seul degré, nous dirons parfois V*-complet* pour complet, ce qui signifie donc séparé et complet pour la topologie V-adique.

Nous définirons le *complété* $M\hat{}$ du R-module gradué M comme le R-module gradué dont la *i*-ème composante est le séparé complété de M^i pour la topologie précédente, i.e.

(1.3.2) $$(M\hat{})^i = \varprojlim_n M^i/\mathrm{Fil}^n M^i$$

(pour M à degrés bornés, cas auquel nous nous intéresserons surtout dans la suite, on a $M\hat{} = \varprojlim_n M/\mathrm{Fil}^n M$).

Exemple **(1.3.3)** : *complété de* R. — Considérons R comme R-module à gauche. On a donc

$$\mathrm{Fil}^n R = V^n R^0 \oplus (dV^n R^0 + V^n R^1).$$

Posons $R_n = R/\mathrm{Fil}^n R$. Les écritures (1.1.4) et (1.1.5) montrent que

$$R_n^0 = W_1.V^{n-1} \oplus W_2.V^{n-2} \oplus \ldots \oplus W_n \oplus \Big(\bigoplus_{i>0} W_n.F^i\Big),$$

$$R_n^1 = W_1.dV^{n-1} \oplus W_2.dV^{n-2} \oplus \ldots \oplus W_n.d \oplus \Big(\bigoplus_{i>0} W_n.F^i d\Big);$$

la projection $R_{n+1}^i \to R_n^i$ est l'application évidente sur chaque terme de la somme.

Il s'ensuit que $R\hat{}^0$ (resp. $R\hat{}^1$) est l'ensemble des séries formelles à coefficients dans W :

$$\sum_{n>0} a_{-n}V^n + a_0 + \sum_{n>0} a_nF^n$$

(resp. $$\sum_{n>0} a_{-n}dV^n + a_0d + \sum_{n>0} a_nF^nd),$$

où a_n tend vers o pour la topologie p-adique quand n tend vers $+\infty$. Le R-module (à gauche) $R\hat{}$ est de façon naturelle une R-algèbre graduée. Sa composante de degré zéro, complétée V-adique de l'algèbre de Cartier-Dieudonné R^0, peut s'interpréter comme l'anneau des endomorphismes du groupe formel $W\hat{}$ des vecteurs de Witt sur k. Il serait intéressant d'avoir une interprétation analogue de $R\hat{}$.

Tout R-module gradué complet est de façon naturelle un $R\hat{}$-module gradué. En particulier, tout R^0-module complet (pour la topologie V-adique) est de façon naturelle un $R^0\hat{}$-module, donc *a fortiori* un module sur l'anneau de séries formelles $W_\sigma[[V]]$ avec relations $aV = Va^\sigma$ pour $a \in W$.

(1.4) Cycles et bords. — Soit M un R-module gradué. Pour tout i, notons $Z^i = Z^iM = \operatorname{Ker} d : M^i \to M^{i+1}$ le sous-W-module des cycles de degré i, et $B^i = B^iM = dM^{i-1}$ le sous-W-module des bords de degré i.

Le W-module Z^i est stable par F (car $dF = pFd$), mais non en général par V. Pour tout entier $r \geqslant 0$, posons

$$V^{-r}Z^i = \{x \in M^i \mid V^r x \in Z^i\}. \tag{1.4.1}$$

L'identité $FdV = d$ entraîne qu'on a des inclusions

$$V^{-r}Z^i \subset V^{-r+1}Z^i \subset \ldots \subset V^0Z^i = Z^i.$$

Les $V^{-r}Z^i$ sont des sous-W-modules de Z^i, stables par F. Le W-module

$$V^{-\infty}Z^i := \bigcap_{r\geqslant 0} V^{-r}Z^i = \{x \in Z^i \mid V^r x \in Z^i \quad \forall\, r \geqslant 0\} \tag{1.4.2}$$

est le plus grand sous-R^0-module de M^i contenu dans Z^i, et $M^i/V^{-\infty}Z^i$ est sans V-torsion.

Le W-module B^i est stable par V (car $Vd = pdV$), mais non en général par F. L'identité $FdV = d$ montre que les F^sB^i, pour s entier $\geqslant 0$, forment une suite croissante de sous-W-modules de M^i. Ceux-ci sont stables par V, et

$$F^\infty B^i := \bigcup_{s\geqslant 0} F^sB^i \tag{1.4.3}$$

est le plus petit sous-R^0-module de M^i contenant B^i. La multiplication par F dans $F^\infty B$ est surjective.

On a des inclusions

$$B^i \subset \ldots \subset F^sB^i \subset \ldots \subset F^\infty B^i \subset V^{-\infty}Z^i \subset \ldots \subset V^{-r}Z \subset \ldots \subset Z^i. \tag{1.4.4}$$

La différentielle $d : M^{i-1} \to M^i$ admet une factorisation canonique

$$M^{i-1} \to M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} \xrightarrow{d} F^\infty B^i \to M^i. \tag{1.4.5}$$

A son tour, la flèche médiane de (1.4.5) se factorise canoniquement en

(1.4.6) $$\begin{array}{ccc} M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} & \xrightarrow{\bar{d}} & R(M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1})^1 \\ & \searrow^{d} & \downarrow u \\ & & F^{\infty}B^i \end{array}$$

où la ligne horizontale est la R-enveloppe du R^0-module $M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1}$, et $u(F^n d \otimes x) = F^n dx$. D'après (1.2.1) b), u est donc surjectif. D'autre part, comme $M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1}$ est sans V-torsion, $\bar{d}$ est injectif ((1.2.2)).

Nous noterons parfois

(1.4.7) $$\tilde{H}^i(M)$$

le W-module $V^{-\infty}Z^i/F^{\infty}B^i$. C'est un R^0-module, quotient d'un sous-W-module de $H^iM = Z^i/B^i$, où les opérateurs F et V sont induits par ceux de M^i.

Enfin, outre les R-modules gradués tronqués naïfs

$$M^{\leqslant i} = (\ldots \xrightarrow{d} M^{i-1} \xrightarrow{d} M^i \to 0), \quad M^{\geqslant i} = (0 \to M^i \xrightarrow{d} M^{i+1} \xrightarrow{d} \ldots),$$

nous aurons à considérer les R-modules gradués suivants

(1.4.8) $$\tilde{t}_{\leqslant i}M := (\ldots \xrightarrow{d} M^{i-1} \xrightarrow{d} V^{-\infty}Z^i \to 0),$$
$$\tilde{t}_{\geqslant i}M := (0 \to M^i/F^{\infty}B^i \xrightarrow{d} M^{i+1} \xrightarrow{d} \ldots),$$

le « tilda » étant destiné à distinguer des tronqués canoniques habituels

$$t_{\leqslant i}M = (\ldots \xrightarrow{d} M^{i-1} \xrightarrow{d} Z^{i-1} \to 0),$$
$$t_{\geqslant i}M = (0 \to M^i/B^i \xrightarrow{d} M^{i+1} \xrightarrow{d} \ldots),$$

qui sont seulement des complexes de W-modules.

(1.5) Inversion de F par limite projective. — Soit M un R^0-module. Considérons le W-module

$$\underline{M} := \varprojlim_F M = \lim(M \xleftarrow{F} \sigma^*M \leftarrow \ldots \xleftarrow{F} \sigma^{n*}M \leftarrow \ldots).$$

Les opérateurs F, V sur M définissent par fonctorialité des opérateurs $\underline{F}$, $\underline{V}$ sur $\underline{M}$, qui munissent $\underline{M}$ d'une structure de R^0-module; l'opérateur $\underline{F}$ est bijectif. L'application canonique

(1.5.1) $$q : \varprojlim_F M \to M,$$

définie par les $F^n : \sigma^{n*}M \to M$, est un homomorphisme de R^0-modules, dont l'image, notée

(1.5.2) $$M_{F\text{-ss}} \text{ (ou } M_{ss}),$$

est le plus grand sous-R^0-module F-divisible de M; rappelons que, lorsque M est de type fini sur W, M se décompose canoniquement, comme R^0-module, en

$$\mathbf{(1.5.3)} \qquad M = M_{ss} \oplus M_{nil},$$

avec F bijectif sur M_{ss} et topologiquement nilpotent sur M_{nil} (cf. par exemple Fontaine [8, III (1.7)]). L'inclusion $M_{ss} \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme

$$\mathbf{(1.5.4)} \qquad \varprojlim_F M_{ss} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_F M.$$

Si L est un R^0-module et $d : L \to M$ une application W-linéaire telle que $FdV = d$, d se factorise de manière unique en $\underline{d} : L \to \varprojlim_F M$ telle que $\underline{F}\underline{d}V = \underline{d}$ et $q\underline{d} = d$, donnée par

$$\underline{d}x = (dV^n x)_{n \geqslant 0}.$$

Cette propriété universelle est « duale » de celle vérifiée par la R-enveloppe $\varinjlim_V M = R^1 \otimes_{R^0} M$ (1.2.1). On voit facilement, d'ailleurs, que $\varprojlim_F M$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{R^0}(R^1, M)$, pour la structure de R^0-module donnée par $V = \underline{F}^{-1}$ et $F = p\underline{F}$.

Soient maintenant M un R-module gradué et $i \in \mathbf{Z}$. La propriété universelle précédente montre que la factorisation (1.4.6) de $d : M^{i-1} \to M^i$ se raffine en le diagramme commutatif

$$\mathbf{(1.5.5)} \qquad \begin{array}{ccccccccc}
\varinjlim_V M^{i-1} & \longrightarrow & \varinjlim_V M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} & \xrightarrow{h} & \varprojlim_F F^\infty B^i & \hookrightarrow & \varprojlim_F M^i_{ss} & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_F M^i \\
\uparrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j} & (*) & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\
M^{i-1} & \longrightarrow & M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} & \longrightarrow & F^\infty B^i & \hookrightarrow & M^i_{ss} & \hookrightarrow & M^i
\end{array}$$

où le composé horizontal inférieur est d, et h vérifie

$$\mathbf{(1.5.6)} \qquad \underline{F}h\overline{V} = h,$$

$\overline{F}$, $\overline{V}$ désignant les prolongements canoniques à $\varinjlim_V M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1}$ des opérateurs F, V sur $M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1}$ (1.2.1). Les deux flèches q de buts $F^\infty B^i$ et M^i_{ss} sont surjectives, ainsi que qh.

On peut interpréter $\varprojlim_F F^\infty B^i$ comme le complété de l'enveloppe $\varinjlim_V M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1}$ pour une topologie convenable. Plus précisément, changeant de notations, désignons le carré (*) de (1.5.5) par

$$\mathbf{(1.5.7)} \qquad \begin{array}{ccc}
\overline{M} & \xrightarrow{h} & \underline{N} \\
{\scriptstyle j}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\
M & \xrightarrow{d} & N
\end{array}$$

et notons K le W-module défini par la suite exacte

(1.5.8) $\quad 0 \to K \to \overline{M} \xrightarrow{qh} N \to 0.$

Compte tenu de (1.5.6), cette suite est R^0-linéaire si l'on fait opérer F et V sur $\overline{M}$ par $\overline{V}^{-1}$ et $p\overline{V}$. En particulier, on a $\overline{V}^{-1}K \subset K$. Les isomorphismes

$$\overline{V}^n : \overline{M}/\overline{V}^{-n}K \xrightarrow{\sim} \overline{M}/K = N$$

définissent un isomorphisme

(1.5.9) $\quad \varprojlim \overline{M}/\overline{V}^{-n}K \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F} N = \underline{N},$

où, dans le terme de gauche, la limite est prise suivant les projections canoniques. Cet isomorphisme fait de $h : \overline{M} \to \underline{N}$ l'application canonique de $\overline{M}$ dans son séparé complété pour la topologie des $\overline{V}^{-n}K$, que nous noterons parfois $\overline{M}\hat{}$ (on prendra garde que $\overline{M}\hat{}$ dépend de K). Nous identifierons dans la suite $\underline{N}$ à $\overline{M}\hat{}$ au moyen de (1.5.9).

Les applications surjectives $\overline{M}/\overline{V}^{-n}K \to \overline{M}/K = N$ fournissent une suite exacte

(1.5.10) $\quad 0 \to K\hat{} \to \overline{M}\hat{} \to N \to 0$

prolongeant (1.5.8), où $K\hat{}$ est le séparé complété de K pour la topologie des $\overline{V}^{-n}K$, adhérence de K dans $\overline{M}\hat{}$. La suite (1.5.10) est R^0-linéaire, F et V opérant sur $\overline{M}\hat{}$ par $\underline{F}$ et $\underline{V}$, prolongements par continuité de $\overline{V}^{-1}$ et $p\overline{V}$.

Exemple **(1.5.11)**. — Considérons le R-module gradué $d : M \to N$, concentré en degrés 0 et 1, défini par :

$$M = k_\sigma[[V]],$$
$$N = k_\sigma[[dV]] = \prod_{n \geqslant 0} kdV^n;$$

sur M, V opère par multiplication à gauche, et $F = 0$; sur N, $V = 0$, et F opère par $Fd = 0$, $FdV^n = dV^{n-1}$ $(n > 0)$; d est l'isomorphisme tel que $d(V^n) = dV^n$ (voir (2.14) pour une généralisation de cette construction).

Le W-module $\overline{M}$, déduit de M en rendant V inversible par limite inductive, est

$$\overline{M} = \bigoplus_{n>0} kV^{-n} \oplus \prod_{n \geqslant 0} kV^n,$$

ensemble des séries $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n V^n$, avec $a_n = 0$ pour $n \gg -\infty$. L'application $j : M \to \overline{M}$ est l'inclusion évidente, $\overline{V}$ est l'automorphisme de $\overline{M}$ défini par la multiplication à gauche par V.

Le W-module $\underline{N}$, déduit de N en rendant F inversible par limite projective, est

$$\underline{N} = \prod_{n>0} kF^n d \oplus \prod_{n \geqslant 0} kdV^n.$$

L'application $q : \underline{N} \to N$ est la projection évidente, $\underline{F}$ est l'automorphisme de $\underline{N}$ défini par la multiplication à gauche par F.

Le prolongement $d : \overline{M} \to N$ de $d : M \to N$ a pour noyau

$$K = \bigoplus_{n>0} kV^{-n},$$

ensemble des polynômes $\sum_{n>0} a_n V^{-n}$ (« parties polaires en V »). Le complété $\overline{M}\hat{} = \lim \overline{M}/V^{-n}K$ est

$$\overline{M}\hat{} = \prod_{n>0} kV^{-n} \oplus \prod_{n\geqslant 0} kV^{n},$$

ensemble des séries formelles $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n V^n$ (sans condition sur les a_n), l'isomorphisme canonique $\overline{M}\hat{} \xrightarrow{\sim} \underline{N}$ (1.5.9) envoie V^n sur dV^n pour $n \geqslant 0$ et $F^n d$ pour $n < 0$. Enfin, on a

$$K\hat{} = \prod_{n>0} kV^{-n},$$

ensemble des séries $\sum_{n>0} a_n V^{-n}$.

Nous verrons plus loin (IV (2.17)) que, si X est une surface K3 supersingulière, le W-module $H^2(X, ZW\Omega^1) := \varprojlim H^2(X, ZW_n\Omega^1)$ est isomorphe au module $\overline{M}\hat{} = \underline{N}$ ci-dessus.

1.6. L'anneau R′

Notons

(1.6.1) $\qquad R'(k)$ (ou R′)

la W-algèbre graduée engendrée par des générateurs F′, V′ en degré 0 et d en degré 1, soumis aux relations

(1.6.2) $\qquad F'a = a^\sigma F', \quad aV' = V'a^\sigma \quad (a \in W), \quad F'V' = V'F' = p,$

$$ad = da \quad (a \in W), \quad d^2 = 0, \quad V'dF' = d.$$

Un R′-module (à gauche) gradué n'est autre qu'un complexe de W-modules dont les composantes sont des R^0-modules (à gauche) (F, V opérant par F′, V′) et la différentielle d vérifie $V'dF' = d$. Par changement de σ en σ^{-1}, les constructions précédentes, relatives aux R-modules gradués, se transposent trivialement aux R′-modules gradués. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer cette traduction, qui nous servira surtout au chapitre III.

2. R-modules gradués profinis

A) *Définitions*

Définition **(2.1)**. — *On dit qu'un* R*-module gradué* M *est* (V + dV)*-profini si* M *est, en chaque degré, profini pour la topologie standard* ((0.2) (1.3)), i.e. *si* M *est complet* (1.3) *et si, pour tout entier n et tout i, le* W*-module* $M^i/\mathrm{Fil}^n M^i$ *est de longueur finie. On dit qu'un*

R^0-*module* M *est* V-*fini si* M, *considéré comme* R-*module gradué concentré en degré* 0, *est* $(V + dV)$-*profini.*

L'épithète « profini », appliquée à un R-module gradué, sera, sauf mention du contraire, synonyme de « $(V + dV)$-profini » (resp. « V-fini », dans le cas d'un R-module gradué concentré en un seul degré).

(2.1.1) Soit M un R-module gradué profini. Si M′ est un sous-R-module gradué fermé, M′ est profini pour la topologie T′ induite par la topologie standard de M, mais on prendra garde que T′, qui est moins fine que la topologie standard de M′, peut en être distincte (cf. (2.9)); d'après (0.4), T′ coïncide avec la topologie standard si et seulement si M′ est $(V + dV)$-profini. Si M″ est un R-module gradué quotient de M, la topologie quotient T″ est la topologie standard, et M″ est $(V + dV)$-profini si et seulement si M″ est séparé (*i.e.* $\mathrm{Ker}(M \to M'')$ fermé).

(2.1.2) Tout morphisme $u : M \to N$ de R-modules gradués est continu pour les topologies standard, car $u(\mathrm{Fil}^n M) \subset \mathrm{Fil}^n N$ pour tout n. Si M et N sont profinis, u est d'image fermée (0.5), donc (2.1.1) $\mathrm{Coker}\, u$ est $(V + dV)$-profini; de plus, l'application de $\mathrm{Coim}\, u$ sur $\mathrm{Im}\, u$ déduite de u est un homéomorphisme (0.5), en particulier la topologie induite sur $\mathrm{Im}\, u$ par la topologie standard de N est la topologie standard de $\mathrm{Im}\, u$; en revanche $\mathrm{Ker}\, u$ n'est pas en général $(V + dV)$-profini (prendre par exemple pour u la projection naturelle $\mathbf{U}_i \to \mathbf{U}_i^0$, cf. (2.14)).

B) R^0-*modules profinis*

(2.2) Soit M un R^0-module complet (pour la topologie V-adique). Pour que M soit profini, il faut et il suffit que le k-espace vectoriel M/VM soit de dimension finie. Si M est profini, M est alors de type fini sur l'anneau $W_0[[V]]$ (M est engendré par toute famille relevant une base de M/VM).

Proposition **(2.3)**. — a) *Soit* M *un* R^0-*module profini. Le sous-*R^0-*module* T *formé des éléments de* V-*torsion est de longueur finie et annulé par une puissance de* V.

b) *Soient* M *un* R^0-*module profini,* M′ *un sous-*R^0-*module de* M, *et* $M'' = M/M'$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M′ *est fermé dans* M *pour la topologie* V-*adique*;
(ii) M′ *est* V-*complet*;
(iii) M′ *est profini*;
(iv) M″ *est* V-*adiquement séparé*;
(v) M″ *est profini.*

Si elles sont satisfaites, la topologie V-*adique de* M *induit la topologie* V-*adique de* M′.

c) *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de* R^0-*modules. Si* M′ *et* M″ *sont profinis, il en est de même de* M.

L'anneau $A = W_\sigma[[V]]$ étant noethérien (Bourbaki, *Alg. com.*, III, § 2, n° 9, cor. 2, prop. 11 et n° 10, cor. 1, th. 2, exerc. 10), T est un A-module de type fini, donc annulé par V^n pour n assez grand, donc aussi par p^n, et par suite T est de type fini sur $(W_n)_\sigma[[V]]/(V^n)$, donc de longueur finie. Prouvons b). On a trivialement (iii) $\Rightarrow$ (ii), et il est clair qu'on a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v). Si M' est V-complet, on peut considérer M' comme un sous-A-module de M, et le A-module M'', étant de type fini, est V-complet (cf. par exemple [3, III (2.3)]), ce qui prouve (ii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons M'' profini. Écrivons la suite exacte des $\mathrm{Tor}^{R^0}(R^0/V^nR^0, -)$ relative à $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$:

$$(*)_n \qquad {}_{V^n}M'' \to M'/V^nM' \to M/V^nM \to M''/V^nM'' \to 0.$$

Elle montre, compte tenu de a), que M'/V^nM' est de longueur finie. Pour n variable, les suites $(*)_n$ forment un système projectif, où la flèche de transition ${}_{V^{n+1}}M'' \to {}_{V^n}M''$ est la multiplication par V. D'après a), le système projectif $({}_{V^n}M'')$ est donc essentiellement nul. Il en résulte que la limite projective des suites $(*)_n$ est exacte, et par suite que M' est V-complet, donc profini, ce qui prouve (v) $\Rightarrow$ (iii) et établit l'équivalence des conditions (i) à (v). La deuxième assertion de b) en résulte, compte tenu de (2.1.1). La vérification de c) est immédiate à l'aide des suites exactes $(*)_n$.

Corollaire (**2.3.1**). — *La sous-catégorie pleine de la catégorie des* R^0*-modules formée des* R^0*-modules profinis* (2.1) *est épaisse* (i.e. *stable par noyaux, conoyaux et extensions*).

Définition (**2.4**). — *Soit* M *un* R^0*-module. On dit que* M *est de Cartier (resp. de Cartier unipotent) si* M *est profini et sans* V*-torsion (resp. profini, sans* V*-torsion, et annulé par une puissance de p (ou, ce qui revient au même, de* F*)).*

Cette terminologie est suggérée par le fait que M est un R^0-module de Cartier si et seulement si M est isomorphe, dans la théorie de Cartier, au module des courbes typiques d'un groupe formel lisse connexe G de dimension finie, et que M est de Cartier unipotent si et seulement si G est unipotent. D'autre part, si M est de Cartier et correspond au groupe formel G, M est libre de type fini sur W (*i.e.* sans p-torsion, ou, ce qui revient au même, sans F-torsion) si et seulement si G est p-divisible. Rappelons enfin que si G est un groupe formel lisse connexe unipotent de dimension finie, G admet une filtration finie dont les quotients sont isomorphes au groupe formel additif $\mathbf{G}_a^\wedge$, et que le module de Cartier (*i.e.* des courbes typiques) de $\mathbf{G}_a^\wedge$ est $k_\sigma[[V]]$, avec $F = 0$. On déduit donc de (2.3) :

Proposition (**2.5**). — a) *Si* M *est un* R^0*-module profini, et* T *le sous-module de* V*-torsion de* M, M/T *est un* R^0*-module de Cartier.*

b) *Si* M *est un* R^0*-module de Cartier, le sous-*R^0*-module* M' *de* F*-torsion est un module de Cartier unipotent, et* M/M' *est un* W*-module libre de type fini.*

c) *Tout* R^0*-module de Cartier unipotent possède une filtration finie (par des sous-*R^0*-modules de Cartier) dont les quotients sont isomorphes à* $k_\sigma[[V]]$, *avec* $F = 0$.

d) *Si* M *est un* R^0*-module de Cartier,* M *est de type fini sur* W *si et seulement si* M *est libre de type fini sur* W.

Corollaire **(2.6)**. — *Tout* R^0*-module profini possède une suite de composition, dont les quotients sont des* R^0*-modules profinis de l'un des types suivants* :

a) *de longueur finie*;

b) *libre de type fini sur* W;

c) *isomorphe à* $(k_\sigma[[V]],\ F = 0)$.

On a d'autre part un dévissage « dual » de (2.5) b) :

Proposition **(2.7)**. — *Tout* R^0*-module* V*-fini* M *s'écrit de manière unique comme extension d'un module de Cartier unipotent* U *par un* R^0*-module* D *de type fini sur* W :

$$0 \to D \to M \to U \to 0.$$

Le R^0*-module* D *est le plus grand sous-*R^0*-module de* M *qui soit de type fini sur* W.

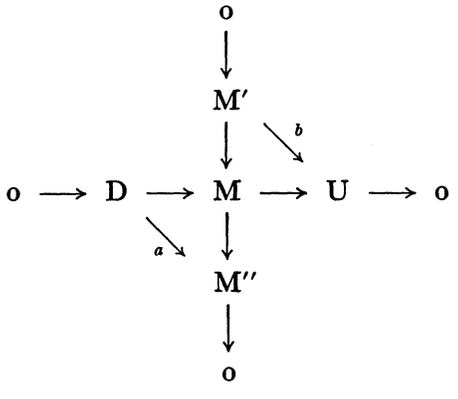
Nous appellerons D (resp. U) *cœur* (resp. *quotient unipotent*) de M.

Prouvons d'abord la dernière assertion, qui entraîne l'unicité. Il suffit de montrer que, si C est un R^0-module de type fini sur W, avec V topologiquement nilpotent, N un R^0-module de Cartier unipotent, et $f: C \to N$ une application R^0-linéaire, alors $f = 0$. Soit n un entier tel que $p^n N = 0$. Comme V est topologiquement nilpotent sur C, il existe m tel que $V^m C \subset p^n C$. On a alors

$$V^m f(C) = f(V^m C) \subset p^n N = 0,$$

donc $f(C) = 0$ puisque V est injectif sur N. Prouvons maintenant l'existence. Quitte à diviser d'abord M par son sous-module de V-torsion, qui est de longueur finie (2.3) a), on peut supposer M de Cartier. Soit alors n un entier tel que p^n annule le sous-module de p-torsion de M. Le sous-module D de M, image inverse de la V-torsion de $M/p^n M$, est sans p-torsion (car $p^n M$ l'est et que V est injectif sur M), donc est libre de type fini sur W. Le R^0-module $U = M/D$, quotient du R^0-module V-fini et de p-torsion $M/p^n M$ par son sous-module de V-torsion, est de Cartier unipotent.

Corollaire **(2.7.1)**. — *Soit* M *un* R^0*-module de Cartier. Dans la croix formée par les suites exactes de* (2.5) b) *et* (2.7), *les flèches composées obliques sont injectives, de conoyau de longueur finie annulé par une puissance de* V :



En particulier, le W-module de type fini D est libre, comme on l'a vu au cours de la démonstration de (2.7).

Prouvons (2.7.1). Comme M′ et U sont de p-torsion, $a \otimes K$ est un isomorphisme ($K = \mathrm{Fract}(W)$), donc Ker a et Coker a sont de longueur finie. Les noyaux, isomorphes, de a et b sont donc annulés par une puissance de V, donc nuls, puisque V est injectif sur M. Les conoyaux, isomorphes, de a et b sont V-finis et de longueur finie, donc annulés par une puissance de V.

On observera que, si M est le module de Cartier d'un groupe formel lisse connexe G de dimension finie, le sous-module de F-torsion (= de p-torsion) de M est le module de Cartier du plus grand sous-groupe unipotent de G, tandis que le module D de (2.7) s'interprète comme le module de Cartier du plus grand sous-groupe p-divisible de G (image de p^n pour n assez grand).

Remarque **(2.8).** — On a bien entendu des résultats analogues à (2.3) et à ses corollaires pour les R^0-modules *à droite* profinis. Avec les notations de (1.6), on peut considérer un R^0-module à droite profini M comme un R'^0-module à gauche séparé et complet pour la topologie F′-adique et tel que M/F′M soit de dimension finie. La catégorie des R^0-modules à droite profinis apparaît donc comme anti-équivalente, par le foncteur module de Dieudonné contravariant, à la catégorie des k-groupes formels connexes de dimension finie (Demazure [5, III, § 9] ou Fontaine [8, III]). Si M est le module de Dieudonné de G, le dévissage (2.5) a) correspond à l'extension $0 \to G_{\mathrm{red}} \to G \to G/G_{\mathrm{red}} \to 0$.

Il est moins aisé d'interpréter en termes de groupes formels la catégorie des R^0-modules (à gauche) profinis, la théorie de Cartier ne donnant *a priori* qu'une équivalence entre groupes formels lisses connexes de dimension finie et R^0-modules de Cartier. On peut cependant étendre comme suit ce dictionnaire aux R^0-modules profinis. Notons

(2.8.1) $\mathscr{G}_k$

la catégorie dont les objets sont les complexes concentrés en degrés -1 et 0, $G^{-1} \xrightarrow{d} G^0$, de k-groupes formels lisses connexes de dimension finie, tels que Ker d soit fini (*i.e.* fini radiciel), les flèches de $\mathscr{G}_k$ étant les classes d'homotopie de morphismes. Notons d'autre part $\mathscr{M}_k$ la catégorie dont les objets sont les complexes, concentrés en degrés -1 et 0, de R^0-modules de Cartier, tels que $H^{-1} = 0$, les flèches étant les classes d'homotopie de morphismes. Le foncteur CT, module des courbes typiques, étant exact à gauche, et s'annulant sur les groupes finis radiciels, induit, par la théorie de Cartier, une équivalence

$$\mathrm{CT} : \mathscr{G}_k \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_k.$$

Par ailleurs, si $M = (M^{-1} \to M^0) \in \mathrm{ob}\,\mathscr{M}_k$, H^0M est d'après (2.3) b), un R^0-module profini, et l'on en déduit aisément une équivalence (cf. [20 (2.5.3)]) :

(2.8.2) $H^0\mathrm{CT} : \mathscr{G}'_k \xrightarrow{\sim} R^0\text{-modprof},$

où R^0-modprof désigne la catégorie des R^0-modules profinis et $\mathscr{G}'_k$ la catégorie localisée de $\mathscr{G}_k$ obtenue en inversant les quasi-isomorphismes. La catégorie des k-groupes finis radiciels (resp. formels lisses connexes) correspond par H^{-1} (resp. H^0) à la sous-catégorie pleine de $\mathscr{G}'_k$ formée des G tels que $H^0G = 0$ (resp. $H^{-1}G = 0$), donc est équivalente, par (2.8.2), à la sous-catégorie pleine de R^0-modprof formée des R^0-modules de longueur finie (resp. de Cartier). Pour $M = H^0CT(G)$, $G \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}'_k$, le dévissage (2.5) a) correspond au dévissage

$$0 \to (G^{-1} \to dG^{-1}) \to G \to H^0G \to 0,$$

le R^0-module T (resp. M/T) s'interprétant donc comme image par (2.8.2) du groupe fini radiciel $H^{-1}G$ (resp. formel lisse connexe H^0G). Enfin, dans l'équivalence entre groupes finis radiciels et R^0-modules de longueur finie, les groupes de type multiplicatif (resp. unipotents) correspondent aux R^0-modules de longueur finie où F est bijectif (resp. nilpotent), et plus généralement, si G fini radiciel correspond au R^0-module M, la décomposition $G = G_1 \times G_2$, avec G_1 multiplicatif et G_2 unipotent, correspond à la décomposition $M = M_{ss} \oplus M_{nil}$, où M_{ss} (resp. M_{nil}) est le plus grand sous-F-module de M où F est bijectif (resp. nilpotent). Pour une extension de la construction (2.8.2) (pour les groupes finis radiciels) à des bases plus générales (anneaux locaux complets), voir Oort [19].

C) *Structure des* R*-modules gradués profinis*

Théorème **(2.9).** — *Soit* M *un* R*-module gradué profini* (2.1), *à degrés bornés inférieurement. Alors, avec les notations de* (1.4), *on a, pour tout* $i \in \mathbf{Z}$, *les propriétés suivantes* :

(2.9.1) (i) $F^\infty B^i = F^s B^i$ *pour s assez grand et* $F^\infty B^i/B^i$ *est de longueur finie.*

(ii) $F^\infty B^i$ *est annulé par une puissance de* V *et* F *est surjectif.*

(iii) $F^\infty B^i$ *est fermé dans* M^i (*muni de la topologie standard* (1.3)) *et la topologie induite coïncide avec celle définie par les* $dV^n M^{i-1}$.

(iv) *La topologie quotient de la topologie standard sur* $M^i/F^\infty B^i$ *est la topologie* V*-adique, et* $M^i/F^\infty B^i$ *est* V*-fini* (2.1) (2.2).

(2.9.2) (i) $V^{-\infty} Z^i = V^{-r} Z^i$ *pour r assez grand et* $Z^i/V^{-\infty} Z^i$ *est de longueur finie.*

(ii) $V^{-\infty} Z^i$ *est fermé dans* M^i (*pour la topologie standard*) *et* $M^i/V^{-\infty} Z^i$ *est un* R^0*-module de Cartier unipotent* (2.4).

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(2.10).** — a) *Le foncteur associant à un* R^0*-module* L *sa* R*-enveloppe complétée* $R(L)\hat{}$ (1.2) (1.3.2) *est exact à droite.*

b) *Si* L *est un* R^0*-module profini, de type fini sur* W, *on a* $R(L)^1 = L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ *et* $(R(L)^1)\hat{} = 0$, *donc* $R(L)\hat{} = L$.

c) *Si* L *est un* R^0*-module de Cartier unipotent, annulé par* F^n, $R(L)^1$ *est annulé par* V^n *et* $R(L)^1 = (R(L)^1)\hat{}$.

Il résulte aussitôt des définitions que le foncteur $L \mapsto R(L)\hat{}$ de la catégorie des R^0-modules gradués dans celle des R^0-modules gradués complets est adjoint à gauche du foncteur oubli, donc est exact à droite. Soit L un R^0-module profini, posons $L' = R(L)^1$. Supposons L de type fini sur W. Pour prouver la conclusion de b), on peut, compte tenu de a) et (1.2.2), supposer L sans V-torsion (donc sans p-torsion (2.5) d). Comme $\bigcap V^n L = 0$, il existe n tel que $V^n L \subset pL$ (0.4), donc il existe un endomorphisme σ^{-n}-linéaire v de L tel que $V^n = pv$. Par suite, rendre V inversible dans L équivaut à rendre p inversible, donc d'après (1.2.1) b), on a $L' = L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$. Comme $\mathrm{Fil}^n L' \supset V^n L' = p^n F^{-n} L' = p^n L' = L'$, on en conclut que $L'\hat{} = 0$. Supposons maintenant L de Cartier unipotent, annulé par F^n, donc par p^n. Par fonctorialité de l'enveloppe, L' est donc aussi annulé par p^n, donc par $V^n = p^n F^{-n}$. Pour $m \geqslant n$, on a alors $\mathrm{Fil}^m L' (= dV^m L + V^m L') = dV^m L$, de sorte que dL est un sous-groupe ouvert de L', homéomorphe à L (d étant injectif car L est sans V-torsion (1.2.2)), donc complet, et par suite L' est complet, ce qui prouve c).

Démonstration de (2.9). — On procède par récurrence croissante sur i. Comme M est à degrés bornés inférieurement, le théorème est vrai pour $i \ll 0$. Notons $(2.9.1)_i$ (resp. $(2.9.2)_i$) les assertions (2.9.1) (resp. (2.9.2)) en degré i. Supposons démontré $(2.9.1)_{i-1}$, montrons qu'on a alors $(2.9.2)_{i-1}$ et $(2.9.1)_i$. Quitte à remplacer M par son tronqué $M^{\leqslant i}$ (1.5), on peut supposer M nul en degré $> i$. D'autre part, comme $F^\infty B^{i-1} \subset V^{-\infty} Z^{i-1}$, il résulte de $(2.9.1)_{i-1}$ (iv) que, pour établir $(2.9.2)_{i-1}$ (et $(2.9.1)_i$), on peut remplacer M par son tronqué $\tilde{t}_{\geqslant i-1} M$ (1.5.2). Autrement dit, on est ramené à démontrer (2.9) pour M concentré en degrés $i-1$ et i, donc, quitte à faire une translation, on peut supposer M concentré en degrés 0 et 1. D'après $(2.9.1)_{i-1}$ (iv), M^0 est alors V-fini. Nous poserons $Z^0(M) = Z$, $B^1(M) = B$.

Prouvons (2.9.2). Comme M^0/VM^0 est un k-vectoriel de dimension finie, la suite décroissante des images de $V^{-r}Z$ dans M^0/VM^0 est stationnaire pour $r \geqslant r_0$. Soit $r \geqslant r_0$ et $x \in V^{-r}Z$. Il existe alors $x' \in V^{-(r+1)}Z$ et $y \in M^0$ tels que $x = x' + Vy$. On a donc $Vy = x - x' \in V^{-r}Z$, donc $y \in V^{-(r+1)}Z$, et par suite

$$V^{-r}Z = V^{-(r+1)}Z + V(V^{-(r+1)}Z)$$

(puisque $V(V^{-(r+1)}Z) \subset V^{-r}Z$). Itérant ce procédé avec $r+1, \ldots, r+n-1$ au lieu de r, on trouve que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$V^{-r}Z = V^{-(r+1)}Z + V^n(V^{-(r+n)}Z),$$

donc

$$V^{-r}Z \subset \bigcap_{n \geqslant 0} V^{-(r+1)}Z + V^n M^0.$$

Or, comme d est continu (pour les topologies standard) et M^1 séparé, Z est fermé pour la topologie V-adique de M^0, donc aussi $V^{-k}Z$ pour tout k (puisque V est continu pour la topologie V-adique). On a donc

$$V^{-(r+1)}Z = \bigcap_{n \geqslant 0} V^{-(r+1)}Z + V^n M^0,$$

d'où

$$V^{-r}Z = V^{-(r+1)}Z,$$

autrement dit la suite $V^{-r}Z$ est stationnaire pour $r \geqslant r_0$, et $V^{-\infty}Z = V^{-r_0}Z$. Comme $V^{-\infty}Z$ est stable par V, on en déduit que

$$Z \cap V^{r_0}M^0 = V^{-\infty}Z.$$

Par suite $Z/V^{-\infty}Z$ s'injecte dans $M^0/V^{r_0}M$, donc est de longueur finie. On a vu plus haut que $V^{-\infty}Z\ (= V^{-r_0}Z)$ est fermé dans M^0, donc (2.3) b) $M^0/V^{-\infty}Z$ est un R^0-module profini. Il reste à montrer que ce module est de Cartier unipotent. Tout d'abord, comme le sous-module de V-torsion de M^0 est contenu dans $V^{-\infty}Z$, on peut supposer M^0 sans V-torsion, *i.e.* de Cartier. D'après (2.7), il existe une suite exacte de R^0-modules

$$0 \to E \to M^0 \to L \to 0,$$

où L est de Cartier unipotent et E libre de type fini sur W. Comme M^1 est complet, la différentielle $d : M^0 \to M^1$ se factorise à travers l'enveloppe complétée $(R(M^0)^1)\hat{}$. D'après (2.10) b), il en résulte, par fonctorialité des enveloppes, que d s'annule sur E. Comme E est stable par V dans M^0, on a donc $E \subset V^{-\infty}Z$. Ainsi, $d : M^0 \to M^1$ se factorise à travers L en $\bar{d} : L \to M^1$ et la projection $M^0 \to L$ induit un isomorphisme de R^0-modules $M^0/V^{-\infty}Z \xrightarrow{\sim} L/V^{-\infty}\bar{Z}$, où $\bar{Z} = \operatorname{Ker} \bar{d}$. On peut donc remplacer M^0 par L, *i.e.* supposer M^0 de Cartier unipotent, donc annulé par une puissance de F, disons F^n. Alors $M^0/V^{-\infty}Z$ est annulé par F^n, et comme $M^0/V^{-\infty}Z$ est sans V-torsion (1.4.2), on en conclut que $M^0/V^{-\infty}Z$ est de Cartier unipotent, ce qui achève la preuve de (2.9.2).

Prouvons (2.9.1). Comme, d'après (2.9.2), $M^0/V^{-\infty}Z$ est de Cartier unipotent, annulé par F^n (pour un entier $n \geqslant 0$), la factorisation (1.4.6) (pour $i = 1$) montre, compte tenu de (2.10) c), que $F^\infty B$ est annulé par V^n. Posons

$$I = \operatorname{Im} V^n : M^1 \to M^1, \qquad K = \operatorname{Ker} V^n : M^1 \to M^1,$$

de sorte qu'on a une suite exacte de R^0-modules

$$(*) \qquad 0 \to K \to M^1 \xrightarrow{v} I \to 0,$$

où v est induit par V^n. Comme M^1 est limite projective des modules de longueur finie $M^1/\mathrm{Fil}^m M^1$ et que l'application $V : M^1 \to M^1$ est continue pour la topologie standard, les $V^m M^1$ sont des sous-W-modules fermés de M^1 (0.5). Comme la topologie V-adique de M^1 est plus fine que la topologie standard, il en résulte, d'après (0.1), que M^1 est séparé et complet pour la topologie V-adique. Comme $I \subset M^1$, I est séparé pour la topologie V-adique, et comme I est quotient de M^1, I est aussi complet pour la topologie V-adique, donc I est V-complet (1.3). Par ailleurs, pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$V^m I = V^{n+m}M^1 = V^n(\mathrm{Fil}^m M^1)$$

(car $V^n(F^\infty B) = 0$ donc *a fortiori* $V^n(dV^m M^0) = 0$). Donc V^n envoie surjectivement $M^1/\mathrm{Fil}^m M^1$ sur $I/V^m I$, donc $I/V^m I$ est de longueur finie. On a donc montré que le

R^0-module I est V-fini. Soient T la V-torsion de I, $K' = v^{-1}(T) \subset M^1$ (cf. (*)), de sorte qu'on a un diagramme de R^0-modules à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & T & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & I' & = & I' & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Comme I est V-fini, T est de longueur finie et I' est un module de Cartier (2.5) a). Si T est annulé par V^a, K' est donc annulé par $V^{n'}$, où $n' = n + a$. Comme I' est sans V-torsion, on a, pour tout $m \geqslant 0$, $K' \cap V^m M^1 = V^m K'$, donc

$$K' \cap \mathrm{Fil}^m M^1 = dV^m M^0 + V^m K'$$

(car $K' \supset K \supset F^\infty B \supset dV^m M^0$), donc

$$K' \cap \mathrm{Fil}^m M^1 = dV^m M^0$$

pour $m \geqslant n'$. La topologie induite sur K' par la topologie standard de M^1 est donc définie par les $dV^m M^0$. Par ailleurs $K'/K' \cap \mathrm{Fil}^m M^1$ est un sous-W-module de $M^1/\mathrm{Fil}^m M^1$, donc est de longueur finie. Donc, pour $m \geqslant n'$, $K'/dV^m M^0$ est de longueur finie. Comme $K' \supset F^\infty B \supset B \supset dV^m M^0$, il en résulte déjà que $F^\infty B = F^s B$ pour s assez grand et que $F^\infty B/B$ est de longueur finie, *i.e.* (2.9.1) (i). Les assertions de (ii) ont déjà été vues. De plus, $K'/F^\infty B$ est également de longueur finie, donc V-fini puisque annulé par une puissance de V. Comme $M^1/K' = I'$ est V-fini, il en résulte, par (2.3) c), que $M^1/F^\infty B$ est V-fini. La topologie standard de M^1 induit sur K', donc sur $F^\infty B$, la topologie définie par les $dV^m M^0$. Comme $dV^m M^0 \subset F^\infty B$, la topologie quotient sur $M^1/F^\infty B$ de la topologie standard est donc la topologie V-adique, et $M^1/F^\infty B$ étant V-fini, en particulier séparé, $F^\infty B$ est fermé dans M^1. Les assertions (iii) et (iv) sont donc établies, ce qui achève la démonstration de (2.9.1), donc de (2.9).

Remarques (**2.11**). — (i) La démonstration précédente montre en fait que :

a) Sous les hypothèses de (2.9), si $M^i/V^{-\infty} Z^i$ est annulé par F^n, alors $F^\infty B^{i+1}$ est annulé par V^n.

b) Si M est un R-module gradué concentré en degrés 0 et 1 tel que M^0 soit V-fini et M^1 séparé et complet pour la topologie standard, les conclusions de (2.9.2) pour $i = 0$ sont encore valables.

(ii) Sous les hypothèses de (2.9), on a, pour tout n,

$$V^{-\infty}Z^i \cap \mathrm{Fil}^n M^i = dV^n M^{i-1} + V^n(V^{-\infty}Z^i);$$

en particulier, le tronqué $\tilde{t}_{\leqslant i}M = (\ldots \to M^{i-1} \to V^{-\infty}Z^i \to 0)$ (1.5.2) est profini.

En effet, si $x = dV^n y + V^n z$, $y \in M^{i-1}$, $z \in M^i$, est tel que $dV^r x = 0$, alors $dV^{r+n}z = 0$, donc $dV^r z = 0$, *i.e.* $z \in V^{-r}Z^i$; donc on a, pour tout r,

$$V^{-r}Z^i \cap \mathrm{Fil}^n M^i \subset dV^n M^{i-1} + V^n(V^{-r}Z^i),$$

d'où découle la conclusion, en prenant r assez grand pour que $V^{-r}Z^i = V^{-\infty}Z^i$.

Corollaire **(2.12).** — *Soit* M *un* R*-module gradué profini à degrés bornés inférieurement, et soit* $i \in \mathbf{Z}$. *Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *il existe* $m \geqslant 0$ *tel que*

$$M^i = V^n M^i + (\mathrm{Ker}\, F^m d : M^i \to M^{i+1});$$

en d'autres termes, le sous-R^0*-module* $\bigcup_{m \geqslant 0} (\mathrm{Ker}\, F^m d : M^i \to M^{i+1})$ *est dense dans* M^i *pour la topologie standard. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *la suite croissante* $(\mathrm{Ker}\, F^m d : M^i \to M^{i+1})_{m \in \mathbf{N}}$ *est stationnaire*;
(ii) $M^i/V^{-\infty}Z^i = 0$.

(Cet énoncé est inspiré par le « lemme de Nygaard » [16 (2.5)].)

Posons $M^i/V^{-\infty}Z^i = N^i$. Soit m assez grand pour que la suite $F^{m'}B^{i+1}$ soit stationnaire pour $m' \geqslant m$. Considérons (comme dans *loc. cit.*) le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_m & \longrightarrow & N^i & \xrightarrow{F^m d} & F^\infty B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V^n} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & K_{m+n} & \longrightarrow & N^i & \xrightarrow{F^{m+n} d} & F^\infty B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Il montre que $N^i = K_{m'} + V^n N^i$ $(m' = m + n)$, et comme

$$V^{-\infty}Z^i \subset \mathrm{Ker}\, F^{m'} d : M^i \to M^{i+1},$$

on en déduit que $M^i = V^n M^i + (\mathrm{Ker}\, F^{m'} d : M^i \to M^{i+1})$. On a trivialement (ii) $\Rightarrow$ (i), et si la suite $\mathrm{Ker}\, F^{m'} d$ est stationnaire pour $m' \geqslant m$, on voit, comme dans *(loc. cit.)* que $\mathrm{Ker}\, F^m d$ est stable par V, donc $\mathrm{Ker}\, F^m d = \mathrm{Ker}\, d = V^{-\infty}Z^i$, et $V^{-\infty}Z^i$ est dense dans M^i donc égal à M^i puisque fermé dans M^i.

Corollaire **(2.13).** — *Sous les hypothèses de* (2.12), *pour tout entier* $n \geqslant 0$, *le* W*-module* $\mathrm{Ker}\, F^n : F^\infty B^i \to F^\infty B^i$ *est de longueur finie.*

Soit en effet r assez grand pour que $V^{-(r-n)}Z^{i-1} = V^{-\infty}Z^{i-1}$. Si $x = dV^r y$, $y \in M^{i-1}$, est tel que $F^n x = 0$, alors $y \in V^{-(r-n)}Z^{i-1}$, donc $V^r y \in V^{-\infty}Z^{i-1} \subset Z^{i-1}$, donc $x = 0$, autrement dit

$$dV^r M^{i-1} \cap (\operatorname{Ker} F^n : M^i \to M^i) = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} F^n : F^\infty B^i \to F^\infty B^i$ s'injecte dans $F^\infty B^i / dV^r M^{i-1}$, qui est de longueur finie d'après (2.9.1) (iii), donc est de longueur finie.

D) *Dominos*

(2.14) Notons $\mathbf{U}$ la R-enveloppe du R^0-module $k_\sigma[[V]]$:

(2.14.1) $$\mathbf{U} = R(k_\sigma[[V]]).$$

On a donc $\mathbf{U}^0 = k_\sigma[[V]]$, et $\mathbf{U}^1$, obtenu en rendant V inversible, est l'ensemble des séries

(2.14.2) $$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_{-n} F^n d,$$

où $a_{-n} = 0$ pour $n \gg 0$, et $F^m d = dV^{-m}$ pour $m \leqslant 0$. Sur $\mathbf{U}^1$, $V = 0$ et F est un automorphisme. Il est clair que $\mathbf{U}^1$ est complet pour la topologie standard (définie par les $dV^n\mathbf{U}^0$), ce qui est en accord avec (2.10) c), et on a évidemment $\mathbf{U}^1 = F^\infty B^1$. Il est clair également que $\mathbf{U}^1$ n'est pas profini, car $\mathbf{U}^1/d\mathbf{U}^0$, ensemble des polynômes $\Sigma a_{-n} F^n d$, $n > 0$, n'est pas de longueur finie.

Pour $i \in \mathbf{Z}$, considérons le R-module gradué (cf. (1.3.3))

(2.14.3) $$\mathbf{U}_i := R\hat{}/(R\hat{}F + R\hat{}F^{-i+1}d) = \mathbf{U}/F^{-i+1}d\mathbf{U}^0.$$

On voit tout de suite que $\mathbf{U}_i$ est profini.

On a $\mathbf{U}_i^0 = \mathbf{U}^0$, et $\mathbf{U}_i^1$ est l'ensemble des séries de la forme (2.14.2) telles que $a_n = 0$ pour $n < i$ (pour $i < 0$, $\mathbf{U}_i^1$ est l'ensemble des séries

$$a_i F^{-i} d + \ldots + a_1 F^{-1} d + \sum_{n \geqslant 0} a_n dV^n,$$

tandis que, pour $i \geqslant 0$, $\mathbf{U}_i^1$ est l'ensemble des séries $\sum_{n \geqslant i} a_n dV^n$). Sur $\mathbf{U}_i^1$, $V = 0$, et l'opérateur F envoie $F^{-i}d$ sur 0 et $F^{-n}d$ sur $F^{-n+1}d$ pour $n > i$. Le noyau de F sur $\mathbf{U}_i^1$ est donc le k-vectoriel de base $F^{-i}d$. D'autre part la différentielle $d : \mathbf{U}_i^0 \to \mathbf{U}_i^1$ envoie V^n sur 0 pour $n < i$ et sur dV^n pour $n \geqslant i$. Donc

(2.14.4) si $i \leqslant 0$, $H^0\mathbf{U}_i = 0$ et $\dim_k H^1\mathbf{U}_i = -i$,

si $i \geqslant 0$, $\dim_k H^0\mathbf{U}_i = i$ et $H^1\mathbf{U}_i = 0$.

Par exemple [10, III (7.2)], si X/k est une K3 supersingulière d'invariant d'Artin σ_0, le R-module $(H^2(X, W\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} H^2(X, W\Omega^1))$ est isomorphe à $\mathbf{U}_{\sigma_0}$. On a une flèche surjective de R-modules gradués

(2.14.5) $$\mathbf{U}_i \to \mathbf{U}_{i+1},$$

qui est l'identité en degré 0 et envoie $F^{-n}d$ sur $F^{-n}d$ pour $n \geqslant i+1$. Son noyau est le k-vectoriel, concentré en degré 1, de base $F^{-i}d$, sur lequel $F = V = 0$.

Les figures suivantes peuvent aider à retenir la définition de $\mathbf{U}_i$:

$i \geqslant 0$

$$\mathbf{U}_i = \begin{array}{ccccccccccc} k & \xrightarrow{V} & kV & \xrightarrow{V} & \dots & \longrightarrow & kV^{i-1} & \xrightarrow{V} & kV^{i} & \xrightarrow{V} & kV^{i+1} & \xrightarrow{V} & \dots \\ & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \\ 0 & \longleftarrow & & & & & & & kdV^{i} & \xleftarrow{F} & kdV^{i+1} & \xleftarrow{F} & \dots \end{array}$$

$i \leqslant 0$

$$\mathbf{U}_i = \begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{V} & kV & \xrightarrow{V} & \dots & & & & & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & & & & & & & \\ 0 & \longleftarrow & kF^{-i}d & \xleftarrow{F} & kF^{-i-1}d & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & kFd & \xleftarrow{F} & kd & \xleftarrow{F} & kdV & \xleftarrow{F} & \dots \end{array}$$

On notera que, pour $i \neq j$, $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{U}_j$ ne sont pas isomorphes, car, pour $n \geqslant 0$, on a

$$(\mathbf{2.14.6}) \qquad (\mathbf{U}_i)^1_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant i \\ \bigoplus_{i \leqslant r < n} kdV^r \ (\simeq k^{n-i}) & \text{si } n > i. \end{cases}$$

Proposition (**2.15**). — *Soit* M *un* R*-module gradué profini, concentré en degrés* 0 *et* 1, *tel que* $V^{-\infty}Z^0 = 0$ *et* $F^{\infty}B^1 = M^1$. *Alors* M *possède une suite de composition formée de* R*-modules gradués profinis, dont les quotients successifs sont isomorphes à* $\mathbf{U}_i$ *(pour des* i *convenables).*

Posons $Z = Z^0$, $B = B^1$. Observons d'abord que, d'après (2.9), Z et M^1/B sont de longueur finie. Considérons la factorisation canonique de $d : M^0 \to M^1$ à travers l'enveloppe $M' = R(M^0)^1$:

$$\begin{array}{ccc} M^0 & \xrightarrow{d} & M' \\ & \searrow^{d} & \downarrow{\scriptstyle u} \\ & & M^1 \end{array}$$

Comme $V^{-\infty}Z = 0$, M^0 est sans V-torsion (1.4.2), donc $d : M^0 \to M'$ est injectif, et l'on a

$$M' = \bigcup_{n \geqslant 0} F^n dM^0 = \bigcup_{n \geqslant 0} \overline{V}^{-n} M^0,$$

où, dans la seconde égalité, M^0 est considéré comme sous-R^0-module de M′ muni des opérateurs $\overline{F}$, $\overline{V}$ de (1.2.1). Comme $M^1 = F^{\infty}B$, $u : M' \to M^1$ est surjectif. Posons $\operatorname{Ker} u = K$. On a donc $K \cap M^0 = Z$.

Nous allons démontrer (2.15) par récurrence sur $h = \dim_k M^0/VM^0$. Si $h = 0$, alors $M^0 = 0$ (car M^0 est V-adiquement séparé), donc $F^\infty B = M^1 = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons $h > 0$, donc $M \neq 0$. Alors, pour tout n, $\overline{V}^{-(n+1)}M^0/\overline{V}^{-n}M^0$, isomorphe à M^0/VM^0, est non nul, donc M'/M^0 n'est pas de longueur finie. Comme M^1/B est de longueur finie, il en résulte qu'on a $K \neq 0$. D'autre part, puisque $K \cap M^0$ $(= Z)$ est de longueur finie, on a $K \cap V^n M^0 = 0$ pour $n \gg 0$. Soit $i \in \mathbf{Z}$ tel que

$$K \cap \overline{V}^{i-1}M^0 \neq 0, \qquad K \cap \overline{V}^i M^0 = 0,$$

et soit $x \in K \cap \overline{V}^{i-1}M^0$, $x \neq 0$. Notons que $K \cap \overline{V}^{i-1}M^0$ est stable par

$$\overline{F} = pF : M' \to M',$$

et que, M^0 étant de Cartier unipotent (2.9), M' est annulé par une puissance de p (2.10) c), donc de $\overline{F}$. Donc, quitte à remplacer x par $\overline{F}^n x$ pour $n \geqslant 0$ convenable, on peut supposer de plus que $\overline{F}x = 0$. Soit e l'unique élément de M^0 tel que $x = \overline{V}^{i-1}e$. Comme $\overline{V}$ est injectif, on a $Fe\ (= \overline{F}e) = 0$. Donc e engendre un sous-module de Cartier N^0 de M^0, isomorphe à $k_\sigma[[V]]$, formé des séries $\sum_{n \geqslant 0} a_n V^n e$, $a_n \in k$. Le quotient $P^0 = M^0/N^0$ est V-fini (2.3) b), et annulé par une puissance de F. Par ailleurs, vu le choix de i, on a $e \notin VM^0$, donc N^0/VN^0 s'injecte dans M^0/VM^0, autrement dit P^0 est sans V-torsion, donc P^0 est de Cartier unipotent et $\dim_k P^0/VP^0 = h - 1$. Le foncteur R-enveloppe, appliqué à la suite exacte $0 \to N^0 \to M^0 \to P^0 \to 0$ fournit une suite exacte de R-modules gradués

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N^0 & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le R^0-module N' est formé des séries $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \overline{V}^n e$ telles que $a_n = 0$ pour $n \ll 0$. Comme K est stable par F, il résulte du choix de i que le sous-module $N' \cap K$ est formé des sommes finies $\sum_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \leqslant i-1}} a_n \overline{V}^n e$. De (*) on déduit une suite exacte de R-modules gradués

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N^0 & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N^1 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $N^1 = N'/N' \cap K$. La description qu'on vient de donner de $N' \cap K$ montre que l'isomorphisme $\mathbf{U}^0 = k_\sigma[[V]] \xrightarrow{\sim} N^0$ envoyant 1 sur e se prolonge (de manière unique) en un isomorphisme $\mathbf{U}_i \xrightarrow{\sim} N$. En particulier, N est profini. Donc, d'après (2.1.2), P est profini. On a vu que P^0 est de Cartier unipotent et que $\dim_k P^0/VP^0 = h - 1$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il suffit donc, pour achever la démons-

tration, de s'assurer que $V^{-\infty}Z^0(P) = 0$ et $F^\infty B^1(P) = P^1$. La seconde égalité est triviale, puisque $F^n d : M^0 \to M^1$ est surjectif pour $n \gg 0$. D'autre part, comme $Z = Z^0(M)$ et $\mathrm{Coker}\, d : N^0 \to N^1$ sont de longueur finie, il en est de même de $Z^0(P)$. Donc $Z^0(P) \cap V^n P^0 = 0$ pour $n \gg 0$, donc (P^0 étant sans V-torsion) $V^{-n}Z^0(P) = 0$ pour $n \gg 0$. Ceci termine la démonstration de (2.15).

Définition **(2.16).** — *Nous dirons qu'un* R*-module gradué* M *est un* domino *si* M *est concentré en degrés* 0 *et* 1, *profini, et tel que* $V^{-\infty}Z^0 = 0$ *et* $F^\infty B^1 = M^1$ (i.e. (2.9) *tel que, pour n assez grand,* $dV^n : M^0 \to M^1$ *soit injectif et* $F^n d : M^0 \to M^1$ *surjectif*).

Proposition **(2.17).** — a) *Soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de R*-modules gradués profinis. Si* M′ *et* M″ *sont des dominos,* M *l'est également.*

b) *Soit*

$$\begin{array}{ccc} M^0 & \longrightarrow & M^1 \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \| \\ M'^0 & \longrightarrow & M^1 \end{array} \qquad \text{(resp.} \qquad \begin{array}{ccc} M^0 & \longrightarrow & M^1 \\ \| & & {\scriptstyle v}\downarrow \\ M^0 & \longrightarrow & M'^1 \end{array} \text{)}$$

un morphisme de dominos, induisant l'identité sur M^1 (*resp.* M^0). *Alors u est injectif, de conoyau de longueur finie, annulé par une puissance de* V (*resp. v est surjectif, de noyau de longueur finie, annulé par une puissance de* F).

La vérification est immédiate.

Proposition **(2.18).** — *Soit* $M = (M^0 \xrightarrow{d} M^1)$ *un domino, et soit*

$$M = A^0M \supset A^1M \supset \ldots \supset A^mM \supset A^{m+1}M = 0$$

une suite de composition telle que $\mathrm{gr}^j_A M \simeq \mathbf{U}_{i(j)}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$ (2.15). *Alors on a :*

$$m + 1 = \dim_k M^0/VM^0 = \dim_k({}_FM^1).$$

La conclusion est vraie en effet si $m = 0$ (*i.e.* $M \simeq \mathbf{U}_i$). D'autre part, si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte courte de dominos, on a

$$\dim_k M^0/VM^0 = \dim_k M'^0/VM'^0 + \dim_k M''^0/VM''^0$$

car V est injectif sur M'^0, M^0, M''^0, et

$$\dim_k({}_FM^1) = \dim_k({}_FM'^1) + \dim_k({}_FM''^1)$$

car F est surjectif sur M'^1, M^1, M''^1. Par suite,

$$\dim_k M^0/VM^0 = \sum_j \dim_k \mathrm{gr}^j_A M^0/V\,\mathrm{gr}^j_A M^0, \qquad \dim_k({}_FM^1) = \sum_j \dim_k({}_F\mathrm{gr}^j_A M^1),$$

d'où la conclusion dans le cas général.

Le nombre $m + 1$ de facteurs de la suite A^j est donc indépendant de la suite, nous l'appellerons *dimension* (ou *nombre de facteurs de type* II) de M, et le noterons

(2.18.1) $\dim_k M$.

On a en particulier :

(2.18.2) $(\dim_k M = 0) \Leftrightarrow (M = 0) \Leftrightarrow (M^0$ de type fini sur W) $\Leftrightarrow (M^1$ de type fini sur W).

Plus généralement, si M est un R-module gradué profini borné inférieurement, nous appellerons *nombre de facteurs de type* II de $M^r \xrightarrow{d} M^{r+1}$ la dimension du domino $M^r/V^{-\infty}Z^r \to F^\infty B^{r+1}$ (cf. (2.9)). Donc $d = 0 : M^r \to M^{r+1}$ si et seulement si $M^r \to M^{r+1}$ est sans facteur de type II.

(2.18.3) Soit M un domino. Nous appellerons *exposant d'unipotence* de M le plus petit entier $h \geqslant 0$ tel que $p^h M^0 = 0$. Notons que, si p^n annule M^0, alors p^n annule M^1 (2.11) (i), et inversement, si p^n annule M^1, p^n annule également M^0 car dV^s est injectif pour $s \gg 0$. L'exposant d'unipotence de M est donc aussi le plus petit entier h tel que $p^h M^1 = 0$.

Proposition **(2.19)**. — *Soit* M *un* R*-module gradué profini à degrés bornés inférieurement (resp. bornés). Alors* M *possède une filtration croissante, exhaustive et séparée (resp. finie) par des sous-*R*-modules gradués profinis telle que les quotients successifs soient de l'un des quatre types suivants* :

Type I : R*-module gradué concentré en un seul degré* :

type I_a : *de longueur finie sur* W;
type I_b : *libre de type fini sur* W;
type I_c : *isomorphe à* $k_0[[V]]$;

Type II_i : R*-module gradué concentré en deux degrés* n, $n + 1$, *isomorphe à* $\mathbf{U}_i[-n]$ (2.14.3).

Considérant la filtration de M par les tronqués $\tilde{t}_{\leqslant i}M$ (cf. (2.11) (ii)), et les quotients successifs, on se ramène au cas où M est concentré en degrés 0 et 1, et $V^{-\infty}Z^0 = 0$. Comme $M^1/F^\infty B^1$ est V-fini (2.9.1), la suite exacte

$$0 \to (M^0 \to F^\infty B^1) \to M \to (M^1/F^\infty B^1)[-1] \to 0$$

ramène au cas où M est concentré en un degré, justiciable de (2.6), ou vérifiant les hypothèses de (2.15), d'où la conclusion.

Remarque **(2.20)**. — Soit $M = (M^0 \to M^1)$ un domino. Ekedahl [7] a montré que M possède une unique filtration par des sous-R-modules gradués

$$M = M_j \supset M_{j+1} \supset \ldots \supset M_{i-1} \supset M_i = 0$$

telle que, pour tout $k \in [j, i[$, M_k/M_{k+1} admette une suite de composition de quotients successifs isomorphes à $\mathbf{U}_k$. Il appelle *type* de M la fonction $\sigma : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $\sigma(k) = \dim M_k/M_{k+1}$ (2.18.1). Si X est une variété propre et lisse sur k, le type des dominos apparaissant dans la première suite spectrale de de Rham-Witt de X (cf. chap. II) reflète des propriétés fines de la cohomologie cristalline de X : par exemple, si X est une surface, Ekedahl *(loc. cit.)* a prouvé que $H^2(X/W)$ est sans torsion exotique [10, II (6.7)] si et seulement si le type du domino $H^2(W\mathcal{O})/V^{-\infty}Z \to F^\infty B$ est nul pour $i < 0$.

E) *Croix*

(2.21) Soit $d : M \to N$ un domino. Notons E le W-module $\varprojlim_F N$ (cf. (1.5)). On peut considérer sur E les quatre opérateurs suivants : l'automorphisme σ-linéaire $\underline{F}$ défini par l'endomorphisme F de N, son inverse $\overline{V} = \underline{F}^{-1}$, et les opérateurs $\overline{F} = p\underline{F}$, $\underline{V} = p\overline{V}$; les couples $(\underline{F}, \underline{V})$ et $(\overline{F}, \overline{V})$ définissent donc chacun une structure de R^0-module sur E. Dans la factorisation canonique de d :

(2.21.1)

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ {\scriptstyle i}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle q} \\ M & \xrightarrow{d} & N \end{array}$$

i (resp. q) est R^0-linéaire pour la structure définie par $(\overline{F}, \overline{V})$ (resp. $(\underline{F}, \underline{V})$).

Lemme **(2.21.2).** — *L'application i (resp. q) est injective (resp. surjective).*

La surjectivité de q résulte de (1.5.5) puisque, par hypothèse, $N = F^\infty dM$. D'autre part, $i = (dV^n)_{n \geqslant 0} : M \to \varprojlim(N \xleftarrow{F} N \xleftarrow{F} \ldots)$, donc $\operatorname{Ker} i = \cap \operatorname{Ker} dV^n$, donc $\operatorname{Ker} i = 0$ puisque $V^{-\infty}Z = 0$, d étant un domino.

Notons en passant que l'injectivité de i entraîne celle de l'application canonique $E' \to E$, où $E' = \varinjlim_V M$ (cf. (1.5.5)), donc la séparation de E' pour la topologie des $\underline{F}^n K'$, où $K' = \operatorname{Ker} E' \to N$ (cf. (1.5.9)).

De (2.21.1) on déduit une croix de suites exactes de W-modules :

(2.21.3)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & K \xrightarrow{d'} L & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & & E & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & M \xrightarrow{d} N & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

où d, d' sont les flèches composées. Munissons K (resp. L) des opérateurs (F, V) induits par les opérateurs ($\underline{F}$, $\underline{V}$) (resp. ($\overline{F}$, $\overline{V}$)) de E; la suite $M \to E \to L$ (resp. $K \to E \to N$) est donc R^0-linéaire pour E muni de ($\overline{F}$, $\overline{V}$) (resp. ($\underline{F}$, $\underline{V}$)). On a alors $Vd'F = d'$, ce qui permet de considérer $d' : K \to L$ comme un R'-module gradué concentré en degrés 0 et 1.

Le W-module E est muni d'une topologie naturelle T, limite projective suivant F de la topologie standard de N (1.3). Cette topologie est donc profinie (0.2). Le résultat suivant, qui en précise la structure, jouera un rôle clé en (IV, 1).

Proposition **(2.22).** — *Sous les hypothèses et avec les notations de* (2.21), *les sous-*W*-modules* $\overline{V}^r M + \underline{F}^s K$ *de* E, *pour* $r, s \in \mathbf{Z}$, *forment un système fondamental de voisinages ouverts de* 0 *pour* T; *les* W*-modules* $E/(\overline{V}^r M + \underline{F}^s K)$ *sont donc de longueur finie et l'on a* $E \xrightarrow{\sim} \varprojlim E/(\overline{V}^r M + \underline{F}^s K)$, *la limite projective étant prise suivant les projections canoniques définies par les inclusions* $\overline{V}^{r'} M \subset \overline{V}^r M$, $\underline{F}^{s'} K \subset \underline{F}^s K$ *pour* $r' \geqslant r$, $s' \geqslant s$. *De plus, il existe un entier* a *tel que*

(i) $E = \overline{V}^{-r} M + \underline{F}^{-s} K$ *pour* $r + s \geqslant a$,

(ii) $\overline{V}^r M \cap \underline{F}^s K = 0$ *pour* $r + s \geqslant a$.

D'après (2.9.1), la topologie de N est définie par les $dV^r M$, $r \geqslant 0$. Pour $s \geqslant 0$ donné, le composé $E \xrightarrow{F^{-s}} E \xrightarrow{q} N$ induit un isomorphisme topologique $\varphi_s : E/\underline{F}^s K \xrightarrow{\sim} N$, identifiant $dV^r M$ à l'image de $\overline{V}^{r-s} M$ dans $E/\underline{F}^s K$; par suite, pour tout r, $\underline{F}^s K + \overline{V}^r M$ est ouvert dans E et $E/\underline{F}^s K$ s'identifie (comme W-module topologique) à la limite projective des W-modules de longueur finie $E/(\underline{F}^s K + \overline{V}^r M)$. Comme les φ_s identifient le système projectif des $E/\underline{F}^s K$ (suivant les projections canoniques) au système projectif $N \xleftarrow{F} N \xleftarrow{F} \ldots$, on en déduit aussitôt la première assertion. Soit $a \geqslant 0$ un entier tel que $F^a dM = N$ et $\operatorname{Ker} dV^a = 0$. Alors $E = K + \overline{V}^a M$, et, pour $r + s \geqslant a$,

$$\overline{V}^{-r} M + \underline{F}^{-s} K = \underline{F}^{-s}(K + \overline{V}^{-(r+s)} M) = \underline{F}^{-s} E = E,$$

$$\overline{V}^r M \cap \underline{F}^s K = \underline{F}^s(K \cap \overline{V}^{r+s} M) = \underline{F}^s(\operatorname{Ker} dV^{r+s} M) = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(2.23).** — *Sous les hypothèses de* (2.22) :

a) *La topologie induite par* T *sur le* R- (*resp.* R'-) *module gradué* d (*resp.* d') *est la topologie standard* (i.e. $V + dV$ (*resp.* $F + dF$)).

b) d' *est un* (R'-)*domino.*

c) *L'application canonique* $E \to \varprojlim_V L$ (*définie par les* $d\underline{F}^n$, $n \geqslant 0$) *est un isomorphisme topologique* (*par lequel* $\overline{V}$ *s'identifie à l'automorphisme déduit de l'endomorphisme* V *de* L).

Les assertions a) et b) résultent immédiatement de (2.22). L'assertion c) signifie que E est séparé et complet pour la topologie définie par les $V^n M$, $n \geqslant 0$. Or celle-ci

est plus fine que T, et M (donc V^nM) est fermé dans E d'après a), d'où la conclusion, en vertu de (0.1).

(2.24) Nous dirons qu'un R-domino $d: M \to N$ et un R'-domino $d': K \to L$ sont *conjugués* s'ils sont reliés par une croix (2.21.3). D'après (2.23), deux dominos conjugués se déterminent mutuellement. De plus, la croix montre qu'ils ont même dimension (2.18.1), même exposant d'unipotence (2.18.3) (le plus petit entier h tel que $p^hE = 0$), et que les noyaux (resp. conoyaux) de d et d' sont canoniquement isomorphes. En particulier, le domino conjugué de $\mathbf{U}_i$ est

$$\mathbf{U}'_i = R'\hat{}/(R'\hat{}\,V' + R'\hat{}\,V'^{-i+1}d).$$

Utilisant l'exactitude du foncteur $(d: M \to N) \mapsto \varprojlim_F N$, on en déduit facilement que deux dominos conjugués ont même fonction type au sens de (2.20).

3. Calculs de Tor, R-modules gradués cohérents

A) *Calculs de* Tor

(3.1) Soit M un R-module gradué. Pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Fil}^n M$ (1.3.1) est un sous-complexe de W-modules de M, nous noterons

(3.1.1) $$M_n = M/\mathrm{Fil}^n M$$

le complexe quotient. Observons (cf. (1.3.3)) que

$$\mathrm{Fil}^n R = V^nR^0 \oplus (dV^nR^0 + V^nR^1)$$

est un idéal à droite de R, et un sous-W[d]-module à gauche de R, où W[d] désigne la sous-W-algèbre de R engendrée par d (algèbre des nombres duaux sur W, d étant de degré 1). Donc R_n est un R-module à droite et un W[d]-module à gauche, et l'on a un isomorphisme canonique de W[d]-modules à gauche, *i.e.* de complexes de W-modules

(3.1.2) $$M_n = R_n \otimes_R M.$$

Pour calculer le foncteur dérivé

(3.1.3) $$R_n \overset{L}{\otimes}_R - : D^-(R) \to D^-(W[d])$$

(où D(R) (resp. D(W[d])) désigne la catégorie dérivée de la catégorie des R-modules (resp. W[d]-modules) (à gauche) gradués), nous utiliserons la résolution suivante de R_n, qui exprime que R_n se comporte comme une intersection complète de codimension 2.

Proposition **(3.2).** — a) *On a une suite exacte de* R*-modules à droite gradués*

(3.2.1) $$0 \to R[-1] \xrightarrow{u_n} R[-1] \oplus R \xrightarrow{v_n} R \to R_n \to 0,$$

où $R \to R_n$ *est la projection canonique,* $u_n(x) = (F^nx, -F^ndx)$ *et* $v_n(x,y) = dV^nx + V^ny$.

b) *On a un morphisme de suites exactes de* R*-modules à droite gradués* :

(3.2.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R[-1] & \xrightarrow{u_n} & R[-1]\oplus R & \xrightarrow{v_n} & R & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle -d} & & \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{u_n} & R\oplus R[1] & \xrightarrow{v_n} & R[1] & \longrightarrow & R_n[1] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

c) *On a un morphisme de suites exactes de* R*-modules à droite gradués*

(3.2.3)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R[-1] & \xrightarrow{u_{n+1}} & R[-1]\oplus R & \xrightarrow{v_{n+1}} & R & \longrightarrow & R_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle V\oplus V} & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & R[-1] & \xrightarrow{u_n} & R[-1]\oplus R & \xrightarrow{v_n} & R & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est la projection canonique. Ce morphisme est compatible aux structures de W[d]*-module à gauche définies par les colonnes de* (3.2.2).

La vérification de b) et c) est immédiate. Prouvons a). Il est clair que les flèches u_n et v_n sont R-linéaires à droite et que $v_n u_n = 0$, et l'exactitude de (3.2.1) est évidente sauf en $R^0 \oplus R^1$ dans la ligne médiane de (3.2.2). Soit donc $(x,y) \in R^0 \oplus R^1$ tel que $dV^n x + V^n y = 0$. On a alors $dx + p^n y = 0$. Utilisons l'écriture canonique (1.1.4) :

$$x = \sum_{m>0} a_{-m} V^m + a_0 + \sum_{m>0} a_m F^m,$$

de sorte que dx s'écrit canoniquement sous la forme (1.1.5) :

$$dx = \sum_{m>0} a_{-m} dV^m + a_0 d + \sum_{m>0} p^m a_m F^m d.$$

La condition $p^n \mid dx$ équivaut à $p^n \mid a_m$ pour $m \leqslant 0$ et $p^{n-m} \mid a_m$ pour $0 < m < n$. Elle entraîne donc que $x = F^n z$, $z \in R^0$, d'où $dx = p^n F^n dz$, et $y = -F^n dz$, soit $(x,y) = u_n(z)$, ce qui achève la démonstration.

Comme les composantes de la résolution de R_n définie par (3.2.1) sont des R-modules à droite gradués libres, on en déduit :

Corollaire **(3.3).** — *Soit* M *un* R*-module gradué. Alors* $R_n \overset{L}{\otimes}_R M \in \mathrm{ob}\, D^-(W[d])$ *est représenté par le complexe suivant de* W[d]*-modules gradués*

(3.3.1)
$$0 \to M[-1] \xrightarrow{u_n} C \xrightarrow{v_n} M \to 0,$$

où M *est placé en degré* 0, *et* C *est le* W[d]*-module gradué défini par* $C^i = M^{i-1} \oplus M^i$, $d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (i.e. *le cône sur* $\mathrm{id}_{M^*[-1]}$, *où* M^* *est le* W*-module gradué sous-jacent à* M *muni de la différentielle nulle*).

On a en particulier :

(3.3.2)
$$\mathrm{Tor}_0^R(R_n, M) = M_n = \mathrm{Coker}\, v_n,$$
$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = \mathrm{Ker}\, v_n/\mathrm{Im}\, u_n,$$
$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M) = \mathrm{Ker}\, u_n,$$
$$\mathrm{Tor}_i^R(R_n, M) = 0 \quad \text{pour } i > 2.$$

De plus, la projection naturelle

$$(R_{n+1} \overset{L}{\otimes}_R M \to R_n \overset{L}{\otimes}_R M) \in \mathrm{Fl}\, D(W[d])$$

est représentée par le morphisme suivant de complexes de $W[d]$*-modules gradués*

(3.3.3)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M[-1] & \xrightarrow{u_{n+1}} & C & \xrightarrow{v_{n+1}} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle V\oplus V} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M[-1] & \xrightarrow{u_n} & C & \xrightarrow{v_n} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En particulier, la projection

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_{n+1}, M)^i \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)^i$$

(resp. $\mathrm{Tor}_2^R(R_{n+1}, M)^i \to \mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)^i$*) est induite par* $V : M^{i-1} \oplus M^i \to M^{i-1} \oplus M^i$ *(resp.* $p : M^{i-1} \to M^{i-1}$*).*

De la description (3.3.2) résulte notamment :

Corollaire **(3.4)**. — *La partie homogène de degré* i *de* $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M)$ *est le* W*-module de cohomologie* H^{-j} *du complexe concentré en degrés* -2, -1, *et* 0 :

$$0 \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} M^{i-1} \oplus M^i \xrightarrow{dV^n + V^n} M^i \longrightarrow 0 \ (1).$$

Corollaire **(3.5)**. — *Soit* M *un* R*-module gradué concentré en degré* 0.

a)
$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)^0 = {}_{(V^n)}M,$$
$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)^1 = M/F^nM,$$
$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)^i = 0 \quad \textit{pour } i \neq 0, 1.$$

La différentielle ${}_{(V^n)}M \to M/F^nM$ *est induite par l'application identique de* M. *L'application canonique* $\mathrm{Tor}_1^R(R_{n+1}, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ *est la multiplication par* V.

b)
$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)^1 = {}_{(F^n)}M,$$
$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)^i = 0 \quad \textit{si } i \neq 1.$$

L'application canonique $\mathrm{Tor}_2^R(R_{n+1}, M) \to \mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)$ *est la multiplication par* p.

(1) On vérifie facilement que ce module est bien annulé par p^n.

Il est aisé d'expliciter (3.5) pour les R-modules profinis de type I (2.16) :

Corollaire **(3.6).** — *Soit* M *un* R*-module gradué profini, concentré en degré zéro. Par définition,* $\mathrm{Tor}_0^R(R_n, M) = M/V^nM$ *est donc de longueur finie.*

a) *Supposons* M *de type* I_a, i.e. *de longueur finie, annulé par* V^r. *Alors les* $\mathrm{Tor}_i^R(R_n, M)$ *sont de longueur finie, stationnaire pour* $n \geqslant 0$. *Plus précisément, si* $M = M_{ss} \oplus M_{nil}$ *est la décomposition canonique de* M, *sous l'action de* F, *en parties semi-simple et nilpotente, on a, pour n assez grand,*

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = (M \to M_{nil}) \quad \textit{(projection canonique)},$$
$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M) = M_{nil}[-1].$$

Pour $i \geqslant 1$, *le pro-objet* « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_i^R(R_n, M)$ *est nul : l'itérée r-ième de la flèche de transition est nulle.*

b) *Supposons* M *de type* I_b, i.e. *libre de type fini sur* W. *Alors* $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M) = 0$ *et* $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = (M/F^nM)[-1]$ *est de longueur finie. Pour tout* $n \geqslant 1$, *on a* $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = 0$ *si et seulement si* F *est un automorphisme de* M. *Le pro-objet* « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ *est nul.*

c) *Supposons* M *de type* I_c, i.e. *isomorphe à* $k_0[[V]]$. *Alors, pour* $n > 0$,

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = \mathrm{Tor}_2^R(R_n, M) = M[-1]$$

(en particulier, $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ *et* $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)$ *ne sont pas de longueur finie). Le pro-objet* « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)$ *est nul : la flèche de transition est nulle. Le pro-objet* « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ *est non nul : la flèche de transition est injective.*

Remarque **(3.6.1).** — Sous l'hypothèse de (3.6) b), si F n'est pas un automorphisme de M, le pro-objet « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ ne vérifie pas de condition de ML uniforme. En effet, quitte à remplacer M par un facteur direct, on peut supposer F topologiquement nilpotent sur M et $M \neq 0$. S'il existait un entier $a > 0$ tel que

$$V^a : \mathrm{Tor}_1^R(R_{n+a}, M) = M/F^{n+a}M \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) = M/F^nM$$

soit nul pour tout n assez grand, on en déduirait $p^aM \subset F^{n+a}M$ pour tout n assez grand, contradiction.

D'après (3.3), si M est un R-module gradué concentré en degrés 0 et 1, les $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M)$ sont les colonnes de cohomologie du bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc}
M^1 & \xrightarrow{F^n} & M^1 & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle -d}\uparrow & & {\scriptstyle (0,1)}\uparrow & & \uparrow \\
M^0 & \xrightarrow{(F^n,\, -F^nd)} & M^0 \oplus M^1 & \xrightarrow{dV^n + V^n} & M^1 \\
\uparrow & & {\scriptstyle \binom{1}{0}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\
0 & \longrightarrow & M^0 & \xrightarrow{V^n} & M^0
\end{array}$$

Par un calcul trivial, on en déduit la structure des $\mathrm{Tor}^R(R_n, M)$ pour $M = \mathbf{U}_i$ (2.14.3) :

Corollaire **(3.7).** — a) *Soit i un entier $\geqslant 0$. Pour tout $n > 0$, on a :*

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)^j = 0 \quad \text{si } j \neq 1,$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)^1 = V^{-n}Z^0 = \bigoplus_{m<i-n} kV^m,$$

en particulier $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est de longueur $i - n$ si $i \geqslant n$, et nul si $n \geqslant i$;
$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est concentré en degrés 1 et 2 :

$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)^1 = {}_{(F^n d)}\mathbf{U}_i^0 = \bigoplus_{m<i+n} kV^m,$$

$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)^2 = {}_{(F^n)}\mathbf{U}_i^1 = \bigoplus_{i\leqslant m<i+n} kdV^m,$$

et la différentielle $\mathrm{Tor}_2(\ )^1 \to \mathrm{Tor}_2(\ )^2$ est induite par $-d$; en particulier, $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est de longueur $2n + i$. Le système projectif $n \mapsto \mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est à flèches de transition nulles.

b) *Soit i un entier $\leqslant 0$. Pour tout $n > 0$, on a :*

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)^j = 0 \quad \text{si } j \neq 1,$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)^1 = \mathbf{U}_i^1/F^n B^1 = \bigoplus_{-i\geqslant m>n} kF^m d,$$

en particulier $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est de longueur $-i - n$ si $n \leqslant -i$, et nul pour $n > -i$;
$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est concentré en degrés 1 et 2 :

$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)^1 = {}_{(F^n d)}\mathbf{U}_i^0 = \bigoplus_{m<n+i} kV^m,$$

$$\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)^2 = {}_{(F^n)}\mathbf{U}_i^1 = \bigoplus_{-i\geqslant m>-i-n} kF^m d,$$

et la différentielle $\mathrm{Tor}_2(\ )^1 \to \mathrm{Tor}_2(\ )^2$ est induite par $-d$; en particulier, $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est de longueur finie $(= n + \sup(n + i, 0))$. Le système projectif $n \mapsto \mathrm{Tor}_2^R(R_n, \mathbf{U}_i)$ est à flèches de transition nulles.

B) R-*modules cohérents*

Théorème **(3.8).** — *Soit* M *un* R-*module gradué profini* (2.1), *à degrés bornés. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout i, $H^i(M)$ est un* W-*module de type fini.*

(ii) *Pour tout i, $\widetilde{H}^i(M) = V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i$* (1.4.7) *est un* W-*module de type fini.*

(iii) M *admet une suite de composition formée de* R-*modules gradués profinis, dont les quotients successifs sont du type I_a, I_b, ou II_i* (2.16).

(iv) *Pour tout $n \geqslant 0$ et tout j, $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M)$ est un* W-*module gradué de longueur finie.*

(v) *Il existe $n > 0$ tel que le* W-*module gradué $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ soit de longueur finie.*

(vi) *Il existe $n > 0$ tel que le* W-*module gradué $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)$ soit de longueur finie.*

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, les pro-objets « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M)$ sont nuls pour $j > 0$.

L'équivalence de (i) et (ii) découle de (2.9.1) (i) et (2.9.2) (i). Compte tenu de (2.15), la démonstration de (2.16) montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Que (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte, par la suite exacte de cohomologie, de ce que $H^*(\mathbf{U}_i)$ est de longueur finie (2.14.4). Compte tenu de (3.6) et (3.7), la suite exacte des $\mathrm{Tor}^R(R_n, -)$ montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Les implications (iv) $\Rightarrow$ (v) et (iv) $\Rightarrow$ (vi) sont triviales. Prouvons que (v) $\Rightarrow$ (iii). Considérons, d'après (2.16), une suite de composition de M formée de R-modules gradués profinis,

$$0 \subset A_0M \subset A_1M \subset \ldots \subset A_rM = M,$$

telle que les quotients successifs soient de type I_a, I_b, I_c ou II_i. Supposons que l'un au moins des quotients soit de type I_c. Il existe alors un indice k tel que $A_kM/A_{k-1}M$ soit de type I_c, et que le R-module gradué quotient M/A_kM, muni de la suite de composition quotient, n'ait pas de facteur de type I_c. On dispose donc de suites exactes de R-modules gradués

$$(*) \qquad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0, \qquad 0 \to N' \to M' \to N \to 0,$$

où N est de type I_c, M' et N' sont profinis, et M'' possède une suite de composition (quotient par M' de celle de M, donc formée de R-modules gradués profinis (2.1.2)), dont les quotients successifs sont de type I_a, I_b, ou II_i. Soit $n > 0$ tel que $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ soit de longueur finie. Les suites (*) fournissent des suites exactes

$$(a) \qquad \ldots \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M') \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, N) \to \mathrm{Tor}_0^R(R_n, N') \to \ldots$$

$$(b) \qquad \ldots \to \mathrm{Tor}_2^R(R_n, M'') \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M') \to \mathrm{Tor}_1^R(R_n, M) \to \ldots$$

Comme N' est profini, $\mathrm{Tor}_0^R(R_n, N') = N'_n$ est de longueur finie. D'autre part, d'après (3.6) c), $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, N)$ n'est pas de longueur finie. Il en résulte, par *(a)*, que $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M')$ n'est pas de longueur finie. Par ailleurs, d'après (iii) $\Rightarrow$ (iv), on sait que, pour tout j, $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M'')$ est de longueur finie. Comme, par hypothèse, $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M)$ est de longueur finie, il en résulte, par *(b)*, que $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M')$ est de longueur finie, contradiction qui établit donc (v) $\Rightarrow$ (iii). On démontre (vi) $\Rightarrow$ (iii) de manière analogue, en considérant des suites exactes

$$(**) \qquad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0, \qquad 0 \to N \to M'' \to N'' \to 0,$$

où N est de type I_c et M' possède une suite de composition à quotients successifs de type I_a, I_b, ou II_i, de sorte que, pour tout j, $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M')$ est de longueur finie. Si, par hypothèse, $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M)$ est de longueur finie, il en résulte, par la suite exacte des Tor de la première suite (**), que $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M'')$ est de longueur finie. Mais, d'après (3.6), $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, N)$ n'est pas de longueur finie, donc $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M'')$ ne l'est pas non plus, car $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, N)$ s'injecte dans $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, M'')$ (vu que $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, N'') = 0$ pour $j > 2$ (3.3.2)). Cette contradiction prouve (vi) $\Rightarrow$ (iii) et achève la preuve de l'équivalence des conditions (i) à (vi). Compte tenu de (3.6) et (3.7), la condition (iii) entraîne la nullité des pro-objets « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_j^R(R_n, M)$ pour $j > 0$, ce qui termine la démonstration de (3.8).

Définition **(3.9).** — *Soit* M *un* R*-module gradué. On dit que* M *est cohérent si* M *est à degrés bornés, profini, et vérifie les conditions équivalentes de* (3.8).

Proposition **(3.10).** — *Soit*

(*) $\quad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

une suite exacte de R*-modules gradués, à degrés bornés. Si deux des termes sont cohérents, le troisième l'est également, et la suite de pro-objets*

(**) $\quad 0 \to \text{« } \varprojlim \text{ » } M'_n \to \text{« } \varprojlim \text{ » } M_n \to \text{« } \varprojlim \text{ » } M''_n \to 0$

est exacte.

Supposons M′ et M″ cohérents. Alors, pour tout n, M_n est de longueur finie, et, puisque le pro-objet « $\varprojlim$ » $\mathrm{Tor}_1^R(R_n, M'')$ est nul, la suite (**) est exacte. Le pro-objet « $\varprojlim$ » M''_n étant strict, la limite projective de (**) est exacte, ce qui entraîne que M est séparé et complet pour la topologie standard, donc profini. Par la suite exacte de cohomologie, on en conclut que M est cohérent. Le même raisonnement montre que, si M et M″ sont cohérents, M′ est cohérent. Enfin, si M′ et M sont cohérents, M″ est profini (2.1.2), donc cohérent (grâce à la suite exacte de cohomologie).

Remarque **(3.10.1).** — Notons D(R) la catégorie dérivée de la catégorie des R-modules gradués, $D_c^b(R)$ la sous-catégorie pleine de D(R) formée des objets M de $D^b(R)$ tels que H^iM soit cohérent pour tout i. Ekedahl [7] a montré que $D_c^b(R)$ est une sous-catégorie triangulée de D(R). Il en résulte que la sous-catégorie pleine de la catégorie des R-modules gradués formée des R-modules gradués cohérents est stable par noyaux, conoyaux et extensions, ce qui renforce (3.10). Ekedahl a donné des critères pour qu'un objet de D(R) soit « cohérent », *i.e.* appartienne à $D_c^b(R)$, et défini des opérations internes dans $D_c^b(R)$, qui jouent un rôle essentiel dans ses formules de dualité et de Künneth pour la cohomologie du complexe de de Rham-Witt [7] (voir [10 *ter*] pour un résumé de cette théorie).

(3.11) Soient M un R-module gradué cohérent et $i \in \mathbf{Z}$. Le R^0-module $\varprojlim_F M_i$ (1.5) admet alors un dévissage naturel, qui nous sera utile en (IV, 1).

Tout d'abord, comme $M^i/V^{-\infty}Z^i$ est annulé par une puissance de F (2.9), on a, par définition de M^i_{ss} (1.5.2),

$$F^\infty B^i \subset M^i_{ss} \subset V^{-\infty} Z^i.$$

L'endomorphisme F de $F^\infty B^i$ étant surjectif, on en déduit une suite exacte de R^0-modules

(3.11.1) $\quad 0 \to F^\infty B^i \to M^i_{ss} \to \tilde{H}^i(M)_{ss} \to 0,$

où $\tilde{H}^i(M)$ $(= V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i)$, donc $\tilde{H}^i(M)_{ss}$, est de type fini sur W. Prenant la limite projective de (3.11.1) suivant F, on obtient une suite exacte de R^0-modules

(3.11.2) $\quad 0 \to \varprojlim_F F^\infty B^i \to \varprojlim_F M^i \to \tilde{H}^i(M)_{ss} \to 0,$

avec F bijectif sur les trois termes. Les suites (3.11.1) et (3.11.2) sont des suites exactes topologiques de W-modules profinis. On a de plus une flèche surjective naturelle de (3.11.2) sur (3.11.1), qui donne un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & K & = & K & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \text{(3.11.3)} & 0 & \longrightarrow & \varprojlim_F F^\infty B^i & \longrightarrow & \varprojlim_F M^i & \longrightarrow & \tilde{H}^i(M)_{ss} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \| & \\ & 0 & \longrightarrow & F^\infty B^i & \longrightarrow & M^i_{ss} & \longrightarrow & \tilde{H}^i(M)_{ss} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

La structure de la colonne de gauche est précisée par (2.21) et (2.22), appliqués au domino $M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} \to F^\infty B^i$. On a notamment la factorisation canonique suivante de $d : M^{i-1} \to M^i$:

$$\text{(3.11.4)} \qquad M^{i-1} \twoheadrightarrow M^{i-1}/V^{-\infty}Z^{i-1} \hookrightarrow \varprojlim_F F^\infty B^i \hookrightarrow \varprojlim_F M^i \twoheadrightarrow M^i_{ss} \hookrightarrow M^i,$$

qui montre en particulier que

$$\text{(3.11.5)} \qquad \mathrm{Ker}(M^{i-1} \xrightarrow{dV^\bullet} \varprojlim_F M^i) = V^{-\infty}Z^{i-1}.$$

4. Variantes et généralisations

(4.1) Soient N un entier $\geqslant 1$ et r un entier $\geqslant 1$. Dans l'étude des suites spectrales de de Rham-Witt, nous rencontrerons des W-modules $\mathbf{Z}^r$-gradués M munis d'une différentielle d de multi-degré $a = (a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ telle que $d^2 = 0$ et, en chaque multi-degré $i = (i_1, \ldots, i_r)$, d'opérateurs F et V sur M^i, respectivement σ- et σ^{-1}-linéaire, tels que $FV = VF = p^N$ et $FdV = d$. Un tel module M s'interprète comme un module sur l'*algèbre de Cartier-Dieudonné-Raynaud de niveau* N *et multi-degré* a, notée

$$\text{(4.1.1)} \qquad R(N, a)(k) \text{ (ou } R(N, a), \text{ ou } R),$$

qui est, par définition, la W-algèbre $\mathbf{Z}^r$-graduée, concentrée en multi-degrés 0 et a, engendrée par F et V en degré 0 et d en degré a, soumis aux relations

$$\text{(4.1.2)} \qquad Fx = x^\sigma F, \quad xV = Vx^\sigma \quad (x \in W), \quad FV = VF = p^N,$$
$$dx = xd \quad (x \in W), \quad d^2 = 0, \quad FdV = d.$$

L'algèbre R de (1.1.1) correspond donc au cas $N = 1$, $r = 1$, $a = 1$.

Il n'est pas difficile d'étendre à ce cadre la théorie développée aux numéros précédents. Nous nous bornerons à esquisser rapidement les grandes lignes de cette généralisation.

(4.2) *Mutatis mutandis*, les définitions et résultats du n° 1 s'étendent trivialement : écritures canoniques (1.1.4) et (1.1.5) des éléments de $R = R^0 \oplus R^a$, R-enveloppe d'un R^0-module L, $R \otimes_{R^0} L$, expression de $R(L)^1$ comme module déduit de L en rendant V inversible (1.2.1), définition de $\mathrm{Fil}^n M^i = V^n M^i + dV^n M^{i-a}$, topologie standard, complété d'un R-module gradué, objets $V^{-\infty} Z^i$ et $F^\infty B^i$, factorisation (1.4.5), construction, comme en (1.6.1), d'un anneau R', avec $F'V' = V'F' = p^N$ et $V'dF' = d$. Seule la définition des « tronqués canoniques » (1.5.2) nécessite quelque précaution : pour $i \in \mathbf{Z}^r$ donné, on peut définir $\tilde{t}_{\leqslant i} M$ comme déduit du complexe M^{i+na}, $n \in \mathbf{Z}$, en remplaçant M^i par $V^{-\infty} Z^i$ et M^{i+na} par 0 pour $n > 0$, et de même $\tilde{t}_{\geqslant i} M$ obtenu en remplaçant M^i par $M^i/F^\infty B^i$ et M^{i+na} par 0 pour $n < 0$.

(4.3) On définit comme en (2.1) la notion de R-module gradué profini (= (V + dV)-profini), et (2.1.1) et (2.1.2) s'étendent sans changement. Si M est un R-module concentré en degré 0, M est profini si et seulement si M/VM est de longueur finie, et dans ce cas M est de type fini sur $W_\sigma[[V]]$. La proposition (2.3) se généralise trivialement. On définit comme en (2.4) les notions de R^0-module de Cartier (resp. Cartier unipotent), mais on ne peut plus les interpréter en termes de groupes formels si $N \geqslant 2$. Cependant, les dévissages de *(loc. cit.)* se généralisent, à cause du résultat suivant :

Lemme **(4.3.1).** — *Soit* M *un* R^0*-module de Cartier* (i.e. *profini et sans* V*-torsion*). *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) M *est sans p-torsion*;
(ii) F *est injectif*;
(iii) M *est de type fini sur* W;
(iv) M *est libre de type fini sur* W.

On a trivialement (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iv) $\Rightarrow$ (iii). Prouvons (iii) $\Rightarrow$ (ii). On peut supposer M de F-torsion, donc de p-torsion, donc de longueur finie. Comme V est injectif, V est alors un automorphisme, mais V est nilpotent, donc M = 0. Quant à l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv), elle découle de la théorie de Manin et est démontrée dans Bloch [3, III (2.4)].

Grâce à (4.3.1), les énoncés (2.5), (2.6) et (2.7) s'étendent sans changement (pour (2.5) c), filtrer d'abord M par les noyaux de p^n). En revanche, on ne dispose plus des interprétations de (2.8).

(4.4) Le théorème de structure (2.9), ainsi que le lemme clé (2.10) s'étendent sans changement, les modifications à apporter à la démonstration sont essentiellement

triviales. De même, les dévissages (2.15) (2.16) sont encore valables ($\mathbf{U}_i$ est bien entendu concentré en degrés 0 et a, et le type $\mathbf{II}_i$ signifie isomorphe à $\mathbf{U}_i[-n]$, $n \in \mathbf{Z}^r$).

(4.5) Les calculs de Tor du n° 3 se généralisent aisément, à partir de la résolution analogue à (3.2.1), avec R[− 1] remplacé par R[− a]. On en déduit un analogue de (3.8), d'où une notion de R-module gradué cohérent, *i.e.* à degrés bornés, profini et tel qu'en chaque degré $i \in \mathbf{Z}^r$, H^iM soit un W-module de type fini. Nous laissons au lecteur les détails de ce développement.

II. — LA PREMIÈRE SUITE SPECTRALE DE DE RHAM-WITT

Dans ce chapitre, X désigne un schéma lisse sur k. On note $W\Omega^{\cdot}_X$ (resp. $W_n\Omega^{\cdot}_X$) (ou parfois simplement $W\Omega^{\cdot}$ (resp. $W_n\Omega^{\cdot}$)) le complexe de de Rham-Witt de X (resp. le complexe de de Rham-Witt de X de cran n) [10].

1. Calcul de $R_n \overset{L}{\otimes}_R W\Omega^{\cdot}_X$

(1.1) Rappelons que le complexe de de Rham-Witt de X est muni en chaque degré d'opérateurs injectifs F et V, respectivement σ et σ^{-1}-linéaire, qui vérifient $FV = VF = p$ et $Fd V = d$ [10, I (2.19)]. Ces opérateurs munissent donc $W\Omega^{\cdot}$ d'une structure de R-module gradué (*i.e.* faisceau de R-modules gradués) sur X. Pour tout entier $n \geqslant 0$, la projection canonique $W\Omega^{\cdot} \to W_n\Omega^{\cdot}$ a pour noyau

$$\mathrm{Fil}^n W\Omega^{\cdot} = V^n W\Omega^{\cdot} + dV^n W\Omega^{\cdot -1} \quad [10,\ I\ (3.31)].$$

Elle induit donc un isomorphisme (cf. I (3.1))

(1.1.1) $$R_n \otimes_R W\Omega^{\cdot} \xrightarrow{\sim} W_n\Omega^{\cdot}.$$

Notons D(X, R) (resp. D(X, W[d])) la catégorie dérivée de celle des faisceaux de R-modules gradués (resp. W[d]-modules gradués) sur X (notations de (I (3.1))), et, pour n entier $\geqslant 0$,

$$R_n \overset{L}{\otimes}_R - : D(X, R) \to D(X, W[d])$$

le foncteur dérivé du foncteur associant à un R-module gradué M sur X le W[d]-module gradué (*i.e.* complexe de W-modules) $R_n \otimes_R M = M_n = M/\mathrm{Fil}^n M$.

Théorème **(1.2).** — *L'isomorphisme* (1.1.1) *définit un isomorphisme de* $D^b(X, W[d])$:

(1.2.1) $$R_n \overset{L}{\otimes}_R W\Omega^{\cdot} \xrightarrow{\sim} W_n\Omega^{\cdot}.$$

En d'autres termes, on a $\mathrm{Tor}_i^R(R_n, W\Omega^{\cdot}) = 0$ *pour* $i > 0$.

D'après (I (3.3)) (ou plus exactement la variante de (I (3.3)) pour les faisceaux de R-modules gradués sur X), (1.2.1) équivaut à l'exactitude des suites

(1.2.2) $$0 \longrightarrow W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} W\Omega^{-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^n + V^n} W\Omega^i \longrightarrow W_n\Omega^i \longrightarrow 0$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. On connaît déjà l'exactitude en $W\Omega^i$ (1.1.1), et en $W\Omega^{i-1}$ car F est injectif. Reste à vérifier l'exactitude en $W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i$. Soit donc $(x, y) \in W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i$ tel que $dV^n x + V^n y = 0$. On en déduit $dx + p^n y = 0$, donc, par [10, I (3.21) (1.5)], il existe (localement) $z \in W\Omega^{i-1}$ tel que $x = F^n z$. On en tire $p^n(F^n dz + y) = 0$, d'où $y = -F^n dz$, p étant injectif.

(1.3) *Erratum à* [10, I (3.21)]. — Le premier auteur profite de l'occasion pour rectifier la démonstration de [10, I (3.21)], qui contient une lacune, comme A. Ogus et W. Lang l'ont fait observer. Le point est que la relation $d\bar{y} = 0$ permet seulement d'écrire $y = Fu + Vv$ et non $y = Fu + pv + dw$, comme on l'affirme à tort. Voici une démonstration directe de [10, I (3.21)], indépendante des résultats (3.8) à (3.20) de [10, I].

Il s'agit de prouver l'exactitude de la suite de $W_{2n}\mathcal{O}$-modules

$$W_{2n}\Omega^i \xrightarrow{F^n} F^n_* W_n\Omega^i \xrightarrow{d} F^n_* W_n\Omega^{i+1}.$$

Par localisation étale, on se ramène, grâce à [10, I (1.14.1)] et [10, I (2.17.5)], au cas où S est affine d'anneau k, et $X = \mathrm{Spec}(A)$, $A = k[T_1, \ldots, T_r]$. Notant E le complexe des formes entières E_A de [10, I (2.20)], on a alors $W_m\Omega^\bullet_A = E/\mathrm{Fil}^m E$. Soit $x \in E^i$ tel que $dx = V^n y + dV^n z$, $y \in E^{i+1}$, $z \in E^i$. On doit montrer qu'il existe $t \in E^i$ tel que $x = F^n t \bmod \mathrm{Fil}^n E^i$. Quitte à remplacer x par $x - V^n z$, on peut supposer que $z = 0$. Posons $B = W[T_1, \ldots, T_r]$. Soit N un entier assez grand pour que $F^{N+n}x \in \Omega^i_B$ et $F^N y \in \Omega^{i+1}_B$. De $dx = V^n y$ on tire $dF^{N+n}x = p^{2n+N}F^N y$. D'après le résultat clé [10, 0 (2.3.13)], on peut donc écrire

$$F^{N+n}x = F^{2n+N}y_0 + pF^{2n+N-1}y_1 + \ldots + p^{2n+N}y_{2n+N} + dz_0 + Fdz_1 + \ldots + F^{2n+N-1}dz_{2n+N-1}$$

avec des $y_r \in \Omega^i_B$, $z_s \in \Omega^{i-1}_B$. Grâce aux identités $FV = VF = p$ et $FdV = d$ dans E, on en déduit $F^{N+n}x = F^{2n+N}t$ pour un $t \in E^i$, d'où, en simplifiant par F^{n+N} (qui est injectif), $x = F^n t$, cqfd.

Comme W. Lang l'a signalé, on peut aussi redresser l'argument de [10, I (3.21)], *i.e.* prouver [10, I (3.21)] en n'utilisant que les résultats de (*loc. cit.* (3.8) à (3.20)), mais la démonstration est nettement plus compliquée.

(1.4) Notons

(1.4.1) $$R\Gamma((X, R), \ ) : D^+(X, R) \to D^+(R),$$
$$(\text{resp. } R\Gamma((X, d), \ ) : D^+(X, W[d]) \to D^+(W))$$

le foncteur dérivé du foncteur $\Gamma((X, R), \ )$ (resp. $\Gamma((X, d), \ )$) associant à un R-module gradué (resp. W[d]-module gradué) $i \mapsto M^i$ sur X le R-module gradué (resp.

$W[d]$-module gradué) $i \mapsto \Gamma(X, M^i)$. Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^+(X, R)$, et n entier $\geqslant 0$, on a un isomorphisme canonique de $D^+(W[d])$:

$$(1.4.2) \qquad R_n \overset{L}{\otimes}_R R\Gamma((X, R), M) \xrightarrow{\sim} R\Gamma((X, d), R_n \overset{L}{\otimes}_R M)$$

(« formule de projection ») : la flèche est définie de la manière habituelle, et la résolution (3.2.1) montre qu'elle est un isomorphisme. En particulier, pour $M = W\Omega^\cdot_X$, on obtient, grâce à (1.2), un isomorphisme canonique de $D^+(W[d])$:

$$(1.4.3) \qquad R_n \overset{L}{\otimes}_R R\Gamma((X, R), W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} R\Gamma((X, d), W_n\Omega^\cdot).$$

Il en résulte une suite spectrale de $W[d]$-modules gradués, contenue dans la bande $[-2, 0] \times \mathbf{N}$:

$$(1.4.4) \qquad E_2^{ij} = \mathrm{Tor}^R_{-i}(R_n, H^j((X, R), W\Omega^\cdot)) \Rightarrow H^*((X, d), W_n\Omega^\cdot).$$

Notons que, si $M \in \mathrm{ob}\, D^+(X, R)$ (resp. $D^+(X, W[d])$), la composante homogène de degré i de $R\Gamma((X, R), M)$ (resp. $R\Gamma((X, d), M)$) s'identifie canoniquement à $R\Gamma(X, M^i)$ (où M^i désigne la composante homogène de degré i de M relativement à la structure de R-module (resp. $W[d]$)-module gradué) : on le voit par exemple en calculant (1.4.1) à l'aide de résolutions flasques canoniques. En particulier, $H^j((X, R), W\Omega^\cdot)$ (resp. $H^*((X, d), W_n\Omega^\cdot)$) est le R-module gradué (resp. complexe de W-modules)

$$(1.4.5) \qquad H^j((X, R), W\Omega^\cdot) = (H^j(X, W\mathcal{O}) \to H^j(X, W\Omega^1) \to \ldots \to H^j(X, W\Omega^i) \to \ldots)$$

$$(\text{resp. } H^j((X, d), W_n\Omega^\cdot) = (H^j(X, W_n\mathcal{O}) \to \ldots \to H^j(X, W_n\Omega^i) \to \ldots),$$

les opérateurs F et V sur $H^j(X, W\Omega^i)$ étant induits par les opérateurs F et V sur $W\Omega^i$. La suite spectrale (1.4.4) est donc un complexe de suites spectrales de W-modules $i \mapsto (E_\cdot^{\cdot\cdot})^i$:

$$(1.4.4)^i \qquad (E_2^{ij})^i = \mathrm{Tor}^R_{-i}(R_n, H^j((X, R), W\Omega^\cdot))^i \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^i).$$

Si X est séparé et de type fini sur k, par exemple propre (le seul cas en fait qui nous intéresse), on peut réaliser concrètement (1.4.3) et (1.4.4) à l'aide de complexes de Čech. Soit en effet $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert affine fini de X, et soit $\check{C}(\mathfrak{U}, -)$ le foncteur complexe de Čech (alterné) correspondant. Alors on voit facilement (cf. preuve de [10, II (2.1)]) que $R\Gamma((X, R), W\Omega^\cdot)$ (resp. $R\Gamma((X, d), W_n\Omega^\cdot)$) est représenté par le complexe de R-modules gradués (resp. complexes de W-modules)

$$j \mapsto \check{C}^j(\mathfrak{U}, W\Omega^\cdot) \quad (\text{resp. } j \mapsto \check{C}^j(\mathfrak{U}, W_n\Omega^\cdot)),$$

et que l'isomorphisme (1.4.3) est réalisé par la suite exacte de complexes de $W[d]$-modules gradués (cf. (I (3.3.1)) et (1.2.2)) :

$$(1.4.6) \qquad 0 \to \check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^{\cdot-1}) \xrightarrow{u_n} \mathrm{Cône}(\mathrm{id}_{C(\mathfrak{U}, W\Omega^{*-1})}) \xrightarrow{v_n} \check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^\cdot) \to \check{C}(\mathfrak{U}, W_n\Omega^\cdot) \to 0.$$

On a donc, pour chaque i, une suite exacte (de complexes de W-modules)

$$(1.4.6)^i \qquad 0 \longrightarrow \check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^{i-1}) \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} \check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i) \xrightarrow{dV^n + V^n} \check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^i) \longrightarrow \check{C}(\mathfrak{U}, W_n\Omega^i) \longrightarrow 0$$

et une différentielle de $(1.4.6)^i$ dans $(1.4.6)^{i+1}$ donnée par les flèches verticales de (I (3.3.1)). Les termes de $(1.4.6)^i$ calculent successivement $R\Gamma(X, W\Omega^{i-1})$, $R\Gamma(X, W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i)$, $R\Gamma(X, W\Omega^i)$, $R\Gamma(X, W_n\Omega^i)$. (Noter aussi que, si $\mathbf{s}$ désigne le foncteur complexe simple associé, les termes de la suite exacte déduite de (1.4.6) par application de $\mathbf{s}$ calculent successivement $R\Gamma(X, W\Omega^{\cdot -1})$, ..., $R\Gamma(X, W_n\Omega^i)$.)

Considérons le complexe, concentré en degrés $\in [-2, 0]$:

$$(1.4.7) \qquad K(i) = (0 \longrightarrow W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^n + V^n} W\Omega^i \longrightarrow 0),$$

et la suite spectrale d'hypercohomologie correspondante (donnée par $(1.4.6)^i$)

$$(1.4.8)^i \qquad E_1^{ij} = H^j(X, K(i)^i) \Rightarrow H^*(X, K(i)) = H^*(X, W_n\Omega^i).$$

La description (1.4.6) de (1.4.3) fournit la description suivante de $(1.4.4)^i$:

Proposition **(1.4.9).** — *La suite spectrale* $(1.4.8)^i$ *coïncide, à partir du terme* E_2, *avec la suite spectrale* $(1.4.4)^i$.

Notons $({}_nE)^i$ la suite spectrale $(1.4.4)^i$. Il résulte aussitôt de (1.4.9) qu'on a un isomorphisme

$$(1.4.10) \qquad ({}_nE_2^{-1,j})^i = ({}_nE_\infty^{-1,j})^i = \mathrm{gr}^{-1}H^{j-1}(X, W_n\Omega^i)$$

et une suite exacte

$$(1.4.11) \qquad 0 \to \mathrm{gr}^{-2}H^{j-2}(X, W_n\Omega^i) \to ({}_nE_2^{-2,j})^i \xrightarrow{d_2} ({}_nE_2^{0,j-1})^i \to \mathrm{gr}^0 H^{j-1}(X, W_n\Omega^i) \to 0.$$

2. Cohérence de $'E_1$

On suppose désormais X propre et lisse sur k.

(2.1) La première suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe de de Rham-Witt $W\Omega_X^\cdot$,

$$(2.1.1) \qquad {}'E = ({}'E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega^i) \Rightarrow H^*(X, W\Omega^\cdot))$$

(où $H^*(X, W\Omega^\cdot) \simeq H^*(X/W)$ [10, II (2.8)]) sera appelée *première suite spectrale de de Rham-Witt* de X; c'est la suite spectrale étudiée dans [3] et [10] sous le nom de « suite spectrale des pentes ». Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on peut considérer aussi la suite spectrale

$$(2.1.2) \qquad {}'_nE = ({}'_nE_1^{ij} = H^j(X, W_n\Omega^i) \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^\cdot))$$

(où $H^*(X, W_n\Omega^\cdot) \simeq H^*(X/W_n)$ [10, II (1.3.3)]) dite *première suite spectrale de de Rham-Witt de cran n.* Les suites ${}'_nE$ forment, pour n variable, un système projectif ${}'E$. Comme, d'après [10, II (2.1)], les termes de ${}'_nE$ sont des W_n-modules de longueur finie, la limite

projective de ce système est une suite spectrale, qui, en vertu de *(loc. cit.)*, s'identifie canoniquement à $'E$:

(2.1.3) $$'E = \varprojlim_n {}'_nE.$$

Pour chaque j, les opérateurs F et V sur les $H^j(X, W\Omega^i) = {}'E_1^{ij}$ munissent le complexe ${}'E_1^{\cdot j}$ d'une structure de R-module gradué : avec la notation (1.4.5), on a

(2.1.4) $${}'E_1^{\cdot j} = H^j((X, R), W\Omega^\cdot).$$

Le résultat fondamental de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème **(2.2).** — *Sous l'hypothèse du* n° 2 (X *propre et lisse sur* k), *et avec les notations précédentes, pour tout* $j \in \mathbf{Z}$, *le* R*-module gradué* ${}'E_1^{\cdot j}$ *est cohérent* (I (3.9)).

En d'autres termes (I (3.10.1)), l'objet $R\Gamma((X, R), W\Omega^\cdot)$ de $D(R)$ appartient à $D_c^b(R)$.

Notons tout de suite la conséquence suivante :

Corollaire **(2.3).** — *Sous les hypothèses de* (2.2), *pour tout* (i,j), *le morphisme canonique de systèmes projectifs*

(2.3.1) $$({}'E_1^{ij})_n = H^j(X, W\Omega^i)/(V^n H^j(X, W\Omega^i) + dV^n H^j(X, W\Omega^{i-1})) \to {}'_nE_1^{ij} = H^j(X, W_n\Omega^i)$$

a pour noyau et conoyau des systèmes projectifs essentiellement nuls de W*-modules de longueur finie, en particulier donne un isomorphisme de pro-objets*

(2.3.2) $$\text{« } \varprojlim \text{ » } ({}'E_1^{ij})_n \to \text{« } \varprojlim \text{ » } {}'_nE_1^{ij}.$$

La topologie standard sur $H^j(X, W\Omega^i)$ (*définie par les*

$$\mathrm{Fil}^n H^j(X, W\Omega^i) = V^n H^j(X, W\Omega^i) + dV^n H^j(X, W\Omega^{i-1}))$$

coïncide avec celle définie par les noyaux des flèches canoniques $H^j(X, W\Omega^i) \to H^j(X, W_n\Omega^i)$, i.e. *la topologie limite projective des topologies discrètes définie par* (2.1.3) [1].

Comme $({}'E_1^{ij})_n$ est de longueur finie pour tout n (${}'E_1^{\cdot j}$ étant cohérent, donc en particulier profini), la seconde assertion découle du fait que la topologie limite projective définie par (2.1.3) est séparée (et complète) et moins fine que la topologie standard (I (0.4)). Il en résulte que le noyau de (2.3.1) est essentiellement nul. Le conoyau a donc une limite projective nulle, donc est essentiellement nul, ses termes étant de longueur finie. (On aurait pu aussi invoquer (I (3.8)), qui entraîne que la suite spectrale de pro-objets définie par (1.4.4) dégénère en E_2, donnant l'isomorphisme (2.3.2).)

---

[1] La notation Fil^n employée ici diffère de celle de [10, II (2.3)], mais (grâce à l'énoncé) les deux notions de topologie standard coïncident.

(2.4) *Démonstration de* (2.2). — Considérons l'assertion suivante :

(A_j) : Pour tout $n \geqslant 0$, pour tout ℓ, pour tout i, le terme $({}_nE_2^{\ell j})^i$ de la suite spectrale $(1.4.4)^i$ est un W-module de longueur finie.

D'après (1.4.9), (A_j) est vraie pour $j > N = \dim(X)$, le terme E_1 de $(1.4.8)^i$ étant concentré dans le rectangle $[-2, 0] \times [0, N]$. Il suffit donc de prouver que (A_j) implique (A_{j-1}). Comme $H^*(X, W_n\Omega^i)$ est de longueur finie, (A_j) et (1.4.11) entraînent que

$$({}_nE_2^{0,j-1})^i = (R_n \otimes_R {}'E_1^{\cdot,j-1})^i = ({}'E_1^{i,j-1})_n$$

est de longueur finie pour tout n et tout i. D'autre part, quels que soient a, b, n, $\mathrm{Fil}^n H^b(X, W\Omega^a)$ est fermé dans $H^b(X, W\Omega^a)$ pour la topologie définie par la limite projective (2.1.3) (*i.e.* par les $\mathrm{Fil}'^n H^b(X, W\Omega^a) = \mathrm{Ker}\, H^b(X, W\Omega^a) \to H^b(X, W_n\Omega^a)$), en tant qu'image de l'application continue

$$V^n + dV^n : H^b(X, W\Omega^a) \oplus H^b(X, W\Omega^{a-1}) \to H^b(X, W\Omega^a)$$

(cf. (I (0.5))), donc $H^b(X, W\Omega^a)$ est séparé et complet pour la topologie standard (*i.e.* Fil^n) (I (0.1)). Par suite, ${}'E_1^{\cdot,j-1}$ est un R-module gradué profini. Par ailleurs, (1.4.10) (avec j remplacé par $j-1$) montre que

$$({}_nE_2^{-1,j-1})^i = \mathrm{Tor}_1^R(R_n, {}'E_1^{\cdot,j-1})^i$$

est de longueur finie pour tout n et tout i. D'après (I (3.8)), il en résulte que $\mathrm{Tor}_2^R(R_n, {}'E_1^{\cdot,j-1})^i = ({}_nE_2^{-2,j-1})^i$ est aussi de longueur finie pour tout n et tout i. Donc (A_{j-1}) est vraie, ce qui achève la démonstration de (2.2).

Remarque **(2.5)**. — Dans la démonstration précédente, on a utilisé le complexe de R-modules $\check{C}(\mathfrak{U}, W\Omega^\cdot)$ pour calculer (2.1.1). Ekedahl [7] (cf. [10 *ter* (3.1.1)]) a dégagé de nos arguments un critère de cohérence (I (3.10.1)) pour les objets de $D^b(R)$.

3. Dégénérescence en E_2 modulo longueur finie et survie du cœur

On continue de supposer X propre et lisse sur k. Nous noterons E, au lieu de 'E, la première suite spectrale de de Rham-Witt de X (2.1.1).

(3.1) Explicitons d'abord ce que signifie la cohérence (2.2) des R-modules gradués $E_1^{\cdot j}$. Posons (avec l'abréviation $H^j(W\Omega^i) = H^j(X, W\Omega_X^i)$)

$$Z_2^{ij} = \mathrm{Ker}\, d_1 : H^j(W\Omega^i) \to H^j(W\Omega^{i+1}),$$
$$B_2^{ij} = \mathrm{Im}\, d_1 : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i),$$

de sorte que $E_2^{ij} = Z_2^{ij}/B_2^{ij}$, et considérons les sous-R^0-modules définis en (I (1.4))

$$F^\infty B_2^{ij} = \bigcup_{s \geqslant 0} F^s B_2^{ij}, \qquad V^{-\infty} Z_2^{ij} = \{x \in Z_2^{ij} \mid V^r x \in Z_2^{ij} \quad \forall\, r \geqslant 0\},$$

qui vérifient les inclusions

$$B_2^{ij} \subset F^\infty B_2^{ij} \subset V^{-\infty} Z_2^{ij} \subset Z_2^{ij} \subset E_1^{ij}.$$

a) Par définition (I (3.9)), E_2^{ij} est un W-module de type fini.

b) Les W-modules $F^\infty B_2^{ij}/B_2^{ij}$ et $Z_2^{ij}/V^{-\infty} Z_2^{ij}$ sont de longueur finie (I (2.9)). Le R^0-module $V^{-\infty} Z_2^{ij}/F^\infty B_2^{ij}$, qui est de type fini sur W, sera appelé *cœur* de E^{ij} et noté

$$\text{Cœur}(E^{ij}) = V^{-\infty} Z_2^{ij}/F^\infty B_2^{ij}. \tag{3.1.1}$$

c) Le R^0-module $E_1^{ij}/V^{-\infty} Z_2^{ij}$ est de Cartier unipotent : il est V-fini, annulé par une puissance de F, et V est injectif (I (2.4)). Nous dirons que $E_1^{ij}/V^{-\infty} Z_2^{ij}$ est le *quotient de type* V (ou V-*unipotent*, ou *unipotent*) de E_1^{ij}.

d) Le R^0-module $F^\infty B_2^{ij}$ est annulé par une puissance de V, et F est surjectif, de noyau de longueur finie (I (2.13)). Il est fermé dans E_1^{ij} pour la topologie standard, et la topologie induite est définie par les $dV^n E_1^{i-1,j}$. Nous dirons que $F^\infty B_2^{ij}$ est le *sous-module de type* dV de E_1^{ij}. Le quotient $E_1^{ij}/F^\infty B_2^{ij}$ est V-fini, son cœur (resp. quotient unipotent) (I (2.7)) est le cœur (resp. quotient unipotent) de E_1^{ij}.

e) Dans la factorisation canonique (I (1.4.5)) de $d = d_1 : E_1^{ij} \to E_1^{i+1,j}$,

$$\begin{array}{ccc} E_1^{ij} & \xrightarrow{d} & E_1^{i+1,j} \\ \downarrow & & \uparrow \\ E_1^{ij}/V^{-\infty} Z_2^{ij} & \xrightarrow{\bar{d}} & F^\infty B_2^{i+1,j} \end{array}$$

les noyau et conoyau de $\bar{d}$ sont des W-modules de longueur finie : plus précisément, le R^0-module $\bar{d}$ est un domino (I (2.16)). D'après (I (2.18.2)), on a donc :

f) (E_1^{ij} est de type fini sur W) $\Leftrightarrow$ ($F^\infty B_2^{ij} = 0$ et $E_1^{ij}/V^{-\infty} Z_2^{ij} = 0$).

On retrouve en particulier le théorème de finitude [10, II (2.13)] : $H^j(W\Omega^i)$ est de type fini sur W modulo p-torsion, et le sous-module de p-torsion de $H^j(W\Omega^i)$ est annulé par une puissance de p (c'est en effet l'image inverse dans $H^j(W\Omega^i)$ du sous-module de p-torsion du R^0-module V-fini $E_1^{ij}/F^\infty B_2^{ij}$). Rappelons que le fait que les K-espaces vectoriels $H^j(W\Omega^i) \otimes K$ (où K est le corps des fractions de W) soient de dimension finie entraîne formellement la dégénérescence en E_1 modulo torsion de la première suite spectrale [10, II (3.2)].

On retrouve également un résultat obtenu indépendamment par Ekedahl (lettre à L. Illusie, 6-8-80) : le sous-module de V-torsion de E_1^{ij} est annulé par une puissance de V, et le quotient de E_1^{ij} par ce sous-module est un R^0-module de Cartier.

Notons enfin la conséquence suivante :

Corollaire **(3.2).** — *La première suite spectrale de de Rham-Witt de* X *dégénère en* E_2 *modulo longueur finie* (i.e. *pour tout* $r \geqslant 2$, *tout* i *et tout* j, *l'image de* d_r^{ij} *est un* W*-module de longueur finie*).

En effet, il résulte de (3.1) *a)* que, pour tout $r \geqslant 2$, E_r^{ij} est un W-module de type fini. D'autre part, comme la première suite spectrale dégénère en E_1 modulo torsion, on a, pour tout $r \geqslant 1$, $\dim_K(E_r^{ij} \otimes K) = \dim_K(E_\infty^{ij} \otimes K)$. Donc, pour $r \geqslant 2$, on a $\operatorname{rg} E_r^{ij} = \operatorname{rg} E_\infty^{ij}$, d'où le corollaire.

(3.3) Rappelons (cf. Cartan-Eilenberg, *Homological Algebra*, chap. XV, Princeton University Press, 1956) la définition des termes Z_r^{ij}, B_r^{ij} associés à la suite spectrale E. Pour $r \geqslant 1$, on pose

$$\textbf{(3.3.1)} \qquad Z_r^{ij} = \operatorname{Ker} H^j(X, W\Omega^i) \xrightarrow{d} H^j(X, W\Omega^{[i+1, i+r-1]}[i+1])$$
$$= \operatorname{Im} H^j(X, W\Omega^{[i, i+r-1]}[i]) \to H^j(X, W\Omega^i),$$

$$\textbf{(3.3.2)} \qquad B_r^{ij} = \operatorname{Im} H^j(X, W\Omega^{[i-r+1, i-1]}[i-1]) \xrightarrow{d} H^j(X, W\Omega^i),$$

de sorte que

$$\textbf{(3.3.3)} \qquad E_r^{ij} = Z_r^{ij}/B_r^{ij}.$$

On a donc des inclusions

$$\textbf{(3.3.4)} \qquad 0 = B_1^{ij} \subset B_2^{ij} \subset \ldots \subset B_r^{ij} \subset \ldots \subset B_\infty^{ij} \subset Z_\infty^{ij} \subset \ldots \subset Z_r^{ij} \subset \ldots \subset Z_2^{ij} \subset Z_1^{ij} = E_1^{ij},$$

où Z_2^{ij}, B_2^{ij} sont les objets définis en (3.1) et

$$B_\infty^{ij} = \cup\, B_r^{ij} = B_m^{ij} \quad (m \gg 0),$$
$$Z_\infty^{ij} = \cap\, Z_r^{ij} = Z_m^{ij} \quad (m \gg 0),$$
$$Z_\infty^{ij}/B_\infty^{ij} = E_\infty^{ij} = \operatorname{gr}^i H^{i+j}(X/W) = P^i H^{i+j}(X/W)/P^{i+1} H^{i+j}(X/W),$$

P^i désignant la filtration aboutissement de la première suite spectrale (cf. [10, II]).

Théorème **(3.4)** *(survie du cœur).* — *Quels que soient* i *et* j, *on a*

$$\textbf{(3.4.1)} \qquad B_\infty^{ij} \subset F^\infty B_2^{ij} \subset V^{-\infty} Z_2^{ij} \subset Z_\infty^{ij}.$$

Ainsi, Cœur(E^{ij}) (3.1.1) « survit » dans E_∞, comme quotient d'un sous-module (ou sous-module d'un quotient) de E_∞^{ij}. Noter que, compte tenu de (3.1) *a)*, *b)*, les inclusions (3.4.1) entraînent à nouveau (3.2).

Pour établir (3.4), nous utiliserons, sous une forme légèrement plus précise, les identités supérieures de Nygaard [16 (2.3)] (cf. aussi [10, II (3.9)]).

Lemme **(3.5).** — a) (i) *Pour tout* $r \geqslant 1$, Z_r^{ij} *est stable par* $F : E_1^{ij} \to E_1^{ij}$.

(ii) *Pour tout* $r \geqslant 1$, *l'endomorphisme* $F_r = p^{r-1}F$ *de* E_1^{ij} *laisse stable* B_r^{ij}, *donc induit un endomorphisme, noté encore* F_r, *de* E_r^{ij}.

(iii) *Pour* $r \geqslant 1$, *posons*

$$V^{-1}Z_r^{ij} = \{x \in E_1^{ij} \mid Vx \in Z_r^{ij}\}.$$

On a $V^{-1}Z_r^{ij} \subset Z_r^{ij}$, *d'où une inclusion* $\varepsilon : V^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} \hookrightarrow E_r^{ij}$. *De plus, le diagramme suivant (où* V *est défini grâce à* b) (i) *ci-dessous) est commutatif* :

$$\begin{array}{ccc} E_r^{ij} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{i+r,j-r+1} \\ {\scriptstyle V}\uparrow & & \\ V^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_r} \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \\ E_r^{ij} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{i+r,j-r+1} \end{array}$$

en d'autres termes, on a

$$F_r d_r V = d_r \varepsilon. \tag{3.5.1}$$

b) (i) *Pour tout* $r \geqslant 1$, B_r^{ij} *est stable par* $V : E_1^{ij} \to E_1^{ij}$.

(ii) *Pour tout* $r \geqslant 1$, *l'endomorphisme* $V_r = p^{r-1}V$ *de* E_1^{ij} *laisse stable* Z_r^{ij}, *donc induit un endomorphisme, encore noté* V_r, *de* E_r^{ij}.

(iii) *Pour* $r \geqslant 1$, *on a* $F(B_r^{ij}) \supset B_r^{ij}$, *d'où un épimorphisme* $\pi : E_r^{ij} \to Z_r^{ij}/F(B_r^{ij})$. *De plus, le diagramme suivant est commutatif* :

$$\begin{array}{ccc} E_r^{ij} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{i+r,j-r+1} \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle F} \\ {\scriptstyle V_r}\uparrow & & Z_r^{i+r,j-r+1}/F(B_r^{i+r,\,-r+1}) \\ & & \Big\uparrow{\scriptstyle \pi} \\ E_r^{ij} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{i+r,j-r+1} \end{array}$$

en d'autres termes, on a

$$F d_r V_r = \pi d_r. \tag{3.5.2}$$

Prouvons a). On peut munir $W\Omega^{[i,i+r-1]}$ de l'endomorphisme $F_{\geqslant i}$ égal à F en degré i, pF en degré $i+1, \ldots, p^{r-1}$F en degré $i+r-1$. La projection naturelle $W\Omega^{[i,i+r-1]} \to W\Omega^{i}[-i]$ est alors compatible aux opérateurs $F_{\geqslant i}$ et F. L'assertion (i) en résulte, compte tenu de la deuxième égalité (3.3.1). De même, on déduit (ii) en considérant l'endomorphisme $F_{\geqslant i-r+1}$ de $W\Omega^{[i-r+1,i]}$. Les assertions (i) et (ii) de b) se démontrent de manière analogue à l'aide de l'endomorphisme $V_{\leqslant b}$ de $W\Omega_X^{[a,b]}$ égal à V en degré b, pV en degré $b-1, \ldots, p^{b-a}$V en degré a. Pour a) (iii), nous aurons recours aux complexes de de Rham-Witt modifiés introduits par Nygaard [16], [17].

Pour $i \in \mathbf{Z}$ et n entier $\geqslant 0$, nous noterons $W\Omega^\cdot(i, n)$ (resp. $W\Omega^\cdot(i, -n)$) le complexe déduit de $W\Omega^\cdot$ en remplaçant $d : W\Omega^{i-1} \to W\Omega^{i+1}$ par dV^n (resp. $F^n d$) :

$$W\Omega^\cdot(i, n) = (W\mathcal{O} \xrightarrow{d} W\Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} W\Omega^{i-1} \xrightarrow{dV^n} W\Omega^i \xrightarrow{d} \dots) \tag{3.5.3}$$

$$W\Omega^\cdot(i, -n) = (W\mathcal{O} \xrightarrow{d} W\Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} W\Omega^{i-1} \xrightarrow{F^n d} W\Omega \xrightarrow{d} \dots). \tag{3.5.4}$$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, désignons par $E(i, n)$ la première suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans $W\Omega^\cdot(i, n)$:

$$E_1^{a,b}(i, n) = H^b(X, W\Omega^a) \Rightarrow H^*(X, W\Omega^\cdot(i, n)).$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} V^{-1}Z_r^{ij} &= \operatorname{Ker} H^j(X, W\Omega^i) \xrightarrow{dV} H^j(X, W\Omega^{[i+1, i+r-1]}[i+1]) \\ &= Z_r^{ij}(i+1, 1). \end{aligned}$$

Considérons les morphismes de complexes (cf. Nygaard [16 (2.2)]) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
W\Omega^\cdot & & W\mathcal{O} & \to \dots \to & W\Omega^i & \xrightarrow{d} & W\Omega^{i+1} & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \to & W\Omega^{i+r} \to \dots \\
\uparrow & & {\scriptstyle p^i V}\uparrow & & {\scriptstyle V}\uparrow & & \| & & \| & & \| \\
W\Omega^\cdot(i+1, 1) & & W\mathcal{O} & \to \dots \to & W\Omega^i & \xrightarrow{dV} & W\Omega^{i+1} & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \to & W\Omega^{i+r} \to \dots \\
\downarrow & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle F} & & {\scriptstyle p^{r-2}F}\downarrow & & {\scriptstyle p^{r-1}F}\downarrow \\
W\Omega^\cdot & & W\mathcal{O} & \to \dots \to & W\Omega^i & \xrightarrow{d} & W\Omega^{i+1} & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \to & W\Omega^{i+r} \to \dots
\end{array}$$

Le morphisme inférieur montre que $Z_r^{ij}(i+1, 1) \subset Z_r^{ij}$, d'où la première assertion de (iii). D'autre part, les deux morphismes ci-dessus fournissent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
E_r^{ij} & & \xrightarrow{d_r} & & E_r^{i+r, j-r+1} \\
{\scriptstyle V}\uparrow & & & \nearrow & \\
V^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} = E_r^{ij}(i+1, 1) & & \xrightarrow{d_r} & E_r^{i+r, j-r+1}(i+1, 1) & \Big\downarrow{\scriptstyle F_r} \\
{\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & & \searrow & \\
E_r^{ij} & & \xrightarrow{d_r} & & E_r^{i+r, j-r+1}
\end{array}$$

d'où (3.5.1). La démonstration de b) (iii) est analogue; on utilise cette fois les morphismes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
W\Omega^\cdot & & \dots \to W\Omega^i & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \xrightarrow{d} & W\Omega^{i+r} & \to & W\Omega^{i+r+1} & \to \dots \\
\downarrow & & \| & & \| & & {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle pF}\downarrow & \\
W\Omega^\cdot(i+r, -1) & & \dots \to W\Omega^i & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \xrightarrow{Fd} & W\Omega^{i+r} & \to & W\Omega^{i+r+1} & \to \dots \\
\uparrow & & {\scriptstyle p^{r-1}V}\uparrow & & {\scriptstyle V}\uparrow & & \| & & \| & \\
W\Omega^\cdot & & \dots \to W\Omega^i & \to \dots \to & W\Omega^{i+r-1} & \to & W\Omega^{i+r} & \to & W\Omega^{i+r+1} & \to \dots
\end{array}$$

(3.6) *Démonstration de* (3.4). — L'inclusion

$(*)_r$ $\qquad V^{-\infty}Z_2^{ij} \subset Z_r^{ij}$

est vraie pour $r = 2$. Supposons $(*)_r$ établie, prouvons $(*)_{r+1}$ $(r \geqslant 2)$. D'après (3.5) a) (iii), on a

$$V^{-\infty}Z_2^{ij} \subset V^{-1}Z_r^{ij} \subset Z_r^{ij},$$

et $V^{-\infty}Z_2^{ij}$ est stable par V. De plus, comme

$$V^{-\infty}Z_2^{ij} = \cap \operatorname{Ker} dV^n : H^j(W\Omega^i) \to H^j(W\Omega^{i+1}),$$

on a $B_r^{ij} \subset V^{-\infty}Z_2^{ij}$, et l'endomorphisme V de E_1^{ij} induit un endomorphisme, noté encore V, de $V^{-\infty}Z_2^{ij}/B_r^{ij}$, car B_r^{ij} est stable par V (3.5) b) (i). Par ailleurs, $V^{-\infty}Z_2^{ij}$ est stable par F, donc $F_r : E_r^{ij} \to E_r^{ij}$ (3.5) a) (ii) induit un endomorphisme F_r de $V^{-\infty}Z_2^{ij}/B_r^{ij}$. Les opérateurs F_r et V sur $V^{-\infty}Z_2^{ij}/B_r^{ij}$ vérifient $F_rV = VF_r = p^r$. Enfin, il découle de (3.5) a) (iii) que la différentielle $d_r : V^{-\infty}Z_2^{ij}/B_r^{ij} \to V^{-\infty}Z_2^{i+r,j-r+1}/B_r^{i+r,j-r+1}$ induite par celle de E_r vérifie $F_rd_rV = d_r$. On peut résumer ces propriétés en disant que le complexe $(V^{-\infty}Z_2/B_r, d_r)$, muni en chaque bidegré des opérateurs F_r et V, est un module gradué sur l'algèbre de Raynaud de niveau r, $R(r)$ (avec différentielle de bidegré $(r, 1-r)$). Or, comme $r \geqslant 2$, les composantes de ce module sont de type fini sur W d'après (3.1) *a)*. Grâce à (I (4.4)), il en résulte que la différentielle est nulle *i.e.* que

$$V^{-\infty}Z_2^{ij}/B_r^{ij} \subset \operatorname{Ker} d_r : E_r^{ij} \to E_r^{i+r,j-r+1} = Z_{r+1}^{ij}/B_r^{ij},$$

ce qui prouve l'inclusion $(*)_{r+1}$. On en conclut que l'on a $V^{-\infty}Z_2^{ij} \subset Z_\infty^{ij}$. On démontre l'inclusion $B_\infty^{ij} \subset F^\infty B_2^{ij}$ de manière analogue, en s'appuyant sur la partie b) de (3.5).

Remarque **(3.7)**. — Nous donnerons plus loin (IV (2.14)) une autre démonstration de (3.4), comme application de la structure des groupes de cohomologie de X à valeurs dans les cycles et les bords du complexe de de Rham-Witt. Toutefois, comme l'a observé Ekedahl [7], l'argument précédent permet d'établir une survie du cœur pour tout complexe cohérent (I (3.10.1)) (cf. [10 *ter*, (2.5.3)] pour un énoncé précis).

Corollaire **(3.8)**. — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *La différentielle* $d_1 : E_1^{i-1,j} \to E_1^{ij}$ *est nulle.*
(ii) $H^j(W\Omega^i)/VH^j(W\Omega^i)$ *est de dimension finie sur* k;
(ii′) ${}_VH^j(W\Omega^i)$ *est de dimension finie sur* k (1);
(iii) $H^j(W\Omega^{i-1})/FH^j(W\Omega^{i-1})$ *est de dimension finie sur* k;
(iii′) ${}_FH^j(W\Omega^{i-1})$ *est de dimension finie sur* k;

(1) On rappelle la notation ${}_uM = \operatorname{Ker} u$ pour u un endomorphisme d'un groupe abélien M.

(iv) $F^{\infty}B_2^{ij} = 0$;
(v) $V^{-\infty}Z_2^{i-1,j} = E_1^{i-1,j}$.

De plus, ces conditions entraînent que toute différentielle d_r aboutissant en E_r^{ij} est nulle et que toute différentielle d_r issue de $E_r^{i-1,j}$ est nulle.

Il est clair que les conditions (i), (iv) et (v) sont équivalentes. La condition (ii) signifie que $H^j(W\Omega^i)$ est V-fini, donc implique (ii'), et inversement (ii') entraîne que $F^{\infty}B_2^{ij}$ est de longueur finie, donc que $H^j(W\Omega^i)$ est V-fini. La condition (iii) entraîne que $E_1^{i-1,j}/F^{\infty}B_2^{i-1,j}$ est de type fini sur W, donc implique (iii') (car le noyau de F sur $F^{\infty}B_2^{i-1,j}$ est de longueur finie), et inversement, comme F est surjectif sur $F^{\infty}B_2^{i-1,j}$, (iii') entraîne que le noyau de F sur $E_1^{i-1,j}/F^{\infty}B_2^{i-1,j}$ est de dimension finie sur k, d'où (iii). Donc on a (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') et (iii) $\Leftrightarrow$ (iii'). D'autre part, on a (iv) $\Rightarrow$ (ii) (3.1) *d)*. Par ailleurs, (ii) signifie, comme on a vu, que E_1^{ij} est V-fini; donc $F^{\infty}B_2^{ij}$, fermé dans E_1^{ij}, est également V-fini (I (2.3)), donc de longueur finie puisque annulé par une puissance de V (et même nul (I (2.18.2))); le noyau de $\bar{d}: E_1^{i-1,j}/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j} \to F^{\infty}B_2^{ij}$ étant de longueur finie (3.1) *e)*, $E_1^{i-1,j}/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j}$ est alors de longueur finie (et même nul), et il s'ensuit que $E_1^{i-1,j}/FE_1^{i-1,j}$ est de dimension finie sur k, donc (ii) implique (iii). Enfin, (iii) implique que $E_1^{i-1,j}/F^{\infty}B_2^{i-1,j}$ est de type fini sur W, donc coïncide avec sa R-enveloppe complétée (I (2.10) *b)*), de sorte que $d_1: E_1^{i-1,j}/F^{\infty}B_2^{i-1,j} \to E_1^{ij}$ est zéro. Donc (iii) implique (i), et les conditions (i) à (v) sont équivalentes. La dernière assertion résulte trivialement des inclusions (3.4.1).

Corollaire **(3.9)**. — *Soient $i, j \in \mathbf{Z}$. Si E_1^{ij} est de type fini sur* W, *alors $E_1^{ij} = E_{\infty}^{ij}$ (toute différentielle d_r aboutissant à ou issue de E_r^{ij} est nulle).*

On retrouve ainsi le théorème de dégénérescence [10, II (3.7)] : si, pour tout (i,j), E_1^{ij} est de type fini sur W, la première suite spectrale dégénère en E_1. On retrouve également les résultats de dégénérescence partielle de [10, II (3.3) et (3.11) à (3.15)] : $E_1^{i0} = E_{\infty}^{i0}$, $E_1^{01} = E_{\infty}^{01}$, $E_1^{Ni} = E_{\infty}^{Ni}$ (pour X purement de dimension N), car les termes E_1 en question sont de type fini sur W.

Corollaire **(3.10)**. — *Soient $i, j \in \mathbf{Z}$.* — a) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(i) $Z_2^{ij} = V^{-\infty}Z_2^{ij}$;
(ii) Z_2^{ij} *est stable par* V, i.e. $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker} dV : E_1^{ij} \to E_1^{i+1,j}$.

Elles entraînent que toute différentielle d_r, $r \geqslant 2$, issue de E_r^{ij} est nulle.

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(i) $B_2^{ij} = F^{\infty}B_2^{ij}$;
(ii) B_2^{ij} *est stable par* F, i.e. $\operatorname{Im} d = \operatorname{Im} Fd : E_1^{i-1,j} \to E_1^{ij}$.

Elles entraînent que toute différentielle d_r, $r \geqslant 2$, aboutissant à E_r^{ij} est nulle.

Cela résulte trivialement de (3.4).

Remarque (3.10.1). — Rappelons que si $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker} Fd : E_1^{i-1,j} \to E_1^{ij}$, on a $B_2^{ij} = 0$ (I (2.12)), donc toute différentielle d_r, $r \geqslant 1$, aboutissant à E_1^{ij} est alors nulle.

Signalons également la conséquence suivante, obtenue indépendamment par Ekedahl (lettre à L. Illusie (6-8-80)) :

Corollaire (3.11). — *On a* $E_1^{i,1} = E_\infty^{i,1}$ *pour tout* i.

D'après (3.8), il suffit de vérifier que ${}_VH^1(W\Omega^i)$ est de dimension finie sur k. Or ${}_VH^1(W\Omega^i)$ est quotient de $H^0(W\Omega^i/V)$, et $H^0(W\Omega^i/V)$ est isomorphe à $\varprojlim_C H^0(Z_n\Omega^i)$ [10, II (2.2.1)], donc de dimension finie sur k, la dimension des $H^0(Z_n\Omega^i)$ étant majorée par celle de $H^0(\Omega^i)$.

(3.12) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{Z}$, avec $b - a = n \geqslant 1$. Le théorème de finitude (2.2) fournit aussi des renseignements sur la structure des groupes de cohomologie $H^m(X, W\Omega^{[a,b]})$, que nous allons indiquer rapidement pour terminer ce numéro.

On étudie $H^*(X, W\Omega^{[a,b]})$ au moyen de la suite spectrale déduite de la filtration naïve de $W\Omega^{[a,b]}$:

(3.12.1) $$E_1^{ij}([a, b]) = H^j(X, (W\Omega^{[a,b]})^i) \Rightarrow H^*(X, W\Omega^{[a,b]}).$$

Notons

$$H^*(X, W\Omega^{[a,b]}) = P^aH^*(X, W\Omega^{[a,b]}) \supset \ldots \supset P^bH^*(X, W\Omega^{[a,b]}) \supset P^{b+1} = 0$$

la filtration de l'aboutissement. Transcrivant la formule

$$\operatorname{gr}^iH^{i+j}(X, W\Omega^{[a,b]}) = Z_\infty^{ij}([a, b])/B_\infty^{ij}([a, b])$$

à l'aide de (3.3.1) et (3.3.2), on obtient, pour $m = a + j$:

(3.12.2)
$$\operatorname{gr}^aH^m(X, W\Omega^{[a,b]}) = Z_{n+1}^{aj},$$
$$\operatorname{gr}^{a+h}H^m(X, W\Omega^{[a,b]}) = Z_{n+1-h}^{a+h,j-h}/B_{h+1}^{a+h,j-h} \quad (0 < h < n)$$
$$\operatorname{gr}^bH^m(X, W\Omega^{[a,b]}) = E_1^{b,j-n}/B_{n+1}^{b,j-n}.$$

Notons déjà que, grâce à (3.1) *a)* et (3.3.4), gr^{a+h} est un W-module de type fini pour $0 < h < n$. D'autre part, on peut munir $W\Omega^{[a,b]}$ de l'endomorphisme $F_{\geqslant a}$, égal à F en degré a, pF en degré $a + 1, \ldots, p^n$F en degré $b = a + n$ (cf. preuve de (3.5)), et de l'endomorphisme $V_{\leqslant b}$, égal à V en degré b, pV en degré $b - 1, \ldots$, p^nV en degré a. Ces endomorphismes, resp. σ et σ^{-1}-linéaires, vérifient

(3.12.3) $$F_{\geqslant a}V_{\leqslant b} = V_{\leqslant b}F_{\geqslant a} = p^{n+1}.$$

Ils opèrent sur la suite spectrale (3.12.1). En particulier, le gradué $\operatorname{gr}^*H^m(X, W\Omega^{[a,b]})$ se trouve ainsi muni d'une structure de $R^0(n + 1)$-module, où $R(n + 1)$ désigne l'algèbre de Raynaud de niveau $n + 1$ (I (4.1)). Par construction, l'opérateur $F_{\geqslant a}$ sur gr^a (resp. $V_{\leqslant b}$ sur gr^b) coïncide, via (3.12.2), avec l'opérateur F sur Z_{n+1}^{aj} (resp. V sur $E_1^{b,j-n}/B_{n+1}^{b,j-h}$) (cf. (3.5) a) (i) et b) (i)). D'après (3.1), $Z_{n+1}^{aj}/F^\infty B_2^{aj}$ est de type fini sur W, et $E_1^{b,j-n}/B_{n+1}^{b,j-h}$ est V-fini (*i.e.* de longueur finie mod V). En résumé :

Proposition **(3.12.4).** — *Avec les notations de* (3.12.2) :

(i) gr^a, *en tant que* F*-module, est extension d'un* W*-module de type fini par le sous-module de type* dV *de* E_1^{aj} (3.1) *d)*;

(ii) *pour* $0 < h < n$, gr^{a+h} *est de type fini sur* W;

(iii) gr^b, *en tant que* V*-module, est* V*-fini.*

Pour $a = 0$, le sous-module de type dV de E_1^{0j} est nul. On retrouve donc le résultat de finitude [10, II (2.11)], clé du théorème de dégénérescence modulo torsion de *(loc. cit.)* :

Corollaire **(3.12.5).** — *Pour tous* $i, j \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^{\leqslant i})$ *est de type fini sur* $\mathrm{W}_\sigma[[\mathrm{V}]]$ (V *opérant par* $\mathrm{V}_{\leqslant i}$), *et* $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^{\leqslant i})/\mathrm{V}$ *est de longueur finie.*

III. — LA SUITE SPECTRALE CONJUGUÉE

1. Opérateurs F′, V′ et isomorphismes de Cartier supérieurs

Dans ce numéro, X désigne un schéma lisse sur un schéma parfait S de caractéristique $p > 0$. On suit les notations de [10, I, 3]. En particulier, $W_n\Omega^\cdot_X$ est le complexe de de Rham-Witt de X/S de cran n, $W.\Omega^\cdot_X$ désigne le système projectif, ou parfois le pro-objet, correspondant. On pose

(1.0) $$Z W_n\Omega^i_X = \operatorname{Ker} d : W_n\Omega^i_X \to W_n\Omega^{i+1}_X, \quad B W_n\Omega^i_X = d W_n\Omega^{i-1}_X,$$
$$\mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot_X = Z W_n\Omega^i_X / B W_n\Omega^i_X.$$

Comme précédemment, on omettra l'indice X quand il n'en pourra résulter de confusion.

(1.1) Soit $i \in \mathbf{Z}$. Rappelons que l'endomorphisme de multiplication par p induit un homomorphisme injectif $\underline{p} : W_n\Omega^i \to W_{n+1}\Omega^i$ [10, I (3.4)], qui commute aux opérateurs F, V, R. Nous désignerons par F′ l'endomorphisme de $W_n\Omega^i$ défini par

(1.1.1) $$F' = \underline{p}F = F\underline{p} : W_n\Omega^i \to W_n\Omega^i.$$

Il est clair que l'on a

(1.1.2) $$F'(Z W_n\Omega^i) \subset Z W_n\Omega^i, \quad F'(B W_n\Omega^i) \subset B W_n\Omega^i,$$

et que F′ est un endomorphisme du système projectif $W.\Omega^i$, injectif sur le pro-objet correspondant [10, I (3.5)]. Grâce à (1.1.2), F′ induit un endomorphisme de $W_n\Omega^i/B W_n\Omega^i$.

Proposition **(1.2).** — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et tout* $i \in \mathbf{Z}$, *on a une suite exacte*

(1.2.1) $$0 \to V^{n-1}\Omega^i/(V^{n-1}\Omega^i \cap B W_n\Omega^i) \to W_n\Omega^i/B W_n\Omega^i \xrightarrow{F'} W_n\Omega^i/B W_n\Omega^i.$$

En particulier, F′ *induit un endomorphisme injectif du pro-objet* $W.\Omega^i/BW.\Omega^i$.

Il suffit de prouver l'exactitude au centre. On note d'abord que $F' : W_n\Omega^i \to W_n\Omega^i$ s'annule sur $V^{n-1}\Omega^i$, car $F'V^{n-1}\Omega^i = F(\underline{p}V^{n-1}\Omega^i) \subset F(V^n\Omega^i) = 0$. Soient maintenant $x_1 \in W_{n+1}\Omega^i$, d'image $x \in W_n\Omega^i$, et $y \in W_n\Omega^{i-1}$ tels que $dy = pFx_1$ $(= F'x)$. D'après [10, I (3.21.1.5)], il existe alors (localement) $z_1 \in W_{n+1}\Omega^{i-1}$ tel que $y = Fz_1$. On en déduit $pF(x_1 - dz_1) = 0$, *i.e.* $\underline{p}F(x - dz) = 0$, où $z \in W_n\Omega^{i-1}$ est l'image de z_1. Donc, comme $\underline{p}$ est injectif, $x - dz \in \operatorname{Ker} F : W_n\Omega^i \to W_{n-1}\Omega^i = V^{n-1}\Omega^i$ [10, I (3.11.1)], ce qui achève la démonstration.

Noter que le morphisme de systèmes projectifs $\underline{p} : W.\Omega^i \to W_{\bullet+1}\Omega^i$ induit simplement la multiplication par p sur le pro-objet $W.\Omega^i$, et par suite l'endomorphisme F′ du pro-objet $W.\Omega^i$ (resp. $W.\Omega^i/BW.\Omega^i$) coïncide avec pF.

(1.3) Rappelons [10, I (3.21)] que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $i \in \mathbf{Z}$, on a $ZW_n\Omega^i = F^nW_{2n}\Omega^i$, et que $\operatorname{Ker} F^n : W_{2n}\Omega^i \to W_n\Omega^i = V^nW_n\Omega^i$ [10, I (3.21.1.2)]. En d'autres termes, F^n induit un isomorphisme

(1.3.1) $$F^n : W_{2n}\Omega^i/V^nW_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} ZW_n\Omega^i.$$

On désignera par

(1.3.2) $$V' : ZW_{n+1}\Omega^i \to ZW_n\Omega^i$$

l'unique homomorphisme rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} W_{2n+2}\Omega^i/V^{n+1}W_{n+1}\Omega^i & \longrightarrow & W_{2n}\Omega^i/V^nW_n\Omega^i \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F^{n+1}}\ \simeq & & \simeq\ {\scriptstyle F^n}\Big\downarrow \\ ZW_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{\quad V'\quad} & ZW_n\Omega^i \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est la projection canonique. Il est clair que V′ définit un homomorphisme de systèmes projectifs

$$V' : ZW_{\bullet+1}\Omega^i \to ZW.\Omega^i,$$

et qu'on a

(1.3.3) $$FV' = V'F = \pi^2 : ZW_{n+1}\Omega^i \to ZW_{n-1}\Omega^i$$

(où π est la flèche de transition du système projectif $ZW.\Omega^i$). Donc F et V′ définissent des automorphismes, inverses l'un de l'autre, du pro-objet $ZW.\Omega^i$ (ce qui précise [10, I (3.22)]).

Par ailleurs, on vérifie trivialement que l'on a

(1.3.4) $$V'd = dVR^2 : W_{n+1}\Omega^{i-1} \to ZW_n\Omega^i$$

(où R est la restriction), donc que

(1.3.5) $$V'(BW_{n+1}\Omega^i) \subset BW_n\Omega^i.$$

Par suite, V′ induit un homomorphisme (surjectif)

(1.3.6) $$V' : \mathscr{H}^iW_{n+1}\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^iW_n\Omega^\cdot.$$

Si

(1.3.7) $$F' : \mathscr{H}^iW_n\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^iW_n\Omega^\cdot$$

désigne l'homomorphisme induit par F' (1.1.1) grâce à (1.1.2), on a

$$\mathbf{(1.3.8)} \qquad F'V' = V'F' = p : \mathscr{H}^i W_{n+1}\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot.$$

On prendra garde que, contrairement au pro-objet $W.\Omega^i$, le pro-objet $\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot$ n'est pas sans p-torsion (dès que $i > 0$). Nous expliciterons plus loin le pro-objet ${}_p\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot$ (1.6.2).

Proposition **(1.4).** — *Soient* $n \in \mathbf{N}$ *et* $i \in \mathbf{Z}$. *Il existe un unique isomorphisme*

$$\mathbf{(1.4.1)} \qquad C^{-n} : W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} W_{2n}\Omega^i & \longrightarrow & W_n\Omega^i \\ \downarrow{\scriptstyle F^n} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq\ C^{-n}} \\ ZW_n\Omega^i & \longrightarrow & \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques.

Comme $W_n\Omega^i = W_{2n}\Omega^i/(V^n W_n\Omega^i + dV^n W_n\Omega^{i-1})$ et que $F^n dV^n = d$, l'existence, l'unicité, et la surjectivité de C^{-n} sont immédiates. Si $x \in W_{2n}\Omega^i$, $y \in W_n\Omega^{i-1}$ sont tels que $F^n x = dy$, alors $F^n(x - dV^n y) = 0$, d'où $x - dV^n y \in V^n W_n\Omega^i$ [10, I (3.21.1.2)], ce qui prouve l'injectivité de C^{-n}.

Noter que C^{-n} est un homomorphisme d'algèbres graduées de $W_n\Omega^\cdot$ dans $\mathscr{H}^\cdot W_n\Omega^\cdot$, *i.e.*

$$\mathbf{(1.4.2)} \qquad C^{-n}x . C^{-n}y = C^{-n}(xy)$$

quels que soient $x \in W_n\Omega^i$, $y \in W_n\Omega^j$. En effet, $F : W_{n+1}\Omega^\cdot \to W_n\Omega^\cdot$ est un homomorphisme d'algèbres graduées [10, I (2.17)].

Pour $n = 1$, $C^{-1} : \Omega^\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^\cdot\Omega^\cdot$ est l'isomorphisme de Cartier habituel, comme il résulte de [10, I (3.3)].

On désignera par

$$\mathbf{(1.4.3)} \qquad C^n : ZW_n\Omega^i \to W_n\Omega^i$$

l'homomorphisme induisant, par passage au quotient, l'isomorphisme inverse de (1.4.1), donc donnant une suite exacte

$$\mathbf{(1.4.4)} \qquad 0 \to BW_n\Omega^i \to ZW_n\Omega^i \xrightarrow{C^n} W_n\Omega^i \to 0.$$

L'isomorphisme C^{-n} permet de traduire en termes d'opérateurs sur $W.\Omega^i$ les opérateurs F', V' sur $\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot$: on vérifie trivialement que les carrés suivants sont commutatifs :

$$(1.4.5)\qquad \begin{array}{ccc} W_n\Omega^i & \xrightarrow{\underline{p}F} & W_n\Omega^i \\ {\scriptstyle C^{-n}}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle C^{-n}} \\ \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot & \xrightarrow{F'} & \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \end{array}$$

$$(1.4.6)\qquad \begin{array}{ccc} W_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{R} & W_n\Omega^i \\ {\scriptstyle C^{-(n+1)}}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle C^{-n}} \\ \mathscr{H}^i W_{n+1}\Omega^\cdot & \xrightarrow{V'} & \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \end{array}$$

On a d'autre part un carré commutatif

$$(1.4.7)\qquad \begin{array}{ccc} W_{n+1}\Omega^i & \xrightarrow{F} & W_n\Omega^i \\ {\scriptstyle C^{-(n+1)}}\downarrow\simeq & & \downarrow{\scriptstyle C^{-n}} \\ \mathscr{H}^i W_{n+1}\Omega^\cdot & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \end{array}$$

où π est la projection canonique, de sorte que les isomorphismes C^{-n} définissent un isomorphisme W-linéaire de systèmes projectifs

$$(1.4.8)\qquad C^{-\cdot}\colon (\sigma^{\cdot *}W.\Omega^i, F) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot, \pi).$$

Enfin, $\underline{p}\colon W_n\Omega^\cdot \to W_{n+1}\Omega^\cdot$ induit un homomorphisme $\underline{p}\colon \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^i W_{n+1}\Omega^\cdot$, qui s'insère dans le carré commutatif suivant :

$$(1.4.9)\qquad \begin{array}{ccc} W_n\Omega^i & \xrightarrow{V} & W_{n+1}\Omega^i \\ {\scriptstyle C^{-n}}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle C^{-(n+1)}} \\ \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot & \xrightarrow{\underline{p}} & \mathscr{H}^i W_{n+1}\Omega^\cdot \end{array}$$

(1.5) (1) Soit $W_n = W_n(S)$ le schéma d'espace sous-jacent S, annelé par $W_n(\mathscr{O}_S)$, et notons u le morphisme canonique du topos cristallin de X/W_n dans le topos zariskien de X [2, (5.18)]. On a construit dans [10, II, 1] un isomorphisme canonique de $D(X, W_n\mathscr{O}_S)$:

$$(1.5.1)\qquad Ru_*\mathscr{O}_{X/W_n} \xrightarrow{\sim} W_n\Omega^\cdot_X,$$

(1) Ce numéro est une parenthèse, qui ne servira pas dans la suite (à l'exception du rappel (1.5.1)).

donnant donc, en particulier, pour tout i, un isomorphisme W_n-linéaire

$$R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i W_n\Omega^\cdot_X.$$

Composant avec « l'isomorphisme de Cartier » (1.4.1), on obtient un isomorphisme W_n-linéaire

$$\mathbf{(1.5.2)} \qquad W_n\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} \sigma^{-n*} R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n}.$$

Quand X admet un relèvement lisse X′ sur W_n, $R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{H}^i(\Omega^\cdot_{X'/W_n})$, et l'on peut montrer que (1.5.2) pour $i = 0$ est donné par

$$W_n\mathcal{O}_X \ni x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \tilde{x}_0^{p^n} + p\tilde{x}_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^{n-1}\tilde{x}_{n-1}^{p} \in \mathcal{H}^0(\Omega^\cdot_{X'/W_n}),$$

où $\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_{n-1}$ sont des sections locales de $\mathcal{O}_{X'}$ relevant $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Comme Katz l'a fait observer, (1.5.2) donne une description purement cristalline des *composantes* du complexe de de Rham-Witt de X de cran n, et par conséquent laisse entrevoir la possibilité de reconstruire, par voie cristalline, la théorie de [10] (pour X lisse sur S parfait). Cette reconstruction est effectivement réalisable. Esquissons seulement ici la définition de $d : W_n\Omega^i_X \to W_n\Omega^{i+1}_X$ et $R : W_{n+1}\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X$. Posons $R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n} = \mathcal{H}^i(X/W_n)$. Pour tout ouvert affine U de X, relevé en T_n lisse sur W_n, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{(1.5.3)} \qquad \mathcal{H}^i(X/W_n) \mid U \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i\Omega^\cdot_{T_n/W_n}.$$

Si T_{2n}/W_{2n} est un relèvement lisse de U, et $T_n = T_{2n} \otimes W_n$, on a une suite exacte

$$0 \to \Omega^\cdot_{T_n} \xrightarrow{p^n} \Omega^\cdot_{T_{2n}} \to \Omega^\cdot_{T_n} \to 0.$$

Le cobord correspondant

$$d : \mathcal{H}^i\Omega^\cdot_{T_n/W_n} \to \mathcal{H}^{i+1}\Omega^\cdot_{T_n/W_n}$$

s'identifie, via (1.5.2) et (1.5.3), à la différentielle $d : W_n\Omega^i_U \to W_n\Omega^{i+1}_U$. La « reconstitution » de R est plus délicate : il s'agit de définir de façon autonome V′ (1.3.6). Soit T/W un relèvement formel lisse de U, muni d'un endomorphisme σ-linéaire Φ relevant l'endomorphisme de Frobenius de U. Notons $\mathbf{\Phi}$ l'endomorphisme de $\Omega^\cdot_T$ induit par Φ, et $\Phi : \Omega^\cdot_T \to \Omega^\cdot_T$ l'homomorphisme d'algèbres graduées déduit de $\mathbf{\Phi}$ par division par p^i en degré i (cf. [10, 0 (2.3)]). On déduit du fait que Φ relève C^{-1} que Φ induit une injection

$$\mathbf{(1.5.4)} \qquad \Omega^i_T/(p^{n+1}\Omega^i_T + pd\Omega^{i-1}_T) \hookrightarrow \Omega^i_T/(p^{n+1}\Omega^i_T + d\Omega^{i-1}_T).$$

Posons $T_r = T \otimes W_r$. D'après [10, 0 (2.3.13)], $\mathcal{H}^i\Omega^\cdot_{T_{n+1}}$ est contenu dans l'image de (1.5.4); pour $x \in \mathcal{H}^i\Omega^\cdot_{T_{n+1}}$, l'unique $y \in \Omega^i_T/(p^{n+1}\Omega^i_T + pd\Omega^{i-1}_T)$ tel que $x = \Phi y$ est un cycle mod p^n, dont la classe dans $\mathcal{H}^i\Omega^\cdot_{T_n}$ est par définition $V'x$. On constate que l'homomorphisme V′ ainsi défini correspond, via (1.5.2) et (1.5.3), à l'opérateur de restriction $R : W_{n+1}\Omega^i_U \to W_n\Omega^i_U$. Les carrés (1.4.7) et (1.4.9) suggèrent comment reconstituer F et V, et il n'est pas difficile, à partir de là, de retrouver le formulaire

[10, I (2.18)] et le théorème de comparaison rappelé ci-dessus (1.5.1), d'où découle alors, de façon tautologique, l'isomorphisme de Cartier (1.4.1). Signalons que cette reconstruction n'utilise à aucun moment la théorie du complexe des formes entières de [10, I, 2].

(1.6) Interprétons, à l'aide de (1.4.8), noyau et conoyau de p sur le pro-objet $\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet$.

D'après (1.4.9), les isomorphismes C^n définissent un isomorphisme de pro-objets

(1.6.1) $$ {}_p\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_{\mathrm{F}} \text{ » } {}_\mathrm{V}\mathrm{W}.\Omega^i. $$

D'autre part, d'après [10, I (3.11.2)], on a, pour tout n, un isomorphisme

$$ d\mathrm{V}^{n-1} : \Omega^{i-1}/\mathrm{Z}_n\Omega^{i-1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\mathrm{V} : \mathrm{W}_n\Omega^i \to \mathrm{W}_{n+1}\Omega^i), $$

d'où une identification du système projectif ${}_\mathrm{V}\mathrm{W}.\Omega^i$, avec flèches de transition F, au système projectif $\Omega^{i-1}/\mathrm{Z}.\Omega^{i-1}$, avec flèches de transition les projections canoniques. Composant avec (1.6.1), on obtient un isomorphisme canonique σ-linéaire de pro-objets (avec flèches de transition les projections canoniques)

(1.6.2) $$ \text{« } \mathrm{C}^{-1}d \text{ » } : \Omega^{i-1}/\mathrm{Z}.\Omega^{i-1} \xrightarrow{\sim} {}_p\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet \quad (\text{« } \mathrm{C}^{-1}d \text{ » } = \mathrm{C}^{-\bullet}d\mathrm{V}^{\bullet-1}). $$

De manière analogue, utilisant [10, I (3.11.3)], on définit un isomorphisme canonique σ^{-1}-linéaire de pro-objets (avec flèches de transition les projections et inclusions canoniques)

(1.6.3) $$ \text{« C »} \ (= \mathrm{F}^{\bullet-1}\mathrm{C}^\bullet) : \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet/p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}_{\bullet-1}\Omega^i \ (\simeq \mathrm{Z}.\Omega^i). $$

Noter que, compte tenu de (1.3.8) et du fait que l'endomorphisme F′ (resp. V′) du pro-objet $\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet$ est injectif (resp. surjectif), l'inclusion canonique

(1.6.4) $$ {}_{\mathrm{V}'}\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet \to {}_p\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet $$

et la projection canonique

(1.6.5) $$ \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet/p \to \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet/\mathrm{F}' $$

sont des isomorphismes de pro-objets.

Observons enfin qu'en vertu de (1.6.2) le pro-objet $\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\bullet$ n'est sans p-torsion que pour $i = 0$: dans ce cas, d'ailleurs, V′ est un isomorphisme (1.3.3).

(1.7) Pour terminer ce numéro, nous allons décrire certains endomorphismes des pro-complexes tronqués $t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\bullet$, $t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\bullet$, qui joueront un rôle essentiel dans la suite.

Soit $i \in \mathbf{Z}$. On notera

(1.7.1) $$ \mathrm{V}'_{\leqslant i} : t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\bullet \to t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\bullet $$

l'endomorphisme du pro-complexe tronqué $t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}$ égal à V′ en degré i et $p^{i-j-1}\mathrm{V}$ en degré $j<i$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \xrightarrow{d} & \mathrm{W}.\Omega^{1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{d} & \mathrm{ZW}.\Omega^{i} \\
\downarrow{\scriptstyle p^{i-1}\mathrm{V}} & & \downarrow{\scriptstyle p^{i-2}\mathrm{V}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}'} \\
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \xrightarrow{d} & \mathrm{W}.\Omega^{1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{d} & \mathrm{ZW}.\Omega^{i}
\end{array}$$

(cette définition est légitime, vu (1.3.4)). On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[-i] \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}'_{\leqslant i}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}'} \\
t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[-i]
\end{array} \tag{1.7.2}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques.

On notera d'autre part

$$\mathrm{F}'_{\geqslant i} : t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \to t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \tag{1.7.3}$$

l'endomorphisme du pro-complexe tronqué $t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}$ égal à $p^{j-i}\mathrm{F}'$ en degré j :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{W}.\Omega^{i}/\mathrm{BW}.\Omega^{i} & \xrightarrow{d} & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{j} & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'} & & \downarrow{\scriptstyle p\mathrm{F}'} & & & & \downarrow{\scriptstyle p^{j-i}\mathrm{F}'} & & \\
\mathrm{W}.\Omega^{i}/\mathrm{BW}.\Omega^{i} & \xrightarrow{d} & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{j} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

(cette définition est légitime, compte tenu de (1.1.2) et du fait que $d\mathrm{F} = p\mathrm{F}d$). On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{H}^{i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[-i] & \longrightarrow & t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'_{\geqslant i}} \\
\mathscr{H}^{i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[-i] & \longrightarrow & t_{\geqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}
\end{array} \tag{1.7.4}$$

où les flèches horizontales sont les inclusions canoniques.

D'après (1.2) et le fait que le pro-objet $\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}$ est sans p-torsion, les flèches $\mathrm{F}'_{\geqslant}$ et $\mathrm{V}'_{\leqslant i}$ sont injectives.

Notons aussi que

(1.7.5) $\qquad F'_{\geqslant 0} = p\mathfrak{F},$

où $\mathfrak{F}$ est l'endomorphisme de $W.\Omega^\bullet$ égal à $p^i F$ en degré i [10, I (2.18), II (1.2)], correspondant via (1.5.1) à l'endomorphisme de Frobenius de $Ru_*\mathcal{O}_{X/W}$. Donc, compte tenu de (1.7.4),

(1.7.6) $\qquad \mathfrak{F} \mid \mathscr{H}^i W.\Omega^\bullet = p^{i-1}F'.$

On a, par ailleurs, les identités évidentes :

(1.7.7) $\qquad \mathfrak{F}V'_{\leqslant i} = V'_{\leqslant i}\mathfrak{F} = p^i,$

et, pour X/S de dimension relative N,

(1.7.8) $\qquad F'_{\geqslant i}V'_{\leqslant N} = V'_{\leqslant N}F'_{\geqslant i} = p^{N-i+1}.$

2. Dégénérescence modulo torsion de la suite spectrale conjuguée

(2.1) Soit X un schéma propre et lisse sur k. Pour n entier $\geqslant 1$, on appelle *suite spectrale conjuguée de cran n* (ou *deuxième suite spectrale de de Rham-Witt de cran n*), et l'on note ${}''_nE$ (ou simplement ${}_nE$ s'il n'y a pas de confusion à redouter) la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans $W_n\Omega^\bullet_X$:

(2.1.1) $\qquad {}''_nE_2^{ij} = H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet) \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^\bullet)$

(où $H^*(X, W_n\Omega^\bullet) \simeq H^*(X/W_n)$ [10, II (1.3.3)]). A une renumérotation près, c'est la suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe $W_n\Omega^\bullet_X$, filtré par la filtration canonique (croissante) $t_{\leqslant i}W_n\Omega^\bullet_X$. Via l'isomorphisme fondamental (1.5.1), elle s'identifie à la suite spectrale de Leray de $u : (X/W_n)_{cris} \to X_{zar}$,

$$E_2^{ij} = H^i(X, R^j u_*\mathcal{O}_{X/W_n}) \Rightarrow H^*(X/W_n),$$

donc peut être définie indépendamment de toute référence à la théorie du complexe de de Rham-Witt. Pour l'origine de la terminologie « suite spectrale conjuguée », voir Katz [12].

Lemme **(2.1.2)**. — *La suite spectrale* (2.1.1) *est à valeurs dans la catégorie des* W_n*-modules de longueur finie.*

Notons $F^n_*W_n\Omega^\bullet$ le complexe $W_n\Omega^\bullet$ considéré comme $W_n\mathcal{O}$-algèbre différentielle graduée via $F^n : W_n\mathcal{O} \to W_n\mathcal{O}$. Compte tenu de (1.4.2), l'isomorphisme C^{-n} (1.4.1) est un isomorphisme de $W_n\mathcal{O}_X$-modules

$$C^{-n} : W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i(F^n_*W_n\Omega^\bullet).$$

D'après [10, I (3.9)], il en résulte que $\mathscr{H}^i W_n\Omega^\bullet$ $(= \mathscr{H}^i(F^n_*W_n\Omega^\bullet))$ est un $W_n\mathcal{O}$-module de type fini (ou, si l'on préfère, un faisceau cohérent sur le schéma $W_n(X)$). Comme X

est propre sur k, le terme E_2 de (2.1.1) est donc un W_n-module de longueur finie, d'où le lemme.

Pour n variable, les suites spectrales conjuguées de cran n forment un système projectif $''E$, dont la limite projective est une suite spectrale de W-modules, car, d'après (2.1.2), tous les termes vérifient la condition ML. Cette suite spectrale limite, qu'on notera $''E$ (ou E s'il n'y a pas de confusion à craindre), sera appelée *suite spectrale conjuguée* (ou *deuxième suite spectrale de de Rham-Witt*) de X :

$$(2.1.3) \qquad ''E_2^{ij} = \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \Rightarrow H^*(X/W).$$

Nous poserons

$$(2.1.4) \qquad H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) := \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot),$$

et noterons P_i la filtration croissante de l'aboutissement,

$$(2.1.5) \qquad P_iH^*(X/W) = \varprojlim \operatorname{Im} H^*(X, t_{\leqslant i}W_n\Omega^\cdot) \to H^*(X/W_n),$$

dite *filtration conjuguée*. On a donc

$$(2.1.6) \qquad P_iH^n(X/W)/P_{i-1}H^n(X/W) = ''E_\infty^{n-i,i}.$$

On prendra garde que $H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ *défini par* (2.1.4) *n'est pas le i-ème groupe de cohomologie de* X *à valeurs dans le faisceau* $\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot$.

L'endomorphisme de Frobenius de X induit, par fonctorialité, un endomorphisme $\mathfrak{F}$ du système projectif des suites spectrales conjuguées de cran n, donc de la suite spectrale limite (2.1.3). Cet endomorphisme respecte en particulier la filtration conjuguée. Il est induit, en chaque cran n, par l'endomorphisme $\mathfrak{F}$ de $W_n\Omega^\cdot$.

Le résultat principal de ce numéro est le théorème suivant :

Théorème **(2.2).** — *Soit* K *le corps des fractions de* W. *Sous les hypothèses et avec les notations de* (2.1) :

a) *Pour tout* (i, j), *le sous-module de p-torsion* $(''E_2^{ij})_{p\text{-tors}}$ *de* $''E_2^{ij} = H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ (2.1.4) *est annulé par une puissance de p, et* $''E_2^{ij}/(''E_2^{ij})_{p\text{-tors}}$ *est un* W*-module de type fini.*

b) *La suite spectrale conjuguée* (2.1.3) *dégénère en* E_2 *modulo p-torsion*, i.e. $d_r \otimes K = 0$ *pour tout* $r \geqslant 2$, *et, pour tout i, l'inclusion* $P_iH^*(X/W) \subset H^*(X/W)$ *induit un isomorphisme de* $P_iH^*(X/W) \otimes K$ *sur la partie du* F*-cristal* $H^*(X/W) \otimes K$ *de pentes* $\leqslant i$.

Il découle de b) qu'on a un isomorphisme canonique de F-isocristaux

$$(2.2.1) \qquad H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes K)_{]j-1,j[}$$

(pour un F-isocristal M sur k, et I une partie de $\mathbf{Q}$, M_I désigne le plus grand sous-F-isocristal de M de pentes $\in$ I).

Nous étudierons plus loin, indépendamment des résultats de ce numéro, la p-torsion de $''E_2^{ij}$ (cf. §§ 3 et 6).

Pour des applications arithmétiques de (2.2), voir Katz [14].

(2.3) La démonstration de (2.2) que nous présenterons ici est parallèle à celle donnée dans [10, II, 3] pour la dégénérescence en E_1 modulo torsion de la première suite spectrale de de Rham-Witt.

On peut supposer X purement de dimension N. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Il résulte de (2.1.2) (par un dévissage immédiat) que, pour tout n, le W_n-module gradué $H^*(X, t_{\geqslant i}W_n\Omega^\cdot)$ est de longueur finie. Considérons le W-module gradué profini

(2.3.1) $$H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot) := \varprojlim H^*(X, t_{\geqslant i}W_n\Omega^\cdot) \quad (1).$$

Les endomorphismes $F'_{\geqslant i}$ (1.7.3) et $V'_{\leqslant N}$ (1.7.1) de $t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot$ définissent sur $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot)$ des opérateurs $F'_{\geqslant i}$ et $V'_{\leqslant N}$, respectivement σ et σ^{-1}-linéaires, vérifiant $F'_{\geqslant i}V'_{\leqslant N} = V'_{\leqslant N}F'_{\geqslant i} = p^{N-i+1}$ (1.7.8). On peut donc considérer $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot)$ comme module gradué sur l'anneau de Dieudonné $R'^0(N-i+1)$ de niveau $N-i+1$ (I (4.2)), F' (resp. V') opérant par $F'_{\geqslant i}$ (resp. $V'_{\leqslant N}$). Nous déduirons (2.2) du résultat de finitude suivant, analogue de (II (3.12.5)) :

Proposition **(2.3.2).** — $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot)$ *est un* R'^0*-module* F'*-fini*, i.e. $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot)$ *est séparé et complet pour la topologie* F'*-adique, et* $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot)/F'$ *est un* W*-module de longueur finie.*

(2.4) *Dévissage de* $t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot$. — Pour prouver (2.3.2), nous aurons besoin de résultats sur les pro-complexes $t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i}$, analogues à ceux de [10, II (2.10)], relatifs aux pro-complexes $W.\Omega^{\leqslant i}/V_{\leqslant i}$ (où $V_{\leqslant i}$ est $p^{i-j}V$ en degré j). La propreté de X est inutile ici, les calculs de ce numéro valent pour tout schéma X lisse sur une base parfaite S de caractéristique $p > 0$.

Soit $i \in \mathbf{Z}$. Dans ce qui suit, $W.\Omega^\cdot$ désigne le pro-objet des complexes de de Rham-Witt de cran n. La projection canonique $t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot \to t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot$ envoie $F'_{\geqslant i}t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot$ dans $F'_{\geqslant i+1}t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot$, donc définit un épimorphisme de $t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i}$ sur $t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i+1}$, dont nous noterons L_i le noyau :

(2.4.1) $$0 \to L_i \to t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i}t_{\geqslant i}W.\Omega^\cdot \to t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i+1}t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot \to 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} L_i = (0 &\to W.\Omega^i/(F'W.\Omega^i + dW.\Omega^{i-1}) \\ &\xrightarrow{d} (F'W.\Omega^{i+1} + dW.\Omega^i)/pF'W.\Omega^{i+1} \xrightarrow{d} pF'W.\Omega^{i+2}/p^2F'W.\Omega^{i+2} \to \dots \\ &\to p^rF'W.\Omega^{i+r+1}/p^{r+1}F'W.\Omega^{i+r+1} \to \dots). \end{aligned}$$

Considérons le pro-complexe (concentré en degrés $\geqslant i$)

$$M_i = (0 \to W.\Omega^i/(pW.\Omega^i + dVW.\Omega^{i-1}) \xrightarrow{d} W.\Omega^{i+1}/p \xrightarrow{d} \dots \to W.\Omega^j/p \to \dots)$$

(avec les notations de (II (3.5.3)), $M_i = t_{\geqslant i}(W.\Omega^\cdot(i, 1)/(p))$. Comme $F' = pF$ et $FdV = d$, l'homomorphisme $F_{\geqslant i} : W.\Omega^{\geqslant i} \to W.\Omega^{\geqslant i}$, égal à p^hF en degré $i+h$, induit un homomorphisme $f : M_i \to L_i$.

---

(1) Même observation que pour (2.1.4).

Lemme **(2.4.2).** — *On a une suite exacte de pro-complexes*

$$(2.4.2.1) \qquad 0 \to M_i \xrightarrow{f} L_i \to N_i \to 0,$$

avec $$N_i = (0 \to W.\Omega^i/FW.\Omega^i \xrightarrow{d} (pFW.\Omega^{i+1} + dW.\Omega^i)/pFW.\Omega^{i+1} \to 0),$$

concentré en degrés i et $i+1$.

Par définition, f est un isomorphisme en degrés $\geqslant i+2$, et l'on a $N_i = L_i/fM_i$. Il reste à vérifier l'injectivité de f en degrés i et $i+1$. En degré i, elle résulte du fait que $F : W.\Omega^i \to W.\Omega^i$ est injectif et que $F(pW.\Omega^i + dVW.\Omega^{i-1}) = pFW.\Omega^i + dW.\Omega^{i-1}$. En degré $i+1$,

$$f = pF : W.\Omega^{i+1}/p \to (pFW.\Omega^{i+1} + dW.\Omega^i)/p^2FW.\Omega^{i+1} = L^{i+1}$$

est composé de l'isomorphisme $pF : W.\Omega^{i+1}/p \xrightarrow{\sim} pFW.\Omega^{i+1}/p^2F$ et de l'injection naturelle de $pFW.\Omega^{i+1}/p^2F$ dans L^{i+1}.

Lemme **(2.4.3).** — N_i *est acyclique.*

D'après [10, I (3.19)], la différentielle d de $W.\Omega^\cdot$ donne une injection de $VW.\Omega^i/pW.\Omega^i$ dans $W.\Omega^{i+1}/VW.\Omega^{i+1}$, donc *a fortiori* dans $W.\Omega^{i+1}/pW.\Omega^{i+1}$. Le lemme résulte alors du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} VW.\Omega^i/pW.\Omega^i & \xrightarrow[\simeq]{d} & (dVW.\Omega^i + pW.\Omega^{i+1})/pW.\Omega^{i+1} \\ \uparrow{\scriptstyle V}\ \simeq & & \simeq\ \downarrow{\scriptstyle F} \\ W.\Omega^i/FW.\Omega^i & \xrightarrow{d} & (pFW.\Omega^{i+1} + dW.\Omega^i)/pFW.\Omega^{i+1} \end{array}$$

Lemme **(2.4.4).** — *La projection naturelle* $M_i \to \Omega^{\geqslant i}$ *est un quasi-isomorphisme de pro-objets* ($\Omega^{\geqslant i}$ *étant considéré comme pro-objet constant*).

D'après [10, I (3.20)], les projections naturelles donnent un quasi-isomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_i' & \longrightarrow & W.\Omega^\cdot/p & \longrightarrow & M_i'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{\geqslant i} & \longrightarrow & \Omega^\cdot & \longrightarrow & \Omega^{\leqslant i-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $$M_i' = (0 \to VW.\Omega^{i-1}/pW.\Omega^{i-1} \xrightarrow{d} W.\Omega^i/p \to W.\Omega^{i+1}/p \to \ldots)$$

et $$M_i'' = (W.\mathcal{O}/p \xrightarrow{d} W.\Omega^1/p \to \ldots \to W.\Omega^{i-2}/p \to W.\Omega^{i-1}/VW.\Omega^{i-1} \to 0).$$

Mais, d'après [10, I (3.19)], $\mathscr{H}^{i-1}M'_i = 0$, de sorte que la projection évidente $M'_i \to M_i$ est un quasi-isomorphisme, d'où le lemme.

(Par un argument similaire, Nygaard [17, (1.3)] a montré que, plus généralement, pour tout n, la projection naturelle (cf. (II (3.5.3)))

$$t_{\geqslant i}(W.\Omega^{\cdot}(i, n)/p^n) \to W_n\Omega^{\geqslant i}$$

est un quasi-isomorphisme.)

Combinant (2.4.2), (2.4.3) et (2.4.4), on obtient un isomorphisme canonique (de la catégorie dérivée des pro-W-modules sur X)

$$\mathbf{(2.4.5)} \qquad L_i \xrightarrow{\sim} \Omega^{\geqslant i}.$$

(2.5) *Preuve de* (2.3.2). — Par définition de F′ (1.1.1), on a, pour tout $n \geqslant 1$, $F'^n(W.\Omega^i) \subset p^n W.\Omega^i$, donc le composé $W.\Omega^i \xrightarrow{F'^n} W.\Omega^i \to W_n\Omega^i$ (où la seconde flèche est la projection canonique) est nul, et par suite il en est de même des composés $W.\Omega^i/BW.\Omega^i \xrightarrow{F'^n} W.\Omega^i/BW.\Omega^i \to W_n\Omega^i/BW_n\Omega^i$ et

$$t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot} \xrightarrow{F'^n_{\geqslant i}} t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot} \longrightarrow t_{\geqslant i}W_n\Omega^{\cdot}$$

(où les secondes flèches sont les projections canoniques). Par application de $\varprojlim H^*(X, -)$, il en résulte que $F'^n H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})$ est contenu dans le noyau de l'application canonique $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot}) \to H^*(X, t_{\geqslant i}W_n\Omega^{\cdot})$; autrement dit, la topologie F′-adique de $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})$ est plus fine que la topologie limite projective T. Or, comme $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})$ est T-profini, et que F′ est continu pour T, les $F'^n H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})$ sont fermés (I (0.5)), donc (I (0.1)) $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})$ est séparé et complet pour la topologie F′-adique. Il reste à montrer que $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})/F'$ est de longueur finie. Considérons pour cela la suite exacte de pro-complexes (rappelons que $F'_{\geqslant i}$ (1.7.3) est injectif)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot} \xrightarrow{F'_{\geqslant i}} t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot} \longrightarrow t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant i}t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot} \longrightarrow 0.$$

Comme $H^*(X, t_{\geqslant i}W_n\Omega^{\cdot})$ est de longueur finie pour tout n, la limite projective de la suite exacte longue de cohomologie associée à (*) est exacte, donc fournit une injection

$$\mathbf{(2.5.1)} \qquad H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot})/F' \hookrightarrow H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant}) := \varprojlim H^*(X, t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant i}).$$

Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme **(2.5.2)**. — *Le* W*-module* $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant i})$ *défini en* (2.5.1) *est de longueur finie.*

Nous allons prouver (2.5.2) par récurrence descendante sur i. L'assertion est vraie pour $i > N$, puisque $W.\Omega^i = 0$ pour $i > N$. Supposons-la établie pour $i + 1$, et considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à (2.4.1) :

$$(1) \qquad \ldots \to H^*(X, L_i) \to H^*(X, t_{\geqslant i}W.\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant i}) \to H^*(X, t_{\geqslant i+1}W.\Omega^{\cdot}/F'_{\geqslant i+1}) \to \ldots$$

Les termes de (1) sont des pro-modules de longueur finie, donc la limite projective de (1) est une suite exacte, qui s'écrit

(2) $\quad \ldots \to H^*(X, L_i) \to H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i}) \to H^*(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i+1}) \to \ldots$

D'après (2.4.5), $H^*(X, L_i)$ est isomorphe à $H^*(X, \Omega^{\geqslant i})$, donc est un k-espace vectoriel de dimension finie. Par l'hypothèse de récurrence, il en résulte que $H^*(X, t_{\geqslant i}W\Omega^\cdot/F'_{\geqslant i})$ est de longueur finie, ce qui établit (2.5.2) et achève la démonstration de (2.3.2).

(2.6) *Preuve de* (2.2). — La suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué canonique (écrit comme une suite exacte courte)

$$0 \to \mathscr{H}^j W.\Omega^\cdot[-j] \to t_{\geqslant j}W.\Omega^\cdot \to t_{\geqslant j+1}W.\Omega^\cdot \to 0$$

est formée de pro-modules de longueur finie, donc a pour limite projective une suite exacte, qui s'écrit

(2.6.1) $\quad \ldots \to H^{*-j}(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \to H^*(X, t_{\geqslant j}W\Omega^\cdot) \to H^*(X, t_{\geqslant j+1}W\Omega^\cdot) \to \ldots$

D'après la variante (I (4.3)) de (I (2.5) *a)* et *b)*), il résulte de (2.3.2) que, pour tout r, $H^*(X, t_{\geqslant r}W\Omega^\cdot)$ est extension d'un W-module libre de type fini par un W-module annulé par une puissance de p. Grâce à (2.6.1), la même propriété est vraie pour $H^{*-j}(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ (cf. [10, II (2.14)]), ce qui prouve *a)*. La démonstration de *b)* est analogue à celle de [10, II (3.2)]. On note d'abord que les opérateurs F', V' sur $\mathscr{H}^j W.\Omega^\cdot$, vérifiant $F'V' = V'F' = p$, munissent $H^*(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ d'une structure de R'^0-module (de niveau 1), et le même raisonnement que celui fait au début de la preuve de (2.3.2) montre que F' est topologiquement nilpotent sur $H^*(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$, donc aussi sur le W-module de type fini quotient de $H^*(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)$ par son sous-module de p-torsion. Par suite, les pentes de F' sur $H^*(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \otimes K$ appartiennent à l'intervalle $]0, 1]$. Grâce à (1.7.6), il en résulte que, pour tout (i, j), les pentes de $\mathfrak{F}$ opérant sur ${}''E_2^{ij} \otimes K$ appartiennent à l'intervalle $]j - 1, j]$. Il en est donc de même, pour tout $r \geqslant 2$, des pentes de $\mathfrak{F}$ opérant sur ${}''E_r^{ij} \otimes K$. Alors ${}''E_r^{ij} \otimes K$ et ${}''E_r^{i+r, j-r+1}$ n'ont pas de pente en commun, et par suite $d_r \otimes K = 0$. Pour la dernière assertion, on note que l'endomorphisme $\mathfrak{F}$ de $t_{\geqslant j}W.\Omega^\cdot_X$ coïncide avec $p^{j-1}F'_{\geqslant j}$, ce qui entraîne, compte tenu de (2.3.2), que les pentes de $\mathfrak{F}$ opérant sur $H^*(X, t_{\geqslant j}W\Omega^\cdot) \otimes K$ sont $> j - 1$; la conclusion découle de la suite exacte (de F-isocristaux)

$$0 \to P_i H^*(X/W) \otimes K \to H^*(X/W) \otimes K \to H^*(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot) \otimes K \to 0$$

déduite du triangle distingué canonique $0 \to t_{\leqslant i}W.\Omega^\cdot \to W.\Omega^\cdot \to t_{\geqslant i+1}W.\Omega^\cdot \to 0$. Ceci achève la démonstration de (2.2).

Remarques **(2.7)**. — *a)* Nous donnerons en (III, 6) une autre démonstration de (2.2).

b) On a observé plus haut que la suite spectrale conjuguée peut être définie par voie cristalline, indépendamment de la théorie du complexe de de Rham-Witt. Or la démonstration de (2.2) qu'on vient d'exposer s'appuie sur cette théorie, donc apparaît assez artificielle. En fait, les calculs de (2.4), qui sont le cœur de l'argument, peuvent

être présentés de façon purement cristalline, sans référence au complexe de de Rham-Witt. L'ingrédient clé, qui conduit d'ailleurs à une généralisation relative de (2.4.5), est le théorème d'Ogus [2, (8.20)] (cf. lettre de L. Illusie à A. Ogus du 31-8-80).

3. Complexes de Nygaard et extensions canoniques

(3.1) Soit A une catégorie abélienne. Si L est un complexe de A, la *filtration canonique* de L, par les complexes $t_{\leqslant i}L = (\ldots \to L^{i-1} \xrightarrow{d} Z^i \to 0)$, fournit certaines flèches dans la catégorie dérivée, que nous allons rapidement rappeler. Notons d'abord que, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, la projection canonique

$$t_{\leqslant i}L/t_{\leqslant i-1}L \to \mathscr{H}^i L[-i] \tag{3.1.1}$$

est un quasi-isomorphisme. Plus généralement, posant, pour $a < b \leqslant +\infty$,

$$t_{[a,b]}L = (0 \to L^a/B^a \xrightarrow{d} L^{a+1} \to \ldots \to L^{b-1} \xrightarrow{d} Z^b \to 0) \tag{3.1.2}$$

(avec la convention que $t_{[a,a]}L = \mathscr{H}^a L[-a]$), la projection canonique

$$t_{\leqslant b}L/t_{\leqslant a-1}L \to t_{[a,b]}L \tag{3.1.3}$$

est un quasi-isomorphisme (pour $b = +\infty$, $t_{[a,b]}L = t_{\geqslant a}L$). Grâce à (3.1.1), l'extension

$$0 \to t_{\leqslant i}L/t_{\leqslant i-1}L \to t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i-1}L \to t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i}L \to 0 \tag{3.1.4}$$

fournit un triangle distingué [1]

$$0 \to \mathscr{H}^i L[-i] \to t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i-1}L \to \mathscr{H}^{i+1}L[-(i+1)] \to 0. \tag{3.1.5}$$

La flèche

$$d : \mathscr{H}^{i+1}L \to \mathscr{H}^i L[2] \tag{3.1.6}$$

déduite, par translation, de la flèche de degré 1 de (3.1.5) sera dite *flèche canonique*. On sait que, par application d'un foncteur cohomologique T^* à valeurs dans une catégorie abélienne B, d fournit la différentielle d_2 de la suite spectrale

$$E_2^{ij} = T^i \mathscr{H}^j L \Rightarrow T^*(L).$$

On peut définir (3.1.6) de la manière équivalente suivante : grâce à (3.1.3), l'extension (3.1.4) s'envoie par un quasi-isomorphisme dans l'extension

$$0 \to \mathscr{H}^i L[-i] \to t_{[i,i+1]}L \to t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i}L \to 0, \tag{3.1.7}$$

d'où l'on déduit (grâce à (3.1.1)) un triangle distingué

$$0 \to \mathscr{H}^i L[-i] \to t_{[i,i+1]}L \to \mathscr{H}^{i+1}L[-(i+1)] \to 0, \tag{3.1.8}$$

dont la flèche de degré 1 donne (3.1.6) par translation.

---

[1] Nous écrirons souvent, par abus, un triangle distingué $L \to M \overset{+1}{\swarrow\!\nwarrow} N$ comme une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$.

D'autre part, grâce à (3.1.3) pour $b = +\infty$, l'extension

(3.1.9) $\quad 0 \to t_{\leqslant i}L \to L \to L/t_{\leqslant i}L \to 0$

fournit un triangle distingué

(3.1.10) $\quad 0 \to t_{\leqslant i}L \to L \to t_{\geqslant i+1}L \to 0,$

dont la flèche de degré 1

(3.1.11) $\quad d : t_{\geqslant i+1}L \to (t_{\leqslant i}L)[1]$

est reliée à (3.1.6) par le carré commutatif suivant :

(3.1.12)
$$\begin{array}{ccc} t_{\geqslant i+1}L & \xrightarrow{d} & (t_{\leqslant i}L)[1] \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathscr{H}^{i+1}L[-(i+1)] & \xrightarrow{d} & \mathscr{H}^{i}L[-i][1] \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les inclusion et projection naturelles). Cette compatibilité découle des morphismes de suites exactes évidents

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i}L[-i] & \longrightarrow & t_{[i,i+1]}L & \longrightarrow & t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i}L & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}L & \longrightarrow & t_{\leqslant i+1}L & \longrightarrow & t_{\leqslant i+1}L/t_{\leqslant i}L & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/t_{\leqslant i}L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Enfin, il nous sera commode d'utiliser les notations suivantes :

(3.1.13)
$$t'_{\geqslant i}L = L/t_{\leqslant i-1}L = (0 \to L^{i-1}/Z^{i-1} \xrightarrow{d} L^{i} \to L^{i+1} \to \ldots),$$
$$t'_{[i]}L = t_{\leqslant i}L/t_{\leqslant i-1}L = (0 \to L^{i-1}/Z^{i-1} \to Z^{i} \to 0).$$

(3.2) Dans toute la suite de ce numéro, X désigne un schéma lisse sur une base parfaite S de caractéristique $p > 0$, et $W.\Omega^{\cdot}_X$ (ou $W.\Omega^{\cdot}$) le pro-objet des complexes de de Rham-Witt de cran n. Nous allons établir certaines compatibilités entre les opérateurs $F'_{\geqslant i}$, $V'_{\leqslant i}$ de (1.7), la flèche d de (3.1.11) relative à $L = W.\Omega^{\cdot}$ (A étant la catégorie des pro-W-modules sur X), et les complexes de de Rham-Witt modifiés de Nygaard [17], qui sont déjà intervenus en (II (3.5)).

Soient i et n des entiers, avec $n \geqslant 0$. Nous considérerons les complexes de pro-W-modules déduits de $W.\Omega^{\cdot}$ par la modification suivante de $d : W.\Omega^{i-1} \to W.\Omega^{i}$:

(3.2.1) $\quad W.\Omega^{\cdot}(i, n) = (W.\mathcal{O} \xrightarrow{d} W.\Omega^{1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} W.\Omega^{i-1} \xrightarrow{dV^{n}} \sigma_{*}^{-n}W.\Omega^{i} \xrightarrow{d} \ldots)$

(3.2.2) $\quad W.\Omega^{\cdot}(i, -n) = (W.\mathcal{O} \xrightarrow{d} W.\Omega^{1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} W.\Omega^{i-1} \xrightarrow{F^{n}d} \sigma_{*}^{n}W.\Omega^{i} \xrightarrow{d} \ldots)$

(nous omettrons par la suite les σ^{n} et σ^{-n} quand il n'en pourra résulter de confusion).

On a une suite exacte (de complexes de pro-W-modules)

$$\mathbf{(3.2.3)} \qquad 0 \to t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \xrightarrow{f_{-n}} \mathrm{W}.\Omega^{\bullet}(i,n) \to \sigma_*^{-n} t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \to 0,$$

où f_{-n} est l'identité en degré $\leqslant i-1$ et le composé $\mathrm{ZW}.\Omega^i \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} \mathrm{ZW}.\Omega^i \hookrightarrow \mathrm{W}.\Omega^i$ en degré i (1.3). On a de plus des morphismes de suites exactes

$$\mathbf{(3.2.4)} \qquad \begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \sigma_*^{-n} t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & \sigma_*^{-n}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & \sigma_*^{-n} t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{V}'^n_{\leqslant i}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{V}_{i,n}} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \xrightarrow{f_{-n}} & \mathrm{W}.\Omega^{\bullet}(i,n) & \longrightarrow & \sigma_*^{-n} t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{i,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'^n_{\geqslant i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales médianes sont définies par le diagramme commutatif suivant (cf. (II (3.5))) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle p^{n(i-1)}\mathrm{V}^n}\uparrow & & & & {\scriptstyle p^n\mathrm{V}^n}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{V}^n}\uparrow & & \| & & \| & & \\
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{d\mathrm{V}^n} & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
\| & & & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}^n} & & \downarrow{\scriptstyle p^n\mathrm{F}^n} & & \\
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

(N.B. — Dans (3.2.4), $\mathrm{F}'_{\geqslant i+1} : t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \to t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}$ est l'homomorphisme défini par $p^{j-i}\mathrm{F}$ en degré j, de sorte qu'on a un carré commutatif

$$\mathbf{(3.2.4.1)} \qquad \begin{array}{ccc}
t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & t_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'_{\geqslant i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'_{\geqslant i+1}} \\
t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} & \longrightarrow & t_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont les quasi-isomorphismes projections naturelles (3.1.3).)

Notons

$$\mathbf{(3.2.5)} \qquad d_{i,n} : t_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \to \sigma_*^n t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[1]$$

la flèche de degré 1 définie par (3.2.3), et

$$\mathbf{(3.2.6)} \qquad d = d_{i,0} : t_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet} \to t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^{\bullet}[1]$$

la flèche (3.1.11) relative à $\mathrm{L} = \mathrm{W}.\Omega^{\bullet}$. La partie supérieure de (3.2.4) fournit la relation

$$\mathbf{(3.2.7)} \qquad \mathrm{V}'^n_{\leqslant i} d_{i,n} = d,$$

et la partie inférieure donne, compte tenu de (3.2.4.1),

(3.2.8) $\qquad (\sigma_*^n d)\mathrm{F}'^n_{\geqslant i+1} = d_{i,n}.$

Combinant (3.2.7) et (3.2.8), on obtient notamment la formule fondamentale

(3.2.9) $\qquad \mathrm{V}'_{\leqslant i}(\sigma_* d)\mathrm{F}'_{\geqslant i+1} = d,$

qui nous permettra plus loin de munir le terme E_2 de la suite spectrale conjuguée d'une structure de R'-module : comme $\mathrm{F}'_{\geqslant i+1}$ (resp. $\mathrm{V}'_{\leqslant i}$) induit F' (resp. V') sur $\mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot$ (resp. $\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot$), (3.2.9) entraîne en effet, grâce à (3.1.12) :

(3.2.10) $\qquad \mathrm{V}'(\sigma_* d)\mathrm{F}' = d,$

où

(3.2.11) $\qquad d\colon \mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[2]$

est la flèche canonique (3.1.6).

Observons que (3.2.3) induit la suite exacte

(3.2.12) $\qquad 0 \to \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) \to \sigma_*^{-n} t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to 0,$

dont le triangle distingué associé s'écrit

(3.2.13) $\qquad \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) \to \sigma_*^{-n}\mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-(i+1)] \xrightarrow{d\mathrm{F}'^n} \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i+1].$

Le fait que la flèche de degré 1 soit $d\mathrm{F}'^n$ résulte en effet de (3.2.8) (compte tenu de (3.1.12)).

Donnons maintenant une liste de compatibilités parallèles faisant intervenir $\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n)$. Tout d'abord, on a une suite exacte

(3.2.14) $\qquad 0 \to t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \xrightarrow{f_n} \mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) \to \sigma_*^n t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to 0,$

où f_n est l'identité en degré $\leqslant i-1$ et le composé $\mathrm{ZW}.\Omega^i \xrightarrow{\mathrm{F}_n} \mathrm{ZW}.\Omega^i \hookrightarrow \mathrm{W}.\Omega^i$ en degré i, et des morphismes de suites exactes

(3.2.15)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \sigma_*^n t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & \sigma_*^n \mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & \sigma_*^n t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}'^n_{\leqslant i}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}_{i,-n}} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \xrightarrow{f_n} & \mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) & \longrightarrow & \sigma_*^n t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{i,-n}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{F}'^n_{\geqslant i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & t'_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales médianes sont définies par le diagramme commutatif suivant (cf. (II (3.5))) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle p^{n(i-1)}\mathrm{V}^n} & & & & \downarrow{\scriptstyle p^n\mathrm{V}^n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}^n} & & \| & & \| & & \\
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{\mathrm{F}^n d} & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
\| & & & & \| & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{F}^n} & & \uparrow{\scriptstyle p^n\mathrm{F}^n} & & \\
\mathrm{W}.\mathscr{O} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-2} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i} & \longrightarrow & \mathrm{W}.\Omega^{i+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

(même convention que plus haut pour $\mathrm{F}'_{\geqslant i+1}$). Si

(3.2.16) $\qquad d_{i,-n} : \sigma_*^n t_{\geqslant i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to t_{\leqslant i}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[1]$

est la flèche de degré 1 définie par (3.2.14), on déduit comme ci-dessus de (3.2.15) qu'on a :

(3.2.17) $\qquad \mathrm{V}'^n_{\leqslant i}(\sigma_*^n d) = d_{i,-n}$,

(3.2.18) $\qquad d_{i,-n}\mathrm{F}'^n_{\geqslant i+1} = d$,

d'où résulte à nouveau (3.2.9). Par ailleurs, (3.2.14) induit la suite exacte

(3.2.19) $\qquad 0 \to \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] \xrightarrow{\mathrm{F}^n} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) \to \sigma_*^n t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to 0$,

dont le triangle distingué associé s'écrit (grâce à (3.2.17))

(3.2.20) $$\begin{aligned}\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] &\xrightarrow{\mathrm{F}^n} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) \\ &\longrightarrow \sigma_*^n\mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-(i+1)] \xrightarrow{\mathrm{V}'^n d} \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i+1].\end{aligned}$$

(3.3) Il découle des relations $\mathrm{V}'d = d\mathrm{V}$ (1.3.4) et $\mathrm{V}^n\mathrm{F}^n d = p^n d = d\mathrm{V}^n\mathrm{F}^n$ qu'on a (pour i et n comme ci-dessus) un carré commutatif

(3.3.1) $$\begin{array}{ccc}
\mathrm{W}.\Omega^i/\mathrm{F}^n d\mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{d} & \mathrm{Z}\mathrm{W}.\Omega^{i+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}^n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{V}'^n} \\
\mathrm{W}.\Omega^i/d\mathrm{V}^n\mathrm{W}.\Omega^{i-1} & \xrightarrow{d} & \mathrm{Z}\mathrm{W}.\Omega^{i+1}
\end{array}$$

qu'on peut considérer comme définissant un morphisme de complexes

(3.3.2) $$\begin{array}{c}
t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{V}^n,\mathrm{V}'^n)} \\
\sigma_*^n t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n)
\end{array}$$

(avec les notations de (3.2.1) et (3.2.2)).

Proposition **(3.3.3).** — *Notons (par abus)*

$$F^n : W.\Omega^i/dV^nW.\Omega^{i-1} \to \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot$$

la flèche composée de la projection canonique $W.\Omega^i/dV^nW.\Omega^{i-1} \to W_n\Omega^i$ *et de l'isomorphisme de Cartier* $C^{-n} : W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot$ (1.4.1). *On a une suite exacte (de complexes de pro-W-modules)*

(3.3.3.1)
$$0 \longrightarrow t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,-n) \xrightarrow{(V^n,V'^n)} \sigma^n_* t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,n) \xrightarrow{F^n} \sigma^n_*\mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot[-i] \longrightarrow 0.$$

Comme V′ est un automorphisme de $ZW.\Omega^{i+1}$, l'exactitude de (3.3.3.1) équivaut à celle de la suite

(3.3.3.2)
$$0 \longrightarrow W.\Omega^i/F^n dW.\Omega^{i-1} \xrightarrow{V^n} W.\Omega^i/dV^nW.\Omega^{i-1} \xrightarrow{F^n} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot \longrightarrow 0.$$

Or l'exactitude de (3.3.3.2) au centre et à droite est assurée par définition de F^n, et à gauche elle résulte de l'exactitude au centre de la suite exacte

(3.3.3.3)
$$0 \longrightarrow W.\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n,\,-F^nd)} W.\Omega^{i-1} \oplus W.\Omega^i \xrightarrow{dV^n+V^n} W.\Omega^i \longrightarrow W_n\Omega^i \longrightarrow 0,$$

qui se vérifie comme (II (1.2.2)) (à partir de [10, I (3.17.2) et (3.21)]).

(On comparera (3.3.3.2) à la suite exacte

(3.3.3.4)
$$0 \longrightarrow W.\Omega^{i-1}/F^nW.\Omega^{i-1} \xrightarrow{dV^n} W.\Omega^i/V^nW.\Omega^i \longrightarrow W_n\Omega^i \longrightarrow 0$$

déduite aussi de (3.3.3.3), et mise en évidence par Nygaard [17, (1.4)].)

Notons que (3.3.2) s'insère dans un morphisme de la suite exacte (3.2.19) dans la suite exacte (3.2.12) :

(3.3.4)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{F^n} & t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,-n) & \longrightarrow & \sigma^n_* t'_{[i+1]}W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F'^n} & & \downarrow{\scriptstyle (V^n,V'^n)} & & \downarrow{\scriptstyle V'^n} & & \\
0 & \longrightarrow & \sigma^n_*\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{V'^n} & \sigma^n_* t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,n) & \longrightarrow & t'_{[i+1]}W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Compte tenu de (3.2.13) et (3.2.20), le morphisme de triangles distingués défini par (3.3.4) s'écrit (en négligeant les σ^n)

(3.3.5)
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{F^n} & t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,-n) & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i+1}W.\Omega^\cdot[-(i+1)] & \xrightarrow{V'^n d} & \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i+1] \\
\downarrow{\scriptstyle F'^n} & (1) & \downarrow{\scriptstyle (V^n,V'^n)} & (2) & \downarrow{\scriptstyle V'^n} & (3) & \downarrow{\scriptstyle F'^n} \\
\mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{V'^n} & t_{[i,i+1]}W.\Omega^\cdot(i,n) & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i+1}W.\Omega^\cdot[-(i+1)] & \xrightarrow{dF'^n} & \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot[-i+1]
\end{array}$$

On a aussi un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \sigma_*^n \mathscr{H}^i \mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} & \sigma_*^n t_{[i,i+1]} \mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow \mathrm{F}^n \\ & & \sigma_*^n \mathscr{H}^i \mathrm{W}_n \Omega^\cdot[-i] \end{array} \tag{3.3.6}$$

où π est la projection canonique. Considérons la o-suite déduite du carré (3) de (3.3.5) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \xrightarrow{(\mathrm{V}'^n, -\mathrm{V}'^n d)} \mathscr{H}^{i+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \oplus \mathscr{H}^i \mathrm{W}.\Omega^\cdot \\ \xrightarrow{d\mathrm{F}'^n + \mathrm{F}'^n} \mathscr{H}^i \mathrm{W}.\Omega^\cdot \longrightarrow \mathscr{H}^i \mathrm{W}_n \Omega^\cdot \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Compte tenu de (3.3.3), (3.3.5) et (3.3.6), (3.3.7) jouera le rôle d'une résolution de $\mathscr{H}^i \mathrm{W}_n \Omega^\cdot$, analogue à celle de $\mathrm{W}_n \Omega^i$ donnée par (3.3.3.3) ou (II (1.2.2)), et sera l'ingrédient essentiel du théorème de finitude (5.2).

(3.4) Examinons, pour terminer, la dépendance en n du morphisme (3.3.2), que nous noterons $(3.3.2)_n$. Pour alléger, nous omettrons de préciser les σ-linéarités.

On définit un morphisme

$$\pi : (3.3.2)_{n+1} \to (3.3.2)_n \tag{3.4.1}$$

par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i, -(n+1)) & \xrightarrow{(p,p)} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{V}^{n+1}, \mathrm{V}'^{n+1})} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{V}^n, \mathrm{V}'^n)} \\ t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i, n+1) & \xrightarrow{(\mathrm{F}, \mathrm{F}')} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) \end{array} \tag{3.4.1'}$$

Le morphisme (3.4.1) induit la projection canonique $\pi : \mathscr{H}^i \mathrm{W}_{n+1}\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^i \mathrm{W}_n \Omega^\cdot$, en ce sens qu'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i, n+1) & \xrightarrow{(\mathrm{F}, \mathrm{F}')} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}^n} \\ \mathscr{H}^i \mathrm{W}_{n+1}\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{H}^i \mathrm{W}_n \Omega^\cdot[-i] \end{array} \tag{3.4.2}$$

(où les flèches verticales sont les flèches de droite de (3.3.3.1)). D'autre part, la flèche supérieure de (3.4.1') s'insère dans un morphisme de $(3.2.19)_{n+1}$ dans $(3.2.19)_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\mathrm{F}^{n+1}} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-(n+1)) & \longrightarrow & t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'} & & \downarrow{\scriptstyle (p,p)} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\mathrm{F}^{n}} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,-n) & \longrightarrow & t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.4.3}$$

De même, la flèche inférieure de (3.4.1') s'insère dans un morphisme de $(3.2.12)_{n+1}$ dans $(3.2.12)_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\mathrm{V}'^{n+1}} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n+1) & \longrightarrow & t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{F},\mathrm{F}')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-i] & \xrightarrow{\mathrm{V}'^{n}} & t_{[i,i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(i,n) & \longrightarrow & t'_{[i+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.4.4}$$

Les diagrammes (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4) montrent que (3.4.1) induit un morphisme de $(3.3.7)_{n+1}$ dans $(3.3.7)_n$ de la forme suivante (où $\mathscr{H}^i = \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot$) :

(3.4.5)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i+1}[-2] & \xrightarrow{(\mathrm{V}'^{n+1},\,-\mathrm{V}'^{n+1}d)} & \mathscr{H}^{i+1}[-2]\oplus\mathscr{H}^i & \xrightarrow{d\mathrm{F}'^{n+1}+\mathrm{F}'^{n+1}} & \mathscr{H}^i & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}_{n+1}\Omega^\cdot \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{F}',\mathrm{F}')} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{H}^{i+1}[-2] & \xrightarrow{(\mathrm{V}'^{n},\,-\mathrm{V}'^{n}d)} & \mathscr{H}^{i+1}[-2]\oplus\mathscr{H}^i & \xrightarrow{d\mathrm{F}'^{n}+\mathrm{F}'^{n}} & \mathscr{H}^i & \longrightarrow & \mathscr{H}^i\mathrm{W}_{n}\Omega^\cdot \longrightarrow 0 \end{array}$$

Observer l'analogie avec le morphisme de (II $(1.2.2)_{n+1}$) dans (II $(1.2.2)_n$) déduit de (I (3.3.3)) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{W}\Omega^{i-1} & \xrightarrow{(\mathrm{F}^{n+1},\,-\mathrm{F}^{n+1}d)} & \mathrm{W}\Omega^{i-1}\oplus\mathrm{W}\Omega^i & \xrightarrow{d\mathrm{V}^{n+1}+\mathrm{V}^{n+1}} & \mathrm{W}\Omega^i & \longrightarrow & \mathrm{W}_{n+1}\Omega^i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{V},\mathrm{V})} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{W}\Omega^{i-1} & \xrightarrow{(\mathrm{F}^{n},\,-\mathrm{F}^{n}d)} & \mathrm{W}\Omega^{i-1}\oplus\mathrm{W}\Omega^i & \xrightarrow{d\mathrm{V}^{n}+\mathrm{V}^{n}} & \mathrm{W}\Omega^i & \longrightarrow & \mathrm{W}_{n}\Omega^i \longrightarrow 0 \end{array}$$

4. Une suite spectrale auxiliaire

Les constructions de ce numéro sont destinées à nous permettre, au n° 5, d'exploiter l'analogie entre les suites (II (1.2.2)) et (3.3.7), à l'aide d'un substitut à la suite spectrale (II (1.4.4)^i ou (1.4.8)^i).

(4.1) Soit A une catégorie abélienne. On note C(A) ou A′ la catégorie des complexes de A, CF(A) la catégorie des complexes filtrés de A, de filtration finie (décroissante), et, si $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbf{Z}$, $\mathrm{CF}^{[a,b]}(A)$ désigne la sous-catégorie pleine de CF(A) formée des complexes filtrés $(M, F^\cdot M)$ tels que $\mathrm{gr}^i M = 0$ si $i \notin [a, b]$, *i.e.* tels qu'on ait $M = F^a M \supset F^{a+1}M \supset \ldots \supset F^b M \supset F^{b+1}M = 0$. On note DF(A), $\mathrm{DF}^{[a,b]}(A)$ les catégories dérivées correspondantes, obtenues en inversant les quasi-isomorphismes filtrés [9, V, 1] (rappelons *(loc. cit.)* que $\mathrm{DF}^{[a,b]}(A)$ est une sous-catégorie pleine de DF(A)), et $D^*F(A)$, $D^*F^{[a,b]}(A)$ les sous-catégories pleines définies par des conditions de degré $* = +, -$, etc.

(4.2) Notons

(4.2.1) $\mathrm{Car}(A')$

la catégorie des carrés commutatifs de $A' = C(A)$,

$$\mathrm{L} = \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^{-1,-1} & \xrightarrow{d'} & \mathrm{L}^{0,-1} \\ \downarrow{\scriptstyle d''} & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ \mathrm{L}^{-1,0} & \xrightarrow{d'} & \mathrm{L}^{00} \end{array} \qquad (d''d' = d'd'')$$

considérés comme bi-complexes de A′ concentrés en degrés $[-1, 0] \times [-1, 0]$. Pour $\mathrm{L} \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Car}(A')$, soit

(4.2.2) $$\mathrm{K}(\mathrm{L}) = (0 \longrightarrow \mathrm{L}^{-1,-1} \xrightarrow{(d'', -d')} \mathrm{L}^{-1,0} \oplus \mathrm{L}^{0,-1} \xrightarrow{d'+d''} \mathrm{L}^{00} \longrightarrow 0) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{C}(A')$$

le complexe simple (de A′) associé à L (donc concentré en degrés $[-2, 0]$), et soit

(4.2.3) $$k(\mathrm{L}) = \mathbf{s}\mathrm{K}(\mathrm{L}) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{C}(A)$$

le complexe simple (de A) associé à K(L), K(L) étant considéré comme bi-complexe de A. La filtration de K(L) par les tronqués naïfs définit une filtration en deux crans de $k(\mathrm{L})$:

$$\begin{aligned} F^{-2}k(\mathrm{L}) &= k(\mathrm{L}) \\ F^{-1}k(\mathrm{L}) &= \mathbf{s}(\mathrm{K}(\mathrm{L})^{\geqslant -1}) = \mathbf{s}(0 \longrightarrow \mathrm{L}^{-1,0} \oplus \mathrm{L}^{0,-1} \xrightarrow{d'+d''} \mathrm{L}^{00} \longrightarrow 0) \\ F^{0}k(\mathrm{L}) &= \mathrm{L}^{00}, \end{aligned}$$

de gradué associé

$$\mathrm{gr}^{-2}k(\mathrm{L}) = \mathrm{L}^{-1,-1}[2],$$
$$\mathrm{gr}^{-1}k(\mathrm{L}) = (\mathrm{L}^{-1,0} \oplus \mathrm{L}^{0,-1})[1],$$
$$\mathrm{gr}^{0}k(\mathrm{L}) = \mathrm{L}^{00}.$$

On obtient ainsi un foncteur

(4.2.4) $\qquad k : \mathrm{Car}(\mathrm{A}') \to \mathrm{CF}^{[-2,0]}(\mathrm{A}).$

Disons qu'une flèche de Car(A') est un quasi-isomorphisme si elle induit des quasi-isomorphismes sur les sommets, et notons car(A') la catégorie déduite de Car(A') en inversant les quasi-isomorphismes. Par définition, k transforme quasi-isomorphisme de Car(A') en quasi-isomorphisme de $\mathrm{CF}^{[-2,0]}(\mathrm{A})$, donc définit par passage au quotient un foncteur

(4.2.5) $\qquad k : \mathrm{car}(\mathrm{A}') \to \mathrm{DF}^{[-2,0]}(\mathrm{A}).$

Pour tout objet M de DF(A), et tout $i \in \mathbf{Z}$, l'extension

$$0 \to \mathrm{gr}^{i}\mathrm{M} \to \mathrm{F}^{i-1}\mathrm{M}/\mathrm{F}^{i+1}\mathrm{M} \to \mathrm{gr}^{i-1}\mathrm{M} \to 0$$

définit une flèche de D(A),

$$\mathrm{gr}^{i-1}\mathrm{M} \to \mathrm{gr}^{i}\mathrm{M}[1],$$

dite flèche canonique. Il est aisé d'expliciter ces flèches canoniques dans le cas où $\mathrm{M} = k(\mathrm{L})$: elles sont données par

(4.2.6)
$$(\mathrm{gr}^{-2}k(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{gr}^{-1}k(\mathrm{L})[1]) = (\mathrm{L}^{-1,-1} \xrightarrow{(d'',-d')} \mathrm{L}^{-1,0} \oplus \mathrm{L}^{0,-1})[2],$$
$$(\mathrm{gr}^{-1}k(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{gr}^{0}k(\mathrm{L})[1]) = (\mathrm{L}^{-1,0} \oplus \mathrm{L}^{0,-1} \xrightarrow{d'+d''} \mathrm{L}^{00})[1],$$

comme on le vérifie trivialement.

Une dernière remarque, concernant le calcul de $k(\mathrm{L})$. Supposons qu'on dispose d'un complexe $\mathrm{M} = (\mathrm{M}^{-1} \xrightarrow{d} \mathrm{M}^{0})$ de A', et d'une augmentation $u : \mathrm{L} \to \mathrm{M}$, *i.e.* d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^{0,-1} & \xrightarrow{u^{-1}} & \mathrm{M}^{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle d''} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \mathrm{L}^{00} & \xrightarrow{u^{0}} & \mathrm{M}^{0} \end{array}$$

avec $u^{-1}d' = 0$, $u^{0}d' = 0$, de telle sorte que u définisse des quasi-isomorphismes de C(A) :

$$u^{-1} : \mathbf{s}(\mathrm{L}^{-1,-1} \xrightarrow{d'} \mathrm{L}^{0,-1}) \to \mathrm{M}^{-1},$$
$$u^{0} : \mathbf{s}(\mathrm{L}^{-1,0} \xrightarrow{d'} \mathrm{L}^{00}) \to \mathrm{M}^{0}.$$

Alors u définit un quasi-isomorphisme $K(L) \to M$ de $C(A')$, d'où, par application de $\mathbf{s}$, un quasi-isomorphisme de $C(A)$:

(4.2.7) $\qquad u : k(L) \to \mathbf{s}M.$

(4.3) Soit $L \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Car}(A')$, notons $N^i = \mathbf{s}(0 \to L^{-1,i} \xrightarrow{d'} L^{0,i} \to 0) \in \mathrm{ob}\,A'$ le cône de d', $e : N^i \to L^{-1,i}[1]$ la projection canonique. On a un carré commutatif de A' :

$$r(L) = \begin{array}{ccc} N^{-1} & \xrightarrow{e} & L^{-1,-1}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ N^{0} & \xrightarrow{e} & L^{-1,0}[1] \end{array}$$

où d est définie, par fonctorialité, par les flèches d'' de L. On définit ainsi un foncteur

(4.3.1) $\qquad r : \mathrm{Car}(A') \to \mathrm{Car}(A')$

(« r » comme « rotation »), qui transforme quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme, donc induit un foncteur, encore noté r, de $\mathrm{car}(A')$ dans $\mathrm{car}(A')$. On notera k' le foncteur composé

(4.3.2) $\qquad k' = kr : \mathrm{Car}(A') \to \mathrm{CF}^{[-2,0]}(A) \quad (\text{resp. } \mathrm{car}(A') \to \mathrm{DF}^{[-2,0]}(A)).$

On a donc :

(4.3.3)
$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^{-2}k'(L) &= N^{-1}[2], \\ \mathrm{gr}^{-1}k'(L) &= (N^0 \oplus L^{-1,-1}[1])[1], \\ \mathrm{gr}^{0}k'(L) &= L^{-1,0}[1]. \end{aligned}$$

De plus, comme les triangles

$$L^{i,-1} \xrightarrow{d'} L^{i,0} \longrightarrow N^i \xrightarrow{e} L^{i,-1}[1]$$

sont distingués, il résulte de (4.2.7) que l'augmentation d' de $r(L)$ dans $L^{0,\cdot}[1]$ définit un quasi-isomorphisme

(4.3.4) $\qquad k'(L) \to (\mathbf{s}L^{0,\cdot})[1].$

Enfin, les flèches canoniques (4.2.6) s'écrivent ici :

(4.3.5)
$$\begin{aligned} (\mathrm{gr}^{-2}k'(L) \longrightarrow \mathrm{gr}^{-1}k'(L)[1]) &= (N^{-1} \xrightarrow{(d,-e)} N^0 \oplus L^{-1,-1}[1])[2] \\ (\mathrm{gr}^{-1}k'(L) \longrightarrow \mathrm{gr}^{0}k'(L)[1]) &= (N^0 \oplus L^{-1,-1}[1] \xrightarrow{e+d''} L^{-1,0}[1])[1]. \end{aligned}$$

(4.4) Supposons maintenant que A possède suffisamment d'injectifs, et soit T un foncteur additif de A dans une catégorie abélienne B. Le foncteur T admet un foncteur dérivé $RT : D^+(A) \to D^+(B)$, et un foncteur dérivé filtré [9, V]

$RT : D^+F(A) \to D^+F(B)$, envoyant $D^+F^{[a,b]}(A)$ dans $D^+F^{[a,b]}(B)$. Rappelons que, pour tout $M \in \mathrm{ob}\, D^+F(A)$, on a un isomorphisme canonique

(4.4.1) $\qquad RT\,\mathrm{gr}\,M = \mathrm{gr}\,RT\,M.$

On posera $R^nT = \mathscr{H}^nRT$.

Notons $\mathrm{car}^+(A')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{car}(A')$ formée des carrés dont les sommets appartiennent à $D^+(A)$. Soit $L \in \mathrm{ob}\,\mathrm{car}^+(A')$. On a alors $k'(L) \in \mathrm{ob}\, D^+F^{[-2,0]}(A)$. Considérons la suite spectrale du complexe filtré $RT(k'(L)) \in \mathrm{ob}\, D^+F^{[-2,0]}(A)$, qui s'écrit, compte tenu de (4.4.1),

(4.4.2) $\qquad E_1^{ij} = R^{i+j}T(\mathrm{gr}^i k'(L)) \Rightarrow R^*T(k'(L)),$

où $C = \mathbf{s}L^{0,\bullet}$, et $R^*T(k'(L)) = R^{*+1}T(C)$ (4.3.4). D'après (4.3.3) on a :

(4.4.3)
$$E_1^{ij} = 0 \quad \text{si } i \notin [-2, 0],$$
$$E_1^{-2,j} = R^jT(N^{-1})$$
$$E_1^{-1,j} = R^jT(N^0) \oplus R^{j+1}T(L^{-1,-1})$$
$$E_1^{0,j} = R^{j+1}T(L^{-1,0}).$$

Il résulte d'autre part de (4.3.5) que le terme E_1, concentré dans la bande $[-2, 0] \times \mathbf{Z}$, a pour j-ième ligne

(4.4.4) $\qquad E_1^{\bullet j} = (R^jT(N^{-1}) \xrightarrow{(d,-e)} R^jT(N^0) \oplus R^{j+1}T(L^{-1,-1}) \xrightarrow{e+d''} R^{j+1}T(L^{0,-1})).$

En particulier, on a, pour tout j,

(4.4.5) $\qquad E_2^{-1,j} = E_\infty^{-1,j},$

et une suite exacte

(4.4.6) $\qquad 0 \to \mathrm{gr}^{-2}R^{j-1}T(C) \to E_2^{-2,j} \xrightarrow{d_2} E_2^{0,j-1} \to \mathrm{gr}^0 R^jT(C) \to 0.$

C'est la suite spectrale (4.4.2), relative au carré de gauche de (3.3.4) et au foncteur $T = H^0(X, -)$, qui nous fournira le substitut désiré pour (II (1.4.8)).

5. Cohérence de $''E_2$

A partir de maintenant, X désigne un schéma propre et lisse sur k.

(5.1) Considérons la suite spectrale de pro-W-modules définie par les suites spectrales conjuguées de cran n (2.1.1) :

(5.1.1) $\qquad {}''E_2^{ij} = H^i(X, \mathscr{H}^jW.\Omega^\bullet) \Rightarrow H^*(X, W.\Omega^\bullet) = H^*(X/W_\bullet),$

dont la limite projective est la suite spectrale conjuguée (2.1.3). La différentielle d_2 de (5.1.1) est définie par les flèches canoniques (3.2.11). Il résulte donc de (3.2.10) qu'on a :

(5.1.2) $\qquad V'd_2F' = d_2 : H^i(X, \mathscr{H}^jW.\Omega^\bullet) \to H^{i+2}(X, \mathscr{H}^{j-1}W.\Omega^\bullet),$

et par suite

(5.1.3) $\qquad V'd_2F' = d_2 : {}''E_2^{ij} \to {}''E_2^{i+2,j-1},$

où F′ et V′ désignent les endomorphismes de

$$H^*(X, \mathscr{H}^*W.\Omega^\cdot) \quad (\text{resp. } H^*(X, \mathscr{H}^*W\Omega^\cdot) := \varprojlim H^*(X, \mathscr{H}^*W.\Omega^\cdot))$$

induits par les endomorphismes F′ et V′ de $\mathscr{H}^*W.\Omega^\cdot$. Comme F′ (resp. V′) est σ- (resp. σ^{-1}-) linéaire, et que $F'V' = V'F' = p$ (1.3.8), la formule (5.1.3) montre que F′, V′, d_2 munissent le terme ${}''E_2$ de la suite spectrale conjuguée d'une structure de R′-module gradué de niveau 1 et bidegré $(2, -1)$ au sens de (I (4.1), (4.2)).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant, analogue de (II (2.2)) :

Théorème **(5.2).** — *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes,* ${}''E_2$ *est un* R′*-module gradué cohérent.*

(5.2.1) Rappelons (I (3.9), (4.2)) que cela signifie que, si l'on pose

$$\mathrm{Fil}^n({}''E_2^{ij}) = F'^n {}''E_2^{ij} + d_2F'^n {}''E_2^{i-2,j+1},$$

alors :

a) pour tout (i,j) et tout n, ${}''E_2^{ij}/\mathrm{Fil}^n {}''E_2^{ij}$ est un W-module de longueur finie, et ${}''E_2^{ij} = \varprojlim {}''E_2^{ij}/\mathrm{Fil}^n {}''E_2^{ij}$ (en d'autres termes, ''E est profini);

b) pour tout (i,j), ${}''E_3^{ij}$ est un W-module de type fini.

Par ailleurs, on a déjà observé (2.5) que, pour tout n, le composé de F'^n : $\mathscr{H}^jW.\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^jW.\Omega^\cdot$ et de la projection canonique $\mathscr{H}^jW.\Omega^\cdot \xrightarrow{\pi} \mathscr{H}^jW_n\Omega^\cdot$ est nul. Il en résulte qu'on a

(5.2.2) $\qquad \mathrm{Fil}^n {}''E_2^{ij} \subset \mathrm{Ker}\,\pi : H^i(X, \mathscr{H}^jW\Omega^\cdot) \to H^i(X, \mathscr{H}^jW_n\Omega^\cdot),$

d'où un morphisme de systèmes projectifs :

(5.2.3) $\qquad ({}''E_2^{ij})_n = {}''E_2^{ij}/\mathrm{Fil}^n {}''E_2^{ij} \to {}''_nE_2^{ij} = H^i(X, \mathscr{H}^jW_n\Omega^\cdot).$

On démontre comme (II (2.3)) la conséquence suivante de (5.2) :

Corollaire **(5.3).** — *Pour tout* (i,j), *le morphisme* (5.2.3) *a pour noyau et conoyau des systèmes projectifs essentiellement nuls de* W*-modules de longueur finie, en particulier donne un isomorphisme de pro-objets* :

(5.3.1) $\qquad \text{« } \varprojlim \text{ » } ({}''E_2^{ij})_n \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim \text{ » } {}''_nE_2^{ij}.$

La topologie standard sur ${}''E_2^{ij}$ (*définie par les* $\mathrm{Fil}^n {}''E_2^{ij}$) *coïncide avec celle définie par les noyaux des flèches canoniques* $\pi : {}''E_2^{ij} \to {}''_nE_2^{ij}$ (i.e. *limite projective des topologies discrètes des* ${}''_nE_2^{ij}$).

La démonstration de (5.2) sera donnée en (5.6).

Lemme **(5.4).** — *Pour tout* (i,j), $''E_2^{ij}$ *est séparé et complet pour la topologie définie par les* $\mathrm{Fil}^n\,''E_2^{ij}$ (5.2.1), i.e. $''E_2^{ij} = \varprojlim {}''E_2^{ij}/\mathrm{Fil}^n\,''E_2^{ij}$.

D'après (5.2.2), la topologie T_1 définie par les $\mathrm{Fil}^n\,''E_2^{ij}$ est plus fine que la topologie T_2, limite projective des topologies discrètes des ${}''_nE_2^{ij}$. Or F' et d_2 sont continus pour T_2, donc (I (0.5)) $\mathrm{Fil}^n\,''E_2^{ij}$, image de l'application $d_2F'^n + F'^n : {}''E_2^{i-2,j+1} \oplus {}''E_2^{i,j} \to {}''E_2^{ij}$, est fermé pour T_2. Il en résulte (I (0.1)) que $''E_2^{ij}$ est séparé et complet pour T_1.

(5.5) Pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \geqslant 0$, considérons le carré commutatif de complexes de pro-W-modules sur X :

$$\mathrm{L} = \begin{array}{ccc} \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-1] & \xrightarrow{\mathrm{F}^n} & t_{[j,j+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(j,-n)[j-1] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}'^n} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{V}^n,\mathrm{V}'^n)} \\ \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-1] & \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} & t_{[j,j+1]}\mathrm{W}.\Omega^\cdot(j,n)[j-1] \end{array} \tag{5.5.1}$$

déduit par translation (de $j-1$) du carré de gauche de (3.3.4) avec $i=j$ (dans toute la suite nous omettrons de préciser les σ-linéarités). Notons A la catégorie (abélienne) des pro-W-modules sur X. L'exactitude des lignes de (3.3.4) fournit un isomorphisme canonique de D(FlA) :

$$\mathrm{N} \xrightarrow{\sim} (0 \to \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \xrightarrow{\mathrm{V}'^n} \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \to 0), \tag{5.5.2}$$

où N est défini à partir de L comme en (4.3). D'autre part, (3.3.3.1) donne un isomorphisme canonique de D(A), le second membre étant un pro-objet constant :

$$\mathrm{C} = \mathbf{s}\mathrm{L}^{0,\cdot} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^j\mathrm{W}_n\Omega^\cdot[-1] \tag{5.5.3}$$

(avec les notations de (4.3), (4.4)). Enfin, (3.3.5) montre que via (5.5.2) la flèche $e : \mathrm{N}^i \to \mathrm{L}^{-1,i}[1]$ de (4.3) est donnée par

$$\begin{aligned} e^{-1} &= \mathrm{V}'^n d : \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \to \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot, \\ e^0 &= d\mathrm{F}'^n : \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot[-2] \to \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Écrivons la suite spectrale (4.4.2) relative à L (5.5.1) et au foncteur $\mathrm{T} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, -)$ de A dans la catégorie B des pro-W-modules, en rappelant en exposant la dépendance en j :

$$\mathrm{E}_1^{\prime i} = (\mathrm{E}_1^{\prime i})^j = \mathrm{H}^{\prime+i}(\mathrm{X}, \mathrm{gr}^\prime k'(\mathrm{L})) \Rightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{C}[1]) \tag{5.5.5}$$

(avec $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{C}[1]) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathscr{H}^j\mathrm{W}_n\Omega^\cdot)$ (5.5.3)). D'après (4.4.4), et compte tenu de (5.5.2) et (5.5.4), la i-ième ligne de E_1 s'écrit (à isomorphisme canonique près)

$$\begin{aligned} (\mathrm{E}_1^{\cdot i})^j = (\mathrm{H}^{i-2}(\mathrm{X}, \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot) \\ \xrightarrow{(\mathrm{V}'^n, -\mathrm{V}'^n d_2)} \mathrm{H}^{i-2}(\mathrm{X}, \mathscr{H}^{j+1}\mathrm{W}.\Omega^\cdot) \oplus \mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot) \\ \xrightarrow{d_2\mathrm{F}'^n + \mathrm{F}'^n} \mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{H}^j\mathrm{W}.\Omega^\cdot)), \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

(où d_2 est la différentielle de (5.1.1)). La suite spectrale (5.5.5) étant à valeurs dans la catégorie des pro-W-modules de longueur finie, sa limite projective est une suite spectrale, que nous noterons $(\mathscr{E}_r^{\bullet\bullet})^j$. La i-ième ligne du terme E_1, limite projective de (5.5.6), s'écrit donc

$$(\mathscr{E}_1^{\bullet i})^j = ({}''E_2^{i-2,j+1} \xrightarrow{(V'^n, -V'^n d_2)} {}''E_2^{i-2,j+1} \oplus {}''E_2^{ij} \xrightarrow{d_2 F'^n + F'^n} {}''E_2^{ij}). \tag{5.5.7}$$

Du procédé de calcul des $\mathrm{Tor}_\bullet^{R'}(R'_n, -)$ traduit de (I (3.4)) résulte alors que :

$$(\mathscr{E}_2^{\ell i})^j = \mathrm{Tor}_{-\ell}^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{(i,j)} \tag{5.5.8}$$

(l'exposant (i,j) indiquant la partie homogène de bidegré (i,j)).

(5.6) *Démonstration de* (5.2). — Notons ${}_n(\mathscr{E})^j$ (pour indiquer la dépendance en n) la suite spectrale limite projective de (5.5.5). Pour $h \in \mathbf{Z}$ donné, ${}''E_2^{h-2\bullet,\bullet}$ est un R'-module gradué (par le second degré), de différentielle de degré -1, et l'on a

$${}''E_2 = \bigoplus_{h \in \mathbf{Z}} {}''E_2^{h-2\bullet,\bullet}.$$

On doit donc montrer que, pour tout h, ${}''E_2^{h-2\bullet,\bullet}$ est un R'-module cohérent. Compte tenu de (I (3.8) et (5.4)), et grâce à (5.5.8), cela revient à prouver, pour tout h, l'assertion suivante :

(A_h) : Quels que soient les entiers n, ℓ, j $(n \geqslant 1)$, ${}_n\mathscr{E}_2^{\ell,h-2j})^j$ $(= \mathrm{Tor}_{-\ell}^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{h-2j,j})$ est un W-module de longueur finie.

Nous allons démontrer (A_h) par récurrence descendante sur h. (A_h) est vraie pour $h > 3N$, où $N = \dim(X)$, car, si $i + 2j = h$, ou bien $i > N$ ou bien $j > N$, et dans l'un et l'autre cas on a ${}''E_2^{i-2,j+1} = {}''E_2^{ij} = 0$, donc ${}_n(\mathscr{E}_1^{\bullet i})^j = 0$ (5.5.7), et *a fortiori* ${}_n(\mathscr{E}_2^{\bullet i})^j = 0$. Montrons que ($A_h$) implique ($A_{h-1}$). Considérons la suite exacte (de pro-W-modules de longueur finie) de la forme (4.4.6) associée à la suite spectrale (5.5.5) (en rappelant par un indice la dépendance en n) :

$$0 \to \mathrm{gr}^{-2}H^{i-2}(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet) \to ({}_nE_2^{-2,i})^j \xrightarrow{d_2} ({}_nE_2^{0,i-1})^j \to \mathrm{gr}^0 H^{i-1}(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet) \to 0,$$

où C a été identifié à $\mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet[-1]$ par (5.5.3). La limite projective de cette suite exacte est une suite exacte qui, compte tenu de (5.5.8), s'écrit

$$0 \to \mathrm{gr}^{-2}H^{i-2}(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet) \to \mathrm{Tor}_2^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{ij} \xrightarrow{d_2} \mathrm{Tor}_0^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{i-1,j} \to \mathrm{gr}^0 H^{i-1}(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet) \to 0. \tag{5.6.1}$$

Faisons $i = h - 2j$ dans (5.6.1). Comme $H^*(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\bullet)$ est de longueur finie, l'hypothèse (A_h) (pour $\ell = -2$) entraîne, grâce à (5.6.1), que, pour tout n et tout j, $\mathrm{Tor}_0^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{h-1-2j,j}$ est de longueur finie, donc, compte tenu de (5.4), que ${}''E_2^{h-1-2\bullet,\bullet}$ est un R'-module gradué profini. Il reste à vérifier que ce module est cohérent. Or

l'isomorphisme (4.4.5) relatif à la suite spectrale (5.5.5) fournit, par passage à la limite projective et compte tenu de (5.5.8), un isomorphisme

(5.6.2) $\quad \mathrm{Tor}_1^{R'}(R'_n, {}''E_2)^{ij} = \mathrm{gr}^{-1}H^{i-1}(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot).$

Faisant $i = h - 1 - 2j$ dans (5.6.2), on trouve que $\mathrm{Tor}_1^{R'}(R'_n, {}''E_2^{h-1-2\cdot,\cdot})$ est de longueur finie pour tout n. Comme on sait déjà que ${}''E_2^{h-1-2\cdot,\cdot}$ est un R'-module gradué profini, on en conclut par (I (3.8)) que $\mathrm{Tor}_2^{R'}(R'_n, {}''E_2^{h-1-2\cdot,\cdot})$ est de longueur finie pour tout n. Cela prouve (A_{h-1}) (*i.e.* la cohérence de ${}''E_2^{h-1-2\cdot,\cdot}$) et achève la démonstration de (5.2).

Remarques **(5.7).** — *a)* Notons L_n le carré (5.5.1). Compte tenu de (3.4.3) et (3.4.4), le morphisme (3.4.1) définit un morphisme de carrés commutatifs

(5.7.1) $\quad \pi : L_{n+1} \to L_n.$

Par application de k' (4.3.2), on déduit de π un morphisme de suites spectrales

(5.7.2) $\quad \pi : (5.5.5)_{n+1} \to (5.5.5)_n,$

qui, d'après (3.4.2), induit sur l'aboutissement la projection canonique

$$\pi : H^*(X, \mathscr{H}^j W_{n+1}\Omega^\cdot) \to H^*(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot).$$

Il résulte de plus de (3.4.5) que le morphisme de $(5.5.6)_{n+1}$ dans $(5.5.6)_n$ — et donc de $(5.5.7)_{n+1}$ dans $(5.5.7)_n$ — défini par (5.7.2) est donné par p en degré -2, (F', F') en degré -1, et l'identité en degré 0. Compte tenu de la description de la projection $\mathrm{Tor}^{R'}(R'_{n+1}, -) \to \mathrm{Tor}^{R'}(R'_n, -)$ donnée par (I (3.3.3)), on voit donc que, par l'identification (5.5.8), la projection π de ${}_{n+1}\mathscr{E}_2^{\ell i})^j$ dans ${}_n\mathscr{E}_2^{\ell i})^j$ correspond à la projection canonique des Tor. D'après (I (3.8)), il en résulte notamment que les pro-objets « $\varprojlim_n$ » ${}_n\mathscr{E}_2^{\ell i})^j$ sont nuls pour $\ell = -1, -2$, et que par conséquent la suite spectrale de pro-objets « $\varprojlim_n$ » ${}_n\mathscr{E})^j$ dégénère en E_2. Le morphisme de systèmes projectifs

$$({}_n\mathscr{E}_2^{0i})^j \,(= H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)/\mathrm{Fil}^n) \to H^i(X, \mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot)$$

est donc un isomorphisme de pro-objets : on retrouve (5.3).

b) Les constructions du n° 4, faites en vue de la démonstration de (5.2), redonnent également la suite spectrale (II (1.4.8)), qui joue un rôle clé dans la démonstration de la cohérence du terme E_1 de la première suite spectrale de de Rham-Witt (II (2.2)). En effet, le complexe $K(i)$ de (II (1.4.7)), muni de la filtration par les tronqués naïfs, n'est autre que le complexe filtré $k(M)$ associé, avec les notations de (4.2), au carré commutatif

$$M = \begin{array}{ccc} W\Omega^{i-1} & \xrightarrow{F^n d} & W\Omega^i \\ \downarrow{\scriptstyle F^n} & & \downarrow{\scriptstyle V^n} \\ W\Omega^{i-1} & \xrightarrow{dV^n} & W\Omega^i \end{array}$$

et la suite spectrale (II (1.4.8)) est celle du complexe filtré $R\Gamma(X, K(i))$.

6. Applications

On continue de supposer X propre et lisse sur k. On désigne désormais par E la suite spectrale conjuguée (2.1.3). Le théorème (5.2) a des conséquences analogues à celles de (II (2.2)) développées en (II, 3), et dont nous allons indiquer rapidement les principales.

(6.1) Tout d'abord, la cohérence de E_2 entraîne, compte tenu de (I (2.9)), le résultat de finitude (2.2) *a)*, d'où découle formellement, comme on a vu, la dégénérescence en E_2 modulo torsion de la suite spectrale conjuguée. Comme, de plus, E_r est de type fini sur W pour tout $r \geqslant 3$, il en résulte que la suite spectrale conjuguée dégénère en E_3 modulo longueur finie.

(6.2) Pour tout (i,j), E_2^{ij} admet le dévissage canonique (cf. (I (2.9)))

$$\textbf{(6.2.1)} \qquad V'^{\infty}B_3^{ij} \subset F'^{-\infty}Z_3^{ij} \subset E_2^{ij},$$

où $V'^{\infty}B_3^{ij}$ est le plus petit sous-R'^0-module de E_2^{ij} contenant $B_3^{ij} = \operatorname{Im} d_2^{i-2,j+1}$, et $F'^{-\infty}Z_3^{ij}$ le plus grand sous-R'^0-module de E_2^{ij} contenu dans $Z_3^{ij} = \operatorname{Ker} d_2^{ij}$. Les quotients $V'^{\infty}B_3^{ij}/B_3^{ij}$ et $Z_3^{ij}/F'^{-\infty}Z_3^{ij}$ sont de longueur finie, et $F'^{-\infty}Z_3^{ij}/V'^{\infty}B_3^{ij}$ est un W-module de type fini qu'on appelle le *cœur* de E^{ij}, et qu'on note

$$\textbf{(6.2.2)} \qquad \text{Cœur}(E^{ij}) = F'^{-\infty}Z_3^{ij}/V'^{\infty}B_3^{ij}.$$

Sur $V'^{\infty}B_3^{ij}$, qu'on appelle *sous-module de type d*F' de E_2^{ij}, F' est nilpotent et V' est surjectif, de noyau de longueur finie. Le quotient $E_2^{ij}/F'^{-\infty}Z_3^{ij}$, qu'on appelle *quotient de type* F' (ou F'-*unipotent* ou *unipotent*) de E_2^{ij}, est un R'^0-module de Cartier unipotent : V' est nilpotent, et F' est injectif, de conoyau de longueur finie. Le R'^0-module $E_2^{ij}/V'^{\infty}B_3^{ij}$ est F'-fini, son cœur (resp. quotient unipotent) (I (2.7)) est le cœur (resp. quotient unipotent) de E_2^{ij}. La différentielle d_2 admet la factorisation canonique

(6.2.3)

$$\begin{array}{ccc} E_2^{ij} & \xrightarrow{d_2} & E^{i+2,j-1} \\ \downarrow & & \uparrow \\ E_2^{ij}/F'^{-\infty}Z_3^{ij} & \longrightarrow & V'^{\infty}B_3^{i+2,j-1} \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est un domino (I (2.16)). On a (I (2.18.2)) :

$$\textbf{(6.2.3.1)} \qquad (E_2^{ij} \text{ est de type fini sur W}) \Leftrightarrow (V'^{\infty}B_3^{ij} = 0 \text{ et } E_2^{ij}/F'^{-\infty}Z_3^{ij} = 0).$$

Enfin, si l'on définit de la manière habituelle la chaîne de cycles et bords

$$\mathbf{(6.2.4)} \qquad 0 = B_2^{ij} \subset B_3^{ij} \subset \ldots \subset B_r^{ij} \subset \ldots \subset B_\infty^{ij} \subset Z_\infty^{ij} \subset \ldots \subset Z_r^{ij} \subset \ldots \subset Z_3^{ij} \subset Z_2^{ij} = E_2^{ij},$$

$$Z_r^{ij} = \operatorname{Ker} H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \xrightarrow{d} H^i(X, t_{[j-r+2,j-1]} W\Omega^\cdot[j+1])$$

$$B_r^{ij} = \operatorname{Im} H^i(X, t_{[j+1,j+r-2]} W\Omega^\cdot[j-1]) \xrightarrow{d} H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot),$$

$$Z_\infty^{ij} = \bigcap Z_r^{ij}, \quad B_\infty^{ij} = \bigcup B_r^{ij}$$

(avec la notation [1])

$$\mathbf{(6.2.5)} \qquad H^*(X, t_{[a,b]} W\Omega^\cdot) := \varprojlim_n H^*(X, t_{[a,b]} W_n\Omega^\cdot),$$

de sorte que $E_r^{ij} = Z_r^{ij}/B_r^{ij}$ pour $2 \leqslant r \leqslant +\infty$, on a une propriété de survie du cœur analogue à (II (3.4)) :

Théorème **(6.3).** — *Pour tout* (i,j), *on a*

$$\mathbf{(6.3.1)} \qquad B_\infty^{ij} \subset V'^\infty B_3^{ij} \subset F'^{-\infty} Z_3^{ij} \subset Z_\infty^{ij}.$$

La démonstration repose sur le lemme suivant, analogue de (II (3.5)) :

Lemme **(6.4).** — a) (i) *Pour tout* $r \geqslant 2$, Z_r^{ij} *est stable par* $V' : E_2^{ij} \to E_2^{ij}$.

(ii) *Pour tout* $r \geqslant 2$, *l'endomorphisme* $V'_r = p^{r-2}V'$ *de* E_2^{ij} *laisse stable* B_r^{ij}, *donc induit un endomorphisme, encore noté* V'_r, *de* E_r^{ij}.

(iii) *Pour* $r \geqslant 2$, *posons*

$$F'^{-1}Z_r^{ij} = \{x \in E_2^{ij} \mid F'x \in Z_r^{ij}\}.$$

On a $F'^{-1}Z_r^{ij} \subset Z_r^{ij}$, *d'où une inclusion* $\varepsilon : F'^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} \to E_r^{ij}$. *De plus, on a*

$$\mathbf{(6.4.1)} \qquad V'_r d_r F' = d_r \varepsilon,$$

où $F' : F'^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} \to E_r^{ij}$ *est défini grâce à* b) (i) *ci-dessous.*

b) (i) *Pour tout* $r \geqslant 2$, B_r^{ij} *est stable par* $F' : E_2^{ij} \to E_2^{ij}$.

(ii) *Pour tout* $r \geqslant 2$, *l'endomorphisme* $F'_r = p^{r-2}F'$ *de* E_2^{ij} *laisse stable* Z_r^{ij}, *donc induit un endomorphisme, encore noté* F'_r, *de* E_r^{ij}.

(iii) *Pour* $r \geqslant 2$, *on a* $V'(B_r^{ij}) \supset B_r^{ij}$, *d'où un épimorphisme* $\pi : E_r^{ij} \to Z_r^{ij}/V'(B_r^{ij})$. *On a de plus*

$$\mathbf{(6.4.2)} \qquad V' d_r F'_r = \pi d_r,$$

où $V' : E_r^{i+r,j-r+1} \to Z_r^{i+r,j-r+1}/V'(B_r^{i+r,j-r+1})$ *est défini grâce à* a) (i).

Esquissons rapidement la démonstration, qui est analogue à celle de (II (3.5)). On a

$$Z_r^{ij} = \operatorname{Im} H^i(X, t_{[j-r+2,j]} W\Omega^\cdot[j]) \to H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\cdot).$$

---

[1] Même observation que pour (2.1.4).

Comme l'endomorphisme $V'_{\leqslant j}$ de $t_{\leqslant j}W.\Omega^\bullet$ induit V' sur $\mathscr{H}^j W.\Omega^\bullet$ (1.7.2), l'assertion a) (i) en résulte. On vérifie de même b) (i) à l'aide de $F'_{\geqslant}$ (1.7.3). L'assertion a) (ii) découle de l'identité

$$B_r^{ij} = \mathrm{Ker}\, H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\bullet) \to H^i(X, t_{[j,j+r-2]}W\Omega^\bullet[j])$$

et du fait que l'endomorphisme $V'_{\leqslant j+r-2}$ de $t_{[j,j+r-2]}W.\Omega^\bullet$ induit $p^{r-2}V'$ sur $\mathscr{H}^j W.\Omega^\bullet$, car $pV' = V$ sur $ZW.\Omega^j$ (1.3.3). L'identité

$$V'_{\leqslant j-1}dF' = d\colon \mathscr{H}^j W.\Omega^\bullet \to t_{\leqslant j-1}W.\Omega^\bullet[j+1]$$

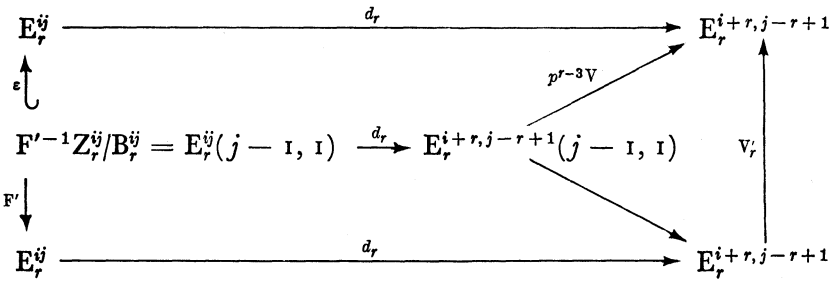
(conséquence de (3.2.9)) entraîne l'inclusion $F'^{-1}Z_r^{ij} \subset Z_r^{ij}$, puisque

$$F'^{-1}Z_r^{ij} = \mathrm{Ker}\, dF' : H^i(X, \mathscr{H}^j W\Omega^\bullet) \to H^i(X, t_{[j-r+2,j-1]}W\Omega^\bullet[j+1]).$$

Pour établir (6.4.1), on utilise à nouveau les complexes de Nygaard (3.2). Pour $n \in \mathbf{Z}$, la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans $W.\Omega^\bullet(j-1, n)$ est formée, comme on le vérifie facilement, de pro-W-modules de longueur finie, donc a pour limite une suite spectrale, qu'on notera

$$E_2^{ab}(j-1, n) = H^a(X, \mathscr{H}^b W\Omega^\bullet(j-1, n)) \Rightarrow H^*(X, W\Omega^\bullet(j-1, n)).$$

Il résulte de (3.2.8) que $F'^{-1}Z_r^{ij} = Z_r^{ij}(j-1, 1)$, d'où $F'^{-1}Z_r^{ij}/B_r^{ij} = E_r^{ij}(j-1, 1)$. Des morphismes de complexes $V_{j-1,1}$ et $F_{j-1,1}$ de (3.2.4) on déduit alors un diagramme commutatif :



où se lit (6.4.1). La vérification de b) (ii) et (iii) est similaire.

On prouve (6.3) à partir de (6.4) exactement comme (II (3.4)) à partir de (II (3.5)), en utilisant la finitude sur W de E_r^{ij} pour $r \geqslant 3$ (6.1).

Comme pour (II (3.4)), nous donnerons en (IV (2.14)) une autre démonstration de (6.3), s'appuyant sur la structure de la cohomologie de X à valeurs dans les cycles et les bords du complexe de de Rham-Witt.

Les corollaires (6.5) à (6.7) ci-après se déduisent de (5.2) et (6.3) comme (II (3.8), (3.9), (3.10)) de (II (2.2), (3.4)).

Corollaire **(6.5).** — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *La différentielle* $d_2 : E_2^{i-2,j+1} \to E_2^{ij}$ *est nulle.*

(ii) $E_2^{ij}/F'E_2^{ij}$ *est de dimension finie sur* k.

(ii') ${}_{F'}E_2^{ij}$ *est de dimension finie sur* k.

(iii) $E_2^{i-2,j+1}/V'E_2^{i-2,j+1}$ *est de dimension finie sur* k.
(iii') ${}_{V'}E_2^{i-2,j+1}$ *est de dimension finie sur* k.
(iv) $V'^{\infty}B_3^{ij} = 0$.
(v) $F'^{-\infty}Z_3^{i-2,j+1} = E_3^{i-2,j+1}$.

De plus, ces conditions entraînent que toute différentielle d_r *aboutissant en* E_r^{ij} *ou issue de* $E_r^{i-2,j+1}$ *est nulle.*

Corollaire **(6.6)**. — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$. *Si* E_2^{ij} *est de type fini sur* W, *alors* $E_2^{ij} = E_\infty^{ij}$ *(toute différentielle* d_r *aboutissant à ou issue de* E_r^{ij} *est nulle).*

Corollaire **(6.7)**. — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$. a) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(i) $Z_3^{ij} = F'^{-\infty}Z_3^{ij}$;
(ii) Z_3^{ij} *est stable par* F', i.e. $\operatorname{Ker} d_2 = \operatorname{Ker} d_2F' : E_2^{ij} \to E_2^{i+2,j-1}$.

Elles entraînent que toute différentielle d_r, $r \geqslant 3$, *issue de* E_r^{ij} *est nulle.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(i) $B_3^{ij} = V'^{\infty}B_3^{ij}$;
(ii) B_3^{ij} *est stable par* V', i.e. $\operatorname{Im} d_2 = \operatorname{Im} V'd_2 : E_2^{i-2,j+1} \to E_2^{ij}$.

Elles entraînent que toute différentielle d_r, $r \geqslant 3$, *aboutissant à* E_r^{ij} *est nulle.*

Le résultat suivant est une contrepartie de la dégénérescence partielle $'E_1^{Ni} = {}'E_\infty^N$ pour X de dimension N (cf. (II (3.9))) :

Corollaire **(6.8)**. — *On a, pour tout* i, $E_2^{i0} = E_\infty^{i0}$. *En particulier,* $E_2^{i0} = H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot)$ *est de type fini sur* W, *et l'on a une injection naturelle*

$$\mathbf{(6.8.1)} \qquad H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot) \hookrightarrow H^i(X/W).$$

L'image de (6.8.1) *est le plus grand sous-*F*-module de* $H^i(X/W)$ *où l'opération* Φ *de Frobenius est inversible (« sous-*F*-cristal unité »).*

On montrera plus loin (IV (3.13.5)) que, pour k algébriquement clos, l'inclusion $\mathbf{Z}/p^\cdot \hookrightarrow \mathscr{H}^0W.\Omega_X^\cdot$ induit un isomorphisme $H^i_{ét}(X, \mathbf{Z}_p) \otimes W \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot)$ (cf. Katz [14 (8.2), (8.3)]).

Prouvons (6.8). Pour la première assertion, il suffit, d'après (6.5), de montrer que E_2^{i0}/F' est de dimension finie sur k. Grâce à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot \xrightarrow{F'} \mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot \to \mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot/F'\mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot \to 0,$$

il suffit pour cela de vérifier que $H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot/F') := \varprojlim H^i(X, \mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot/F')$ est de dimension finie sur k. Or, d'après (1.6.3) et (1.6.5), on a un isomorphisme de pro-objets (σ^{-1}-linéaire)

$$\mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot/F' \xrightarrow{\sim} Z.\mathscr{O},$$

les flèches de transition de $Z.\mathcal{O}$ étant les inclusions canoniques, et les isomorphismes $F^n\ (= C^{-n}) : \sigma^{n*}\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} Z_n\mathcal{O}$ donnent un isomorphisme (W-linéaire) de systèmes projectifs $(\sigma^{*}\mathcal{O}, F) \xrightarrow{\sim} Z.\mathcal{O}$. Il en résulte un isomorphisme (σ^{-1}-linéaire)

(6.8.2) $$H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot/F') \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{O})_{ss},$$

où $H^i(X, \mathcal{O})_{ss} = \varprojlim_F \sigma^{*}H^i(X, \mathcal{O})$ est la partie semi-simple de $H^i(X, \mathcal{O})$ sous l'action de F, ce qui montre la finitude désirée. La seconde assertion de (6.8) découle de la première. Prouvons la dernière. Puisque $E_2^{i0} = E_\infty^{i0}$, on a une suite exacte de F-modules

(6.8.3) $$0 \to H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot) \to H^i(X/W) \to H^i(X, t_{\geqslant 1}W\Omega^\cdot) \to 0$$

(avec la notation de (2.3.1)), l'opération Φ de F étant définie par l'endomorphisme $\mathfrak{F}$ de $W.\Omega^\cdot$ égal à p^iF en degré i. Sur $H^i(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot)$, Φ est inversible, car F est un automorphisme du pro-objet $\mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot = ZW.\mathcal{O}$ (cf. (1.3.3)). D'autre part, on a $\mathfrak{F} \mid t_{\geqslant 1}W.\Omega^\cdot = F'_{\geqslant 1}$ par définition de $F'_{\geqslant i}$ (1.7.3), donc, d'après la partie facile de (2.3.2), Φ est topologiquement nilpotent sur $H^i(X, t_{\geqslant 1}W\Omega^\cdot)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(6.9)**. — *On a* $E_2^{01} = E_\infty^{01}$ *et* $E_2^{11} = E_\infty^{11}$.

Noter que la suite exacte (6.8.3), pour $i = 1$, s'écrit

(6.9.1) $$0 \to H^1(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot) \to H^1(X/W) \to H^0(X, \mathscr{H}^1W\Omega^\cdot) \to 0,$$

et est canoniquement scindée : cette décomposition correspond, par le foncteur de Dieudonné-Cartier covariant, à celle du groupe p-divisible associé à $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}$ en partie multiplicative, de module de Cartier $H^1(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot)$, et partie complémentaire (*i.e.* de dual connexe), de module de Cartier $H^0(X, \mathscr{H}^1W\Omega^\cdot)$ (cf. [10, II (3.11)] et (IV (4.5))).

Corollaire **(6.10)**. — *Supposons que* X *soit une surface. Toutes les différentielles* d_r *de la suite spectrale conjuguée sont nulles, à l'exception éventuellement de* $d_2 : E_2^{02} \to E_2^{21}$. *Pour* $(i,j) \neq (0, 2), (2, 1)$, E_2^{ij} *est de type fini sur* W. *On a* $\mathrm{gr}^0H^2(X/W) = \mathrm{Ker}\, d_2^{02}$, $\mathrm{gr}^1H^2(X/W) = H^1(X, \mathscr{H}^1W\Omega^\cdot)$, $\mathrm{gr}^2H^2(X/W) = H^2(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot)$. *Si* E_2^{02} *ou* E_2^{21} *est de type fini sur* W, *la suite spectrale conjuguée dégénère en* E_2.

Il y a une analogie frappante entre (6.10) et le théorème de structure [10, II (3.14)] relatif à la première suite spectrale de de Rham-Witt. Nous examinerons plus loin (IV (2.11)) les relations entre ces deux énoncés. Nous verrons notamment que, si X est une surface K3 supersingulière d'invariant σ_0, alors, tout comme $'d_1 : {}'E_1^{20} \to {}'E_1^{21}$, $''d_2 : {}''E_2^{02} \to {}''E_2^{11}$ est de type II_{σ_0} (I (2.16)), et que $H^1(X, \mathscr{H}^1W\Omega^\cdot)$ et $H^1(X, W\Omega^1)$ s'identifient au même sous-F-module de $H^2(X/W)$, $P^1H^2(X/W) = P_1H^2(X/W)$.

(6.11) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{Z}$, avec $b - a = n \geqslant 1$. Comme en (II (3.12)), on peut analyser $H^*(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot)$ (6.2.5) à l'aide de (5.2) et de la suite spectrale

(6.11.1) $$E_2^{ij}([a, b]) = H^i(X, \mathscr{H}^j t_{[a,b]}W\Omega^\cdot) \Rightarrow H^*(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot),$$

limite projective des suites spectrales d'hypercohomologie de X à valeurs dans les $t_{[a,b]}W_r\Omega^\cdot$. Notons

$$H^*(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot) = P_bH^* \supset P_{b-1}H^* \supset \ldots \supset P_aH^* \supset P_{a-1}H^* = 0$$

la filtration (croissante) de l'aboutissement, déduite de la filtration canonique de $t_{[a,b]}W.\Omega^\cdot$. Le gradué s'exprime en termes des Z_r^{ij}, B_r^{ij} et E_r^{ij} de la suite spectrale conjuguée par les formules suivantes, analogues à (3.12.2) : pour $m = b + i$,

$$\textbf{(6.11.2)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{gr}_b H^m(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot) &= Z_{n+2}^{ib} \\ \mathrm{gr}_{b-h} H^m(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot) &= Z_{n+2}^{i+h,b-h}/B_{h+2}^{i+h,b-h} \qquad (0 < h < n) \\ \mathrm{gr}_a H^m(X, t_{[a,b]}W\Omega^\cdot) &= E_2^{i+n,a}/B_{n+2}^{i+n,a}. \end{aligned}$$

De plus, les endomorphismes $F'_{\geqslant a}$ et $V'_{\leqslant b}$ (1.7) opèrent sur la suite spectrale (6.11.1) et munissent le gradué précédent d'une structure de R'^0-module de niveau $n + 1$, de telle manière que l'opération de $V'_{\leqslant b}$ sur gr_b (resp. $F'_{\geqslant a}$ sur gr_a) corresponde, par (6.11.2), à celle de V' sur Z_{n+2}^{ib} (6.4) a) (i) (resp. F' sur $E_2^{i+n,a}/B_{n+2}^{i+n,a}$ (6.4) b) (i)). Compte tenu de la cohérence de E_2 (5.2), on en conclut :

(i) gr_b, en tant que V'-module, est extension d'un W-module de type fini par le sous-module de type dF' de Z_2^{ib} (6.2).

(ii) Pour $0 < h < n$, gr_{b-h} est de type fini sur W.

(iii) gr_a, en tant que F'-module, est F'-fini.

Pour $b \geqslant \dim X$, le sous-module de type dF' de E_2^{ib} est nul : on retrouve donc le théorème de finitude (2.3.2).

IV. — COMPARAISON DES DEUX SUITES SPECTRALES

1. Cohomologie des cycles

(1.1) Avec les notations de (III, 1), rappelons que, pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{ZW}_n\Omega^i$ est l'image de l'application composée

$$\mathrm{W}.\Omega^i \xrightarrow{\mathrm{F}^n} \mathrm{W}.\Omega^i \xrightarrow{\mathrm{proj}} \mathrm{W}_n\Omega^i,$$

de sorte que ces applications définissent un isomorphisme de pro-objets

(1.1.1) $$\text{« } \varprojlim_{\mathrm{F,R}} \text{ » } \mathrm{W}.\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathrm{ZW}.\Omega^i,$$

où le premier membre est le pro-objet limite projective suivant F des pro-objets $\mathrm{W}.\Omega^i$ et $\mathrm{ZW}.\Omega^i$ est le pro-objet défini par les restrictions (notées R ou π) $\mathrm{ZW}_{n+1}\Omega^i \to \mathrm{ZW}_n\Omega^i$. En d'autres termes, l'inverse de (1.1.1) est composé de l'isomorphisme

$$\text{« } \varprojlim_{\pi} \text{ » } \mathrm{ZW}_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_{\mathrm{F}} \text{ » } \text{« } \varprojlim_{\pi} \text{ » } \mathrm{ZW}_n\Omega^i$$

(provenant de ce que F est un automorphisme de $\mathrm{ZW}.\Omega^i$) et de l'isomorphisme déduit par passage à la limite suivant F (dans la catégorie des pro-objets) des suites exactes (où les flèches de transition sont les restrictions)

(1.1.2) $$0 \to \mathrm{ZW}.\Omega^i \to \mathrm{W}.\Omega^i \to \mathrm{W}.\Omega^i/\mathrm{ZW}.\Omega^i \to 0.$$

Rappelons que l'endomorphisme F de $\mathrm{W}.\Omega^i/\mathrm{ZW}.\Omega^i$ défini par passage au quotient correspond par l'isomorphisme $d : \mathrm{W}.\Omega^i/\mathrm{ZW}.\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathrm{BW}.\Omega^{i+1}$ à l'endomorphisme F′ de (III (1.1)).

D'autre part, l'endomorphisme V′ du pro-objet $\mathrm{ZW}.\Omega^i$ (III (1.3.2)) est un automorphisme (inverse de F), de sorte qu'on a canoniquement

$$\mathrm{ZW}.\Omega^i \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_{\mathrm{V}'} \text{ » } \text{« } \varprojlim_{\pi} \text{ » } \mathrm{ZW}_n\Omega^i.$$

De plus, comme $\mathrm{V}'d = d\mathrm{VR}^2$ (III (1.3.4)), l'application $\mathrm{V}'^n : \mathrm{BW}_{2n}\Omega^i \to \mathrm{BW}_n\Omega^i$ est nulle, donc on a

$$\text{« } \varprojlim_{\mathrm{V}'} \text{ » } \text{« } \varprojlim_{\pi} \text{ » } \mathrm{BW}_n\Omega^i = 0.$$

Prenant la limite suivant V′ des suites exactes de pro-objets

(1.1.3) $$0 \to \mathrm{BW}.\Omega^i \to \mathrm{ZW}.\Omega^i \to \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot \to 0$$

(où les flèches de transition sont données par π), on obtient donc un isomorphisme de pro-objets

(1.1.4) $$\mathrm{ZW}.\Omega^i \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_{V',\pi} \text{ » } \mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot$$

(où le second membre est le pro-objet limite suivant V′ des pro-objets $(\mathscr{H}^i\mathrm{W}.\Omega^\cdot, \pi)$).

(1.2) On suppose désormais, dans la suite de ce chapitre, que $S = \mathrm{Spec}(k)$ et que X est propre et lisse sur k.

Soient $i, j \in \mathbf{Z}$. On rappelle ([10, II (2.1)]) que

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^i) = \varprojlim_{\pi} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}_n\Omega^i),$$

et que l'on a posé (III (2.1.4))

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot) = \varprojlim_{\pi} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}_n\Omega^\cdot).$$

On pose d'autre part

(1.2.1) $$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}\Omega^i) = \varprojlim_{\pi} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}_n\Omega^i),$$

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{BW}\Omega^i) = \varprojlim_{\pi} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{BW}_n\Omega^i).$$

Notons que, d'après [10, I (3.9), (3.21)] et l'isomorphisme de Cartier généralisé (III (1.4)), les faisceaux $\mathrm{ZW}_n\Omega^i$, $\mathrm{BW}_n\Omega^i$, $\mathscr{H}^i\mathrm{W}_n\Omega^\cdot$, considérés comme modules sur $\mathrm{W}_n\mathscr{O}$ via $\mathrm{F}^n : \mathrm{W}_n\mathscr{O} \to \mathrm{W}_n\mathscr{O}$, sont de type fini, donc que les W-modules $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}_n\Omega^i)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{BW}_n\Omega^i)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}_n\Omega^\cdot)$ sont de longueur finie. Les W-modules $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^i)$ (resp. $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}\Omega^i)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{BW}\Omega^i)$) ont donc des topologies profinies naturelles, limites projectives des topologies discrètes sur les W-modules de longueur finie $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}_n\Omega^i)$ (resp. $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}_n\Omega^\cdot)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}_n\Omega^i)$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{BW}_n\Omega^i)$), et les suites exactes (1.1.2) et (1.1.3) donnent, par passage à la limite, des suites exactes de W-modules profinis

(1.2.2) $$\ldots \to \mathrm{H}^j(\mathrm{ZW}\Omega^i) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{W}\Omega^i) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{BW}\Omega^{i+1}) \to \ldots,$$

(1.2.3) $$\ldots \to \mathrm{H}^j(\mathrm{BW}\Omega^i) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{ZW}\Omega^i) \to \mathrm{H}^j(\mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot) \to \ldots,$$

(avec des notations abrégées évidentes); rappelons que la topologie profinie de $\mathrm{H}^j(\mathrm{W}\Omega^i)$ (resp. $\mathrm{H}^j(\mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot)$) est aussi, d'après (II (2.3)) (resp. (III (5.3))), la topologie standard (*i.e.* $\mathrm{V} + d\mathrm{V}$ (resp. $\mathrm{F}' + d\mathrm{F}'$)). Ici et au n° 2, nous allons étudier la structure de ces suites en liaison avec les termes initiaux des suites spectrales de de Rham-Witt.

(1.3) Les isomorphismes (1.1.1) et (1.1.4) fournissent des isomorphismes de W-modules profinis (I (0.2))

(1.3.1) $$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathrm{F}} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^i),$$

1.3.2) $$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{ZW}\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathrm{V}'} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot),$$

où $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathrm{W}\Omega^i)$ (resp. $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{H}^i\mathrm{W}\Omega^\cdot)$) est muni de sa topologie profinie naturelle.

On a des diagrammes commutatifs de W-modules profinis (et flèches continues)

(1.3.3)

$$\begin{array}{ccc} H^j(ZW\Omega^i) & \xrightarrow[\simeq]{(1.3.1)} & \varprojlim_F H^j(W\Omega^i) \\ \nearrow & & \downarrow \\ H^j(W\Omega^{i-1}) & \xrightarrow{'d_1} & H^j(W\Omega^i) \end{array}$$

(1.3.4)

$$\begin{array}{ccc} H^j(ZW\Omega^i) & \xrightarrow[\simeq]{(1.3.2)} & \varprojlim_{V'} H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \\ \nearrow & & \downarrow \\ H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) & \xrightarrow{''d_2} & H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \end{array}$$

où les flèches obliques et verticales sont les flèches canoniques évidentes.

Le W-module $H^j(ZW\Omega^i)$ est muni de quatre opérateurs naturels, continus, F, V, F′, V′, définis comme suit. L'opérateur F (resp. V′) est l'automorphisme σ-linéaire (resp. σ^{-1}-linéaire) induit par l'automorphisme F (resp. V′) du pro-objet $ZW.\Omega^i$; on a $F = V'^{-1}$; d'après (I (1.5)), on peut interpréter F comme l'automorphisme prolongeant, grâce à (1.3.1), l'endomorphisme F de $H^j(W\Omega^i)$, et V′ comme l'automorphisme prolongeant, grâce à (1.3.2), l'endomorphisme V′ de $H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$. On pose d'autre part $V = pV'(= pF^{-1})$, et $F' = pF(= pV'^{-1})$. Les couples (F, V) et (F′, V′) munissent donc $H^j(ZW\Omega^i)$ de deux structures de R^0-module. La flèche canonique $H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)$ (resp. $H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$) est compatible à F et V (resp. F′ et V′).

(1.4) Compte tenu de la cohérence de $'E_1$ (II (2.2)) et $''E_2$ (III (5.2)), on a, d'après (I (3.11)), des flèches canoniques surjectives, continues,

(1.4.1) $\quad H^j(ZW\Omega^i) \to (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss}$,

(1.4.2) $\quad H^j(ZW\Omega^i) \to (\text{Cœur } H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot))_{ss}$,

la première étant compatible à F et V, la seconde à F′ et V′.

Proposition **(1.4.3)**. — *Soient* C *un* W*-module de type fini muni d'un automorphisme* σ*-linéaire* F *et* $u : H^j(ZW\Omega^i) \to C$ *une application* W*-linéaire continue* (C *étant muni de la topologie p-adique et* $H^j(ZW\Omega^i)$ *de la topologie profinie considérée ci-dessus*), *telle que* $uF = Fu$. *Alors u se factorise de manière unique en une application* W*-linéaire* $u' : (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss} \to C$ (*resp.* $u'' : (\text{Cœur } H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot))_{ss} \to C$) *telle que* $u'F = Fu'$ (*resp.* $u''V' = F^{-1}u''$).

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(1.4.4)**. — *Soit* $M = (M^0 \xrightarrow{d} M^1)$ *un* R*-module gradué concentré en degrés* 0 *et* 1, *tel que* M^0 *soit* V*-fini* (I (2.1)), M^1 *de type fini sur* W *et* V*-adiquement séparé, et la différentielle d continue pour les topologies* V*-adique de* M^0 *et p-adique de* M^1. *Alors* $d = 0$.

Il suffit de montrer que M est $(V + dV)$-profini, car alors, M^1 étant de type fini sur W, M sera sans facteur de type II, donc on aura $d = 0$ (I (2.18)). Comme M^1 est de type fini sur W et V-adiquement séparé, les topologies p-adique et V-adique de M^1 sont identiques. Pour $n \geqslant 0$, il existe donc N tel que $V^N M^1 \subset p^n M^1$. De plus, comme d est continue, on peut choisir N tel que $dV^N M^0 \subset p^n M^1$. La topologie p-adique de M^1 est donc la topologie standard, d'où la conclusion.

Prouvons (1.4.3). Notons $M \to N$ le domino associé à $d : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$, *i.e.* $H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty} Z_2^{i-1,j} \to F^\infty B_2^{ij}$, posons $E = \varprojlim_F N$, $K = \operatorname{Ker} E \to N$ (cf. (I (2.21))). On a une suite exacte de W-modules profinis (I (3.11.2))

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{(1.4.1)} (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss} \longrightarrow 0.$$

Notons $v : E \to C$ la restriction de u. L'application v est continue pour la topologie p-adique de C et la topologie profinie de E, qui est induite par celle de $H^j(ZW\Omega^i)$. D'autre part, on a $v\underline{F} = Fv$, où $\underline{F}$ désigne l'automorphisme de E déduit de l'endomorphisme F de N, et qui est aussi induit par l'automorphisme F de $H^j(ZW\Omega^i)$. Rappelons (I (2.21)) que M se plonge canoniquement dans E. Notons v_1 (resp. v_2) la restriction de v à M (resp. K). La relation $v\underline{F} = Fv$ entraîne $Fv_1V = v_1$; on peut donc considérer $v_1 : M \to C$ comme un R-module gradué concentré en degrés 0 et 1, avec $V = pF^{-1}$ sur C. Par définition, M est V-fini, et d'après (I (2.23)), sa topologie est induite par celle de E, donc v_1 est continue; de plus, on a $\bigcap V^n C = \bigcap p^n C = 0$, les hypothèses de (1.4.4) s'appliquent donc à v_1, donc $v_1 = 0$. De même, $v\underline{F} = Fv$ entraîne $V' v_2 \underline{F} = v_2$, où $V' = F^{-1}$ sur C, donc $v_2 : K \to C$ est un R'-module gradué (concentré en degrés 0 et 1) avec $F' = pF$ sur C. D'après (I (2.23)), K est F-fini, de topologie induite par celle de E, et $\bigcap F'^n C = 0$, donc il résulte encore de (1.4.4) que $v_2 = 0$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la restriction de v à $\overline{V}^n M$ (resp. $\underline{F}^n K$) est nulle, donc, d'après (I (2.22) (i)), que $v = 0$. Cela prouve l'existence de la factorisation u' de u (l'unicité est triviale). Celle de u'' s'établit de manière analogue, ce qui achève la démonstration de (1.4.3).

Soit C un W-module de type fini quotient de $H^j(ZW\Omega^i)$ par un sous-W-module fermé stable par F; alors la topologie profinie de $H^j(ZW\Omega^i)$, moins fine que la topologie p-adique, induit sur C la topologie p-adique (I (0.4)), et l'automorphisme F de $H^j(ZW\Omega^i)$ induit sur C un opérateur surjectif, donc bijectif (cf. (I (1.5.3))). Il résulte donc de (1.4.3) qu'il existe un plus petit sous-W-module fermé de $H^j(ZW\Omega^i)$, stable par F, noté $H^j(ZW\Omega^i)_u$, tel que le quotient $H^j(ZW\Omega^i)_{tf} = H^j(ZW\Omega^i)/H^j(ZW\Omega^i)_u$ soit de type fini sur W, et que l'on a, compte tenu de (I (3.11.2)), un unique isomorphisme de suites exactes de W-modules profinis où F (resp. V') opère bijectivement :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i)_u & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i) & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i)_{tf} & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq\downarrow & & \| & & \downarrow\simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_F F^{\infty\prime} B_2^{ij} & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i) & \xrightarrow{(1.4.1)} & (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.4.5}$$

(resp.

$$\text{(1.4.6)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i)_u & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i) & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i)_{tf} & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq\downarrow & & \| & & \downarrow\simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_{V'} V'^{\infty}\,{}''B_3^{ji} & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i) & \xrightarrow{(1.4.2)} & (\text{Cœur } H^j\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{ss} & \longrightarrow & 0) \end{array}$$

Le W-module $H^j(ZW\Omega^i)_u$ (resp. $H^j(ZW\Omega^i)_{tf}$) s'appellera *partie unipotente* (resp. *cœur*) de $H^j(ZW\Omega^i)$. La partie unipotente, qui mesure le défaut de finitude sur W de $H^j(ZW\Omega^i)$ (elle est nulle si et seulement si $H^j(ZW\Omega^i)$ est de type fini sur W), est annulée par une puissance de p, comme le montre l'isomorphisme vertical de gauche de (1.4.5) ou (1.4.6), compte tenu de (II (3.1) *d)*) et (III (6.2)). Nous appellerons *exposant d'unipotence* de $H^j(ZW\Omega^i)$ le plus petit entier n tel que p^n annule $H^j(ZW\Omega^i)_u$.

Corollaire **(1.5).** — *La flèche canonique* $H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^{i+j}(X/W)$, *définie par l'inclusion* $ZW.\Omega^i[-i] \hookrightarrow W.\Omega^\cdot$, *induit un isomorphisme*

$$\text{(1.5.1)}\qquad H^j(ZW\Omega^i) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes K)_{[i]}$$

(*où* K *est le corps des fractions de* W *et l'indice* [*i*] *désigne le facteur direct de pente i du* F-*isocristal* $H^{i+j}(X/W) \otimes K$).

D'après la cohérence de $'E_1$, on a un isomorphisme canonique

$$(\text{Cœur } H^j(W\Omega^i)) \otimes K \xrightarrow{\sim} {}'E_\infty^{ij} \otimes K,$$

par lequel l'endomorphisme de Frobenius sur le second membre correspond à $p^i F$ sur le premier. Cet isomorphisme induit donc un isomorphisme

$$(*)\qquad (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss} \otimes K \xrightarrow{\sim} ({}'E_\infty^{ij} \otimes K)_{[i]}.$$

Si $P^\cdot$ désigne la filtration canonique de l'aboutissement de la première suite spectrale, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^j(ZW\Omega^i) \otimes K & \longrightarrow & P^iH^{i+j}(X/W) \otimes K & \hookrightarrow & H^{i+j}(X/W) \otimes K \\ \downarrow{\scriptstyle (1.4.5)}\ \simeq & & \downarrow & & \\ (\text{Cœur } H^j(W\Omega^i))_{ss} \otimes K & \xrightarrow[\simeq]{(*)} & ({}'E_\infty^{ij} \otimes K)_i & & \end{array}$$

où le composé supérieur est la flèche canonique envisagée en (1.5), d'où la conclusion.

Compte tenu de (1.3.3), (1.3.4), (1.4.5), (1.4.6), les dévissages (I (3.11)) appliqués à $'E_1$ et $''E_2$ entraînent :

Corollaire **(1.6).** — *On a*

(1.6.1) $\mathrm{Im}(H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)) = H^j(W\Omega^i)_{F\text{-ss}}$,

(1.6.2) $\mathrm{Im}(H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)) = H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-ss}}$,

(1.6.3) $\mathrm{Im}(H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(ZW\Omega^i)) \subset H^j(ZW\Omega^i)_u$,

(1.6.4) $\mathrm{Ker}(H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(ZW\Omega^i)) = V^{-\infty\prime}Z_2^{i-1,j}$,

(1.6.5) $\mathrm{Im}(H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(ZW\Omega^i)) \subset H^j(ZW\Omega^i)_u$,

(1.6.6) $\mathrm{Ker}(H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(ZW\Omega^i)) = F'^{-\infty\prime\prime}Z_3^{j-2,i+1}$,

les flèches aux premiers membres étant les flèches canoniques évidentes.

Remarques **(1.7).** — *a)* Pour $r \geqslant 2$, $d : W.\Omega^{i-1} \to W.\Omega^{[i,i+r-2]}[i]$ se factorise à travers $ZW.\Omega^i$, donc, par définition de ${}'Z_r^{i-1,j}$ (II (3.3.1)), on a

$$\mathrm{Ker}(H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(ZW\Omega^i)) \subset {}'Z_r^{i-1,j}.$$

Par suite, (1.6.4) implique l'inclusion $V^{-\infty\prime}Z_2^{i-1,j} \subset {}'Z_\infty^{i-1,j}$, établie en (II (3.4.1)). De même, (1.6.6) implique l'inclusion $F'^{-\infty\prime\prime}Z_3^{j-2,i+1} \subset {}''Z_\infty^{j-2,i+1}$ établie en (III (6.3.1)). Nous verrons plus loin comment déduire de la structure de $H^j(BW\Omega^i)$ les autres inclusions de (II (3.4.1)) et (III (6.3.1)).

b) Les sous-modules de $H^j(ZW\Omega^i)_u$ images de $H^j(W\Omega^{i-1})$ et $H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot)$ sont stables respectivement par V' et F, et permettent de déterminer la topologie de $H^j(ZW\Omega^i)_u$, voir (2.13).

Corollaire **(1.8).** — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $H^j(ZW\Omega^i)_u = 0$, i.e. $H^j(ZW\Omega^i)$ *est de type fini sur* W;

(ii) $F^{\infty\prime}B_2^{ij} = 0$;

(ii)′ ${}'d_1 = 0 : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$;

(iii) $V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji} = 0$;

(iii)′ ${}''d_2 = 0 : H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$.

(*Cf. aussi* (II (3.8)) *et* (III (6.5)).)

L'équivalence de (ii) et (ii)′ (resp. (iii) et (iii)′) est triviale. D'après (1.4.5) (resp. (1.4.6)), (ii) (resp. (iii)) implique (i). Enfin, si $H^j(ZW\Omega^i)$ est de type fini sur W, il en est de même de $F^{\infty\prime}B_2^{ij}$ (resp. $V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji}$) d'après (1.6.1) (resp. (1.6.2)), donc $F^{\infty\prime}B_2^{ij} = 0$ (resp. $V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji} = 0$) (I (2.18.2)).

2. Cohomologie des bords

Dans tout ce numéro, les hypothèses et notations sont celles de (1.2).

(2.1) Notons F_1 (resp. V_1) l'endomorphisme du pro-objet $BW.\Omega^i$ défini par passage au quotient par l'endomorphisme F (resp. V) de $W.\Omega^{i-1}$. La suite exacte

(2.1.1) $$0 \to ZW.\Omega^{i-1} \to W.\Omega^{i-1} \xrightarrow{d} BW.\Omega^i \to 0$$

admet donc l'endomorphisme (F, F, F_1) (resp. (V, V, V_1)). D'autre part, avec les notations de (III (1.1), (1.3)), la suite exacte

$$\textbf{(2.1.2)} \qquad 0 \to BW.\Omega^i \to ZW.\Omega^i \to \mathscr{H}^i W.\Omega^i \to 0$$

admet l'endomorphisme (F_1, F', F') (resp. (V_1, V', V')) (car $dF = pFd$ et $V'd = dV$). Par passage à la limite, F_1 et V_1 définissent sur $H^j(BW\Omega^i)$ une structure de R^0-module; les opérateurs correspondants sont continus pour la topologie profinie naturelle de $H^j(BW\Omega^i)$ (1.2). La suite exacte (1.2.2) (resp. (1.2.3)) est R^0-linéaire, $H^*(ZW\Omega^*)$ étant muni dans (1.2.2) (resp. (1.2.3)) de la R^0-structure définie par F et V (resp. F' et V') (1.3).

Proposition **(2.2).** — *Les opérateurs* F_1 *et* V_1 *sur* $H^j(BW\Omega^i)$ *sont topologiquement nilpotents : pour tout* $n \geqslant 1$, *on a*

$$F_1^n H^j(BW\Omega^i) + V_1^n H^j(BW\Omega^i) \subset \operatorname{Ker} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW_n\Omega^i).$$

Comme $F_1 : BW.\Omega^i \to BW.\Omega^i$ est induit par $pF : W.\Omega^i \to W.\Omega^i$, le composé

$$BW.\Omega^i \xrightarrow{F_1^n} BW.\Omega^i \to BW_n\Omega^i$$

est nul. Il en résulte que l'on a $F_1^n H^j(BW\Omega^i) \subset \operatorname{Ker} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW_n\Omega^i)$. Comme $V_1 : BW.\Omega^i \to BW.\Omega^i$ est induit par $V : W.\Omega^{i-1} \to W.\Omega^{i-1}$, le composé

$$BW.\Omega^i \xrightarrow{V_1^n} BW.\Omega^i \to BW_n\Omega^i$$

est nul, d'où $V_1^n H^j(BW\Omega^i) \subset \operatorname{Ker} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW_n\Omega^i)$.

Nous verrons plus loin (2.9.2) que les sous-modules $F_1^n H^j(BW\Omega^i) + V_1^n H^j(BW\Omega^i)$ sont ouverts dans $H^j(BW\Omega^i)$, donc définissent la topologie de $H^j(BW\Omega^i)$.

L'énoncé (2.2) se reflète dans les pentes :

Proposition **(2.3).** — *Le sous-module de p-torsion* T *de* $H^j(BW\Omega^i)$ *est annulé par une puissance de p, et* $H^j(BW\Omega^i)/T$ *est un* R^0*-module libre de type fini sur* W, *où* F_1 *et* V_1 *sont p-adiquement nilpotents. La flèche canonique* $H^{i+j-1}(X/W) \xrightarrow{\sim} H^{i+j-1}(X, W\Omega^\cdot) \to H^j(BW\Omega^i)$ *définie par la projection* $W.\Omega^\cdot \to BW.\Omega^i[-i+1]$ *induit un isomorphisme*

$$\textbf{(2.3.1)} \qquad H^j(BW\Omega^i) \otimes K \xleftarrow{\sim} (H^{i+j-1}(X/W) \otimes K)_{]i-1,i[},$$

l'endomorphisme de Frobenius du second membre correspondant à $p^{i-1}F_1$ *sur le premier. Les suites exactes* (1.2.2) $\otimes$ K *et* (1.2.3) $\otimes$ K *se scindent en suites exactes courtes admettant des décompositions canoniques*

$$\textbf{(2.3.2)} \qquad H^j(W\Omega^{i-1}) \otimes K \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^{i-1}) \otimes K \oplus H^j(BW\Omega^i) \otimes K,$$

$$\textbf{(2.3.3)} \qquad H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \otimes K \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^i) \otimes K \oplus H^{j+1}(BW\Omega^i) \otimes K,$$

où (2.3.2) (*resp.* (2.3.3)) *est* R^0*-linéaire pour* $H^j(ZW\Omega^i)$ *muni de* F *et* V (*resp.* F' *et* V').

Comme $H^*(W\Omega^*)$ et $H^*(ZW\Omega^*)$ sont extensions d'un W-module de type fini par un module de torsion annulé par une puissance de p ((1.4) et [10, II (2.13)]), la suite

exacte (1.2.2) entraîne qu'il en est de même de $H^*(BW\Omega^*)$. Il s'ensuit que T est fermé, et que la topologie (profinie) du quotient $H^j(W\Omega^i)/T$, qui est de type fini sur W, est la topologie p-adique; la première assertion en découle, d'après (2.2). Les autres en résultent aussitôt, compte tenu de l'interprétation de $H^j(W\Omega^{i-1}) \otimes K$ (resp. $H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^*) \otimes K$, $H^j(ZW\Omega^i) \otimes K$) comme parties de pentes $\in [i-1, i[$ (resp. $]i-1, i]$, i) de $H^{i+j-1}(X/W) \otimes K$ (resp. $H^{i+j}(X/W) \otimes K$) ([10, II (3.5)], (III (2.2)), (1.5)).

Nous dégagerons plus loin des conditions assurant des décompositions analogues à (2.3.2), (2.3.3), mais ne négligeant pas la torsion, avec $H^j(W\Omega^{i-1})$, $H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^*)$ de type fini sur W (4.5).

(2.4) Compte tenu de (1.6.1), la suite exacte (1.2.2) fournit une suite exacte de R^0-modules (et d'applications continues pour les topologies profinies naturelles)

$$\textbf{(2.4.1)} \qquad 0 \to H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} \to H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-u}} \to 0,$$

où

$$\textbf{(2.4.2)} \qquad H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} := H^j(W\Omega^{i-1})/H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-ss}} = \operatorname{Coker} H^j(ZW\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^{i-1})$$

et

$$\textbf{(2.4.3)} \qquad H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-u}} := \operatorname{Ker} H^{j+1}(ZW\Omega^{i-1}) \to H^{j+1}(W\Omega^{i-1}) = \operatorname{Im} H^j(BW\Omega^i) \to H^{j+1}(ZW\Omega^{i-1}).$$

De même, d'après (1.6.2), la suite exacte (1.2.3) fournit une suite exacte de R^0-modules (et d'applications continues pour les topologies profinies naturelles)

$$\textbf{(2.4.4)} \qquad 0 \to H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)_{V'\text{-nil}} \to H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-u}} \to 0$$

où

$$\textbf{(2.4.5)} \qquad H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)_{V'\text{-nil}} := H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)/H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)_{V'\text{-ss}} = \operatorname{Coker} H^{j-1}(ZW\Omega^i) \to H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)$$

et

$$\textbf{(2.4.6)} \qquad H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-u}} := \operatorname{Ker} H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^*) = \operatorname{Im} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(ZW\Omega^i).$$

Le choix de la lettre F (resp. V') en indice dans (2.4.3) (resp. (2.4.6)), de préférence à F_1 (resp. V_1), a simplement pour but de rappeler l'origine de la définition, qui fait intervenir la suite exacte (1.2.2) (resp. (1.2.3)), linéaire pour F et V (resp. F' et V').

Proposition **(2.5).** — a) *Le* R^0*-module* $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ *est* V*-fini* (I (2.1)), *avec* F *topologiquement nilpotent.*

b) *Le* R^0*-module* $H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^*)_{V'\text{-nil}}$ *est* F'*-fini, avec* V' *topologiquement nilpotent.*

c) *On a*

$$\textbf{(2.5.1)} \qquad H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-u}} = \operatorname{Ker} H^{j+1}(ZW\Omega^{i-1})_u \to F^{\infty\prime} B_2^{i-1,j+1}$$

(*cf.* (1.4.5)). *Le* R^0*-module* $H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u}$ *est* F*-fini, avec* F_1 *injectif et* V_1 *nilpotent* (i.e. *de Cartier unipotent comme* R'^0*-module*).

d) *On a*

$$\textbf{(2.5.2)} \qquad H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} = \operatorname{Ker} H^j(ZW\Omega^i)_u \to V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji}$$

(*cf.* (1.4.6)). *Le* R^0*-module* $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ *est* V*-fini, avec* V_1 *injectif et* F_1 *nilpotent* (i.e. *de Cartier unipotent comme* R^0*-module*).

e) *Les topologies profinies naturelles de* $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ *et* $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (*resp.* $H^{j-1}(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}$ *et* $H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u}$) *sont les topologies* V*-adiques (resp.* F*-adiques).*

Comme (1.2.2) est une suite exacte de W-modules profinis, la topologie de $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ induite par celle de $H^j(BW\Omega^i)$ est quotient de celle de $H^j(W\Omega^{i-1})$, qui est la topologie standard. Or on a

$$(*) \qquad F^{\infty\prime}B_2^{i-1,j} \subset H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-ss}} \subset V^{-\infty\prime}Z_2^{i-1,j}$$

et $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-ss}}$ est fermé dans $H^j(W\Omega^{i-1})$, donc d'après (I (2.3), (2.9.1)) et (II (3.1)), la topologie de $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ est la topologie V-adique et $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ est V-fini. La seconde inclusion de (*) donne une suite exacte de R^0-modules V-finis

$$0 \to \text{Cœur}('E^{i-1,j})_{F\text{-nil}} \to H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} \to H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z \to 0,$$

où le terme de droite est de Cartier unipotent et celui de gauche est le facteur direct du cœur où F est topologiquement nilpotent. Donc F est topologiquement nilpotent sur $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$, ce qui prouve a). Compte tenu de (1.4.5), (2.5.1) découle de (I (3.11.3)). La seconde assertion de c) résulte alors de (I (2.23) *a), b)*) appliqué au domino $H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j} \to F^\infty B_2^{ij}$. On vérifie de manière analogue b) et d), et le reste de e).

Définition **(2.6).** — *Nous dirons que* $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ (*resp.* $H^{j-1}(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}$) *est la partie* F*-nilpotente (resp.* V*'-nilpotente) de* $H^j(BW\Omega^i)$, *et* $H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u}$ (*resp.* $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$) *le quotient* F*-unipotent (resp.* V*'-unipotent) de* $H^j(BW\Omega^i)$.

Cette terminologie peut choquer, dans la mesure où F_1 (resp. V_1) n'est pas en général nilpotent sur la partie F-nilpotente (resp. V'-nilpotente), et F_1 (resp. V_1) n'est pas unipotent sur le quotient F-unipotent (resp. V'-unipotent). Nous l'avons introduite surtout dans un but mnémotechnique : l'épithète « F-nilpotente » (resp. « V'-nilpotente ») est censée rappeler qu'il s'agit de la partie provenant du quotient de $H^j(W\Omega^{i-1})$ (resp. $H^{j-1}(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$) où F (resp. V') est topologiquement nilpotent, tandis que « F-unipotent » (resp. « V'-unipotent ») doit être compris comme une contraction de « F-fini et de Cartier unipotent » (resp. « V'-fini et de Cartier unipotent »).

Proposition **(2.7).** — *Le* R^0*-module*

(2.7.1) $$H^j(BW\Omega^i)_{tf} := H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} \cap H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}$$

est de type fini sur W, *avec* F_1 *et* V_1 *topologiquement nilpotents. C'est le plus grand sous-*R^0*-module de* $H^j(BW\Omega^i)$ *qui soit de type fini sur* W.

Nous dirons que $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$ est le *cœur* de $H^j(BW\Omega^i)$.

Pour la démonstration de (2.7), nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(2.7.2).** — *Soit* N *un* R^0*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) N *est de type fini sur* W, *avec* F *et* V *topologiquement nilpotents*;

(ii) N *est à la fois* F*-fini et* V*-fini.*

Il est trivial que (i) implique (ii). Inversement, supposons N F-fini et V-fini, et considérons le dévissage canonique (I (2.7)) de N comme module V-fini

$$0 \to D \to N \to U \to 0,$$

avec U de Cartier unipotent et D de type fini sur W. La topologie p-adique de N étant plus fine que la topologie F-adique, D est fermé dans N pour la topologie F-adique, donc U est F-fini (I (2.3)). Comme F est nilpotent sur U, U est donc de longueur finie. Mais V est injectif et topologiquement nilpotent sur U, donc $U = 0$, *i.e.* N est de type fini sur W.

Prouvons (2.7). Comme $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$ est fermé dans les parties F-nilpotente et V'-nilpotente de $H^j(BW\Omega^i)$, dont les topologies sont respectivement les topologies F-adique et V-adique (2.5) e), $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$ est F-fini et V-fini (I (2.3)), donc de type fini sur W en vertu de (2.7.2). Si N est un sous-R^0-module de $H^j(BW\Omega^i)$ de type fini sur W, l'image de N dans les quotients F-unipotent et V'-unipotent de $H^j(BW\Omega^i)$ est nulle d'après (I (2.7)), donc on a $N \subset H^j(BW\Omega^i)_{tf}$, ce qui achève de prouver (2.7).

Proposition **(2.8).** — a) *On a des suites exactes canoniques de* R^0*-modules*

(2.8.1) $$0 \to H^j(BW\Omega^i)_{tf} \to H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} \to H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-u}} \to 0,$$

(2.8.2) $$0 \to H^j(BW\Omega^i)_{tf} \to H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}} \to H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{F'\text{-u}} \to 0,$$

où $H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-u}}$ *est le quotient* V*-unipotent de* $'E_1^{i-1,j}$ (II (3.1)) *et* $H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{F'\text{-u}}$ *le quotient* F'*-unipotent de* $''E_2^{j-1,i}$ (III (6.2)).

b) *On a des isomorphismes canoniques de* R^0*-modules*

(2.8.3) $$H^j(BW\Omega^i)_{tf} \xrightarrow{\sim} \text{Cœur}('E^{i-1,j})_{F\text{-nil}},$$

(2.8.4) $$H^j(BW\Omega^i)_{tf} \xrightarrow{\sim} \text{Cœur}(''E^{j-1,i})_{V'\text{-nil}},$$

où le second membre de (2.8.3) (*resp.* (2.8.4)) *est le facteur direct du cœur de* $'E^{i-1,j}$ (*resp.* $''E^{j-1,i}$) *où* F (*resp.* V') *est topologiquement nilpotent.*

Par définition de $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$, le quotient $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}/H^j(BW\Omega^i)_{tf} = Q$ est un sous-R^0-module de $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$, fermé dans $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ pour la topologie profinie naturelle de $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (I (0.5)); comme celle-ci est la topologie V_1-adique (2.5) e), Q est donc V_1-fini (I (2.3)); $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ étant de Cartier unipotent, il en est de même de Q (I (2.7)), de sorte que Q est le quotient unipotent de $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$. Par définition de $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$, Q est donc aussi le quotient unipotent de $'E_1^{i-1,j}$, ce qui établit (2.8.1). On procède de même pour (2.8.2). Les isomorphismes (2.8.3) et (2.8.4) résultent immédiatement de (2.8.1) et (2.8.2).

On déduit de (2.4.1), (2.4.4), (2.8.1) et (2.8.2) un diagramme commutatif de R^0-modules profinis et applications linéaires continues, à lignes et colonnes exactes

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^j(BW\Omega^i)_{tf} & \longrightarrow & H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}} & \longrightarrow & H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{F'\text{-}u} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & (1) & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} & \longrightarrow & H^j(BW\Omega^i) & \longrightarrow & H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} & \longrightarrow & H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} & \longrightarrow & H^j(BW\Omega^i)_{lf} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{2.8.5}
$$

où le carré (1) est cartésien et

$$
H^j(BW\Omega^i)_{lf} := H^j(BW\Omega^i)/(H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} + H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}). \tag{2.8.6}
$$

Proposition **(2.9)**. — *Le* R^0*-module* $H^j(BW\Omega^i)_{lf}$ *est de longueur finie sur* W, *avec* F_1 *et* V_1 *nilpotents.*

Cela résulte du lemme suivant, dont la vérification est immédiate :

Lemme **(2.9.1)**. — *Soit* M *un* R^0*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) M *est de longueur finie sur* W, *avec* F *et* V *nilpotents*;
(ii) M *est à la fois* F*-fini et* V*-fini, avec* F *et* V *nilpotents.*

Corollaire **(2.9.2)**. — *Les sous-*R^0*-modules*

$$V_1^n H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} + F_1^n H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}$$

de $H^j(BW\Omega^i)$ *forment, pour* $n \in \mathbf{N}$, *un système fondamental de voisinages ouverts de* 0 *dans* $H^j(BW\Omega^i)$.

Il en résulte trivialement que les sous-R^0-modules $V_1^n H^j(BW\Omega^i) + F_1^n H^j(BW\Omega^i)$ possèdent la même propriété (cf. (2.2)).

Vérifions (2.9.2). Posons, pour abréger,

$$V_1^n H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} + F_1^n H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}} = M_n.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, M_n est fermé dans $H^j(BW\Omega^i)$ (en tant qu'image de

$$V_1^n + F_1^n : H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}} \oplus H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}} \to H^j(BW\Omega^i)).$$

D'après (2.9), $H^j(BW\Omega^i)/M_0 = H^j(BW\Omega^i)_{lf}$ est de longueur finie sur W. Comme $H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}$ est V-fini et $H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}$ F-fini, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H^j(BW\Omega^i)/M_n$ est de longueur finie, donc discret (car séparé). Donc M_n est ouvert, d'où la conclusion, compte tenu de (2.2).

L'énoncé suivant, qui est le principal résultat des n^{os} 1 et 2, éclaire la signification de la partie unipotente de la cohomologie des cycles :

Théorème **(2.10).** — *Avec la notation abrégée* $H^j(\mathscr{H}^i) = H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$, *on a un diagramme commutatif canonique, à diagonales exactes* :

(2.10.1)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \\
H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}) & \longrightarrow & H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-u}} & \xrightarrow{\varepsilon''} & H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-u}} & \xrightarrow{\delta''} & V'^{\infty}\,''B_3^{ji} & \hookrightarrow & H^j(\mathscr{H}^i) \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & & & H^j(ZW\Omega^i)_u & & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \\
H^j(W\Omega^{i-1}) & \longrightarrow & H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-u}} & \xrightarrow{\varepsilon'} & H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-u}} & \xrightarrow{\delta'} & F^{\infty}\,'B_2^{ij} & \hookrightarrow & H^j(W\Omega^i) \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où :

(i) *les flèches* $H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-u}} \to H^j(ZW\Omega^i)_u \to F^{\infty}\,'B_2^{ij} \to H^j(W\Omega^i)$ (*resp.* $H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}) \to H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-u}} \to H^j(ZW\Omega^i)_u \to V'^{\infty}\,''B_3^{ji} \to H^j(\mathscr{H}^i)$) *sont la factorisation canonique* (I (3.11.4)) *de* $'d_1$ (*resp.* $''d_2$), *compte tenu de* (1.3.3) *et* (1.4.5) (*resp.* (1.3.4) *et* (1.4.6));

(ii) *les diagonales sont définies par* (2.5.1) *et* (2.5.2); *la diagonale descendante (resp. montante) est* R^0*-linéaire pour la structure de* R^0*-module sur* $H^j(ZW\Omega^i)$ *définie par* F *et* V (*resp.* F' *et* V');

(iii) ε' *et* ε'' *sont les inclusions figurant dans* (2.8.5);

(iv) δ' *et* δ'' *sont des dominos conjugués* (I (2.24)).

La flèche canonique $H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(ZW\Omega^i)$ (induite par $d: W.\Omega^{i-1} \to ZW.\Omega^i$) se factorise à travers $H^j(BW\Omega^i)$, donc à travers $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ par définition de $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (2.4.6). La flèche obtenue, de $H^j(W\Omega^{i-1})$ dans $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$, se factorise alors à travers ε', comme le montre le carré inférieur gauche de (2.8.5). La flèche canonique $H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} \to H^j(ZW\Omega^i)_u$ ($\xrightarrow{\sim} \varprojlim_F F^{\infty\prime}B_2^{ij}$) de (I (3.11.4)) est donc composée des inclusions

$$H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} \xrightarrow{\varepsilon'} H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} \hookrightarrow H^j(ZW\Omega^i)_u.$$

On vérifie de même que la flèche canonique

$$H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-}u} \to H^j(ZW\Omega^i)_u \ (\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{V'} V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji})$$

de (I (3.11.4)) est composée des inclusions

$$H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-}u} \xrightarrow{\varepsilon''} H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u} \hookrightarrow H^j(ZW\Omega^i)_u,$$

d'où l'existence du diagramme (2.10.1) vérifiant (i), (ii) et (iii). Comme l'opérateur V_1 sur $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (resp. F sur $F^{\infty\prime}B_2^{ij}$) est induit par l'opérateur V′ (resp. F) sur $H^j(ZW\Omega^i)_u$ et que $FV' = V'F = \mathrm{Id}$, on a $F\delta'V_1 = \delta'$, ce qui permet de considérer δ' comme un R-module gradué (concentré en degrés 0 et 1). D'après (2.9), le conoyau de ε' est annulé par une puissance de V_1, donc il existe n_0 tel qu'on ait

$$V_1^n H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} \subset H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} \quad \text{pour } n \geqslant n_0.$$

Comme $\delta'\,\varepsilon'$ est un domino (II (3.1)) et que $H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u}$ est V-fini, il en résulte que δ' est un domino. La croix de (2.10.1) montre alors, d'après (I (2.23)), que δ'' est un domino, conjugué de δ', ce qui achève la démonstration de (2.10).

Compte tenu de (I (2.18.2), (2.18.3)), (2.10) entraîne aussitôt :

Corollaire (**2.11**). — *Les dominos*

$$H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty\prime}Z_2^{i-1,j} \to F^{\infty\prime}B_2^{ij}$$

et

$$H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot)/F'^{-\infty\prime\prime}Z_3^{j-2,i+1} \to V'^{\infty\prime\prime}B_3^{ji}$$

déduits de ${}'d_1 : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$ *et* ${}''d_2 : H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$ *ont même dimension et même exposant d'unipotence, égal à l'exposant d'unipotence de* $H^j(ZW\Omega^i)$ (1.4).

Corollaire (**2.12**). — *Les conditions suivantes sont équivalentes (cf. aussi* (1.8)) :

(i) $H^j(ZW\Omega^i)_u = 0$;
(ii) $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} = 0$;
(iii) $H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} = 0$;
(iv) $H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u} = 0$;
(v) $H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot)_{F'\text{-}u} = 0$;
(vi) *la flèche canonique* $H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot)$ *est injective*;
(vii) *la flèche canonique* $H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)$ *est injective*;
(viii) *la flèche canonique* $H^{j-1}(\mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \to H^j(BW\Omega^i)$ *est surjective*;
(ix) *la flèche canonique* $H^{j-1}(W\Omega^i) \to H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})$ *est surjective.*

D'autre part, (2.10) permet de décrire la topologie de $H^j(ZW\Omega^i)_u$:

Corollaire **(2.13).** — a) *La topologie induite par* $H^j(ZW\Omega^i)_u$ *sur* $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (*resp.* $H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u}$) *est la topologie* V*-adique (resp.* F*-adique).*

b) *Le sous-module* $H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u}$ (*resp.* $H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-}u}$) *de* $H^j(ZW\Omega^i)_u$ *est ouvert dans* $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}$ (*resp.* $H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u}$).

c) *Les* W*-modules*

$$V''^r H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} + F^s H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-}u}$$

(*resp.* $V''^r H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} + F^s H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u}$)

pour $r, s \in \mathbf{Z}$ *forment un système fondamental de voisinages ouverts de* 0 *dans* $H^j(ZW\Omega^i)_u$.

d) *Il existe un entier a tel que l'on ait*

$$H^j(ZW\Omega^i)_u = V'^{-r} H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} + F^{-s} H^{j-2}(\mathscr{H}^{i+1})_{F'\text{-}u}$$

et

$$V''^r H^j(BW\Omega^i)_{V\text{-}u} \cap F^s H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u} = 0$$

pour $r + s \geqslant a$.

Cela résulte de (I (2.22), (2.23)) appliqué à la croix de (2.10.1), compte tenu du fait que, d'après (2.9) (ou (2.10) (iv) et (I (2.17) *b)*), le conoyau de ε' (resp. ε'') est de longueur finie sur W, annulé par une puissance de V (resp. F).

Remarques **(2.14).** — *a)* Il découle de (2.10.1) qu'on a des inclusions

(2.14.1) $\quad \mathrm{Im}(H^j(BW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)) \subset F^{\infty\prime} B_2^{ij}$,

(2.14.2) $\quad \mathrm{Im}(H^{j-1}(BW\Omega^{i+1}) \to H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)) \subset V'^{\infty\prime\prime} B_3^{ji}$.

Notons que, pour $r \geqslant 2$, $d : W.\Omega^{[i-r+1, i-1]}[i-1] \to W.\Omega^i$ se factorise à travers $BW.\Omega^i$, donc, par définition de ${}'B_r^{ij}$ (II (3.3.2)), on a

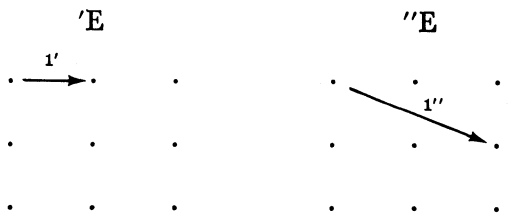
$${}'B_r^{ij} \subset \mathrm{Im}(H^j(BW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)).$$

Par suite, (2.14.1) implique l'inclusion ${}'B_\infty^{ij} \subset F^{\infty\prime} B_2^{ij}$ de (II (3.4.1)). On voit de même que (2.14.2) implique l'inclusion ${}''B_\infty^{ji} \subset V'^{\infty\prime\prime} B_3^{ji}$ de (III (6.3.1)). Compte tenu de (1.7) *a)*, on a donc obtenu ainsi une deuxième démonstration de la survie des cœurs ((II (3.4)), (III (6.3))).

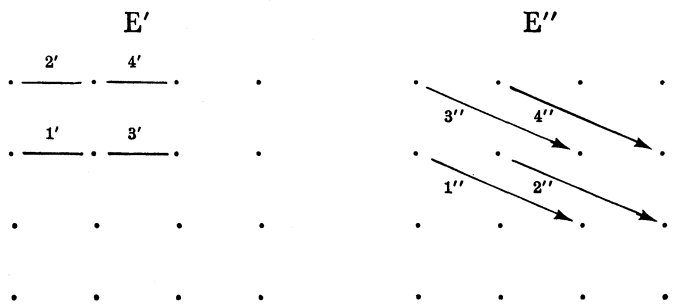
b) Supposons X purement de dimension N. Rappelons (II (3.9), (3.11)) que les seules différentielles ${}'d_1$ éventuellement non nulles sont celles dont le but (i, j) appartient au carré $j \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$. Il y en a donc au plus $(N-1)^2$. D'autre part (III (6.8)) les seules différentielles ${}''d_2$ éventuellement non nulles sont celles dont le but (i, j) appartient au carré $i \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant N - 1$. Il y en a donc aussi au plus $(N-1)^2$. Ces différentielles se répartissent en paires « conjuguées » $({}'d_1^{i-1, j}, {}''d_2^{j-2, i+1})$, de buts $((i, j), (j, i))$, ayant même nombre de facteurs de type II. Pour $N = 2, 3$, on a

donc les figures suivantes, où les différentielles conjuguées sont indiquées par un même numéro :

N = 2 :



N = 3 :



(2.15) Par analogie avec la partie unipotente de $H^j(ZW\Omega^i)$, on définit le *quotient unipotent* de $H^j(BW\Omega^i)$, noté $H^j(BW\Omega^i)_u$, par la suite exacte (de R^0-modules)

(2.15.1) $\quad 0 \to H^j(BW\Omega^i)_{tf} \to H^j(BW\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^i)_u \to 0.$

Le diagramme (2.8.5) fournit ainsi deux suites exactes de R^0-modules :

(2.15.2) $\quad 0 \to H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u} \to H^j(BW\Omega^i)_u \to H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u} \to 0,$

(2.15.3) $\quad 0 \to H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{F'\text{-}u} \to H^j(BW\Omega^i)_u \to H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} \to 0.$

L'une ou l'autre montre que $H^j(BW\Omega^i)_u$ est de torsion, annulé par une puissance de p : plus précisément, il résulte de (2.10) et (2.11) que, si v_{ij} désigne l'exposant d'unipotence de $H^j(ZW\Omega^i)$, $H^j(BW\Omega^i)_u$ est annulé par $p^{v_{ij}+v_{i-1,j+1}}$. Par définition du cœur, $H^j(BW\Omega^i)$ est de type fini sur W si et seulement si son quotient unipotent est nul. Notons que, d'après (2.12), (2.15.2) ou (2.15.3) fournit l'équivalence :

(2.15.4) $\quad (H^j(BW\Omega^i)_u = 0) \Leftrightarrow (H^j(ZW\Omega^i)_u = 0 \text{ et } H^{j+1}(ZW\Omega^{i-1})_u = 0).$

Il en résulte que, pour $n \in \mathbf{Z}$ donné, on a l'équivalence :

(2.15.5) $\quad (H^j(BW\Omega^i)_u = 0$ *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n)$

$\Leftrightarrow (H^j(ZW\Omega^i)_u = 0$ *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n)$.

Compte tenu de (II (3.1) *f)*) et (III (6.2.3.1)), on en déduit aussi, pour $n \in \mathbf{Z}$ donné, l'équivalence des conditions (i) à (iv) ci-après :

(2.15.6)

(i) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$ *ou* $n+1$, $H^j(ZW\Omega^i)$ *est de type fini sur* W;
(ii) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$ *ou* $n+1$, $H^j(BW\Omega^i)$ *est de type fini sur* W;
(iii) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$, $H^j(W\Omega^i)$ *est de type fini sur* W;
(iv) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$, $H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$ *est de type fini sur* W.

Nous verrons plus loin que les conditions (2.15.6) entraînent l'existence d'une décomposition remarquable de $H^n(X/W)$ (4.5).

(2.16) Si M est un R^0-module, notons p-tors(M) (resp. V-tors(M), resp. F-tors(M)) le sous-module de p-torsion (resp. V-torsion, resp. F-torsion) de M, et posons VF-tors(M) = V-tors(M) $\cap$ F-tors(M).

Comme F_1 est injectif sur $H^j(BW\Omega^i)_{F\text{-}u}$, (2.4.1) entraîne :

(2.16.1) $$F\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)) = F\text{-tors}(H^j(W\Omega^{i-1})_{F\text{-nil}}).$$

D'après (2.5) a) et (I (2.5)), F-tors$(H^j(BW\Omega^i))$ est donc un R^0-module V-fini, annulé par une puissance de F_1, F-tors$(H^j(BW\Omega^i)_{tf})$ est de longueur finie sur W, avec F_1 et V_1 nilpotents, et (2.8.1) fournit une injection de R^0-modules

(2.16.2) $$0 \to F\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i))/F\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)_{tf}) \to H^j(W\Omega^{i-1})_{V\text{-}u},$$

de conoyau de longueur finie sur W, avec F et V nilpotents.

On voit de même que l'on a

(2.16.3) $$V\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)) = V'\text{-tors}(H^{j-1}(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)_{V'\text{-nil}}),$$

de sorte que V-tors$(H^j(BW\Omega^i))$ est un R^0-module F-fini, annulé par une puissance de V_1, et qu'on a une injection de R^0-modules

(2.16.4) $$0 \to V\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i))/V\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)_{tf}) \to H^{j-1}(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)_{F'\text{-}u},$$

où V-tors$(H^j(BW\Omega^i)_{tf})$ et le conoyau de (2.16.4) sont de longueur finie sur W, avec F et V nilpotents.

Il découle de (2.16.1) et (2.16.3) qu'on a

(2.16.5) $$VF\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)) = VF\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)_{tf}) = p\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)_{tf}).$$

En particulier, VF-tors$(H^j(BW\Omega^i))$ est de longueur finie sur W, avec F_1 et V_1 nilpotents, et (2.15.1) fournit une injection de R^0-modules

(2.16.6) $$0 \to p\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i))/p\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i)_{tf}) \to H^j(BW\Omega^i)_u,$$

de conoyau de longueur finie sur W, avec F_1 et V_1 nilpotents. On voit notamment que, si p^a annule la p-torsion de $H^j(BW\Omega^i)_{tf}$, alors la p-torsion de $H^j(BW\Omega^i)$ est annulée

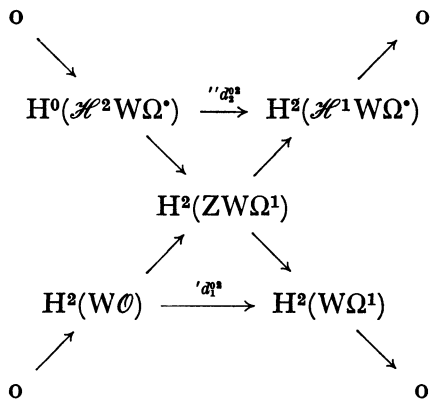
par $p^{a+\nu_{ij}+\nu_{i-1,j+1}}$, avec les notations de (2.15). De plus, les noyau et conoyau de la flèche naturelle

(2.16.7) $$H^j(BW\Omega^i)_{tf} \to H^j(BW\Omega^i)/p\text{-tors}(H^j(BW\Omega^i))$$

sont de longueur finie, avec F_1 et V_1 nilpotents, ce qui précise la première assertion de (2.3).

Un exemple, pour terminer :

Proposition **(2.17).** — *Soit* X *une surface* K3 *supersingulière, d'invariant d'Artin* σ_0, i.e. *telle que* $'E_2^{02} \simeq k^{\sigma_0}$ (*cf.* [10, II (7.2) *b)*]). *On a* $H^2(ZW\Omega^1) = H^2(ZW\Omega^1)_u$, $H^2(W\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} H^2(BW\Omega^1) = H^2(BW\Omega^1)_{V'\text{-}u}$, $H^0(\mathscr{H}^2W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^1(BW\Omega^2) = H^1(BW\Omega^2)_{F\text{-}u}$, *et le diagramme* (2.10.1), *pour* $(i,j) = (1,2)$, *se réduit à la croix de suites exactes*



Les différentielles $'d_1^{02}$ *et* $''d_2^{02}$ *sont des dominos isomorphes à* $\mathbf{U}_{\sigma_0}$, *et*

$$H^2(ZW\Omega^1) = H^2(W\mathcal{O}) + H^0(\mathscr{H}^2W\Omega^\cdot).$$

Enfin, la flèche canonique $H^1(ZW\Omega^1) \to H^2(X/W)$ *est injective, d'image*

$$P^1H^2(X/W) = P_1H^2(X/W)$$

(où $P^\cdot$ (*resp.* $P_\cdot$) *désigne la filtration aboutissement de la première (resp. deuxième) suite spectrale).*

On sait [10, II (7.2) *b)*] que $'d_1^{02}$ est isomorphe à $\mathbf{U}_{\sigma_0}$. En particulier, $H^2(W\Omega^1) = 'B_2^{12} = F^\infty{}'B_2^{12}$, donc $C\text{œur}('E^{12}) = 0$, d'où, grâce à (1.4.5),

$$H^2(ZW\Omega^1) = H^2(ZW\Omega^1)_u.$$

D'autre part, comme F est un automorphisme de $H^1(W\Omega^1)$ [10, *loc. cit.*], on a $H^1(ZW\Omega^1) \xrightarrow{\sim} H^1(W\Omega^1)$ (1.3.1) d'où la suite exacte

(*) $$0 \to H^1(BW\Omega^2) \to H^2(ZW\Omega^1) \to H^2(W\Omega^1) \to 0,$$

le zéro à droite venant de la surjectivité de $'d_1^{02}$. On sait de plus que

$$H^0(W\Omega^2) = H^1(W\Omega^2) = 0, \quad \text{donc } H^0(\mathscr{H}^2W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^1(BW\Omega^2),$$

et (*) donne l'une des diagonales de (2.17). Par ailleurs, on a $H^2\mathscr{H}^0W\Omega^\cdot = 0$, car $H^2\mathscr{H}^0W\Omega^\cdot$ est le sous-F-cristal unité de $H^2(X/W)$ (III (6.8)). Donc on a

$$H^1\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot \xrightarrow{\sim} P_1H^2(X/W) \subset H^2(X/W);$$

l'endomorphisme F' de $H^1\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot$, induit par l'endomorphisme Φ de $H^2(X/W)$, est purement de pente 1, donc V' est un automorphisme de $H^1\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot$ (et $F' = pV'^{-1}$). Il en résulte que $H^1(ZW\Omega^1) \xrightarrow{\sim} H^1\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot$ (1.3.2) et qu'on a la suite exacte

$$(**) \qquad 0 \to H^2(BW\Omega^1) \to H^2(ZW\Omega^1) \to H^2(\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot) \to 0.$$

Comme $H^2\mathscr{H}^0W\Omega^\cdot = 0$, on a $H^2(W\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} H^2(BW\Omega^1)$, et (**) donne l'autre diagonale de (2.17). D'après (2.10), $''d_2^{02}$ est un domino de dimension 1, donc de la forme $\mathbf{U}_i$; comme $''d_2^{02}$ a même noyau et même conoyau de $'d_1^{02}$, nécessairement $i = \sigma_0$. L'égalité $H^2(ZW\Omega^1) = H^2(W\mathcal{O}) + H^0(\mathscr{H}^2W\Omega^\cdot)$ se lit sur le diagramme. Quant à la dernière assertion, elle résulte de ce que $H^1(ZW\Omega^1) \xrightarrow{\sim} H^1(W\Omega^1) \xrightarrow{\sim} P^1H^2(X/W)$ et $H^1(ZW\Omega^1) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathscr{H}^1W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} P_1H^2(X/W)$, comme on l'a vu plus haut.

3. Cohomologie logarithmique

(3.1) Soit X un schéma lisse sur un schéma parfait S de caractéristique p. Rappelons [10, I (5.7)] que, si n et i sont des entiers $\geqslant 1$, $W_n\Omega^i_{X,\log}$ (en abrégé, $W_n\Omega^i_{\log}$) désigne le sous-faisceau de $W_n\Omega^i_X$ engendré localement, pour la topologie étale sur X, par les sections de la forme $d\underline{x}_1/\underline{x}_1 \dots d\underline{x}_i/\underline{x}_i$ pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$ ($\underline{x}_k = (x_k, 0, \dots, 0) \in W_n\mathcal{O}_X$); on convient que $W_n\Omega^0_{\log}$ est le faisceau constant $\mathbf{Z}/p^n$, et que $W_n\Omega^i_{\log} = 0$ si $i < 0$ ou $n \leqslant 0$.

Pour i fixé, les $W_n\Omega^i_{\log}$ forment un sous-système projectif $W.\Omega^i_{\log}$ de $W.\Omega^i$; le pro-objet correspondant est donc sans p-torsion, de plus, pour $n \geqslant 1$, la flèche naturelle

$$(3.1.1) \qquad W.\Omega^i_{\log} \otimes \mathbf{Z}/p^n \to W_n\Omega^i_{\log}$$

est un isomorphisme de pro-objets [10, I (5.7.5)].

D'autre part, pour la topologie étale sur X, on a une suite exacte naturelle de pro-faisceaux [10, I (5.7.2)]

$$(3.1.2) \qquad 0 \longrightarrow W.\Omega^i_{\log} \longrightarrow W.\Omega^i \xrightarrow{1-F} W.\Omega^i \longrightarrow 0.$$

Comme on a $W_n\Omega^i_{\log} \subset ZW_n\Omega^i$, il en résulte que

$$W.\Omega^i_{\log} = \operatorname{Ker} 1 - F : ZW.\Omega^i \to ZW.\Omega^i.$$

De plus, l'endomorphisme $1 - F$ du pro-faisceau $ZW.\Omega^i$ est surjectif pour la topologie étale. Il revient au même, en effet, de vérifier que l'endomorphisme $V' - 1$ de $ZW.\Omega^i$ (cf. (III (1.3))) est surjectif. Or, par définition de V', on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_{2n}\Omega^i & \xrightarrow{1-F} & W_{2n-2}\Omega^i \\ \downarrow{\scriptstyle F^n} & & \downarrow{\scriptstyle F^{n-1}} \\ ZW_n\Omega^i & \xrightarrow{V'-1} & ZW_{n-1}\Omega^i \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives, ainsi que $1 - F$ [10, I (3.26)], d'où la surjectivité de $V' - 1$. Au total, on a donc un isomorphisme de suites exactes (pour la topologie étale) de pro-objets :

$$\begin{array}{ccccccccc} (3.1.3) & 0 & \longrightarrow & W.\Omega^i_{\log} & \longrightarrow & ZW.\Omega^i & \xrightarrow{1-F} & ZW.\Omega^i & \longrightarrow 0 \\ & & & \| & & \| & & \simeq \downarrow{\scriptstyle V'} & \\ (3.1.4) & 0 & \longrightarrow & W.\Omega^i_{\log} & \longrightarrow & ZW.\Omega^i & \xrightarrow{V'-1} & ZW.\Omega^i & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Enfin, grâce à la commutativité du carré (III (1.4.6), (1.4.7))

$$\begin{array}{ccc} W_n\Omega^i & \xrightarrow{\pi-F} & W_{n-1}\Omega^i \\ C^{-n} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow C^{-(n-1)} \\ \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot & \xrightarrow{V'-\pi} & \mathscr{H}^i W_{n-1}\Omega^\cdot \end{array}$$

on a un isomorphisme de suites exactes de pro-objets :

$$\begin{array}{ccccccccc} (3.1.5) & 0 & \longrightarrow & W.\Omega^i_{\log} & \longrightarrow & W.\Omega^i & \xrightarrow{1-F} & W.\Omega^i & \longrightarrow 0 \\ & & & \| & & \simeq \downarrow C^{-\cdot} & & \simeq \downarrow C^{-\cdot} & \\ (3.1.6) & 0 & \longrightarrow & W.\Omega^i_{\log} & \longrightarrow & \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot & \xrightarrow{V'-1} & \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot & \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a aussi, bien entendu, une injection (resp. surjection) naturelle de (3.1.3) dans (3.1.2) (resp. (3.1.2) dans (3.1.6)).

(3.2) *On suppose, à partir de maintenant, que* $S = \mathrm{Spec}(k)$, *et que* X *est propre et lisse sur* S. On va étudier la structure des $\mathbf{Z}_p$-modules

$$(3.2.1) \qquad H^j(X, W\Omega^i_{\log}) := \varprojlim H^j(X, W_n\Omega^i_{\log})$$

la cohomologie au second membre étant prise pour la topologie étale sur X. Par définition

$$H^j(X, W\Omega^0_{\log}) = H^j(X, \mathbf{Z}_p) \ (= \varprojlim H^j(X_{ét}, \mathbf{Z}/p^n)),$$

et, pour $i = 1$, on a, avec les notations de [10, II, 5], un isomorphisme canonique

$$H^j(X, W\Omega^1_{log}) \simeq H^{j+1}(X, \mathbf{Z}_p(1)) := \varprojlim H^{j+1}(X_{fppf}, \mu_{p^n}).$$

Comme on l'a déjà observé dans *(loc. cit.)* pour $i = 0$ et 1, si k est algébriquement clos, le $\mathbf{Z}_p$-module $H^j(X, W\Omega^i_{log})$ est en fait le groupe des k-points d'un certain groupe pro-algébrique, que nous allons préciser. Notons $f: X \to S$ la projection, d'où, avec les notations de [1, (1.5)], un morphisme de topos

$$f: (X/S)_{parf} \to S_{parf}$$

(S_{parf} est le topos des faisceaux sur le site parfait de S, formé des S-schémas parfaits, muni de la topologie étale, et $(X/S)_{parf}$ le topos des faisceaux sur le site parfait relatif de X/S, formé des couples (T, Y) où T est un S-schéma parfait et Y un schéma étale sur $X_T = X \times_S T$, muni de la topologie étale). Pour n fixé, $W_n\Omega^i_X$ se prolonge de façon naturelle en un faisceau sur $(X/S)_{parf}$, encore noté $W_n\Omega^i$, dont la restriction à Y, pour (T, Y) comme ci-dessus, est $W_n\Omega^i_Y$, et $W_n\Omega^i_{X,log}$ se prolonge en un sous-faisceau de $W_n\Omega^i$, égal à $W_n\Omega^i_{Y,log}$ en restriction à Y; de même, $ZW_n\Omega^i_X$, $\mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot_X$ se prolongent à $(X/S)_{parf}$, et les isomorphismes et suites exactes de (3.1) sont valables sur $(X/S)_{parf}$. Notons d'autre part, comme dans [1, (2.5)], $\mathscr{G}(p^n)$ la sous-catégorie pleine de celle des faisceaux abéliens sur S_{parf} formée des S-groupes parfaits algébriques affines commutatifs (quasi-algébriques dans la terminologie de Serre [21]) annulés par p^n, et $\mathscr{G}(p^\infty) = \bigcup \mathscr{G}(p^n)$.

Lemme **(3.2.2).** — *Le faisceau* $R^j f_* W_n\Omega^i$ *(resp.* $R^j f_* W_n\Omega^i_{log}$*) sur* S_{parf} *appartient à* $\mathscr{G}(p^n)$.

Comme $\mathscr{G}(p^\infty)$ est stable par noyaux, conoyaux et extensions, l'assertion relative à $R^j f_* W_n\Omega^i$ résulte, par dévissage, du fait que les $R^j f_* \mathrm{gr}^m W_n\Omega^i$ sont représentables par des groupes vectoriels, compte tenu de la structure de $\mathrm{gr}^m W_n\Omega^i$ [10, I (3.9)] et de la commutation de $W_r\Omega^i$ aux changements de bases parfaites [10, I (1.9)]. Pour l'assertion relative à $R^j f_* W_n\Omega^i_{log}$, on se ramène, par dévissage, compte tenu de (3.1.1), à $n = 1$. On conclut à l'aide de la suite exacte [10, 0 (2.1.20), (2.4.2)]

$$0 \to \Omega^i_{log} \to Z\Omega^i \xrightarrow{1-C} \Omega^i \to 0.$$

Nous noterons

(3.2.3) $\qquad \mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log}) \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}(p^n)$

le groupe quasi-algébrique $R^j f_* W_n\Omega^i_{log}$, et

(3.2.4) $\qquad \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log}) = \text{« } \varprojlim \text{ » } \mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log}) \in \mathrm{ob\ pro}\text{-}\mathscr{G}(p^\infty)$

le groupe pro-algébrique défini par le système projectif des $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})$. Si k est algébriquement clos, $H^j(X, W_n\Omega^i_{log})$ (resp. $H^j(X, W\Omega^i_{log})$) est le groupe des k-points de $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})$ (resp. $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})$).

La suite exacte (3.1.2), considérée comme suite exacte de pro-faisceaux sur $(X/S)_{parf}$, fournit une suite exacte de pro-$\mathscr{G}(p^\infty)$:

$$\textbf{(3.2.5)} \qquad \ldots \to \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log}) \to \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i) \xrightarrow{1-F} \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i) \to \ldots,$$

où $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i)$ est le groupe pro-algébrique « $\varprojlim$ » $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i)$, avec

$$\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i) = R^j f_* W_n\Omega^i.$$

Le résultat principal de ce numéro est le théorème suivant :

Théorème **(3.3)**. — a) *L'endomorphisme* $1 - F$ *de* $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i)$ *est surjectif; on a donc, grâce à* (3.2.5), *un isomorphisme canonique*

$$\textbf{(3.3.1)} \qquad \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i)^F \ (1).$$

b) *Soit* n_{ij} *le nombre de facteurs de type* II *de* $d_1 : H^j(W\Omega^{i-1}) \to H^j(W\Omega^i)$ (*ou dimension du domino* $H^j(W\Omega^{i-1})/V^{-\infty}Z_2^{i-1,j} \to F^\infty B_2^{ij}$ (2)) (*cf.* (I (2.18)), *et soit* ν_{ij} *l'exposant d'unipotence de ce domino* (loc. cit.). *Le groupe* $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})$ *admet un dévissage canonique*

$$\textbf{(3.3.2)} \qquad 0 \to \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0 \to \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log}) \to D^{ij} \to 0,$$

où : (i) $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0 \in \mathrm{ob}\, \mathscr{G}(p^{\nu_{ij}})$ *est un groupe quasi-algébrique unipotent connexe, de dimension* n_{ij}.

(ii) D^{ij} *est un groupe profini étale, donné, si* $\bar{k}$ *est une clôture algébrique de* k, *par une représentation de* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ *sur le* $\mathbf{Z}_p$*-module de type fini* $(\mathrm{Cœur}(E^{ij})_{ss} \otimes W(\bar{k}))^{F\otimes\sigma}$ (*qui est aussi canoniquement isomorphe à* $(H^j(ZW\Omega^i)_{tf} \otimes W(\bar{k}))^{F\otimes\sigma}$ (1.4.5)).

Avant de prouver (3.3), dégageons quelques corollaires. Il résulte d'abord de (i) et (ii) que $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0$ est la composante neutre de $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})$ et D^{ij} son π_0 [21, (5.1)], en particulier le dévissage (3.3.2) est unique. D'après *(loc. cit.)*, si $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})^0$ désigne la composante neutre de $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})$, on a

$$\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0 = \text{« } \varprojlim \text{ »}\, \mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})^0.$$

Autrement dit :

Corollaire **(3.4)**. — *Le pro-objet* « $\varprojlim$ » $\mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i_{log})^0$ *est essentiellement constant de valeur le groupe quasi-algébrique* $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0$.

En particulier, si $n_{ij} = 0$ (*i.e.* si $H^j(W\Omega^i)$ est V-fini), ce pro-objet est nul. C'est le cas par exemple si $i = j = 1$, puisque $H^1(W\Omega^1)$ est de type fini sur W : on retrouve ainsi le fait que le pro-objet $\mathscr{U}^2(X, \mu_{p^n})$ est nul (cf. [10, II (5.9)]). C'est le cas, plus généralement, si $j = 0$ ou 1 et i quelconque, ou si $i = 0$, ou si $i = N$ (X étant

(1) Si M est un groupe abélien muni d'un endomorphisme u, on pose $M^u = \mathrm{Ker}\ 1 - u : M \to M$.
(2) On omet ici le « prime » dans la notation de la première suite spectrale.

purement de dimension N) (cf. (II (3.9), (3.11))) (le résultat pour $i = 0$, *i.e.* relatif à « $\varprojlim$ » $\mathbf{H}^j(X, \mathbf{Z}/p^n)$, étant d'ailleurs bien connu).

Corollaire **(3.5).** — *Supposons k algébriquement clos.*

a) *On a une suite exacte*

$$\textbf{(3.5.1)} \qquad 0 \to H^j(X, W\Omega^i_{log}) \to H^j(X, W\Omega^i) \xrightarrow{1-F} H^j(X, W\Omega^i) \to 0.$$

b) *On a une suite exacte*

$$\textbf{(3.5.2)} \qquad 0 \to H^j(X, W\Omega^i_{log})^0 \to H^j(X, W\Omega^i_{log}) \to D^{ij}(k) \to 0,$$

où $\quad H^j(X, W\Omega^i_{log})^0 := \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{log})^0(k)$

et $\quad D^{ij}(k) = (\text{Cœur}(E^{ij})_{ss})^F = (H^j(ZW\Omega^i)_{tf})^F.$

D'après (3.3) a), on a une suite exacte de pro-objets

$$(*) \qquad 0 \to H^j(X, W.\Omega^i_{log}) \to H^j(X, W.\Omega^i) \xrightarrow{1-F} H^j(X, W.\Omega^i) \to 0.$$

Comme la catégorie $\mathscr{G}(p^\infty)$ est artinienne (cf. [21, (1.3)]), le système projectif $H^j(X, W_n\Omega^i_{log})$ vérifie ML, donc (3.5.1) se déduit de (*) par passage à la limite. On déduit de même (3.5.2) de (3.3.2).

En particulier, sous l'hypothèse de (3.5), si $n_{ij} = 0$, donc par exemple si $j = 0$ ou 1, ou si $i = 0$ ou si $i = N$ (X purement de dimension N), $H^j(X, W\Omega^i_{log})$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini, et l'on a un isomorphisme canonique (cf. [10, II (5.11)])

$$\textbf{(3.5.3)} \qquad H^j(X, W\Omega^i_{log}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} W \xrightarrow{\sim} \text{Cœur}(E^{ij})_{ss}$$

(où $\text{Cœur}(E^{ij})_{ss} \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^i)_{tf}$ (1.4.5)).

Par ailleurs, (3.5) implique aussitôt :

Corollaire **(3.6).** — *Supposons k algébriquement clos. Alors* $H^j(X, W\Omega^i_{log}) \otimes \mathbf{Q}_p$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{Q}_p$, *et l'on a des isomorphismes canoniques* :

$$\textbf{(3.6.1)} \qquad H^j(X, W\Omega^i_{log}) \otimes \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} (H^j(W\Omega^i) \otimes K)^F,$$

$$\textbf{(3.6.2)} \qquad H^j(X, W\Omega^i_{log}) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes K)_{[i]}$$

(*où* $K = \text{Frac}(W)$).

(3.6.3) Pour la démonstration de (3.3) nous aurons besoin de quelques préliminaires sur les R-modules. Si M est un R-module gradué, nous noterons $M_\bullet$ le pro-objet « $\varprojlim$ » M_n, où $M_n = R_n \otimes_R M = M/\text{Fil}^n M$ (I (3.1)). Désignons par $\mathscr{S}_{parf}$ le site des S-schémas parfaits affines, muni de la topologie étale; c'est un site de définition de S_{parf} (cf. (3.2)). Nous noterons $\mathscr{M}^i_n$ le faisceau sur S_{parf} défini par $A \mapsto M^i_n \otimes WA$ $(= M^i_n \otimes W_nA)$ pour $\text{Spec}(A) \in \text{ob}\, \mathscr{S}_{parf}$ (pour tout W_n-module L, le préfaisceau $\mathscr{L} : A \mapsto L \otimes_W WA$ sur $\mathscr{S}_{parf}$ est un faisceau), et $\mathscr{M}^i_\bullet$ le pro-objet

« $\varprojlim$ » $\mathscr{M}^i_n$. Nous désignerons par F (resp. V) l'endomorphisme de $\mathscr{M}^i_\cdot$ défini par $F \otimes \sigma$ (resp. $V \otimes \sigma^{-1}$) sur $M^i_\cdot \otimes WA$.

Lemme **(3.7).** — *Soient* $i \in \mathbf{Z}$ *et* M *le* R*-module gradué* $\mathbf{U}_i$ (I (2.14.3)). *On a une suite exacte canonique de* pro-$\mathscr{G}(p^\infty)$:

(3.7.1) $$0 \to \mathbf{G}_a \xrightarrow{\varphi} \mathscr{M}^1_\cdot \xrightarrow{1-F} \mathscr{M}^1_\cdot \to 0,$$

où l'injection φ *est donnée par*

$$\varphi(a) = \sum_{n \geqslant i} a^{\sigma^{-(n-i)}} dV^n \in \varprojlim_r \mathbf{M}^1_r(A) \ (= \varprojlim_r M^1_r \otimes WA)$$

pour $a \in A$, A *une k-algèbre parfaite.*

Par définition, $M^1_n \otimes WA$, pour $n \geqslant i$, est l'ensemble des « polynômes » $\sum_{i \leqslant r < n} a_r dV^r$, $a_r \in A$. Pour $x = \sum_{i \leqslant r \leqslant n} a_r dV^r \in M^1_{n+1} \otimes WA$, on a

$$(1 - F)x = (a_i - a_{i+1}^\sigma) dV^i + \ldots + (a_{n-1} - a_n^\sigma) dV^{n-1} \in M^1_n \otimes WA.$$

Il en résulte aussitôt qu'on a une suite exacte

$(*)_n$ $$0 \to A \xrightarrow{\varphi} M^1_{n+1} \otimes WA \xrightarrow{1-F} M^1_n \otimes WA \to 0,$$

où $$\varphi(a) = \sum_{i \leqslant r \leqslant n} a^{\sigma^{-(r-i)}} dV^r.$$

Le système projectif des suites $(*)_n$ définit (3.7.1).

Lemme **(3.8).** — *Soit* $M = (M^0 \to M^1)$ *un domino* (I (2.16)). *Soit*

$$0 = D^n M \subset D^{n-1} M \subset \ldots \subset D^0 M = M$$

une suite de composition telle que $\mathrm{gr}^m_D M$ *soit isomorphe à* $\mathbf{U}_{i(m)}$ *pour* $1 \leqslant m \leqslant n$ (I (2.15)). *Alors :*

a) *Les flèches*

$$0 = \mathscr{D}^n \mathscr{M}_\cdot \to \mathscr{D}^{n-1} \mathscr{M}_\cdot \to \ldots \to \mathscr{D}^0 \mathscr{M}_\cdot = \mathscr{M}_\cdot$$

sont injectives et forment une suite de composition de $\mathscr{M}_\cdot$ *telle que* $\mathrm{gr}^m \mathscr{M}_\cdot \simeq (gr^m \mathscr{M})_\cdot$.

b) *Pour tout m, l'endomorphisme* $1 - F$ *de* $\mathscr{D}^m \mathscr{M}^1_\cdot$ *est surjectif, et les injections*

$$0 = (\mathscr{D}^n \mathscr{M}^1_\cdot)^F \hookrightarrow (\mathscr{D}^{n-1} \mathscr{M}^1_\cdot)^F \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (\mathscr{M}^1_\cdot)^F$$

forment une suite de composition de $(\mathscr{M}^1_\cdot)^F$ *dont les quotients successifs sont isomorphes à* $\mathbf{G}_a$.

Le groupe pro-algébrique $(\mathscr{M}^1_\cdot)^F$ *est donc essentiellement constant, de valeur un groupe quasi-algébrique unipotent connexe de dimension* $n = \dim_k M$ (I (2.18)), *annulé par* p^ν, *où* ν *est l'exposant d'unipotence de* M (loc. cit.).

L'assertion a) résulte aussitôt de (I (3.10)). D'après (3.7), $1 - F$ est un endomorphisme surjectif de $gr^m \mathscr{M}^1_\cdot$, de noyau isomorphe à $\mathbf{G}_a$, d'où b).

Lemme **(3.9)**. — *Soit* M *un* R^0*-module annulé par* p^n*, de type fini sur* W_n*. L'endomorphisme* $1 - F$ *de* $\mathscr{M}$ *est surjectif, et* $\mathscr{M}^F$ *est étale localement constant, de fibre en* $\mathrm{Spec}(\bar{k})$ *(où* $\bar{k}$ *est une extension algébriquement close de* k*) le* $\mathbf{Z}/p^n$*-module de type fini* $(M \otimes W(\bar{k}))^F$.

On se ramène à supposer k algébriquement clos, on sait alors que l'endomorphisme $1 - F$ de M est surjectif et que $M^F \otimes W_n \xrightarrow{\sim} M$, le lemme en résulte trivialement.

Lemme **(3.10)**. — *Soit* M *un* R^0*-module* V*-fini* (I (2.1)). *Considérons le dévissage canonique* (I (2.7))

$$0 \to C \to M \to U \to 0,$$

où C *est de type fini sur* W *et* U *de Cartier unipotent. Alors* :

a) *La suite de pro-objets*

$$0 \to \mathscr{C}_\cdot \to \mathscr{M}_\cdot \to \mathscr{U}_\cdot \to 0$$

est exacte, et $1 - F$ *en est un endomorphisme surjectif, bijectif sur* $\mathscr{U}_\cdot$.

b) *Les injections* $C_{ss} \hookrightarrow C \hookrightarrow M$ (cf. (I (1.5.3))) *donnent des isomorphismes*

$$(\mathscr{C}_{ss})^F_\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^F_\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}^F_\cdot,$$

et $\mathscr{M}^F_\cdot$ *est profini étale, de fibre en* $\mathrm{Spec}(\bar{k})$ *(*$\bar{k}$ *extension algébriquement close de* k*) le* $\mathbf{Z}_p$*-module de type fini* $(C_{ss} \otimes W(\bar{k}))^F = (C \otimes W(\bar{k}))^F = (M \otimes W(\bar{k}))^F$.

Comme V est injectif sur U, $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(R^0_n, U) = {}_{(V^n)}U = 0$, donc la suite $0 \to C_n \to M_n \to U_n \to 0$ est exacte, donc aussi la suite de faisceaux correspondante. Puisque U est annulé par une puissance de F, $1 - F$ est un endomorphisme bijectif de $\mathscr{U}_\cdot$. Les autres assertions en découlent, compte tenu de (3.9).

Lemme **(3.11)**. — *Soit* M *un* R*-module cohérent. Pour* $i \in \mathbf{Z}$, *soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

la suite exacte de R*-modules (cohérents) définie par les tronqués*

$$M' = (\ldots \to M^{i-1} \to F^\infty B^i \to 0),$$
$$M'' = (0 \to M^i/F^\infty B^i \to M^{i+1} \to \ldots).$$

La suite de pro-objets $0 \to \mathscr{M}'^i_\cdot \to \mathscr{M}^i_\cdot \to \mathscr{M}''^i_\cdot \to 0$ *est exacte, et* $1 - F$ *en est un endomorphisme surjectif. Elle induit une suite exacte*

$$0 \to (\mathscr{M}'^i_\cdot)^F \to (\mathscr{M}^i_\cdot)^F \to \mathscr{C}^F_\cdot \to 0,$$

où $C = V^{-\infty} Z^i / F^\infty B^i$; $\mathscr{C}^F_\cdot$ *est profini étale, de fibre* $(C \otimes W(\bar{k}))^F$, *et* $(\mathscr{M}'^i_\cdot)^F$ *est un groupe quasi-algébrique unipotent connexe, de dimension égale à celle du domino* $M^{i-1}/V^{-\infty} Z^{i-1} \to F^\infty B^i$, *et annulé par* p^ν *où* ν *est l'exposant d'unipotence correspondant* (I (2.18)).

La première assertion découle de (I (3.10)).

Les autres en résultent grâce à (3.8), (3.9), (3.10), compte tenu de ce que $0 \to V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i \to M^i/F^\infty B^i \to M^i/V^{-\infty}Z^i \to 0$ est le dévissage canonique (I (2.7)) du R^0-module V-fini $M^i/F^\infty B^i$, M étant cohérent.

(3.12) *Preuve de* (3.3). — Pour $T = \mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{ob}\, \mathscr{S}_{\mathrm{parf}}$, on a

$$\Gamma(T, \mathbf{H}^j(W_n\Omega^i)) = H^j(X_T, W_n\Omega^i),$$

mais $$W_n\Omega^i_{X_T} = W_n\Omega^i_X \otimes_{W_n} W_nA$$

[10, I (1.9.2)], donc, par Künneth,

$$\Gamma(T, \mathbf{H}^j(W_n\Omega^i)) = H^j(W_n\Omega^i) \otimes WA.$$

D'autre part, d'après (II (2.3.2)), on a un isomorphisme naturel de pro-objets

$$\text{« } \varprojlim \text{ » } H^j(W\Omega^i)_n \otimes WA \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim \text{ » } H^j(W_n\Omega^i) \otimes WA,$$

où $H^j(W\Omega^i)_n = H^j(W\Omega^i)/\mathrm{Fil}^n$. Avec les notations de (3.6.3), on a donc un isomorphisme canonique

(3.12.1) $$\mathscr{H}^j(W\Omega^i)_\cdot \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim \text{ » } \mathbf{H}^j(X, W_n\Omega^i).$$

On en déduit (3.3) en appliquant (3.11) au R-module cohérent $E_1^{\cdot j}$, compte tenu de (3.2.5).

Variante **(3.13)**. — Grâce à l'isomorphisme de Cartier (III (1.4))

$$C^{-n}\colon W_n\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot_X,$$

compatible aux changements de bases parfaites, (3.2.2) entraîne que le faisceau

$$\mathbf{H}^j(X, \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot) := R^j f_* \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot$$

appartient à $\mathscr{G}(p^n)$ (donc $\mathbf{H}^j(X, \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot) := \text{« } \varprojlim \text{ » } \mathbf{H}^j(X, \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot)$ à pro-$\mathscr{G}(p^\infty)$). Compte tenu de l'isomorphisme (3.1.5) $\xrightarrow{\sim}$ (3.1.6), il résulte de (3.3) a) que l'endomorphisme $V' - 1$ de $\mathbf{H}^j(X, \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot)$ est surjectif et que l'on a un isomorphisme canonique (de pro-$\mathscr{G}(p^\infty)$)

(3.13.1) $$\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{\log}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^j(X, \mathscr{H}^i W.\Omega^\cdot)^{V'},$$

compatible à (3.3.1) via $C^{-\cdot}$. On en déduit, comme en (3.5) a), que, si k est algébriquement clos, on a une suite exacte

(3.13.2) $$0 \longrightarrow H^j(X, W\Omega^i_{\log}) \longrightarrow H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \xrightarrow{1-V'} H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, le même argument que pour la démonstration de (3.3), mais reposant cette fois sur la cohérence de $''E_2$ (III (5.2)), montre que $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{\log})$ admet un dévissage canonique

(3.13.3) $$0 \to G^{ji} \to \mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{\log}) \to D'^{ji} \to 0,$$

où : (i) G^{ji} est un groupe quasi algébrique unipotent connexe, de dimension m_{ji}, annulé par $p^{\mu_{ji}}$, où m_{ji} est la dimension du domino $d_2 : H^{j-2}\mathscr{H}^{i+1}W\Omega^\cdot/F'^{-\infty}{}''Z_3^{j-2,i+1} \to V'^{\infty}{}''B_3^{ji}$ et μ_{ji} son exposant d'unipotence (I (2.15.3)).

(ii) D'^{ji} est un groupe profini étale, donné, si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, par une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur le $\mathbf{Z}_p$-module de type fini $(\mathrm{Cœur}({}''E^{ji}) \otimes W(\bar{k}))^{V' \otimes \sigma^{-1}}$.

Par conséquent G^{ji} est la composante neutre de $\mathbf{H}^j(X, W.\Omega^i_{\log})$ et D'^{ji} son π_0, et il existe donc un (unique) isomorphisme de (3.3.2) sur (3.13.3). En particulier, $m_{ji} = n_{ij}$: on retrouve une des assertions de (2.10) (il est sans doute possible de retrouver aussi $\nu_{ij} = \mu_{ji}$). De plus, l'isomorphisme $D^{ij} \xrightarrow{\sim} D'^{ji}$ fournit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-équivariant $\mathrm{Cœur}('E^{ij})_{ss} \otimes W(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cœur}({}''E^{ij})_{ss} \otimes W(\bar{k})$, donc un isomorphisme $\mathrm{Cœur}('E^{ij})_{ss} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cœur}({}''E^{ji})_{ss}$: on retrouve l'isomorphisme fourni par (1.4.5) et (1.4.6).

Notons encore le corollaire suivant : si $n_{ij} = 0$ (cf. (3.5)), et si $k = \bar{k}$, on a un isomorphisme canonique (de W-modules)

(3.13.4) $$H^j(X, W\Omega^i_{\log}) \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cœur}({}''E^{ji})_{ss}.$$

En particulier, comme nous l'avions annoncé en (III (6.8)), l'inclusion $\mathbf{Z}/p^\cdot \to \mathscr{H}^0W.\Omega^\cdot$ induit un isomorphisme (pour $k = \bar{k}$)

(3.13.5) $$H^j(X, \mathbf{Z}_p) \otimes W \xrightarrow{\sim} H^j(X, \mathscr{H}^0W\Omega^\cdot).$$

Signalons enfin une dernière conséquence de (3.3) :

Proposition **(3.14).** — *Supposons k algébriquement clos. L'endomorphisme* $1 - F$ *de la suite exacte* (1.4.5)

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i)_u \to H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(ZW\Omega^i)_{tf} \to 0$$

est surjectif, et la suite exacte des noyaux s'identifie canoniquement à (3.5.2).

Comme k est algébriquement clos, et que $H^j(ZW\Omega^i)_{tf}$ est de type fini sur W, $1 - F$ en est un endomorphisme surjectif (cf. par exemple [10, II (5.3)]). D'autre part, d'après (2.10), $H^j(ZW\Omega^i)_u$ s'insère dans une suite exacte de R^0-modules

(*) $$0 \to H^{j-1}(BW\Omega^{i+1})_{F\text{-}u} \to H^j(ZW\Omega^i)_u \to F^\infty{}'B_2^{ij} \to 0.$$

Comme le terme de gauche est F-fini, en particulier F-adiquement séparé et complet, $1 - F$ en est un endomorphisme bijectif (d'inverse ΣF^n). Par ailleurs, d'après (3.8) b), $1 - F$ est surjectif sur $F^\infty{}'B_2^{ij}$. Il en résulte que $1 - F$ est surjectif sur $H^j(ZW\Omega^i)_u$, donc sur la suite exacte (1.4.5), et que la seconde flèche de (*) induit un isomorphisme

$$H^j(ZW\Omega^i)_u^F \xrightarrow{\sim} (F^\infty{}'B_2^{ij})^F.$$

Or on a (cf. (3.12))

$$H^j(X, W\Omega^i_{\log})^0 \xrightarrow{\sim} (F^\infty{}'B_2^{ij})^F,$$

et, d'après (1.4.5) et (3.10) b),

$$H^j(ZW\Omega^i)_{tf}^F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cœur}('E^{ij})^F \xrightarrow{\sim} D^{ij}(k).$$

La seconde assertion de (3.14) en résulte, grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X, W\Omega^i_{log}) \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^i)^F,$$

obtenu en passant à la limite dans la suite exacte de cohomologie de (3.1.3) (le système $H^j(X, W_n\Omega^i_{log})$ vérifiant ML (cf. preuve de (3.5))) et en tenant compte de la surjectivité de $1 - F$ sur $H^j(ZW\Omega^i)$.

4. Décompositions de Hodge-Witt

Dans tout ce numéro, X désigne (sauf mention du contraire) un schéma propre et lisse sur k.

(4.1) Soit $i \in \mathbf{Z}$. Considérons le diagramme commutatif suivant, formé de complexes de pro-objets, défini par les tronqués $W.\Omega^{\geq i}$ et $t_{\leq i}W.\Omega^\cdot$ de $W.\Omega^\cdot_X$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & ZW.\Omega^i[-i] & \longrightarrow & W.\Omega^{\geq i} & \longrightarrow & t'_{\geq i+1}W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & t_{\leq i}W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & t'_{\geq i+1}W.\Omega^\cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & W.\Omega^{<i} & = & W.\Omega^{<i} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array} \tag{4.1.1}$$

(où, pour un complexe L, $t'_{\geq i+1}L$ désigne le tronqué $(0 \to L^i/Z^i \to L^{i+1} \to \ldots)$, canoniquement quasi isomorphe à $t_{\geq i+1}L = (0 \to L^{i+1}/B^{i+1} \to L^{i+2} \to \ldots)$). Par application de $H^*(X, -)$ et passage à la limite projective, on en déduit un diagramme commutatif de suites exactes longues (avec les conventions de notations habituelles, cf. (III (6.2.5))) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\ldots & \longrightarrow & H^j(ZW\Omega^i) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, W\Omega^{\geq i}) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, t_{\geq i+1}W\Omega^\cdot) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & (*) & \downarrow & & \| & & \\
\ldots & \longrightarrow & H^{i+j}(X, t_{\leq i}W\Omega^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, W\Omega^\cdot) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, t_{\geq i+1}W\Omega^\cdot) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}) & = & H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & &
\end{array} \tag{4.1.2}$$

Proposition **(4.2).** — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$. a) *Si* $H^j(ZW\Omega^i)$ *est de type fini sur* W, *les flèches du carré* (*) *de* (4.1.2) *sont injectives, et* (*) *est cartésien.*

b) *Si de plus* $H^{j+1}(ZW\Omega^i)$ *est de type fini sur* W, *le carré* (*) *est cocartésien*, i.e. $H^{i+j}(X, W\Omega^\cdot) = H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) + H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot)$, *et les flèches*

$$H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{<i})$$

et

$$H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot)$$

sont surjectives.

Rappelons que l'on a canoniquement $H^{i+j}(X, W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^{i+j}(X/W)$, et que, par définition,

$$P^iH^{i+j}(X/W) = \operatorname{Im} H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^{i+j}(X/W)$$

(resp.
$$P_iH^{i+j}(X/W) = \operatorname{Im} H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot) \to H^{i+j}(X/W))$$

est la filtration canonique, aboutissement de la première suite spectrale de de Rham-Witt (resp. la suite spectrale conjuguée). Pour l'interprétation des hypothèses de (4.2), voir (1.8), (2.12), et les remarques suivant (3.5).

Prouvons a). Supposons $H^j(ZW\Omega^i)$ de type fini sur W. Montrons d'abord l'injectivité de $H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot)$, ou, ce qui revient au même, la nullité de $H^{i+j-1}(X, W\Omega^{<i}) \to H^j(ZW\Omega^i)$. La suite exacte évidente

$$0 \to BW.\Omega^i[-i] \to (\dots \to W.\Omega^{i-1} \to BW.\Omega^i \to 0) \to W.\Omega^{\leqslant i-1} \to 0$$

s'injecte dans la colonne de gauche de (4.1.1), donc on a

$$\operatorname{Im} H^{i+j-1}(X, W\Omega^{<i}) \to H^j(ZW\Omega^i) \subset \operatorname{Im} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(ZW\Omega^i).$$

Or on a (2.4.6)

$$\operatorname{Im} H^j(BW\Omega^i) \to H^j(ZW\Omega^i) = H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u}.$$

Comme $H^j(ZW\Omega^i)$ est de type fini sur W, $H^j(ZW\Omega^i)_u = 0$ (1.4), donc, d'après (2.12), $H^j(BW\Omega^i)_{V'\text{-}u} = 0$, d'où l'injectivité de $H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot)$. Celle de $H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^\cdot)$, ou, ce qui revient au même, la nullité de $H^{i+j-1}(X, W\Omega^{<i}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i})$ en résulte, comme le montre (4.1.2). Prouvons maintenant l'injectivité de $H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i})$, *i.e.* la nullité de

$$H^{i+j-1}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(ZW\Omega^i).$$

La ligne supérieure de (4.1.1) se projette sur la suite exacte

$$0 \to ZW.\Omega^i[-i] \to W.\Omega^i[-i] \to BW.\Omega^{i+1}[-i] \to 0$$

donc on a

$$\operatorname{Im} H^{i+j-1}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot) \to H^j(ZW\Omega^i) \subset \operatorname{Im} H^{j-1}(BW\Omega^{i+1}) \to H^j(ZW\Omega^i).$$

La conclusion en résulte, grâce à (2.4.3) et (2.12). L'injectivité de

$$H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^{\cdot}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\cdot})$$

et le fait que (*) soit cartésien s'ensuivent, comme le montre encore (4.1.2). Supposons maintenant $H^j(ZW\Omega^i)$ et $H^{j+1}(ZW\Omega^i)$ de type fini sur W. Alors, d'après (4.1.2), les flèches $H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^{\cdot}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{<i})$ et $H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^{\cdot})$ sont surjectives, d'où b), ce qui achève la démonstration de (4.2).

L'exemple (2.17) montre que l'hypothèse supplémentaire que $H^{j+1}(ZW\Omega^i)$ est de type fini sur W est nécessaire pour la validité de b).

Corollaire **(4.3).** — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$ *tels que* $H^j(ZW\Omega^i)$ *soit de type fini sur* W. *Alors*

$$P_iH^{i+j}(X/W) \cap P^rH^{i+j}(X/W) = 0$$

pour tout $r > i$.

On peut se borner à $r = i + 1$. D'après (4.2) a), il suffit de montrer que

$$H^j(ZW\Omega^i) \cap \mathrm{Im}(H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i+1}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i})) = 0.$$

Or on a la suite exacte

$$H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i+1}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^j(X, W\Omega^i),$$

et l'on sait que, $H^j(ZW\Omega^i)$ étant de type fini sur W, la flèche composée

$$H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^j(W\Omega^i)$$

est injective (2.12), d'où la conclusion.

Corollaire **(4.4).** — *Soient* $i, j \in \mathbf{Z}$ *tels que* $H^j(ZW\Omega^i)$ *et* $H^{j+1}(ZW\Omega^i)$ *soient de type fini sur* W. *Alors la suite exacte*

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \to H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^{\cdot}) \to 0$$

(*resp.*

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i) \to H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^{\cdot}) \to H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}) \to 0)$$

définie, grâce à (4.2), *par* (4.1.2), *admet un unique scindage*

(4.4.1) $$H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i}) \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^{\cdot})$$

(*resp.* **(4.4.2)** $$H^{i+j}(X, t_{\leqslant i}W\Omega^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}))$$

compatible à l'opérateur F (*resp.* V′) *induit par l'endomorphisme* $F_{\geqslant i}$ *de* $W.\Omega^{\geqslant i}$ *égal à* p^rF *sur* $W.\Omega^{i+r}$ (*resp.* $V'_{\leqslant i}$ *de* $t_{\leqslant i}W.\Omega^{\cdot}$ (III (1.7.1))). *Dans la décomposition* (4.4.1) (*resp.* (4.4.2)), $H^j(ZW\Omega^i)$ *est le facteur direct où* F (*resp.* V′) *est inversible, et* $H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^{\cdot})$ (*resp.* $H^{i+j}(X, W\Omega^{<i})$) *celui où* F (*resp.* V′) *est topologiquement nilpotent. Les décompositions* (4.4.1) *et* (4.4.2) *déterminent, par le carré* (*) *de* (4.1.2), *une décomposition canonique de* $H^{i+j}(X/W)$:

(4.4.3) $$H^{i+j}(X/W) \xrightarrow{\sim} H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}) \oplus H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^{\cdot}).$$

Cette décomposition est stable par l'endomorphisme de Frobenius $\mathfrak{F}$ *(noté aussi* Φ*) de* $H^{i+j}(X/W)$, *avec* $\mathfrak{F} \mid (H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^{i+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot)) = p^i F$; *si* X *est purement de dimension* N, *elle est également stable par l'endomorphisme* $\mathfrak{V}$ *de* $H^{i+j}(X/W)$ *induit par l'endomorphisme* $V'_{\leqslant N}$ *de* $W.\Omega^\cdot$, *avec* $\mathfrak{V} \mid (H^{i+j}(X, W\Omega^{<i}) \oplus H^j(ZW\Omega^i)) = p^{N-i}V'$.

L'endomorphisme $F_{\geqslant i}$ de $W.\Omega^{\geqslant i}$ induit $F'_{\geqslant i+1}$ (III (1.7.3)) sur le quotient $t_{\geqslant i+1}W.\Omega^i$, donc, en vertu de (III (2.3.2)), l'opérateur induit par F sur le quotient $H^{+j}(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot)$ de $H^{i+j}(X, W\Omega^{\geqslant i})$ est topologiquement nilpotent. L'existence et l'unicité du scindage (4.4.1) en résultent, puisque la restriction de F à $H^j(ZW\Omega^i)$ est un automorphisme. On montre de manière analogue l'existence et l'unicité de (4.4.2). Comme les endomorphismes $\mathfrak{F}$ et $V'_{\leqslant i}$ de $t_{\leqslant i}W.\Omega^\cdot$ commutent ($\mathfrak{F}V'_{\leqslant i} = V'_{\leqslant i}\mathfrak{F} = p^i$), la décomposition (4.4.2) est stable par $\mathfrak{F}$, donc aussi la décomposition (4.4.3). On vérifie de même que (4.4.3) est stable par $\mathfrak{V}$. Les autres assertions sont évidentes.

Sous les hypothèses de (4.4), notons $P_{i-}H^n(X/W)$ (resp. $P^{i+}H^n(X/W)$) ($n = i + j$) l'image de l'injection composée

$$H^n(X, W\Omega^{<i}) \xrightarrow{(4.4.2)} H^n(X, t_{\leqslant i}W\Omega^\cdot) \hookrightarrow H^n(X/W)$$

(resp. $$H^n(X, t_{\geqslant i+1}W\Omega^\cdot) \xrightarrow{(4.4.1)} H^n(X, W\Omega^{\geqslant i}) \hookrightarrow H^n(X/W)).$$

On a donc des inclusions

(4.4.4) $$P_{i-1}H^n(X/W) \subset P_{i-}H^n(X/W) \subset P_iH^n(X/W),$$

(4.4.5) $$P^{i+1}H^n(X/W) \subset P^{i+}H^n(X/W) \subset P^iH^n(X/W),$$

les deux premières provenant de ce que la restriction de l'endomorphisme V' de P_i à P_{i-1} est topologiquement nilpotente, ainsi que celle de l'endomorphisme F de P^i à P^{i+1}.

Théorème **(4.5).** — *Soit* $n \in \mathbf{Z}$ *tel que les conditions de* (2.15.6) *soient satisfaites. Alors les filtrations* $P_\cdot$, $P_{\cdot -}$, $P^\cdot$, $P^{\cdot +}$ *de* $H^n = H^n(X/W)$ *déterminent une décomposition canonique* :

(4.5.1) $$H^n = \bigoplus_{i \geqslant 0} (H^n_{[i]} \oplus H^n_{]i, i+1[}),$$

où $H^n_{[i]} = P^i \cap P_i$, $H^n_{]i,i+1[} = P^{i+} \cap P_{i+1-}$; *on a*

(4.5.2) $$\begin{cases} P_{i-} = \bigoplus_{j<i} (H^n_{[j]} \oplus H^n_{]j,j+1[}), & P^{i+} = \bigoplus_{j>i} (H^n_{]j-1,j[} \oplus H^n_{[j]}), \\ P_i = P_{i-} \oplus H^n_{[i]}, & P^i = H^n_{[i]} \oplus P^{i+}. \end{cases}$$

De plus, pour $i + j = n$, *on a* ${}'E_1^{ij} = {}'E_\infty^{ij}$, ${}''E_2^{ij} = {}''E_\infty^{ij}$, *et des isomorphismes canoniques*

(4.5.3) $$H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^n_{[i]},$$

(4.5.4) $$H^j(W\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^n_{[i]} \oplus H^n_{]i,i+1[},$$

(4.5.5) $$H^j(X, \mathscr{H}^iW\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^n_{[i]} \oplus H^n_{]i-1,i[},$$

(4.5.6) $$H^j(BW\Omega^{i+1}) \xrightarrow{\sim} H^n_{]i,i+1[},$$

compatibles aux flèches naturelles

$$H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^{i+1})$$

et

$$H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \to H^{j+1}(X, BW\Omega^i);$$

la décomposition (4.5.4) *(resp.* (4.5.5)*) est stable sous les opérateurs* F *et* V *(resp.* F′ *et* V′*),* F *(resp.* V′*) est inversible sur* $H^n_{[i]}$ *et topologiquement nilpotent sur* $H^n_{]i,i+1[}$ *(resp.* $H^n_{]i-1,i[}$*). En particulier,* (4.5.1) *détermine, via* (4.5.3) *à* (4.5.6)*, des décompositions canoniques*

(4.5.7) $$H^n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} H^j(W\Omega^i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} (H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^j(BW\Omega^{i+1}))$$

(4.5.8) $$H^n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} (H^j(ZW\Omega^i) \oplus H^{j+1}(BW\Omega^i)),$$

stables par l'endomorphisme de Frobenius $\mathfrak{F}$ *de* H^n*, avec*

$$\mathfrak{F} \mid H^j(W\Omega^i) = p^i F \quad \textit{et} \quad \mathfrak{F} \mid H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) = p^{i-1} F';$$

pour X *purement de dimension* N *elles sont stables par l'endomorphisme* $\mathfrak{V}$ *de* H^n *induit par* $V'_{\leqslant N}$ (III (1.7.1))*, avec* $\mathfrak{V} \mid H^j(W\Omega^i) = p^{N-i-1}V$ *et* $\mathfrak{V} \mid H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) = p^{N-i}V'$.

Comme, pour $i+j=n$, $H^j(ZW\Omega^i)$ et $H^{j+1}(ZW\Omega^i)$ sont de type fini sur W, on dispose, d'après (4.4), de la décomposition (4.4.3), qui s'écrit

$$H^n = P_{i-} \oplus H^n_{[i]} \oplus P^{i+},$$

avec $P_i = P_{i-} \oplus H^n_{[i]}$, $P^i = H^n_{[i]} \oplus P^{i+}$. Posant $H^n_{]i,i+1[} = P^{i+} \cap P_{i+1-}$, on en déduit $P_{i+1-} = P_i \oplus H^n_{]i,i+1[}$, car $P_i \subset P_{i+1-}$ (4.4.4), et $P^{i+} = H^n_{]i,i+1[} \oplus P^{i+1}$ car $P^{i+1} \subset P^{i+}$ (4.4.4), d'où aussitôt les décompositions (4.5.1) et (4.5.2). Grâce à (2.15.6) (iii) (resp. (2.15.6) (iv)), on a $'E_1^{ij} = 'E_\infty^{ij}$ (II (3.9)) (resp. $''E_2^{ij} = ''E_\infty^{ij}$ (III (6.6))). L'isomorphisme (4.5.3) est défini par le carré (*) de (4.1.2) ((4.2) a)). L'isomorphisme (4.5.4) est défini par $'E_1^{ij} = 'E_\infty^{ij} = P^i/P^{i+1}$ et la décomposition $P^i = H^n_{[i]} \oplus H^n_{]i,i+1[} \oplus P^{i+1}$; de même, (4.5.5) est défini par $''E_2^{ji} = ''E_\infty^{ji} = P_i/P_{i-1}$ et la décomposition $P_i = P_{i-1} \oplus H^n_{[i]} \oplus H^n_{]i-1,i[}$. Enfin, pour $i+j=n$, les suites

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i) \to H^j(BW\Omega^{i+1}) \to 0$$

et

$$0 \to H^j(ZW\Omega^i) \to H^j(X, \mathscr{H}^i W\Omega^\cdot) \to H^{j+1}(BW\Omega^i) \to 0$$

sont exactes, grâce à (2.15.6) (ii), d'après (2.12). L'isomorphisme (4.5.6) est défini, au choix, par la première ou la seconde de ces suites, combinée avec (4.5.3) et (4.5.4), ou (4.5.3) et (4.5.5). Les compatibilités indiquées entre les isomorphismes (4.5.3) à (4.5.6) sont évidentes. D'autre part, d'après (4.4), (4.5.4) est stable sous F, F est bijectif sur $H^n_{[i]}$ et topologiquement nilpotent sur $H^n_{]i,i+1[}$, donc (4.5.4) est la décomposition canonique de $H^j(W\Omega^i)$ en parties semi-simple et topologiquement nilpotente sous l'action de F; comme F et V commutent, il s'ensuit que (4.5.4) est aussi stable sous V. On vérifie de même les propriétés de stabilité de (4.5.5). Les autres assertions sont immédiates.

(4.6) Pour $n \in \mathbf{Z}$, nous dirons que X est *de Hodge-Witt en degré n* si X vérifie les hypothèses de (4.5), *i.e.* $H^j(W\Omega^i)$ est de type fini sur W pour tout (i,j) tel que $i+j=n$. Les décompositions (4.5.1), (4.5.7), (4.5.8) seront appelées *décompositions de Hodge-Witt.*

De (4.5) résulte aussitôt l'équivalence des conditions ci-après :

(4.6.1)
(i) X *est de Hodge-Witt en degré n et* $H^n(X/W)$ *est sans torsion*;
(ii) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$, $H^j(W\Omega^i)$ *est sans torsion*;
(iii) *pour tout* (i,j) *tel que* $i+j=n$, $H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$ *est sans torsion.*

Supposons ces conditions satisfaites. Les décompositions de Hodge-Witt montrent qu'alors les polygones de Newton et de Hodge du F-cristal $H^n(X/W)$ coïncident le long des parties de pentes entières : (4.5.1) est la décomposition de Newton-Hodge correspondante, au sens de Katz [13, (1.6)], cf. aussi [10, II (4.10)].

Nous dirons que X est *de Hodge-Witt* si X est de Hodge-Witt en tout degré *n*. Comme, d'après (4.5), $'E_1^{ij} = 'E_\infty^{ij}$ et $''E_2^{ij} = ''E_\infty^{ij}$ pour $i+j=n$ si X est de Hodge-Witt en degré *n*, les conditions suivantes sont donc équivalentes :

(4.6.2)
(i) X *est de Hodge-Witt*;
(ii) *la première suite spectrale de de Rham-Witt de* X *dégénère en* E_1;
(iii) *la deuxième suite spectrale de de Rham-Witt de* X *dégénère en* E_2.

Il n'est pas vrai, cependant, que ces conditions impliquent la dégénérescence, en leurs termes initiaux, des suites spectrales de cran *n*. Plus précisément, on a le résultat suivant, qui nous a été communiqué par Ekedahl :

Théorème **(4.7).** — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *pour tout* (i,j), $H^j(W\Omega^i)$ *est de type fini sur* W, *avec* F *injectif*;
(ii) *pour tout* (i,j), $H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$ *est de type fini sur* W, *avec* V′ *injectif*;
(iii) *pour tout* (i,j), $H^j(BW\Omega^i)$ *est sans p-torsion* (i.e. *libre de type fini sur* W (2.3));
(iv) *pour tout* $n \geqslant 1$, *la première suite spectrale de cran n*

$$'E_1^{ij} = H^j(W_n\Omega^i) \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^\cdot)$$

dégénère en E_1;
(v) *pour tout* $n \geqslant 1$, *la deuxième suite spectrale de cran n*

$$''E_2^{ij} = H^i(\mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot) \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^\cdot)$$

dégénère en E_2.

Si ces conditions sont satisfaites, on a, pour tout (i,j) *et tout* $n \geqslant 1$, *des suites exactes canoniques*

$$\mathbf{(4.7.1)} \qquad 0 \to H^j(W\Omega^i)/V^n \to H^j(W_n\Omega^i) \to (H^{j+1}(W\Omega^{i-1})/F^n) \oplus {}_{V^n}H^{j+1}(W\Omega^i) \to 0,$$

$$\mathbf{(4.7.2)} \qquad 0 \to H^i(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot)/F'^n \to H^i(\mathscr{H}^j W_n\Omega^\cdot) \to (H^{i-1}(\mathscr{H}^{j+1}W\Omega^\cdot)/V'^n) \oplus {}_{F'^n}H^{i+1}(\mathscr{H}^j W\Omega^\cdot) \to 0.$$

Si $H^j(BW\Omega^i)$ est de type fini sur W, F et V sont nilpotents sur son sous-module de p-torsion (2.2) (qui est de longueur finie). L'équivalence des conditions (i) à (iii) résulte donc des décompositions (4.5.4) et (4.5.5). Supposons (i) vérifiée. Calculons, pour i fixé, $H^j(W_n\Omega^i)$ à l'aide de la suite spectrale (II (1.4.8)^i) :

$$(*) \qquad E_1^{ij} = H^j(X, K(i)^\ell) \Rightarrow H^*(X, W_n\Omega^i),$$

où $K(i)$ est la résolution canonique de $W_n\Omega^i$:

$$K(i) = (0 \longrightarrow W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n d)} W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^n + V^n} W\Omega^i \longrightarrow 0).$$

Comme la première suite spectrale de de Rham-Witt dégénère en E_1, la j-ième ligne du terme E_1 de (*) s'écrit :

$$H^j(W\Omega^{i-1}) \xrightarrow{(F^n, 0)} H^j(W\Omega^{i-1}) \oplus H^j(W\Omega^i) \xrightarrow{0 + V^n} H^j(W\Omega^i).$$

Comme F est injectif sur $H^j(W\Omega^{i-1})$, il s'ensuit que $E_2^{-2,j} = 0$ pour tout j, et qu'on a la suite exacte (4.7.1). On établit de même (4.7.2) à l'aide de la suite spectrale (III (5.5.5)). Montrons maintenant que (i) entraîne (iv). Notons $\ell(M)$ la longueur d'un W-module M de longueur finie. D'après (4.7.1), on a

$$(1) \qquad \ell(H^j(W_n\Omega^i)) = \ell(H^j(W\Omega^i)/V^n) + \ell(H^{j+1}(W\Omega^{i-1})/F^n) + \ell({}_{V^n}H^{j+1}(W\Omega^i)).$$

Considérons, d'autre part, la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to {}_{F^n}H^j(W\Omega^i) \to {}_{p^n}H^j(W\Omega^i) \xrightarrow{F^n} {}_{V^n}H^j(W\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)/F^n \xrightarrow{V^n} H^j(W\Omega^i)/p^n \to H^j(W\Omega^i)/V^n \to 0.$$

Comme F est injectif sur $H^j(W\Omega^i)$, on a ${}_{p^n}H^j(W\Omega^i) = {}_{V^n}H^j(W\Omega^i)$, et comme ${}_{p^n}H^j(W\Omega^i)$ est de longueur finie, (2) fournit un isomorphisme

$${}_{p^n}H^j(W\Omega^i) \xrightarrow[\simeq]{F^n} {}_{V^n}H^j(W\Omega^i)$$

et une suite exacte

$$0 \to H^j(W\Omega^i)/F^n \xrightarrow{V^n} H^j(W\Omega^i)/p^n \to H^j(W\Omega^i)/V^n \to 0.$$

En particulier :

$$(3) \qquad \ell(H^j(W\Omega^i)/p^n) = \ell(H^j(W\Omega^i)/F^n) + \ell(H^j(W\Omega^i)/V^n).$$

De (1) et (3) on déduit qu'on a, pour tout $m \in \mathbf{Z}$,

$$\sum_{+j=m} \ell(H^j(W_n\Omega^i)) = \sum_{i+j=m} \ell(H^j(W\Omega^i)/p^n) + \sum_{i+j=m+1} \ell({}_{p^n}H^j(W\Omega^i)),$$

d'où, grâce à la décomposition de Hodge-Witt (4.5.7)

$$\sum_{i+j=m} \ell(H^j(W_n\Omega^i)) = \ell(H^m(X/W)/p^n) + \ell({}_{p^n}H^{m+1}(X/W)).$$

Par la suite exacte des coefficients universels

$$0 \to H^m(X/W)/p^n \to H^m(X/W_n) \to {}_{p^n}H^{m+1}(X/W) \to 0,$$

on en conclut que

$$\sum_{i+j=m} \ell(H^j(W_n\Omega^i)) = \ell(H^m(X/W_n)) = \ell(H^m(X, W_n\Omega^\cdot)),$$

d'où la dégénérescence en E_1 de la première suite spectrale de cran n. Compte tenu de l'isomorphisme de Cartier $C^{-n}: W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i W_n\Omega^\cdot$ (III (1.4)), les conditions (iv) et (v) sont équivalentes. Il reste à prouver que (iv) implique (i). Tout d'abord, (iv) entraîne que la première suite spectrale de de Rham-Witt dégénère en E_1 (puisque celle-ci est limite projective des suites spectrales de cran n), donc que $H^j(W\Omega^i)$ est de type fini sur W pour tout (i,j). Rappelons maintenant qu'avec les notations ci-dessus les $K(i)$ forment un complexe

$$\ldots \to K(i) \xrightarrow{d} K(i+1) \to \ldots,$$

où la différentielle d est donnée par

$$\begin{array}{ccccc} K(i) & & W\Omega^{i-1} & \longrightarrow & W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \longrightarrow W\Omega^i \\ \downarrow{\scriptstyle d} & = & \downarrow{\scriptstyle (-d} & & \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \qquad \downarrow{\scriptstyle d)} \\ K(i+1) & & W\Omega^i & \longrightarrow & W\Omega^i \oplus W\Omega^{i+1} \longrightarrow W\Omega^{i+1} \end{array}$$

de sorte que les suites spectrales (*), pour i variable, forment un complexe. La différentielle de l'aboutissement, $d: H^*(W_n\Omega^i) \to H^*(W_n\Omega^{i+1})$, est la différentielle d_1 de la première suite spectrale de cran n, donc est nulle par hypothèse. Étant compatible à la filtration canonique de l'aboutissement, d induit o sur $\mathrm{gr}^1 H^*(W_n\Omega^i)$. Or on a

$$\mathrm{gr}^1 H^{j-1}(W_n\Omega^i) = E_2^{-1,j},$$

et comme la première suite spectrale (limite) dégénère en E_1, le calcul fait plus haut montre que

$$E_2^{-1,j} = H^j(W\Omega^{i-1})/F^n \oplus {}_{V^n}H^j(W\Omega^i).$$

Vu la définition de $d: K(i) \to K(i+1)$, il en résulte que la flèche canonique

$${}_{V^n}H^j(W\Omega^i) \to H^j(W\Omega^i)/F^n$$

(figurant dans (2)) est nulle. Notons T le sous-module de p-torsion de $H^j(W\Omega^i)$. Comme V est topologiquement nilpotent sur $H^j(W\Omega^i)$, on a $T = {}_{V^n}H^j(W\Omega^i)$ pour $n \gg 0$. Grâce à (2) on en conclut que $F^n: T \to T$ est bijectif pour $n \gg 0$, donc que F est injectif sur $H^j(W\Omega^i)$, ce qui achève la démonstration de (4.7).

Remarques **(4.8).** — *a)* Ekedahl sait montrer (lettre à Katz du 26-11-1981) que, si X est de Hodge-Witt, la première suite spectrale de de Rham-Witt de cran n dégénère en E_2 pour tout $n \geqslant 1$, et qu'on a, pour tout (i,j),

$$\ell(H^j(W_n\Omega)) = \ell(H^j(W\Omega^i)/V^n) + \ell({}_{V^n}H^{j+1}(W\Omega^i)) + \ell(H^{j+1}(W\Omega^{i-1})/F^n) + \ell({}_{F^n}H^{j+2}(W\Omega^{i-1})).$$

Il prouve également que, sous les conditions de (4.7), la suite (4.7.1) est scindée.

b) Supposons les conditions de (4.7) satisfaites. Il n'est pas vrai, en général, que, pour $n \geqslant 1$ donné, les filtrations aboutissements des suites spectrales de cran n déterminent une décomposition de $H^*(X/W_n)$, voir (4.13) (et aussi, pour $n = 1$, Katz [12, (2.3.4)]).

Proposition **(4.9).** — *Sous la condition* (i) *de* (4.7), *on a, pour tout* (i,j) *et tout* $n \geqslant 1$, *des suites exactes canoniques*

(4.9.1) $$0 \to H^j(W\Omega^{i-1})/(F^nH^j(W\Omega^{i-1}) + V^nH^j(W\Omega^{i-1})) \xrightarrow{d} H^j(BW_n\Omega^i) \to (V^n)^{-1}(F^nH^{j+1}(W\Omega^{i-1}))/F^nH^{j+1}(W\Omega^{i-1}) \to 0,$$

(4.9.2) $$0 \to H^j(W\Omega^i)/V^n \xrightarrow{F^n} H^j(ZW_n\Omega^i) \to (H^{j+1}(W\Omega^{i-1})/F^n) \oplus {}_{V^n}H^{j+1}(W\Omega^i) \to 0.$$

Observons que (4.7.1) et (4.9.2) entraînent

(4.9.3) $$\ell(H^j(ZW_n\Omega^i)) = \ell(H^j(W_n\Omega^i)),$$

donc aussi

(4.9.4) $$\ell(H^j(ZW_n\Omega^i)) = \ell(H^j(\mathscr{H}^iW_n\Omega^\cdot)),$$

compte tenu de l'isomorphisme de Cartier $C^{-n} : H^j(W_n\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathscr{H}^iW_n\Omega^\cdot)$.

Les suites exactes (4.9.1) et (4.9.2) sont fournies, comme (4.7.1) et (4.7.2), par les résolutions suivantes de $BW_n\Omega^i$ et $ZW_n\Omega^i$, valables pour tout schéma X lisse sur une base parfaite :

Lemme **(4.10).** — *Pour tout n et tout i, les suites ci-après sont exactes* :

(4.10.1) $$0 \longrightarrow W\Omega^i \xrightarrow{(V^n, -F^n)} W\Omega^i \oplus W\Omega^i \xrightarrow{F^n + V^n} W\Omega^i \xrightarrow{d} BW_n\Omega^{i+1} \longrightarrow 0,$$

(4.10.2) $$0 \longrightarrow W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -d)} W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^{2n} + V^n} W\Omega^i \xrightarrow{F^n} ZW_n\Omega^i \longrightarrow 0.$$

L'exactitude à gauche de (4.10.1) et (4.10.2) résulte de ce que $W\Omega^\cdot$ est sans p-torsion. Soit $x \in W\Omega^i$, d'image $\bar{x}$ dans $W_n\Omega^i$, tel que $d\bar{x} = 0$. Alors, d'après [10, I (3.21)], $\bar{x} \in F^nW_{2n}\Omega^i$, donc x s'écrit $x = F^ny + V^nz + dV^nt = F^n(y + dV^{2n}t) + V^nz$, donc $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im}(F^n + V^n)$. Soient $x, y \in W\Omega^i$ tels que $F^nx + V^ny = 0$. Appliquant F^nd, on en déduit $p^nF^{2n}dx + dy = 0$, d'où $y = -F^nt$ [10, I (3.21.1.5)], et par suite $x = V^nt$, d'où l'exactitude de (4.10.1). D'après [10, I (3.21)], $F^n : W\Omega^i \to ZW_n\Omega^i$ est surjectif. Soit $x \in W\Omega^i$, d'image $\bar{x}$ dans $W_{2n}\Omega^i$, tel que $F^n\bar{x} = 0$. Alors, d'après [10, I (3.21.1.2)], $\bar{x} \in V^nW_n\Omega^i$, donc x s'écrit $x = V^ny + dV^{2n}z$, donc $\operatorname{Ker} F^n = \operatorname{Im}(dV^{2n} + V^n)$. Enfin, soit $(x,y) \in W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i$ tel que $dV^{2n}x + V^ny = 0$. On en déduit $dx + p^nF^ny = 0$, d'où $x = F^nt$ [10, I (3.21.1.5)], et $p^ndV^nt + V^ny = 0$, soit $V^n(dt + y) = 0$, *i.e.* $y = -dt$, d'où l'exactitude de (4.10.2).

Remarque **(4.11)**. — Si X est un schéma lisse sur une base parfaite, posons, pour $n, r \geqslant 0$,

$$\mathbf{(4.11.1)} \qquad Z_r W_n\Omega^i_X = F^r W_{n+r}\Omega^i_X,$$

$$\mathbf{(4.11.2)} \qquad B_r W_n\Omega^i_X = \begin{cases} F^{r-n} d W_r\Omega^{i-1}_X & \text{si } r \geqslant n \\ d V^{n-r} W_r\Omega^{i-1}_X & \text{si } r \leqslant n. \end{cases}$$

En particulier, $Z_n W_n\Omega^i = ZW_n\Omega^i$ [10, I (3.21)], $B_n W_n\Omega^i = BW_n\Omega^i$, et, pour $n = 1$, on retrouve les faisceaux définis en [10, 0 (2.2)] : $Z_r W_1\Omega^i = Z_r\Omega^i$, $B_r W_1\Omega^i = B_r\Omega^i$ [10, I (3.11)]. On a des inclusions

$$0 = B_0 W_n\Omega^i \subset B_1 W_n\Omega^i \subset \ldots B_r W_n\Omega^i \subset \ldots \subset Z_r W_n\Omega^i \subset \ldots \subset Z_1 W_n\Omega^i \subset Z_0 W_n\Omega^i = W_n\Omega^i$$

et l'on vérifie facilement que $F^r : W_{n+r}\Omega^i \to W_n\Omega^i$ donne un isomorphisme de Cartier

$$\mathbf{(4.11.3)} \qquad C^{-r} : W_n\Omega^i \xrightarrow{\sim} Z_r W_n\Omega^i / B_r W_n\Omega^i,$$

qui généralise (III (1.4.1)) et [10, 0 (2.2.5)]. D'autre part, on montre sans peine qu'on a des suites exactes

$$\mathbf{(4.11.4)} \qquad 0 \longrightarrow W\Omega^i \xrightarrow{(V^r, -F^n)} W\Omega^i \oplus W\Omega^i \xrightarrow{F^n + V^r} W\Omega^i \xrightarrow{F^{r-n}d} B_r W_n\Omega^{i+1} \longrightarrow 0$$

(si $r \geqslant n$, et $F^{r-n}d$ remplacé par dV^{n-r} si $r \leqslant n$),

$$\mathbf{(4.11.5)} \qquad 0 \longrightarrow W\Omega^{i-1} \xrightarrow{(F^n, -F^n dV^r)} W\Omega^{i-1} \oplus W\Omega^i \xrightarrow{dV^{n+r} + V^n} W\Omega^i \xrightarrow{F^r} Z_r W_n\Omega^i \longrightarrow 0,$$

qui généralisent (4.10.1), (4.10.2) et (II (1.2.2)).

On en déduit, pour X propre et lisse sur k, et vérifiant l'hypothèse (i) de (4.7), des suites exactes canoniques

$$\mathbf{(4.11.6)} \qquad 0 \to H^j(W\Omega^{i-1})/(F^n H^j(W\Omega^{i-1}) + V^r H^j(W\Omega^{i-1})) \xrightarrow{F^{r-n}d} H^j(B_r W_n\Omega^i) \to (V^r)^{-1}(F^n H^{j+1}(W\Omega^{i-1}))/F^n H^{j+1}(W\Omega^{i-1}) \to 0,$$

$$\mathbf{(4.11.7)} \qquad 0 \to H^j(W\Omega^i)/V^n \xrightarrow{F^r} H^j(Z_r W_n\Omega^i) \to H^{j+1}(W\Omega^{i-1})/F^n \oplus {}_{V^n} H^{j+1}(W\Omega^i) \to 0,$$

généralisant (4.7.1), (4.9.1) et (4.9.2).

Définition **(4.12)**. — *Pour* $n \in \mathbf{Z}$, *nous dirons que* X *est ordinaire en degré* n *si* X *est de Hodge-Witt en degré* n (4.6) *et* $H^i(BW\Omega^{n+1-i}) = 0$ *pour tout* $i \geqslant 0$. *Nous dirons que* X *est ordinaire si* X *est ordinaire en tout degré.*

Si X est ordinaire en degré n, on a donc, pour $i + j = n$, $H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^j(W\Omega^i)$, $H^j(ZW\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathscr{H}^i W\Omega^\cdot)$, et la décomposition de Hodge-Witt de $H^n(X/W)$ se réduit à :

$$\mathbf{(4.12.1)} \qquad H^n(X/W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=n} H^j(ZW\Omega^i).$$

L'énoncé ci-après fait le lien avec d'autres définitions du terme « ordinaire », cf. Mazur [15], Kato [11], Ogus [18], [4, (1.3.3)], et l'article en préparation de Bloch-Gabber-Kato développant [11].

Théorème **(4.13).** — a) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) X *est ordinaire*;

(ii) *pour tout* (i,j), $H^j(BW\Omega^i) = 0$;

(iii) *pour tout* $n \geqslant 1$ *et tout* (i,j), $H^j(BW_n\Omega^i) = 0$;

(iv) *pour tout* $n \geqslant 1$, *la première suite spectrale de de Rham-Witt de cran n dégénère en* E_1, *la suite spectrale conjuguée de cran n dégénère en* E_2, *et les filtrations respectives* Fil$^\bullet$ *et* Fil$_\bullet$ *sur l'aboutissement sont opposées*, i.e. *on a, pour tout* $m \in \mathbf{Z}$ *et tout* i,

$$\textbf{(4.13.1)} \qquad \mathrm{Fil}_i H^m(X/W_n) \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} H^m(X/W_n) = H^m(X/W_n);$$

(v) *pour tout* (i,j), $H^j(B\Omega^i) = 0$;

(vi) *la première suite spectrale et la suite spectrale conjuguée de cran* 1 *dégénèrent en leurs termes initiaux et les filtrations respectives* Fil$^\bullet$ *et* Fil$_\bullet$ *sur l'aboutissement sont opposées*, i.e. *on a, pour tout* $m \in \mathbf{Z}$ *et tout* i,

$$\textbf{(4.13.2)} \qquad \mathrm{Fil}_i H^m_{DR}(X/k) \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} H^m_{DR}(X/k) = H^m_{DR}(X/k)$$

(*où* $H^*_{DR}(X/k) = H^*(X, \Omega^\bullet) = H^*(X/W_1)$).

b) *Si* X *est ordinaire, alors, pour tout* $n \geqslant 1$ *et tout* (i,j), *on a* $H^j(ZW_n\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^j(W_n\Omega^i)$, $H^j(ZW_n\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathscr{H}^i W_n\Omega^\bullet)$, *et les filtrations* Fil$^\bullet$ *et* Fil$_\bullet$ *de* (iv) *déterminent, pour tout* $m \in \mathbf{Z}$, *une décomposition canonique de* $H^m(X/W_n)$:

$$\textbf{(4.13.3)} \qquad H^m(X/W_n) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i+j=m} H^j(ZW_n\Omega^i),$$

telle que le carré suivant, où les flèches verticales sont les flèches canoniques, soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^m(X/W) & \xrightarrow[\simeq]{(4.12.1)} & \bigoplus_{i+j=m} H^j(ZW\Omega^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(X/W_n) & \xrightarrow[\simeq]{(4.13.3)} & \bigoplus_{i+j=m} H^j(ZW_n\Omega^i) \end{array}$$

c) *Supposons que, pour tout* $m \in \mathbf{Z}$, $H^m(X/W)$ *soit sans torsion. Alors les conditions* a) (i) *à* (vi) *sont équivalentes à la suivante* :

(vii) *Pour tout m, le* F*-cristal* $H^m(X/W)$ *est ordinaire*, i.e. *a mêmes polygones de Newton et de Hodge* (*cf. Mazur* [15] *et* [4, (1.3.3), (1.3.4)]), *et de plus les nombres de Hodge* $h^{i,m-i}$ *du* F*-cristal* $H^m(X/W)$ *vérifient* $h^{i,m-i} = \dim H^{m-i}(\Omega^i)$;

(viii) *Pour tout m, le polygone de Newton du* F*-cristal* $H^m(X/W)$ *coïncide avec le polygone de Hodge défini par les nombres* $\dim H^{m-i}(\Omega^i)$.

Prouvons a). Compte tenu de (2.15.6), on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Si X est ordinaire, alors, pour tout (i,j), F est bijectif sur $H^j(W\Omega^i)$, donc (4.9.1) montre que (ii) implique (iii). La condition (iv) exprime que, pour tout $n \geqslant 1$, tout m et tout i, la flèche canonique

$$H^m(X, t_{\leqslant i}W_n\Omega^\cdot) \to H^m(X, W_n\Omega^{\leqslant i})$$

est un isomorphisme. Compte tenu de la suite exacte

$$0 \to t_{\leqslant i}W_n\Omega^\cdot \to W_n\Omega^{\leqslant i} \to BW_n\Omega^{i+1}[-i] \to 0,$$

on a donc (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). On a de même (v) $\Leftrightarrow$ (vi), et trivialement (iii) $\Rightarrow$ (v). Il reste à montrer que (vi) implique (i). Tout d'abord, (vi) entraîne, par les suites exactes (cf. [10, 0 (2.2)])

$$0 \to B\Omega^i \to Z_{r+1}\Omega^i \xrightarrow{C} Z_r\Omega^i \to 0,$$

que, pour tout $r \geqslant 0$, on a $C : H^*(Z_{r+1}\Omega^i) \xrightarrow{\sim} H^*(Z_r\Omega^i)$. Compte tenu de l'isomorphisme de pro-objets [10, I (3.11)]

$$W.\Omega^i/V \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_C \text{ » } Z.\Omega^i,$$

on a donc $H^*(X, W.\Omega^i/V) \xrightarrow{\sim} H^*(X, \Omega^i)$, et il s'ensuit que $H^*(W\Omega^i)/V$ est de dimension finie sur k, autrement dit que, pour tout (i,j), $H^j(W\Omega^i)$ est V-fini. D'autre part, (vi) entraîne, par les suites exactes [10, 0 (2.2)]

$$0 \to B\Omega^i \to B_{r+1}\Omega^i \xrightarrow{C} B_r\Omega^i \to 0,$$

que $H^*(B_r\Omega^i) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$. Compte tenu de l'isomorphisme de pro-objets [10, I (3.11)]

$$W.\Omega^i/F \xrightarrow{\sim} \text{« } \varprojlim_C \text{ » } B.\Omega^{i+1},$$

on en déduit que $H^*(X, W.\Omega^i/F) = 0$, donc que F est un automorphisme de $H^j(W\Omega^i)$ pour tout (i,j). Comme $H^j(W\Omega^i)$ est V-fini, il en résulte que $H^j(W\Omega^i)$ est de type fini sur W. Donc X est de Hodge-Witt, et comme F est bijectif sur $H^j(W\Omega^i)$ pour tout (i,j), les décompositions (4.5.7) entraînent que $H^j(BW\Omega^i) = 0$ pour tout (i,j), ce qui prouve (vi) $\Rightarrow$ (i) et achève la démonstration de a). Les assertions de b) sont immédiates. Prouvons c). Grâce à (4.12.1), (i) entraîne la première assertion de (vii), puisque $\mathfrak{F} \mid H^j(ZW\Omega^i) = p^iF$, avec F un automorphisme. Puisque $H^*(X/W)$ est sans torsion, la seconde signifie (grâce à (4.12.1)) que l'on a, pour tout (i,j), $H^j(W\Omega^i)/p \xrightarrow{\sim} H^j(\Omega^i)$, ce qui résulte aussitôt de b). Donc (i) implique (vii). On a trivialement (vii) $\Rightarrow$ (viii). Prouvons (viii) $\Rightarrow$ (vi). L'égalité des polygones entraîne d'abord qu'on a, pour tout m,

$$(*) \qquad \sum_{i+j=m} \dim H^j(\Omega^i) = \operatorname{rg} H^m(X/W),$$

mais comme $H^*(X/W)$ est sans torsion, on a $H^m(X/W)/p \xrightarrow{\sim} H^m_{DR}(X/k) = H^m(X, \Omega^\cdot)$, de sorte que (*) se récrit

$$\sum_{i+j=m} \dim H^j(\Omega^i) = \dim H^m_{DR}(X/k).$$

Il en résulte que la première suite spectrale de de Rham-Witt de cran 1,

$$E_1^{ij} = H^j(\Omega^i) \Rightarrow H^*_{DR}(X/k),$$

dégénère en E_1, et, grâce à l'isomorphisme de Cartier, que la suite spectrale conjuguée de cran 1 dégénère en E_2. D'après un théorème de Mazur-Ogus [2, (8.26)] (cf. aussi Nygaard [17]), les filtrations correspondantes $\mathrm{Fil}^\cdot H^*_{DR}(X/k)$ et $\mathrm{Fil}_\cdot H^*_{DR}(X/k)$ coïncident respectivement avec la filtration de Hodge et la filtration conjuguée définies sur $H^*_{DR}(X/k) = H^*(X/W)/p$ par le F-cristal $H^*(X/W)$. En vertu de (viii), celui-ci est donc ordinaire (au sens de (vii)), et par suite les deux filtrations en question sont opposées [4, (1.3.2)], autrement dit on a (4.13.2) pour tout m et tout i, ce qui prouve (viii) $\Rightarrow$ (vi) et achève la démonstration de (4.13).

Corollaire **(4.14)**. — *Soient* X, Y *des schémas propres et lisses sur k. Si* X *et* Y *sont ordinaires, il en est de même de* $X \times Y$.

La formule de Künneth entraîne en effet que les deux suites spectrales de de Rham-Witt de cran 1 de $X \times Y$ dégénèrent en leurs termes initiaux, et que (4.13.2), valable pour X et Y, est aussi valable pour $X \times Y$.

Remarque **(4.15)**. — Il résulte de la formule de Künneth d'Ekedahl (cf. [7] et [10 *ter*, (5.2)]) que, si X est de Hodge-Witt et Y ordinaire, $X \times Y$ est de Hodge-Witt. Inversement d'ailleurs, comme l'ont montré Katz (et, indépendamment, Ekedahl), si $X \times Y$ est de Hodge-Witt, l'une des variétés X, Y est ordinaire, l'autre de Hodge-Witt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Berthelot, Le théorème de dualité plate pour les surfaces (d'après J. Milne), dans Surfaces algébriques (Séminaire de Géométrie algébrique d'Orsay 1976-1978), *Lecture Notes in Mathematics*, n° 868, Springer-Verlag, 1981.

[2] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology*, Mathematical Notes, n° 21, Princeton University Press, 1978.

[3] S. Bloch, Algebraic K-Theory and Crystalline Cohomology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **47** (1978), 187-268.

[4] P. Deligne et L. Illusie, Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques, dans Surfaces algébriques (Séminaire de Géométrie algébrique d'Orsay 1976-1978), *Lecture Notes in Mathematics*, n° 868, Springer-Verlag, 1981.

[5] M. Demazure, Lectures on p-divisible groups, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 302, Springer-Verlag, 1972.

[6] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, t. 1, Paris, Masson, et North-Holland Pub. Co., 1970.

[7] T. Ekedahl, travail en préparation.

[8] J.-M. Fontaine, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, *Astérisque*, n° 47-48, Société math. de France, 1977.

[9] L. Illusie, Complexe cotangent et déformations I, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 239, Springer-Verlag, 1972.

[10] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Scient. de l'E.N.S.*, 4e série, **12** (1979), 501-661.

[10 *bis*] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt, dans Journées de géométrie algébrique de Rennes, juillet 1978, *Astérisque*, n° 63, Soc. math. de France, 1979, 83-112.

[10 *ter*] L. Illusie, Finiteness, Duality and Künneth Theorems in the Cohomology of the De Rham-Witt complex, à paraître dans *Proc. of the Franco-japanese Conference in Algebraic Geometry*, Tokyo-Kyoto, Oct. 1982, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag.

[11] K. KATO, The study of the étale cohomology in a mixed characteristic situation, preliminary version, and On the recent result of S. Bloch on Hodge-Tate decompositions, *Lectures at the I.H.E.S.*, April 1981.
[12] N. KATZ, Algebraic Solutions of Differential Equations, p-Curvature and the Hodge Filtration, *Inv. Math.*, **18** (1972), 1-118.
[13] N. KATZ, Slope Filtration of F-Crystals, dans Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, juillet 1978, *Astérisque*, n° 63, Soc. math. de France, 1979, 113-164.
[14] N. KATZ, Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules and Jacobi Sums, dans *Automorphic forms*, Tata Institute, Bombay, 1979, 165-246.
[15] B. MAZUR, Frobenius and the Hodge Filtration, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 653-667.
[16] N. NYGAARD, Closedness of Regular 1-Forms on Algebraic Surfaces, *Ann. Scient. de l'E.N.S.*, 4e série, **12** (1979), 33-45.
[16 *bis*] N. NYGAARD, A p-adic proof of the non-existence of vector fields on K3 surfaces, *Ann. of Math.*, **110** (1979), 515-528.
[17] N. NYGAARD, Slopes of Powers of Frobenius on Crystalline Cohomology, *Ann. Sc. de l'E.N.S.*, 4e série, **14** (1981), 369-401.
[18] A. OGUS, F-Crystals and Griffiths Transversality, *Int. Symp. on Alg. Geom.*, Kyoto, 1977, 15-44.
[19] F. OORT, Dieudonné Modules of Finite Local Group Schemes, *Indag. Math.*, **36** (1974), 284-292.
[20] M. RAYNAUD, « p-torsion » du schéma de Picard, dans Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, juillet 1978, *Astérisque*, n° 64, Soc. math. de France, 1979, 87-148.
[21] J.-P. SERRE, Groupes proalgébriques, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **7** (1960), 341-403.
[22] J.-P. SERRE, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, *Symposium Internacional de Topologia Algebraica*, Mexico, 1958, 24-53.
[23] J.-P. SERRE, Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p, *American J. of Math.*, **80** (1958), 715-739.

Université de Paris-Sud,
Mathématique, Bât. 425,
91405 Orsay France.

Manuscrit reçu le 27 avril 1982.