PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN MARTINET
JEAN-PIERRE RAMIS

Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 55 (1982), p. 63-164
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1982__55__63_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROBLÈMES DE MODULES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

par JEAN MARTINET *et* JEAN-PIERRE RAMIS

INTRODUCTION

Cet article est d'abord une contribution à l'étude des germes d'équations différentielles analytiques :

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

singulières à l'origine de $\mathbf{C}^2$ (A et B nulles en 0), dans le cas où le 1-*jet* de la forme ω en 0 est *non nul.*

Deux équations du type (1) sont dites *analytiquement équivalentes* s'il existe un difféomorphisme local analytique de $\mathbf{C}^2$ en 0 transformant l'une en l'autre, *à unité près.*

On est amené classiquement à distinguer différents cas, selon les valeurs des valeurs propres (λ_1, λ_2) du 1-jet de ω (supposées non toutes deux nulles) :

1) *a)* Le rapport $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ est *non réel*, ou *réel positif*, avec λ ni entier ni inverse d'entier. Alors la forme ω est *analytiquement linéarisable* et l'équation différentielle $\omega = 0$ se ramène à une équation *linéaire* :

$$x\,dy - \lambda y\,dx = 0 \text{ (Poincaré).}$$

b) $\lambda \in \mathbf{N}^* \cup 1/\mathbf{N}^*$. L'équation (1) est alors analytiquement linéarisable ou analytiquement équivalente à l'une des « formes normales » :

$$(nx + \mu y^n)\,dy - y\,dx = 0, \quad \text{où } n \in \mathbf{N}^* \text{ et } \mu \in \mathbf{C} \quad \text{(Dulac [16]).}$$

2) Le rapport λ est *réel négatif* ou *nul.*

a) λ est irrationnel et satisfait une condition *diophantienne* convenable (Siegel, Brjuno [10]). Alors l'équation (1) est encore *analytiquement linéarisable.*

b) λ est irrationnel, mais « *exceptionnellement bien* » *approché par les rationnels.* On sait alors que (1) n'est pas *en général* analytiquement (ni même topologiquement) linéarisable, bien qu'elle le soit *formellement* (Pyartli [54]; Ilyashenko [35]); ce cas est difficile et reste très mal compris.

c) λ est *rationnel* : c'est le cas *résonant.*

On connaît depuis longtemps une classification *formelle* de ce type d'équations, mais on savait fort peu de choses sur leur classification *analytique*, bien que de nombreux travaux leur aient été consacrés. C'est ce dernier problème que nous avons résolu, en proposant une classification complète, à équivalence analytique près, des germes d'équations « résonantes ». Le présent article est consacré au cas le plus « dégénéré », où l'une des valeurs propres de (1) est nulle ($\lambda = 0$). Un article en préparation traitera du cas où $\lambda = -p/q \neq 0$.

Toute équation du type envisagé dans ce travail est *formellement* équivalente à l'une des *formes normales* suivantes :

(i) $$y\,dx = 0$$

(ii) $$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0 \quad (p \geqslant 1,\ \lambda \in \mathbf{C}).$$

Dans le cas (i) on sait depuis Dulac [16] que l'équivalence est analytique. Dans le cas (ii) (point singulier *isolé*), Dulac a montré que l'équation considérée peut toujours être réduite *analytiquement* à la forme :

(2) $$x^{p+1}\,dy - A(x,y)\,dx = 0 \quad \text{où} \quad A(0,y) = y,$$

la réduction formelle à (ii) se faisant ensuite par un changement de variable $y = \varphi(x, Y)$, qui est une série *formelle* en x à coefficients *holomorphes* en Y (tous convergents sur un même voisinage de l'origine), après éventuellement une transformation analytique convenable.

L'équation (2) manifeste la présence d'une feuille holomorphe à l'origine ($x = 0$) appelée « *variété invariante* » de l'équation, et le fait que les autres feuilles sont *transverses* aux droites $x = \text{cste}$.

On vérifie sans trop de difficultés que notre problème initial de classification se réduit (à quelques détails près) à la classification des équations du type (2) modulo les transformations « fibrées » $(x,y) \mapsto (x, \varphi(x,y))$.

On sait depuis Euler [22] qu'une équation du type (2) n'est pas toujours analytiquement normalisable. L'exemple d'Euler est l'équation :

$$x^2\,dy - (y + x)\,dx = 0.$$

Cette équation se réduit à la forme normale $x^2 dY - Y dx = 0$ par l'unique transformation formelle « fibrée » $Y = y + \sum_{n \geqslant 1} (n-1)!\,x^n$ qui est divergente.

L'étude des équations (2) « à points singuliers irréguliers » a donné lieu à d'innombrables travaux au cours du siècle dernier et au début de ce siècle; signalons, sans aucune prétention à l'exhaustivité ceux de Briot-Bouquet, Poincaré, Borel, Horn, Bendixson, Chazy.

Nos principaux résultats sont les suivants :

1. Étant donné une forme normale (ii), les germes d'équations analytiques (2) qui lui sont formellement équivalentes sont classifiés *analytiquement* par les éléments

de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$, où $\Lambda_{p,\lambda}$ est un faisceau de groupes (non abéliens) sur le cercle S^1, attaché à la forme normale choisie $\omega_{p,\lambda}$, que nous décrirons rapidement dans un instant.

Le lecteur rapprochera ce résultat de la théorie de Malgrange-Sibuya [43], [62] dont nous nous sommes bien sûr inspirés (cf. aussi Bertrand [3]).

2. L'espace classifiant (ou « modulaire ») $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ a une structure analytique naturelle (de dimension infinie (1)) telle que l'application associant à chaque équation sa « classe caractéristique » est analytique.

3. Étant donné une équation du type (2), la transformation fibrée formelle (unique) qui la réduit à sa forme normale appartient à la classe de Gevrey d'ordre $s = 1 + 1/p$, et est plus précisément p-sommable (au sens de Ramis [57]) : ceci signifie qu'en appliquant à la série formelle normalisante (considérée comme à valeurs dans un Fréchet convenable de fonctions de y) les formules sommatoires de Borel ($p = 1$) ou de Leroy ($p > 1$), on obtient « canoniquement » des transformations *analytiques* sur des domaines sectoriels $U \times D$ (U secteur de sommet O et d'ouverture $> \pi/p$ (en fait ici en général égale à $2\pi/p$) dans le plan des x; D disque ouvert de centre O dans le plan des y), asymptotes à la transformation formelle initiale, et normalisant sur $U \times D$ l'équation considérée.

4. Le type analytique (« classe caractéristique ») d'une équation (2) est *caractérisé* par la classe de conjugaison analytique de l'*holonomie* de la *variété invariante* ($\{x = 0\}$) relative au feuilletage défini par l'équation. Cette holonomie est un difféomorphisme local analytique de $\mathbf{C}$ en 0, tangent d'ordre 1 à l'identité et formellement conjugué à l'holonomie correspondante pour la forme normale. La classification à conjugaison près de tels difféomorphismes a été faite récemment par Ecalle [17], et nous montrons que notre théorie s'*injecte* de façon canonique dans la sienne. Un phénomène qui reste un peu surprenant à nos yeux est que les holonomies produites par les équations (2) ne sont pas arbitraires : on obtient seulement une « petite » partie (de dimension et codimension infinie) du « module d'Ecalle ». (Nous nous proposons de montrer dans un article ultérieur [45] qu'il n'en est plus de même dans le cas des équations résonantes « non dégénérées » ($\lambda = -p/q \neq 0$) : le module des classes d'équivalence analytiques d'équations différentielles s'*identifie* complètement au « module d'Ecalle ».)

Esquissons maintenant l'une des idées essentielles de notre démarche.

Considérons par exemple la plus simple des formes normales (ii) :

$$\omega_{1,0} = x^2\,dy - y\,dx = 0. \tag{3}$$

Ses feuilles sont la variété invariante $\{x = 0\}$ et les graphes des fonctions $y = c \exp(-1/x)$ ($c \in \mathbf{C}$). Excluant $\{x = 0\}$, l'espace des feuilles s'identifie à la droite complexe $\mathbf{C}$. Soit $c' = g(c)$ un automorphisme holomorphe (éventuellement local) de cet espace. Relevons-le en $G(x, y) = (x, \tilde{g}(x, y))$ dans $\mathbf{C}^2$, en laissant invariante la

(1) Ce dernier point nous avait été signalé (pour le cas $p = 1$, $\lambda = 0$) par Malgrange en 1976.

« coordonnée de base » x. Le difféomorphisme G a en général un comportement très « sauvage » au voisinage de la feuille « verticale » $\{x = 0\}$, dû à la *singularité essentielle* des solutions de (3) en 0. Cependant, soit par exemple $g(c) = c + a$ $(a \in \mathbf{C})$; alors $\tilde{g}(x, y) = y + a \exp(-1/x)$, et $G : V^+ \times \mathbf{C} \to V^+ \times \mathbf{C}$ (où V^+ est un secteur fermé de $\mathbf{C}_x$, de sommet 0, contenu dans $\{\mathrm{Re}\, x > 0\}$) est un difféomorphisme infiniment tangent à l'identité le long de $\{0\} \times \mathbf{C}$. De même si $g : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est un difféomorphisme local analytique *tangent d'ordre un à l'identité* $(g \in \mathscr{H})$ on vérifie aisément que G est défini au voisinage de $\{0\} \times \mathbf{C}$ dans $V^- \times \mathbf{C}$ (où $V^- \subset \{\mathrm{Re}\, x < 0\}$ est un secteur fermé de sommet 0) et infiniment tangent à l'identité de $\mathbf{C}^2$ le long de $\{0\} \times \mathbf{C}$.

Seules les transformations g que nous venons de décrire (translations et éléments de $\mathscr{H}$) ont la vertu de donner naissance à des transformations G asymptotes à l'identité de $\mathbf{C}^2$ au-dessus d'un secteur V de $\mathbf{C}_x$; les transformations G laissant invariante l'équation $\omega_{1,0}$ « sur » $V \times \mathbf{C}$, nous les appellerons « *transformations sectorielles isotropes* » de $\omega_{1,0}$. Nous les considérerons comme sections d'un faisceau $\Lambda_{1,0}$ sur S^1 (S^1 est le cercle unité du plan des x, ses ouverts connexes définissant les secteurs aux rayons près); ce faisceau est *constant* sur le demi-cercle $\{\mathrm{Re}\, x > 0\}$ (resp. $\{\mathrm{Re}\, x < 0\}$) et isomorphe à $\mathbf{C}$ (resp. $\mathscr{H}$); sa fibre aux deux « pôles » $x = \pm i$ de S^1 est réduite à l'identité. Ainsi $H^1(S^1; \Lambda_{1,0}) = \mathbf{C} \times \mathscr{H}$.

Soit (U_0, U_1) un recouvrement ouvert de $\mathbf{C}_x$ par deux secteurs fermés tels que $U_0 \cap U_1 = V^+ \cup V^-$ où $V^+ \subset \{\mathrm{Re}\, x > 0\}$ et $V^- \subset \{\mathrm{Re}\, x < 0\}$. Soit $(g^+, g^-) \in \mathbf{C} \times \mathscr{H}$; recollons les germes des produits $U_0 \times \mathbf{C}$ et $U_1 \times \mathbf{C}$ via G^+ et G^-; on obtient un objet *feuilleté* (puisque G^+ et G^- préservent le feuilletage défini par $\omega_{1,0} = 0$); la platitude de G^+ et G^- vis-à-vis de l'identité permet de montrer, grâce au *théorème d'intégrabilité de* Newlander-Nirenberg sur les *structures presque complexes*, que cet objet « est » le germe de $\mathbf{C}^2$ en 0 pourvu d'un *germe d'équation différentielle holomorphe singulière* du type (2); cette équation est par construction formellement équivalente (mais en général non analytiquement équivalente) à $\omega_{1,0} = 0$. Des valeurs différentes données au couple (g^+, g^-) produisent des équations *analytiquement distinctes* (et même « souvent » topologiquement distinctes!). Pour montrer que le procédé ci-dessus décrit donne naissance à *toutes* les équations formellement équivalentes à $\omega_{1,0}$, il nous suffit d'utiliser un théorème de normalisation « sectorielle » analytique assez « faible » dû à Hukuhara [33]. (Nous esquissons d'ailleurs un argument direct au chapitre IV permettant d'éviter le recours à Hukuhara.)

L'idée remarquable d'utiliser le théorème de Newlander-Nirenberg dans ce type de question revient à Malgrange, qui l'a exposée dans une lettre à Ecalle, relative à la classification à conjugaison près des éléments du groupe $\mathscr{H}$. Nous le remercions de nous avoir communiqué cette lettre, qui a été pour nous une source d'inspiration *essentielle* (cf. Malgrange [44]).

Les résultats relatifs à la *sommabilité* des transformations normalisantes se déduisent assez facilement (sans calcul!) de notre théorie de « classes caractéristiques » : on montre d'abord qu'elles sont Gevrey en utilisant une « astuce » que Malgrange nous a suggérée

(les classes caractéristiques sont évidemment Gevrey : G — I est à décroissance exponentielle d'un ordre entier convenable); on prouve ensuite la sommabilité à partir de propriétés « géométriques » des éléments de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$.

Les résultats précédemment décrits ne résolvent pas *tous* les problèmes qui se posent au sujet des équations différentielles du type (2) :

1. Nous ne savons pas « calculer » la « classe caractéristique » d'une équation donnée.

Le calcul est théoriquement faisable pour les équations dont les « transformations caractéristiques » (les g précédents ou leurs variantes) appartiennent à un *même* sous-groupe de Lie *abélien* du groupe des difféomorphismes de « l'espace des feuilles » de la forme normale.

Par exemple, si l'on considère seulement les équations (2) *linéaires* en y :

$$x^{p+1}\,dy - (a(x)y + b(x))\,dx = 0 \qquad (a(0) = 1),$$

il est facile de voir qu'elles sont classifiées analytiquement par les $H^1(S^1; \Lambda^{\text{lin}}_{p,\lambda})$, où le faisceau $\Lambda^{\text{lin}}_{p,\lambda} \subset \Lambda_{p,\lambda}$ est défini par les *transformations linéaires* de l'espace $\mathbf{C}$ des feuilles de la forme normale. Ce classifiant est de dimension finie (il est avec sa structure « naturelle » de groupe isomorphe à $\mathbf{C}^p$), et il est possible d'obtenir une *famille universelle* pour les équations linéaires (non homogènes); par exemple, si $p = 1$, on peut prendre (si λ n'est pas un entier positif) :

$$x^2\,dy - (y(1 + \lambda x) + ax)\,dx = 0.$$

Le problème du calcul de la classe caractéristique devient plus difficile dans le cas « non abélien », par exemple pour les équations (2) *de Riccati* :

$$x^{p+1}\,dy - (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))\,dx = 0 \qquad (b(0) = 1).$$

Ces équations sont définies sur $(\mathbf{C}, 0) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, et leur classifiant (pour une forme normale $\omega_{p,\lambda}$ fixée) est $H^1(S^1; \Lambda^{\text{proj}}_{p,\lambda})$, où $\Lambda^{\text{proj}}_{p,\lambda} \subset \Lambda_{p,\lambda}$ est le faisceau correspondant aux *transformations projectives* en y. Ce classifiant est encore de dimension finie (il est avec sa structure « naturelle » de groupe isomorphe à $\mathbf{C}^{2p}$), mais nous ne savons pas expliciter en général une famille d'*équations de Riccati universelle* (tout en étant assurés de son *existence*).

Des calculs élémentaires de monodromie nous permettent d'obtenir explicitement les classes caractéristiques pour une famille « verselle » dans le cas $p = 1$. Pour le cas général (p quelconque) nous proposons une méthode de calcul basée sur une généralisation de la théorie des invariants de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff.

Ecalle nous a signalé (octobre 81 [20], [21]) que la « classe caractéristique » de l'holonomie de la variété invariante $(\{x = 0\})$ d'une équation différentielle sous la forme (2) $x^{p+1}\,dy - A(x, y)\,dx = 0$ $(A(0, y) = y)$ pouvait être calculée « explicitement » (une telle classe se caractérise par des « coefficients de Fourier » calculables en fonction des coefficients du développement de A). Ecalle obtient (entre autres) dans [21] une

classification analytique des équations résonantes (dégénérées ou non). Ses méthodes, basées sur sa théorie des fonctions résurgentes, sont *a priori* assez différentes des nôtres : il étudie les « solutions » tandis que nous concentrons notre intérêt sur les « équations de conjugaison ».

2. Un autre problème passionnant consiste en l'étude de la *bifurcation* d'une équation (2) lorsqu'on la place dans une famille analytique *transverse* à l'espace des singularités étudiées ici; par exemple :

$$\omega_\mu = (x^2 - \mu)\, dy + A(x, y)\, dx = 0,$$

où A est donné.

Pour $\mu \neq 0$ cette équation a deux points singuliers *réguliers*, qui « confluent » quand $\mu = 0$. Y a-t-il une relation entre les classes caractéristiques de ω_0 et le comportement des feuilletages $\omega_\mu = 0$? (Cf. dans cette direction Garnier [24].)

3. L'étude topologique (ou même $\mathscr{C}^\infty$) des feuilletages locaux définis par les équations (2) n'est pas tout à fait évidente (1). (Il semble en particulier y avoir de subtiles différences entre la classification topologique et la classification $\mathscr{C}^\infty$.) Elle mériterait d'être détaillée. Il est en tout cas clair que, pour une forme normale formelle fixée, il se présente des types topologiques distincts.

Signalons pour finir que les résultats généraux relatifs aux développements asymptotiques qui nous sont nécessaires sont regroupés au chapitre I (qui contient également un certain nombre de constructions fondamentales, indépendantes de la théorie des équations différentielles). Ce chapitre est long et risque de paraître un peu aride au lecteur, auquel nous conseillons de commencer par l'étude des chapitres suivants, en se reportant au chapitre I selon ses besoins.

Une première version de cet article a été diffusée sous forme de preprint Irma au printemps 81 [46]. Un certain nombre de suggestions de Malgrange, que nous remercions, nous a permis de notables améliorations :

a) simplification de la preuve de la version Gevrey du théorème fondamental et preuve de la conjecture I.3.5.5 de [46];
b) suppression des restrictions sur le groupe de Lie en I.5;
c) nouvelle approche de la théorie des invariants de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff permettant de retrouver les résultats de ces derniers tout en les généralisant, et de prouver la conjecture faite en VI.4.3.10 de [46].

Enfin, dans la présente version nous avons supprimé le chapitre VII de [46]; il est remplacé par quelques indications à la fin du chapitre VI.

(1) Dans le cas des équations résonantes non dégénérées la classification topologique est très simple (cf. CAMACHO-SAD [13]).

SOMMAIRE

CHAPITRE I. **Développements asymptotiques** 70
1. Développements asymptotiques; définitions et notations 70
2. L'isomorphisme fondamental 74
3. Forme infinitésimale de l'isomorphisme fondamental 81
4. Version Gevrey des résultats précédents 84
5. Version q-sommable des résultats précédents 89
6. Remarque générale 91
7. L'isomorphisme fondamental dans le cas des groupes de Lie 92

CHAPITRE II. — **Formes normales** 96
1. Définition 96
2. Fibrations transverses 97
3. Première réduction du problème de classification 99
4. Classification formelle. Formes normales 100
5. Deuxième réduction du problème de classification 102
6. Isotropie sectorielle des formes normales 104

CHAPITRE III. — **Le théorème de classification. Premières conséquences** 108
1. Énoncé du théorème fondamental 108
2. L'injection canonique de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ dans $\mathscr{E}_p/\mathrm{G}^0$ 108
3. Surjectivité 109
4. Sommabilité des transformations normalisantes 110
5. Étude détaillée d'un exemple 112
6. Espace des orbites de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, \mathrm{O})$ dans E_p 118
7. Point de vue infinitésimal 120

CHAPITRE IV. — **Sommabilité des transformations normalisantes** 122
1. Rappels sur la transformation de Borel 122
2. Sommabilité des transformations normalisantes; cas de $\mathscr{E}_1$ 125
3. Sommabilité des transformations normalisantes; cas de $\mathscr{E}_p$ 128

CHAPITRE V. — **Holonomie** 130
1. Rappels sur la théorie d'Ecalle 130
2. L'injection naturelle de $\Lambda_{p,\lambda}$ dans $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}$ 132
3. Holonomie 135
4. Quelques conséquences 138

CHAPITRE VI. — **Équations de Riccati** 140
1. Introduction 140
2. Théorèmes de classification; invariants analytiques 142
3. Équations de Riccati et systèmes linéaires 145
4. Les invariants de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff et leur généralisation 147
5. Une famille d'équations de Riccati; étude des invariants 154
6. Une autre famille 158
7. Problèmes de modules 160

BIBLIOGRAPHIE 162

I. — DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Le lecteur non familier avec la théorie classique des développements asymptotiques pourra se reporter au traité de Wasow [65]. Nous avons besoin de quelques extensions du point de vue traditionnel.

(1.1) Développements asymptotiques

Soit $S^1 \subset \mathbf{C}$ le cercle unité centré à l'origine o. Pour tout sous-ensemble connexe $U \subset S^1$ (arc) on désignera aussi par U le secteur de $\mathbf{C}$, de sommet o, formé des points x tels que $x/|x| \in U$ et $|x| < R$ (nous ne préciserons pas en général le rayon $R > 0$ qui pourra le plus souvent être arbitrairement petit : germes de secteurs). On conviendra toujours de l'inclusion de o dans le secteur. Si U est ouvert (resp. fermé) le secteur sera dit ouvert (resp. fermé).

Nous aurons parfois besoin (pour les questions de k-sommabilité) de la situation plus générale où U est un secteur de la surface de Riemann du Logarithme, défini par un sous-ensemble connexe *borné* du revêtement universel $\mathbf{R}$ de S^1. Dans ce cas aussi nous adjoindrons o au secteur (topologie évidente).

Nous allons dans la suite travailler constamment avec des développements asymptotiques à une variable, au sens classique, dépendant holomorphiquement d'un paramètre y ($y \in \Omega$ ouvert de $\mathbf{C}^n$). De tels développements peuvent être considérés comme développements à valeurs dans un espace de Fréchet (et en pratique, compte tenu du côté « germique » du paramètre, à valeurs dans un espace de Banach). Ces développements peuvent aussi être envisagés comme des fonctions différentiables au sens de Whitney; ce dernier point de vue se révélera fort utile.

Si X est un ouvert de $\mathbf{C}^p$, nous noterons $\mathcal{O}(X; F)$ l'espace des fonctions holomorphes sur X, à valeurs dans F, espace de Fréchet (Grothendieck [28]). Nous poserons $\mathcal{O}(X; \mathbf{C}) = \mathcal{O}(X)$, ce dernier espace étant muni de sa topologie usuelle d'espace de Fréchet.

Définition (1.1.1). — *Soit* U *un secteur défini comme ci-dessus. Soit* F *un espace de Banach complexe (de norme notée* $||.||$*). Soit* $f \in \mathcal{O}(U - \{0\}; F)$; *on dit que* f *admet* :

$$\hat{f}(x) = \sum_{p \geq 0} x^p . a_p \in F[[x]] \quad (a_p \in F)$$

pour développement asymptotique en o (*et l'on note* $f \in \mathscr{A}(U; F)$, $\hat{f} = J(f)$) *si, pour tout sous-secteur fermé* $\overline{V}$ *de* U, *on a* :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \overline{V} - \{0\}} |x|^{-k} \| f(x) - \sum_{p=0}^{k-1} x^p . a_p \| < C_{V,k}.$$

On note $\mathscr{A}(U; \mathbf{C}) = \mathscr{A}(U)$.

Remarque (1.1.2). — Soit F un espace de Fréchet. On écrit F comme limite projective d'espaces de Banach : $F = \varprojlim_{i \in \mathbf{N}} F_i$. On définit les développements asymptotiques à valeurs dans F par $\mathscr{A}(U; F) = \varprojlim_{i \in \mathbf{N}} \mathscr{A}(U; F_i)$, le résultat étant indépendant du choix de la famille (F_i) $i \in \mathbf{N}$. Soit par exemple Ω un polydisque ouvert de $\mathbf{C}^n$. On écrit $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} K_i$ (K_i polydisque fermé), on désigne par $F_i = B(K_i)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur K_i, holomorphes à l'intérieur. On a :

$$F = \mathscr{O}(\Omega) = \varprojlim_{i \in \mathbf{N}} B(K_i) \quad \text{et} \quad \mathscr{A}(U; \mathscr{O}(\Omega)) = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \mathscr{A}(U; B(K_i)).$$

Définition (1.1.3). — *Soit* U *un secteur ouvert. Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *(espace de paramètres). Soit* $m > 0$. *Soit enfin* $g \in \mathscr{O}((U - \{0\}) \times \Omega; \mathbf{C}^m)$. *On dit que g admet* :

$$\hat{g}(x, y) = \sum_{p \geq 0} a_p(y) x^p \in \mathscr{O}(\Omega; \mathbf{C}^m)[[x]], \qquad a_p \in \mathscr{O}(\Omega; \mathbf{C}^m)$$

pour développement asymptotique (*paramétré par* Ω) *si, pour tout sous-secteur fermé* $\overline{V}$ *de* U *et tout compact* K *de* Ω, *on a* :

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{x \in \overline{V} - \{0\} \\ y \in K}} |x|^{-k} \| g(x, y) - \sum_{p=0}^{k-1} a_p(y) x^p \| < C_{V,K,k}.$$

Les fonctions g satisfaisant à cette définition s'identifient immédiatement aux fonctions $f \in \mathscr{A}(U; \mathscr{O}(\Omega; \mathbf{C}^m))$, par $g(x, y) = f(x)(y)$.

Soit maintenant U un secteur de $\mathbf{C}$ de sommet o, et Ω un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ (nous travaillerons en fait avec le germe $(\Omega, 0) = (\mathbf{C}^n, 0)$). On considère les germes d'applications :

$$g : U \times (\Omega, 0) \to \mathbf{C}^n$$

telles que :

(1.1.4)
(i) $g(x, y)$ est holomorphe sur $(U - \{0\}) \times \Omega$,
(ii) $g(0, y) = y$,
(iii) pour tout secteur fermé $\overline{V} \subset U$, la restriction de g à $\overline{V} \times \Omega$ est une application C^∞ au sens de Whitney (Malgrange [41]).

Ces conditions signifient qu'en tout point $(0, y_0)$ ($y_0 \in \Omega$), l'application g admet un développement de Taylor infini; d'après les conditions de Whitney et l'holomorphie

de g pour $x \neq 0$, le jet infini de g le long de $\{0\} \times \Omega$ est indépendant de $\overline{V} \subset U$ et de la forme :

$$\hat{g}(x,y) = y + \sum_{p \geq 1} a_p(y) x^p \quad \text{où} \quad \hat{g} \in \mathcal{O}(\Omega; \mathbf{C}^n)[[x]] \quad (a_p \in \mathcal{O}(\Omega; \mathbf{C}^n)).$$

De plus, pour tous $k, r \in \mathbf{N}$, $\overline{V} \subset U$ (secteur fermé) et K compact de Ω, on a :

$$|x^{-k+1}| \left\| \frac{\partial^r g}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r \hat{g}^k}{\partial x^r}(x,y) \right\| \tag{1.1.5}$$

tend vers zéro avec x, uniformément sur $\overline{V} \times K$ $\left(\hat{g}^k = y + \sum_{p=0}^{k-1} a_p(y) x^p\right)$.

Il est clair que g peut être interprété comme un développement asymptotique en x, paramétré par y (cf. Définition (1.1.3)) ou comme un développement asymptotique en x à valeurs dans l'espace de Fréchet $\mathcal{O}(\Omega)$ (Définition (1.1.1) et Remarque (1.1.2)), et inversement.

Remarque **(1.1.6).** — Dans le cas de plusieurs variables, le sens du terme « développement asymptotique » est mal fixé. En particulier la définition donnée ci-dessus est *beaucoup plus forte* que celle proposée par Gérard-Sibuya [25], qui signifierait ici seulement que g admet en tout point de $\{0\} \times \Omega$ (voire seulement en (0, 0)) un « développement limité » en les variables (x, y) à tous les ordres, ce qui n'implique pas la différentiabilité au sens de Whitney. Nous reviendrons plus précisément sur ce point au § 6.

Nous aurons besoin des variantes suivantes du Théorème de Borel-Ritt :

Théorème **(1.1.7).** — *Soit* U *un secteur de sommet* 0 *dans* $\mathbf{C}$ *(ou plus généralement sur la surface de Riemann du Logarithme)* :

(i) *Soit* F *un espace de Banach, et* $\hat{f}(x) = \Sigma x^n a_n \in F[[x]]$ $(a_n \in F, \ n \in \mathbf{N})$ *une série formelle. Alors il existe* $f \in \mathcal{A}(U; F)$ *admettant* $\hat{f}$ *comme développement asymptotique à l'origine.*

(ii) *Soit* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ *un ouvert (espace de paramètres), et* :

$$\hat{g}(x,y) = \Sigma a_n(y) x^n \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbf{C}^n)[[x]] \quad (a_n \in \mathcal{O}(\Omega), \ n \in \mathbf{N}).$$

On suppose chaque fonction a_n *bornée sur* Ω. *Alors il existe* $g \in \mathcal{O}(U \times \Omega; \mathbf{C}^n)$ *admettant* $\hat{g}$ *comme développement asymptotique paramétré par* Ω *sur* U.

La démonstration est une adaptation immédiate de l'argument classique et est laissée au lecteur (cf. Wasow [65], Theorem (9.3) et Theorem (9.6)).

Remarquons que l'on peut toujours supposer les a_n bornés sur Ω si l'on accepte de « diminuer Ω », c'est-à-dire de travailler avec un germe (Ω, ω_0) d'espace de paramètres.

(1.2) Les faisceaux Λ^k

Nous désignerons par G^k $(k \in \mathbf{N})$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n, 0)$ formé des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme :

$$(x,y) \mapsto (x, g(x,y)) \quad \text{où} \quad g(x,y) = y + \sum_{p \geq k+1} a_p(y) x^p.$$

Ce sont donc les « déploiements » (en x) de l'identité de $\mathbf{C}^n$, k-plats par rapport à l'identité le long de $\{0\}\times\mathbf{C}^n$.

Pour simplifier les notations, nous désignerons toujours par la même lettre un élément de G^k et sa « composante verticale » $g(x,y)$.

De même, nous désignons par $\hat{G}^k$ $(k\in\mathbf{N})$ le groupe des déploiements *formels* $(x,y)\mapsto(x,\hat{g}(x,y))$ où $\hat{g}(x,y)=y+\sum_{p\geqslant k+1}a_p(y)x^p$ $(\hat{g}\in\mathbf{C}^n\{y\}[[x]])$ est une série formelle en x, dont les coefficients $a_p(y)\in\mathbf{C}^n$ ont un rayon de convergence $\geqslant\rho>0$ indépendant de p).

Un secteur $U\subset\mathbf{C}_x$ de sommet 0 étant fixé, on désignera par $\Lambda^0(U)$ l'ensemble des germes d'applications holomorphes vérifiant les conditions (1.1.4). Avec la convention précédente, les éléments $g\in\Lambda^0(U)$ $((x,y)\mapsto(x,g(x,y))$ constituent le groupe des déploiements « *holomorphes avec développement asymptotique* » de l'identité de $\mathbf{C}^n$ sur le secteur U.

Si l'on fait varier U (arc) sur S^1, $U\mapsto\Lambda^0(U)$ définit un préfaisceau de groupes. On note Λ^0 le faisceau de groupes sur S^1 qui lui est associé. Remarquons que l'inclusion $\Lambda^0(U)\subset\Gamma(U;\Lambda^0)$ est *stricte* (si U est non vide) : un domaine de définition pour $g\in\Gamma(U;\Lambda^0)$ est généralement un « œil » de sommet 0, et non un secteur.

Le groupe $H^0(S^1;\Lambda^0)=\Gamma(S^1;\Lambda^0)$ des sections *globales* de Λ^0 n'est autre que le groupe G^0. Le développement asymptotique de $g\in\Lambda^0(U)$ est un élément de $\hat{G}^0$.

On désignera par Λ^k $(k\in\mathbf{N})$ le sous-faisceau de Λ^0 formé des germes d'applications g dont le développement asymptotique appartient à $\hat{G}^k$. On dira alors que g est k-plate par rapport à l'identité de $\mathbf{C}^n$.

Le groupe $H^0(S^1;\Lambda^k)=\Gamma(S^1;\Lambda^k)$ est égal à G^k.

On désignera enfin par Λ le faisceau intersection de tous les Λ^k $(k\geqslant 0)$; ses sections sur un secteur U sont, en $x=0$, *infiniment plates par rapport à l'identité* de $\mathbf{C}^n$.

Le groupe $H^0(S^1;\Lambda)$ est réduit à l'élément neutre et s'identifie à l'identité de $\mathbf{C}^n$.

On a des suites exactes courtes de faisceaux de groupes sur S^1 :

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda & \longrightarrow & \Lambda^0 & \longrightarrow & \hat{G}^0 \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Lambda & \longrightarrow & \Lambda^1 & \longrightarrow & \hat{G}^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Lambda & \longrightarrow & \Lambda^k & \longrightarrow & \hat{G}^k \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

(les flèches $\Lambda^k\to\hat{G}^k$ sont surjectives d'après le théorème de Borel-Ritt).

Remarque. — Soit $\mathscr{H}_n \subset \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ le sous-groupe des difféomorphismes locaux holomorphes de $\mathbf{C}^n$ en 0, de partie linéaire égale à l'identité. (On notera $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$.) Le groupe $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ est un ouvert de $(\mathbf{C}\{y\})^n$ muni de sa topologie **DFN** canonique et $\mathscr{H}_n$ est l'intersection de cet ouvert et d'un hyperplan affine fermé de $\mathbf{C}\{y\}$; c'est donc aussi un ouvert d'espace **DFN** : on peut le considérer comme un groupe de Lie de dimension infinie (ce que nous nous contentons de faire heuristiquement).

On peut alors introduire les groupes G^k_*, $\hat{G}^k_*$, et les faisceaux Λ^k_* définis respectivement par les germes d'applications analytiques de $(\mathbf{C}, 0)$ dans $(\mathscr{H}_n, 1)$, les séries formelles à valeurs dans $\mathscr{H}_n$, et les développements asymptotiques à valeurs dans $\mathscr{H}_n$. Ceci revient, dans les définitions précédentes, à imposer partout $g(x, 0) = 0$, ce que *nous ne pouvons faire* dans les situations que nous avons en vue.

2. L'ISOMORPHISME FONDAMENTAL

(2.1) Etude de $H^1(S^1; \Lambda)$

Le lecteur peu familier avec la cohomologie non abélienne pourra se reporter à Frenkel [23].

Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{V}$ de S^1 on peut trouver un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ fini plus fin que $\mathfrak{V}$ $(\mathfrak{U} = \{U_i\},\ i = 1, \ldots, p)$ tel que :

(2.1.1)
(i) les U_i sont des arcs (connexes) de longueur $\leqslant 2\pi$,
(ii) $U_{i,i+1} = U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ (« $p + 1 = 1$ »),
(iii) les ouverts U_i sont trois à trois disjoints.

Un tel recouvrement sera appelé un *bon recouvrement* de S^1.

Tout élément de $H^q(S^1; \Lambda)$, $q = 0, 1$, peut être représenté par un élément de $H^q(\mathfrak{U}; \Lambda)$ où $\mathfrak{U}$ est un bon recouvrement, qui *a priori* dépend de la classe considérée (nous verrons plus loin qu'en fait tout bon recouvrement convient pour tout élément). Par ailleurs l'application naturelle $H^q(\mathfrak{U}; \Lambda) \to H^q(S^1; \Lambda)$ est toujours *injective* (voir par exemple Hirzebruch [31]).

On désigne maintenant, après avoir choisi un bon recouvrement $\mathfrak{U}$, par $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \subset C^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k)$ l'ensemble des o-cochaînes $\{g_i\}$ dont le cobord $\{g_{ij} = g_i g_j^{-1}\}$ appartient à $C^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$. Il revient au même de dire que l'image naturelle de la cochaîne $\{g_i\}$ dans $C^0(\mathfrak{U}; \hat{G}^k)$ est un cocycle (on interprète ici $\hat{G}^k$ comme faisceau constant sur S^1), ou encore que les g_i ont même développement asymptotique $\hat{g} \in \hat{G}^k$.

On a ainsi deux applications naturelles :

$$\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \xrightarrow{\partial} Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda),$$

$$\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \to \hat{G}^k.$$

Deux cochaînes $\{g_i\}$ et $\{g'_i\}$ de $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k)$ définissent le même élément de $H^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ si et seulement si on a :

$$g'_i g'^{-1}_j = h_i g_i g_j^{-1} h_j^{-1} \quad \text{où} \quad \{h_i\} \in C^0(\mathfrak{U}; \Lambda).$$

Ceci s'écrit $g'^{-1}_j h_j g_j = g'^{-1}_i h_i g_i$ et définit donc un élément

$$f = \{g'^{-1}_i h_i g_i\} \in H^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \quad \text{et l'on a } g' = h \circ g \circ f^{-1}.$$

Lemme (2.1.2). — *Soit* $\mathfrak{U}$ *un bon recouvrement de* S^1.

(i) *L'application cobord* $\partial : \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \to Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ *induit une injection*

$$C^0(\mathfrak{U}; \Lambda) \backslash \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) / H^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \to H^1(\mathfrak{U}; \Lambda).$$

(ii) *On a une injection canonique*

$$\varinjlim_{\mathfrak{U} \text{ bon}} C^0(\mathfrak{U}; \Lambda) \backslash \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) / G^k \to H^1(S^1; \Lambda).$$

Proposition (2.1.3). — *Soit* $k \in \mathbf{N}$. *Pour tout bon recouvrement* $\mathfrak{U}$, *on a un isomorphisme canonique*

$$C^0(\mathfrak{U}; \Lambda) \backslash \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) / H^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \to \hat{G}^k / G^k.$$

En effet, soit $\mathfrak{U}$ un bon recouvrement de S^1. Soit $\hat{g} \in \hat{G}^k$. Le théorème de Borel-Ritt permet de représenter $\hat{g}$ sur chaque secteur U_i (dont on diminue éventuellement le rayon) par $g_i \in \Lambda^k(U_i)$ admettant $\hat{g}$ comme développement asymptotique à l'origine. Ceci établit la *surjectivité* de l'application naturelle

$$\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k) \to \hat{G}^k.$$

La proposition s'en déduit. ■

Corollaire (2.1.4). — *Pour tout bon recouvrement* $\mathfrak{U}$ *on a des injections naturelles*

$$\hat{G}^k / G^k \to H^1(\mathfrak{U}; \Lambda) \to H^1(S^1; \Lambda).$$

Nous verrons plus loin qu'en fait ces applications sont des *isomorphismes.*

On peut donner des versions « à paramètre holomorphe » des résultats précédents. On prend comme espace de paramètres un ouvert S de $\mathbf{C}^m$ (ou plutôt un germe d'ouvert (S, s_0)). On définit immédiatement des versions « à paramètre » de G^k, $\hat{G}^k$, Λ^k... (notées respectivement G^k_S, $\hat{G}^k_S$, Λ^k_S). Par exemple, on définit $\Lambda^0_S(U \times S)$ en utilisant les conditions, pour $g : U \times (\Omega, 0) \times (S, s_0) \to \mathbf{C}^n$,

$(2.1.4)_S$
(i) $g(x, y, s)$ est holomorphe sur $(U - \{0\}) \times \Omega \times S$,
(ii) $g(0, y, s) = y$,
(iii) pour tout secteur fermé $\overline{V} \subset U$, la restriction de g à $\overline{V} \times \Omega \times S$ est une application $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney.

On utilise ensuite des « bons recouvrements » de la forme $\mathfrak{U} \times (S, s_0)$ et les énoncés (2.1.2), (2.1.3) et (2.1.4) s'étendent sans difficulté.

Par abus de langage, nous dirons en particulier que l'application naturelle

$$\hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda)$$

est « holomorphe ».

(2.2) Interprétation géométrique des éléments de $H^1(S^1; \Lambda)$

Soit $\gamma \in H^1(S^1; \Lambda)$. Il peut être représenté par un 1-cocycle de Čech $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$, où $\mathfrak{U}$ est un bon recouvrement. Nous allons associer à g un germe de variété analytique complexe M_g, muni d'un germe de projection holomorphe $\pi : M_g \to (\mathbf{C}, 0)$. Nous verrons que si l'on change de représentant g de γ, les triplets $(M_g, \pi, (\mathbf{C}, 0))$ se correspondent par un isomorphisme holomorphe canonique. Cette construction géométrique (inspirée d'une idée de Malgrange [42]) va jouer le rôle clef dans la démonstration du théorème qui est un de nos résultats essentiels.

Soit donc $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$, $\mathfrak{U}$ étant un bon recouvrement. On a $g = \{g_{i,i+1}\}$. Formons l'espace topologique obtenu à partir de la somme disjointe $\amalg U_i \times \Omega$ en identifiant les points $(x, y) \in U_i \times \Omega$ et $(x, z) \in U_{i+1} \times \Omega$ si $x \in U_i \cap U_{i+1} = U_{i,i+1}$ et $z = g_{i+1,i}(y)$ $(g_{i+1,i} = g_{i,i+1}^{-1})$. Nous noterons M_g le germe de cet espace topologique en $0 = (0, 0)$.

La restriction des recollements aux ensembles $\{0\} \times \Omega \subset U_i \times \Omega$ est l'identité. On obtient donc ainsi un sous-ensemble de notre espace topologique naturellement isomorphe (germiquement) à $\{0\} \times \Omega$.

Des conditions (i), (ii), (iii) de (1.1.4) on déduit immédiatement le

Lemme **(2.2.1)**. — (i) *Les projections de* $U_i \times \Omega$ *sur* U_i *induisent un germe de fibration continue* $M_g \xrightarrow{\pi} (\mathbf{C}, 0)$, *la fibre* $\pi^{-1}(0)$ *s'identifiant canoniquement à* $(\mathbf{C}^n, 0)$.

(ii) *L'ouvert* $\dot{M}_g = M_g - \pi^{-1}(0)$ *est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe de dimension* $n + 1$. *C'est l'unique structure telle que les injections naturelles* $((U_i - \{0\}) \times \Omega; 0) \to \dot{M}_g$ *soient holomorphes. La restriction de* π *à* $\dot{M}_g$ *est holomorphe.*

Lemme **(2.2.2)**. — *Il existe sur* M_g *une unique structure de germe de variété différentiable telle que les injections naturelles* $(U_i \times \Omega; 0) \to M_g$ *soient différentiables* (C^∞ *au sens de Whitney*). *La structure induite sur* $\dot{M}_g$ *est la structure sous-jacente à la structure holomorphe de* $\dot{M}_g$. *L'application* π *est différentiable, de rang maximum en* 0.

Démonstration. — On utilise le théorème de prolongement de Whitney et la notion de fermés régulièrement séparés (cf. par exemple Malgrange [41]) de la façon suivante.

On remplace d'abord le recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ par un recouvrement $\{V_i\}$, où les V_i sont des secteurs *fermés* avec $V_i \subset U_i$. On considère $V_i \times \Omega$ comme une variété à bords et à coins. Les fonctions différentiables sur $V_i \times \Omega$ sont par définition les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney (le germe M_g construit à partir des V_i s'envoie naturellement dans celui construit à partir des U_i; les deux germes sont homéomorphes).

Soit maintenant $y_0 \in \pi^{-1}(0)$. On désigne par $\mathscr{E}_{y_0}$ l'anneau des germes de fonctions en y_0, représentés par des germes en y_0 (sur $V_i \times \Omega$) de fonctions f_i, de classe $\mathscr{C}^\infty$, compatibles via les applications de recollement $g_{i,i+1}$, c'est-à-dire $f_{i+1} \circ g_{i+1,i} = f_i$. *Chaque coordonnée y sur $\mathbf{C}^n = \pi^{-1}(0)$ se prolonge en un élément de $\mathscr{E}_{y_0}$* : on prolonge d'abord y en une fonction f_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $V_1 \times \Omega$ (par exemple $f_1 = y$); l'application de recollement $g_{2,1}$ fournit alors une fonction h_2 sur $V_{1,2} \times \Omega \subset V_2 \times \Omega$; on la prolonge en f_2 en utilisant le théorème de prolongement de Whitney... On termine sur le dernier secteur (qui rencontre V_1) en utilisant l'argument suivant : soient V un secteur fermé et V', V'' des sous-secteurs fermés de même rayon, avec $V' \cap V'' = \{0\}$. Soient φ et φ' des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney sur $V' \times \Omega$ et $V'' \times \Omega$ respectivement, coïncidant, au sens de Whitney, sur $\{0\} \times \Omega$; ces fonctions définissent une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney sur $(V' \cup V'') \times \Omega$, car V' et V'' sont transverses, donc *régulièrement séparés*; celle-ci se prolonge donc en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $V \times \Omega$.

Les fonctions ainsi obtenues et la fonction π définissent clairement un système de coordonnées locales sur M_g au voisinage de y_0; un élément de $\mathscr{E}_{y_0}$ est fonction $\mathscr{C}^\infty$ de ces coordonnées. Ainsi M_g est munie d'une structure de germe de variété différentiable. Cette structure est fixée en dehors de $\pi^{-1}(0)$, donc *unique*. ■

Proposition **(2.2.3).** — (i) *Le germe de variété différentiable M_g admet une unique structure de germe de variété analytique complexe prolongeant celle de $\dot{M}_g$. Pour cette structure, l'application π est holomorphe, de rang maximum en* 0.

(ii) *Le complété formel de M_g le long de $\pi^{-1}(0)$ (pour la structure complexe de* (i)*) est canoniquement isomorphe au complété formel de $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n, (0, 0))$ le long de $\{0\} \times \mathbf{C}^n$, l'isomorphisme étant compatible avec les projections sur $\widehat{\mathbf{C}|\{0\}}$.*

Démonstration. — Le fibré tangent différentiable à M_g, noté $\mathscr{E}$, restreint à $\pi^{-1}(0)$, est naturellement isomorphe à $(\{0\} \times (\mathbf{C}^{n+1}, 0)) \times \mathbf{C}^{n+1}$; sa restriction à $\dot{M}_g$ est le fibré différentiable sous-jacent au fibré holomorphe tangent à $\dot{M}_g$. Les fibres de $\mathscr{E}$ en tout point sont ainsi munies d'une structure d'espace vectoriel complexe, et donc d'une application « quart de tour » J. On vérifie facilement que J est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a ainsi muni M_g d'une structure presque complexe uniquement déterminée. Cette structure est *intégrable* sur $\dot{M}_g$, donc sur M_g puisque $\dot{M}_g$ est un ouvert dense dans M_g : on a $[\xi, J\eta] + [J\xi, \eta] = J[\xi, \eta] - J[J\xi, J\eta]$ pour tout couple (ξ, η) de sections de $\mathscr{E}$. D'après le théorème d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg [51], la structure presque complexe définie par J est sous-jacente à une structure complexe unique.

Le reste de la proposition est évident. ■

Lemme **(2.2.4).** — *Soit* $\gamma \in H^1(S^1; \Lambda)$.

(i) *Soient $\mathfrak{U}$ un bon recouvrement de S^1, et $g, g' \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ deux cocycles représentant γ. Alors il existe un isomorphisme (non canonique) de germes de variétés analytiques $M_g \xrightarrow{\sim} M_{g'}$, compatible aux projections*

$$\pi : M_g \to (\mathbf{C}, 0) \quad \text{et} \quad \pi' : M_{g'} \to (\mathbf{C}, 0).$$

(ii) *Soient* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ *deux bons recouvrements de* S^1, $\mathfrak{U}$ *étant plus fin que* $\mathfrak{U}'$. *Soit* $g' \in Z^1(\mathfrak{U}'; \Lambda)$ *représentant* γ, *et* g *la restriction de* g' *dans* $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$. *L'application naturelle* $M_g \to M_{g'}$ *est un germe d'isomorphisme de variétés analytiques compatible aux projections* π *et* π'.

(iii) *Le germe de variété analytique fibrée* $\pi : (M_g, o) \to (\mathbf{C}, o)$ *ne dépend, à isomorphisme (non canonique) près, que de la classe* γ *de* g *dans* $H^1(S^1; \Lambda)$.

L'assertion (ii) est claire, et (iii) résulte immédiatement de (i) et (ii). Il reste à prouver (i) : il existe $h = \{h_i\} \in C^0(\mathfrak{U}; \Lambda)$ tel que

$$g_{i,i+1} = h_i g'_{i,i+1} h_{i+1}^{-1}.$$

Les applications $H_i : U_i \times \Omega \to U_i \times \Omega$, $(x, y) \mapsto (x, h_i(x, y))$, induisent un germe d'homéomorphisme continu $H : (M_g, o) \to (M_{g'}, o)$ compatible aux projections π et π' ; H étant holomorphe de $\dot{M}_g$ dans $\dot{M}_{g'}$, est holomorphe de M_g dans $M_{g'}$ (continuité). ∎

(2.3) Trivialisation formelle des éléments de $H^1(S^1; \Lambda)$

L'interprétation géométrique des cocycles de $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ va nous permettre de construire une application : $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda) \to \hat{G}^0$ (et si l'on veut de $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ dans $\hat{G}^k$, $k \in \mathbf{N}$) définie à composition à droite près par un élément de G^0 (resp. G^k). Par passage au quotient on obtiendra ainsi un inverse de l'application naturelle

$$\hat{G}^0/G^0 \to H^1(S^1; \Lambda) \quad \text{resp.} \quad \hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda).$$

Théorème **(2.3.1).** — *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *l'injection naturelle*

$$\hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda)$$

est un isomorphisme.

(Ce résultat est valable en remplaçant les groupes G et le faisceau Λ par G_* et Λ_* ; voir (1.2), Remarque.)

Démonstration. — Étant donné un germe de variété analytique fibrée $\pi : M_g \to (\mathbf{C}, o)$ (π de rang un à l'origine), on peut en choisir une *trivialisation*

$$\begin{array}{ccc} M_g & \xrightarrow{H} & (\mathbf{C}, o) \times (\mathbf{C}^n, o) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow & \\ & (\mathbf{C}, o) & \end{array}$$

(H est défini à composition à droite près par un élément de G^0).

De (2.2.3) (ii) et de H on déduit un automorphisme au-dessus de $\widehat{\mathbf{C}|\{o\}}$ du complété formel de $(\mathbf{C}^{n+1}, o)$ le long de $\{o\} \times (\mathbf{C}^n, o)$. Cet automorphisme est tangent à l'identité. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}\{y\}[[x]] & \xleftarrow{\sim} & C\{Y\}[[x]] \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \mathbf{C}[[x]] & \end{array}$$

On en déduit $Y = \hat{\varphi}(x, y)$, avec $\hat{\varphi} \in \hat{G}^0$, soit aussi $y = \hat{\varphi}^{-1}(x, Y)$; $\hat{\varphi}$ est défini à composition près à gauche par un élément de G^0, et $\hat{\varphi}^{-1}$ à composition près à droite par un élément de G^0.

On a ainsi défini une application $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda) \to \hat{G}^0/G^0$. On vérifie immédiatement qu'elle passe au quotient et définit une application

$$H^1(S^1; \Lambda) \to \hat{G}^0/G^0 \quad ((2.2.4)\ \text{(iii)})$$

Nous allons maintenant vérifier que celle-ci inverse l'injection naturelle

$$\hat{G}^0/G^0 \to H^1(S^1; \Lambda)$$

en explicitant $\hat{\varphi}$. On a des automorphismes de fibrés triviaux $\mathscr{C}^\infty$ au sens de Whitney

$$\begin{array}{ccc} (U_i, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0) & \longrightarrow & (U_i, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (U_i, 0) & \end{array}$$

déduits de l'injection naturelle $(U_i, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0) \to M_g$ et de la trivialisation H. Ces automorphismes fournissent des éléments $\varphi_i \in \Gamma(U_i; \Lambda^0)$ compatibles avec les recollements $g_{i+1,i}$: $\varphi_i = \varphi_{i+1} \circ g_{i+1,i}$. On en déduit :

$$g_{i,i+1} = (\varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_{i+1}^{-1})^{-1} \quad \text{et} \quad \partial\{\varphi_i^{-1}\} = g_{i,i+1}.$$

Par ailleurs $\hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}$ est indépendant de i (les $g_{i,i+1}$ sont infiniment plats par rapport à l'identité).

On a ainsi fabriqué un élément $\{\varphi_i^{-1}\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^0)$ dont l'image dans $\hat{G}^0$ est $\hat{\varphi}^{-1}$ et dont le cobord est g. Ceci termine la démonstration dans le cas où $k = 0$. On passe facilement au cas général en remarquant que $\hat{\varphi}$ peut être choisie *k-plate* par rapport à l'identité; on choisit d'abord $\hat{\varphi}_1$ que l'on écrit $\hat{\varphi}_1 = J_k(\hat{\varphi}_1) + \hat{\psi}$. On modifie ensuite le choix de la trivialisation H_1 qui nous a donné $\hat{\varphi}_1$ en posant $H = J_k(\hat{\varphi}_1)^{-1} \circ \hat{H}_1$; $\hat{\varphi}$ obtenu à partir de H répond à la question. ■

(2.3.2) *Remarque importante. — La bijection canonique* $\hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda)$ *est* « *biholomorphe* ».

L' « holomorphie » de $\hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda)$ a déjà été expliquée ((2.1), remarque finale). Il nous reste à étudier de ce point de vue l'application inverse.

L'interprétation géométrique de (2.2) peut être faite « avec paramètre holomorphe ». Soit (S, s_0) un germe d'ouvert de $\mathbf{C}^m$. Nous considérons $g_S \in Z^1(\mathfrak{U} \times (S, s_0); \Lambda_S)$ comme un 1-cocycle dépendant holomorphiquement de $s \in S$. On construit un germe de variété différentiable fibrée

$$M_{g_S} \xrightarrow{\pi_S} (\mathbf{C}, 0) \times (S, s_0).$$

Cette variété admet encore une structure holomorphe naturelle prolongeant celle de $\dot{M}_{g_S} = M_{g_S} - \pi_S^{-1}(\{0\} \times (S, s_0))$; il faut ici utiliser le théorème de Newlander-Nirenberg

pour l'espace « variables + paramètres ». On trivialise ensuite M_{g_S} au-dessus de $(\mathbf{C}, 0) \times (S, s_0)$, ce qui fournit un élément $\hat{\varphi} \in \hat{G}^0_S$.

Il serait intéressant pour les applications de disposer d'un résultat analogue quand (S, s_0) est un germe *banachique* (1). Il se déduirait d'une version banachique convenable du théorème de Newlander-Nirenberg; malheureusement aucune des démonstrations connues ne semble s'étendre en dimension infinie. Nous laisserons donc cette question aux spécialistes (il est d'ailleurs possible qu'il vaille mieux travailler directement dans la situation **DFN** qui est celle que nous rencontrerons de fait).

Moyennant une version à « paramètres différentiables » du théorème de Newlander-Nirenberg (nous ignorons si ce résultat est connu, mais il ne devrait pas poser de problème, même avec paramètre dans un espace de Banach ou dans un espace **DFN**), on obtiendrait la « *différentiabilité* » de l'application $H^1(S^1, \Lambda) \to \hat{G}^k/G^k$.

Remarque (**2.3.3**). — Soient $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}''$ trois bons recouvrements de S^1, indexés par $i = 1, \ldots, p$, avec $U_i \subset U_i' \cap U_i''$. Soit $g = \{g_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ et supposons que chaque $g_{i,i+1}$ se prolonge en un élément de $\Gamma(U'_{i,i+1} \cup U''_{i,i+1}; \Lambda)$. On définit ainsi $g' \in Z^1(\mathfrak{U}'; \Lambda)$ et $g'' \in Z^1(\mathfrak{U}''; \Lambda)$ dont la restriction à $Z^1(\mathfrak{U}, \Lambda)$ est g. Les injections naturelles $M_g \to M_{g'}$ et $M_g \to M_{g''}$ induisent des isomorphismes; donc les fibrés $(M_g, \pi, (\mathbf{C}, 0))$, $(M_{g'}, \pi', (\mathbf{C}, 0))$ et $(M_{g''}, \pi'', (\mathbf{C}, 0))$ sont naturellement isomorphes et on peut les trivialiser en utilisant une trivialisation H de $(M_g, \pi, (\mathbf{C}, 0))$. On construit ensuite des 0-cochaînes $\{\varphi_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^0)$, $\{\varphi_i'\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}'; \Lambda^0)$ et $\{\varphi_i''\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}''; \Lambda^0)$; les restrictions à U_i de $\varphi_i' \in \Gamma(U_i'; \Lambda^0)$ et $\varphi_i'' \in \Gamma(U_i''; \Lambda^0)$ sont égales à $\varphi_i \in \Gamma(U_i; \Lambda^0)$; ainsi φ_i' et φ_i'' définissent un élément de $\Gamma(U_i' \cup U_i''; \Lambda^0)$ dont le développement asymptotique est $\hat{\varphi}$.

On a ainsi un procédé pour représenter $\hat{\varphi}$ (donc $\hat{\varphi}^{-1}$) sur un « gros secteur ». Ce procédé va jouer un rôle clef dans la théorie de la *k-sommabilité* (cf. § 5).

Remarque (**2.3.4**). — Soit $\overline{B} \subset \mathbf{C}^n$ un domaine compact (dans la suite nous rencontrerons deux cas, où $\overline{B}$ sera un disque ou une couronne de $\mathbf{C}$).

On définit comme en (1.2) des groupes $G^k(\overline{B})$, $\hat{G}^k(\overline{B})$ et des faisceaux $\Lambda^k(\overline{B})$ en ajoutant la condition que les déploiements de l'identité considérés définissent (pour x assez petit) des difféomorphismes au voisinage de $\overline{B} \subset \mathbf{C}^n$.

On pose en particulier $\Lambda(\infty) = \varinjlim_{R>0} \Lambda(\overline{B}_R)$ où $\overline{B}_R$ est la boule fermée de rayon R. C'est également un faisceau de groupes sur S^1; on prendra garde au fait que le domaine naturel de définition d'une section de $\Lambda(\infty)$ peut « s'effiler verticalement », par suite de la diminution des rayons des secteurs quand R augmente.

Si $\gamma \in H^1(S^1; \Lambda)$ peut être représenté par $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda(\overline{B}))$ (resp. $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda(\infty))$), la construction de M_g fournit un germe de variété au voisinage de $\{0\} \times \overline{B}$ (resp. $\{0\} \times \mathbf{C}^n$), muni d'une projection holomorphe $\pi : M_g \to (\mathbf{C}, 0)$.

---

(1) Pour la notion de fonction analytique banachique, vour DOUADY [15] ou RAMIS [56].

On vérifie qu'il s'agit d'un germe de variété de Stein (Richberg [60], III, p. 258, par exemple). Les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathbf{C}^n$ se prolongent donc à M_g et fournissent une trivialisation du fibré :

$$\begin{array}{ccc} M_g & \xrightarrow{H} & (\mathbf{C}, 0) \times (\mathbf{C}^n, \overline{B}) \quad (\text{resp. } (\mathbf{C}, 0) \times \mathbf{C}^n) \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow & \\ & (\mathbf{C}, 0) & \end{array}$$

On en déduit que l'élément $\hat{\varphi} \in \hat{G}^0$ construit en (2.3.1) est en fait dans $\hat{G}^0(\overline{B})$, c'est-à-dire qu'il s'écrit

$$\hat{\varphi}(x, y) = y + \sum_{p \geq 1} a_p(y) x^p,$$

où les a_p sont holomorphes au voisinage de $\overline{B}$ (resp. sont des fonctions entières sur $\mathbf{C}^n$).

3. FORME INFINITÉSIMALE DE L'ISOMORPHISME FONDAMENTAL

(3.1) Les faisceaux $\mathscr{L}(\Lambda^k)$. Les isomorphismes fondamentaux

Les groupes G^k, $\hat{G}^k$ et les faisceaux Λ^k introduits en (1.2) admettent, dans un sens heuristique évident, des structures de groupes de Lie (de dimension infinie). Les algèbres de Lie (ou faisceaux d'algèbres de Lie) correspondantes seront notées respectivement $\mathscr{L}(G^k)$, $\mathscr{L}(\hat{G}^k)$ et $\mathscr{L}(\Lambda^k)$.

Elles se décrivent commodément de la façon suivante : soit $\mathscr{L}_n$ l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, non nécessairement nuls en 0 (cette algèbre admet une structure de DFN évidente) ; alors $\mathscr{L}(G^k)$ (resp. $\mathscr{L}(\hat{G}^k)$) est l'espace des germes d'applications holomorphes (resp. des séries formelles) de $(\mathbf{C}, 0)$ à valeurs dans $\mathscr{L}_n$, k-plates en 0. De même, $\mathscr{L}(\Lambda^k)(U)$, où U est un secteur, est l'espace des applications holomorphes, avec développement asymptotique dans $\mathscr{L}(\hat{G}^k)$, de U dans $\mathscr{L}_n$.

Géométriquement, les éléments de ces algèbres sont des champs de vecteurs sur $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n, 0)$ *verticaux* (de composante nulle sur $\mathbf{C}$). On a par intégration des applications exponentielles :

$$\exp : \mathscr{L}(G^k) \to G^k, \quad \mathscr{L}(\hat{G}^k) \to \hat{G}^k \quad \text{et} \quad \mathscr{L}(\Lambda^k) \to \Lambda^k.$$

Théorème **(3.1)**. — *Pour tout entier $k \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels*

$$\mathscr{L}(\hat{G}^k)/\mathscr{L}(G^k) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda)).$$

Dans cet énoncé, le faisceau $\mathscr{L}(\Lambda)$ (intersection des faisceaux $\mathscr{L}(\Lambda^k)$) est un faisceau d'algèbres de Lie, et en particulier d'espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$; l'espace $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda))$

est défini en *cohomologie abélienne*. L'application naturelle considérée est définie ainsi :

Soit $\hat{X} \in \mathscr{L}(\hat{G}^k)$, et $\mathfrak{U}$ un (bon) recouvrement de S^1. Le théorème de Borel-Ritt fournit des champs $X_i \in \Gamma(U_i; \mathscr{L}(\Lambda^k))$ admettant $\hat{X}$ comme développement asymptotique; les champs $\xi_{i,i+1} = X_i - X_{i+1} \in \Gamma(U_{i,i+1}; \mathscr{L}(\Lambda))$ définissent alors :

$$\partial_{ab}\{X_i\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \mathscr{L}(\Lambda)) \subset H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda)).$$

Ce théorème est conséquence immédiate des résultats du paragraphe suivant.

(3.2) L'isomorphisme fondamental abélien

Soit F un espace de Banach complexe. Pour tout secteur U de sommet o dans C, on désigne par $\mathscr{A}_0(U; F)$ le sous-espace de $\mathscr{A}(U; F)$ formé des éléments dont le développement asymptotique à l'origine est nul (éléments plats). Soit $\mathscr{A}^F$ (resp. $\mathscr{A}_0^F$) le faisceau d'espaces vectoriels sur S^1 associé au préfaisceau $U \mapsto \mathscr{A}(U; F)$ (resp. $\mathscr{A}_0(U; F)$).

On désigne par $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{A}_0^F)$ le premier espace de cohomologie (abélienne) de S^1 à valeurs dans le faisceau $\mathscr{A}_0^F$.

Théorème (3.2.1). — *On a un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels*

$$F[[x]]/F\{x\} \xrightarrow{\tau} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{A}_0^F).$$

L'application τ est définie comme en (3.1) (voir aussi Malgrange [43]) à l'aide du théorème de Borel-Ritt, et l'on vérifie facilement qu'elle est injective. La surjectivité, qui peut être établie par un argument voisin dû à Malgrange [43], s'obtient par une construction explicite de l'inverse de τ que nous allons maintenant définir.

(3.2.2) *Transformée de Cauchy-Heine* (Ramis [57]; voir aussi Sibuya [62]).

Soit V un secteur ouvert de sommet o dans **C**. A tout point $a \in V$ fixé ($a \neq 0$) on associe le chemin $\gamma : [0, 1] \to V$, $\gamma(t) = t.a$. On définit la transformée de Cauchy-Heine de $\varphi \in \Gamma(V; \mathscr{A}_0^F)$ par :

$$H_\gamma(\varphi)(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta.$$

La fonction $H_\gamma(\varphi)$ est holomorphe (à valeurs dans F) sur $\mathbf{C} - [0, a]$. En remplaçant γ par un chemin homotope à origine et extrémité fixes dans V, on obtient un prolongement analytique de $H_\gamma(\varphi)$ sur un domaine d'ouverture $2\pi + \text{ouv}(V)$ de la surface de Riemann du Logarithme, dont les deux déterminations sur V diffèrent de φ. Si γ_1 et γ_2 ont des extrémités différentes, la fonction $H_{\gamma_1}(\varphi) - H_{\gamma_2}(\varphi)$ est holomorphe au voisinage de l'origine.

On pose

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \zeta^{-n-1}\varphi(\zeta)d\zeta$$

et

$$R_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - x)} d\zeta.$$

On prouve sans difficulté (cf. Ramis [57], proposition (4.2)) la

Proposition **(3.2.3).** — *Soit* V *un secteur de sommet* 0, $\gamma = [0, a] \subset V$, *et* $\varphi \in \Gamma(V; \mathscr{A}_0^F)$. *Soit* V_1 *un autre secteur de sommet* 0 *tel que* $\overline{V}_1 \cap [0, a] = \{0\}$. *On suppose que* φ *vérifie les inégalités* $\operatorname{Sup}_{\zeta \in \gamma} ||\zeta^{-n}\varphi(\zeta)|| < M_n$ $(n \in \mathbf{N})$. *On a alors* :

(i) $||a_n|| < C.M_{n+1}$

(ii) $|x^{-n}| . ||R_n(x)|| < C'.M_{n+1}$ *pour* $x \in V_1$

où C *et* C′ *sont des constantes indépendantes de* n *et* φ (C′ *dépend de* V_1).

(iii) $H_\gamma(\varphi)$ *est élément de* $\mathscr{A}(V_1; F)$ *et plus précisément de* $\Gamma(S^1 - \{a/|a|\}; \mathscr{A}^F)$; *on a* $\hat{H}_\gamma(\varphi) = \sum_{n \geqslant 0} x^n.a_n$, *et* $\tau(\hat{H}_\gamma(\varphi))$ *est l'élément de* $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{A}_0^F)$ *défini par* V *et* φ.

Remarquons que si $V = \{x \in \mathbf{C} \mid \alpha_1 < \operatorname{Arg} x < \alpha_2, |x| < \rho\}$, la fonction $H_\gamma(\varphi)$ se prolonge en un élément de $\Gamma(V'; \mathscr{A}^F)$ où $V' = \{x \in \mathbf{C} \mid \alpha_1 < \operatorname{Arg} x < \alpha_2 + 2\pi; |x| < \rho\}$.

Soit maintenant $\mathfrak{U}$ un bon recouvrement de S^1, et $\varphi = \{\varphi_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \mathscr{A}_0^F)$. En additionnant sur chaque U_i les déterminations convenables des $H_{\gamma_i}(\varphi_{i,i+1})$, on obtient une o-cochaîne $\{\varphi_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \mathscr{A}_0^F)$ telle que $\partial_{ab}\{\varphi_i\} = \varphi$, ce qui prouve le théorème.

(3.3) Remarque

L'isomorphisme du théorème (3.1) est de façon naturelle la *différentielle* de l'isomorphisme $\hat{G}^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda)$:

Soit $\hat{X} \in \mathscr{L}(\hat{G}^k)$, et $\mathfrak{U}$ un bon recouvrement de S^1. Le théorème de Borel-Ritt fournit des champs $X_i \in \Gamma(U_i; \mathscr{L}(\Lambda^k))$ admettant $\hat{X}$ comme développement asymptotique. Les champs $\xi_{i,i+1} = X_i - X_{i+1}$ représentent l'image de $\hat{X}$ dans $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda))$. On a d'autre part les o-cochaînes $\varphi(t) \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k)$ définies par $\varphi_i(t) = \exp tX_i$ qui représentent le groupe à un paramètre $\exp t\hat{X} \in \hat{G}^k$; elles définissent les 1-cocycles $g(t)$:

$$g_{i,i+1}(t) = \varphi_i(t) \circ \varphi_{i+1}^{-1}(t) = \exp tX_i \circ \exp -tX_{i+1}.$$

On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i,i+1}(t)\Big|_{t=0} = X_i - X_{i+1} = \xi_{i,i+1}.$$

Il importe d'observer que (en utilisant les notations précédentes) :

$$\exp t\xi = \exp t(X_i - X_{i+1})$$

est *distinct* de $g(t) = \exp tX_i \circ \exp -tX_{i+1}$. Ceci signifie que les deux isomorphismes fondamentaux (abélien et non abélien) *ne commutent pas* (en général) *aux applications exponentielles*. Ceci ne se produit que si l'on travaille avec des sous-faisceaux de Λ^k et de Λ formés de groupes abéliens, et plus précisément si leurs sections prennent leurs valeurs dans un groupe abélien fixé de difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}^n$.

4. VERSION GEVREY DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

(4.1) Développements asymptotiques Gevrey

On étend au cas Gevrey les notions introduites dans (1.1).

Définition **(4.1.1).** — *Soit* $s>1$. *Soit* U *un secteur ouvert,* F *un espace de Banach complexe (de norme notée* $||\,.\,||$*), et* $f\in\mathcal{O}(U-\{0\};F)$. *On dit que* f *admet* $\hat{f}(x)=\sum_{p\geqslant 0}x^p.a_p\in F[[x]]$ $(a_p\in F)$ *pour développement asymptotique Gevrey d'ordre* s *en* 0 *(et on note* $f\in\mathcal{A}_s(U;F)$, $\hat{f}=J(f)$*) si, pour tout sous-secteur fermé* $\overline{V}$ *de* U, *on a :*

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\overline{V}-\{0\}}|x|^{-k}\Big||f(x)-\sum_{p=0}^{k-1}x^p.a_p\Big|<C_V.(k!)^{s-1}.A_V^k$$

(pour $C_V>0$ *et* $A_V>0$ *convenables).*

On note $\mathcal{A}_s(U;\mathbf{C})=\mathcal{A}_s(U)$.

Dans la définition précédente, la série $\hat{f}$ vérifie des estimations Gevrey d'ordre s. On note $\hat{f}\in F[[x]]_s$.

Cette définition s'étend au cas où F est un espace de Fréchet (cf. (1.1.2)).

On étend maintenant la définition (1.1.3) au cas Gevrey :

Définition **(4.1.2).** — *Soit* $s>1$ *(nombre réel), et* m, n *des entiers* $\geqslant 1$. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et* $g\in\mathcal{O}((U-\{0\})\times\Omega;\mathbf{C}^m)$. *On dit que* g *admet :*

$$\hat{g}(x,y)=\sum_{p\geqslant 0}x^p.a_p(y)\in\mathcal{O}(\Omega;\mathbf{C}^m)[[x]]\quad(a_p\in\mathcal{O}(\Omega;\mathbf{C}^m))$$

pour développement asymptotique Gevrey d'ordre s *(paramétré par* Ω*) si, pour tout secteur fermé* $\overline{V}$ *de* U *et pour tout compact* K *de* Ω, *on a :*

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in\overline{V}-\{0\}\\ y\in K}}|x|^{-k}\Big||g(x,y)-\sum_{p=0}^{k-1}x^p.a_p(y)\Big|<C_{V,K}.(k!)^{s-1}.A_{V,K}^k$$

(pour des constantes $C_{V,K}>0$ *et* $A_{V,K}>0$ *convenables).*

Si g satisfait à ces conditions, on a $f\in\mathcal{A}_s(U;\mathcal{O}(\Omega;\mathbf{C}^m))$ avec $g(x,y)=f(x)(y)$ et inversement.

Remarque **(4.1.3).** — On peut introduire des conditions de Gevrey « précisées » (Ramis [58], [59]) :

$$\hat{f}(x)=\sum_{p\geqslant 0}a_px^p\in\mathbf{C}[[x]]_{s,A+}\quad(s>1,\ A>0)$$

si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ tel que $|a_p|<C_\varepsilon(p!)^{s-1}(A+\varepsilon)^p$.

On définit également des développements asymptotiques Gevrey précisés $\mathcal{A}_{s,A+}(U)$.

On vérifie que $\mathbf{C}[[x]]_{s,A+}$ et $\mathscr{A}_{s,A+}(U)$ sont des $\mathbf{C}$-algèbres stables par dérivation.

Enfin ces notions s'étendent clairement aux fonctions à valeurs vectorielles.

Soit F un espace de Banach. On vérifie que f (infiniment plate à l'origine) appartient à $\mathscr{A}_{s,A+}(U;F)$ si et seulement si f est à décroissance exponentielle d'ordre $k=1/(s-1)$ et de « type » $\tau=1/k.A^k$ sur U $(\|f(x)\|<C'\exp(-\tau|x|^k)$ (cf. Ramis [57], [59]).

On a les variantes suivantes du théorème de Borel-Ritt-Gevrey (Ramis [59]) :

Théorème **(4.1.4).** — *Soient* $s>1$, *et* m, n *des entiers* $\geqslant 1$. *Soit* U *un secteur ouvert, d'ouverture inférieure à* $(s-1)\pi$.

(i) *Soit* F *un espace de Banach, et* $\hat{f}(x)=\sum_{p\geqslant 0} x^p.a_p\in F[[x]]_s$ *une série formelle Gevrey d'ordre s. Alors il existe* $f\in\mathscr{A}_s(U;F)$ *admettant* $\hat{f}$ *comme développement asymptotique Gevrey d'ordre s à l'origine.*

(ii) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$. *Soit* $\hat{g}(x,y)=\sum_{p\geqslant 0} x^p.a_p(y)\in\mathscr{O}(\Omega;\mathbf{C}^m)[[x]]_s$. *On suppose chaque fonction* a_p *bornée sur* $\Omega:\|a_p(y)\|<b_p$, *avec* $\sum_{p\geqslant 0} b_p x^p\in\mathbf{C}[[x]]_s$. *Alors il existe* $g\in\mathscr{O}((U-\{0\})\times\Omega;\mathbf{C}^m)$ *admettant* $\hat{g}$ *comme développement asymptotique Gevrey d'ordre s (paramétré par* Ω) *sur* U.

Pour établir ce théorème, on reprend l'argument de Ramis [57] :

(i) On introduit la série

$$\varphi(t)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{a_p}{\Gamma\left(1+\frac{p}{k}\right)}.t^p\in F\{t\}\quad\text{où } k=1/(s-1).$$

Elle est de rayon de convergence $R>0$. On se ramène par rotation au cas où $\mathbf{R}^+$ bissecte le secteur U et on choisit $0<r<R$. On vérifie alors que

$$f(x)=\frac{k}{x^k}\int_0^r\varphi(t)\exp\left(-\frac{t^k}{x^k}\right)t^{k-1}dt$$

répond à la question.

(ii) On introduit la série

$$\varphi(t,y)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{a_p(y)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{k}\right)}.t^p.$$

Elle est majorée par la série convergente obtenue en remplaçant $a_p(y)$ par b_p (rayon de convergence $R>0$). On pose alors, comme ci-dessus $(0<r<R)$,

$$g(x,y)=\frac{k}{x^k}\int_0^r\varphi(t,y)\exp\left(-\frac{t^k}{x^k}\right)t^{k-1}dt,$$

et g répond à la question. ■

Les mêmes formules intégrales montrent que ce théorème reste vrai dans le cadre Gevrey précisé.

Définition (**4.1.5**). — *Soit* $s>1$; *soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$. *Une fonction* $f\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *est dite Gevrey d'ordre s sur* Ω *si pour tout compact* K *de* Ω *il existe des constantes* $C_K>0$ *et* $A_K>0$ *telles que*

$$\sup_{x\in K}\|f^{(p)}(x)\|<C_K(p!)^s A_K^p.$$

Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach. La composée de deux applications Gevrey d'ordre s est aussi Gevrey d'ordre s (Gevrey [26]).

(4.2) Les faisceaux Λ_s^k

Soit $s>1$ et $k\in\mathbf{N}$. Nous désignons par $\hat{G}_s^k$ le sous-groupe de $\hat{G}^k$ formé des « séries formelles en x Gevrey d'ordre s » :

$\hat{g}\in\hat{G}_s^k$ si $\hat{g}(x,y)=y+\sum_{p\geqslant k+1}a_p(y)x^p$ et si, pour un voisinage compact K de o dans $\mathbf{C}^n$ suffisamment petit, les a_p sont holomorphes au voisinage de K et vérifient $\|a(y)\|<C_K(p!)^{s-1}A_K^p$ (pour $C_K>0$ et $A_K>0$ convenables).

Le secteur U étant fixé, on désignera par $\Lambda_s^0(U)$ le sous-groupe de $\Lambda^0(U)$ formé des applications Gevrey d'ordre s au sens de Whitney sur $U\times\Omega$ (*i.e.* sur tout $\overline{V}\times\Omega$, avec $\overline{V}\subset U$ et $\overline{V}$ fermé); $\Lambda_s^0(U)$ s'identifie au groupe des déploiements de l'identité de $\mathbf{C}^n$, holomorphes sur $U-\{o\}$ et Gevrey d'ordre s au sens de Whitney sur U.

On pose $\Lambda_s^k(U)=\Lambda_s^0(U)\cap\Lambda^k(U)$ et enfin $\Lambda_s(U)=\bigcap_{k\geqslant 0}\Lambda_s^k(U)$. Les éléments de $\Lambda_s(U)$ sont à « décroissance exponentielle » d'ordre $1/(s-1)$ quand $x\to o$, par rapport à l'identité de $\mathbf{C}^n$. On obtient ainsi sur S^1 les faisceaux de groupes Λ_s^k et Λ_s.

On a des suites exactes de faisceaux de groupes sur S^1 :

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda_s & \longrightarrow & \Lambda_s^0 & \longrightarrow & \hat{G}_s^0 \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Lambda_s & \longrightarrow & \Lambda_s^1 & \longrightarrow & \hat{G}_s^1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Lambda_s & \longrightarrow & \Lambda_s^k & \longrightarrow & \hat{G}_s^k \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow
\end{array}$$

Notons encore que les applications naturelles $H^0(S^1;\Lambda_s^k)\to H^0(S^1;\Lambda^k)=G^k$ sont des isomorphismes de groupes.

Soit Φ un sous-faisceau de sous-groupes de Λ. On a une suite « exacte » (Λ/Φ n'est pas en général un groupe) :

$$e\to\Phi\to\Lambda\to\Lambda/\Phi\to e.$$

On en déduit une suite exacte de cohomologie (Frenkel [23], théorème I.1, p. 154)

$$e \to H^0(S^1; \Phi) \to H^0(S^1; \Lambda) \to H^0(S^1; \Lambda/\Phi) \xrightarrow{\partial} H^1(S^1; \Phi) \to H^1(S^1; \Lambda)$$

qui s'écrit :

$$e \to e \to e \to H^0(S^1; \Lambda/\Phi) \xrightarrow{\partial} H^1(S^1; \Phi) \to H^1(S^1; \Lambda).$$

On en déduit le

Lemme **(4.2.1)**. — *L'application naturelle* $H^1(S^1; \Phi) \to H^1(S^1; \Lambda)$ *est injective.*

Ceci s'applique en particulier au cas où $\Phi = \Lambda_s$. Nous l'utiliserons ultérieurement pour d'autres faisceaux.

(4.3) Etude de $H^1(S^1; \Lambda_s)$

Soient $s > 1$ et $q = 1/(s-1)$. On va travailler ici avec des recouvrements q-bons : *un recouvrement ouvert fini* $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $i \in I$ *de* S^1 *est dit q-bon si*

(4.3.1) *le recouvrement* $\mathfrak{U}$ *est bon et tout arc* U_i *est de longueur* $\leqslant \pi/q$.

Les constructions faites en (2.1) se transcrivent sans difficulté dans le cadre Gevrey, à condition de travailler éventuellement avec des recouvrements q-bons pour pouvoir appliquer le théorème de Borel-Ritt-Gevrey (4.1.4). On obtient les résultats suivants :

Lemme **(4.3.2)**. — *Soit* $\mathfrak{U}$ *un bon recouvrement.*

(i) *L'application cobord* $\partial : \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k) \to Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s)$ *induit une injection*

$$C^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s)\backslash\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k)/H^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k) \to H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s).$$

(ii) *On a une injection canonique* (noter que $\varinjlim_{\mathfrak{U}\ q\text{-bon}}(\ldots) = \varinjlim_{\mathfrak{U}\ \text{bon}}(\ldots)$)

$$\varinjlim_{\mathfrak{U}\ q\text{-bon}} (C^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s)\backslash\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k)/G^k) \to H^1(S^1; \Lambda_s).$$

Proposition **(4.3.3)**. — *Soit* $k \in \mathbf{N}$. *Pour tout recouvrement q-bon* $\mathfrak{U}$, *on a un isomorphisme canonique* :

$$C^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s)\backslash\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k)/H^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^k) \to \hat{G}_s^k/G^k.$$

Corollaire **(4.3.4)**. — *Pour tout recouvrement q-bon* $\mathfrak{U}$, *on a des injections naturelles* :

$$\hat{G}_s^k/G^k \to H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s) \to H^1(S^1; \Lambda_s).$$

Nous verrons plus loin qu'en fait ces applications sont des isomorphismes. Ici aussi, on peut enfin donner des versions « à paramètre holomorphe » (cf. (2.1)).

Si l'on considère les ensembles et faisceaux Gevrey précisés $\hat{G}_{s,A+}^k$ et $\Lambda_{s,A+}^k$, les résultats précédents restent vrais.

(4.4) Les isomorphismes fondamentaux dans le cas Gevrey

Théorème **(4.4.1).** — *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *et pour tous nombres réels* $s > 1$ *et* $A > 0$, *on a des isomorphismes canoniques*

$$\hat{G}^k_s/G^k \xrightarrow{\sim} H^1(S^1; \Lambda_s) \quad \text{et} \quad \hat{G}^k_{s,A+}/G^k \xrightarrow{\sim} H^1(S^1; \Lambda_{s,A+}).$$

Dans une première version de cet article (Martinet-Ramis [46]) nous établissions le premier de ces isomorphismes en reprenant dans le cadre Gevrey la construction de (2.2) (à l'aide de fonctions et variétés Gevrey). L'inconvénient de cette méthode est d'utiliser des résultats relativement délicats : théorème de Whitney-Gevrey (Kantor [38]) et théorème d'estimées elliptiques de Lions-Magenes [39]; de plus elle ne permet pas d'obtenir le résultat « Gevrey-précisé ».

Nous proposons ici un argument beaucoup plus simple (et efficace) qui nous a été suggéré par Malgrange (l'idée de cet argument nous reservira au chapitre VI).

Introduisons d'abord les sous-algèbres de Lie $\mathscr{L}(\hat{G}^k_s) \subset \mathscr{L}(G^k)$ et les sous-faisceaux $\mathscr{L}(\Lambda^k_s) \subset \mathscr{L}(\Lambda^k)$ définis de façon évidente (champs de vecteurs formels Gevrey, etc.), et leurs analogues « précisés ».

Théorème **(4.4.2).** — *On a des isomorphismes canoniques abéliens infinitésimaux*

$$\mathscr{L}(\hat{G}^k_s)/\mathscr{L}(G^k) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_s))$$

et

$$\mathscr{L}(\hat{G}^k_{s,A+})/\mathscr{L}(G^k) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{s,A+})).$$

Ces isomorphismes sont induits par l'isomorphisme général du théorème (3.1).

Démonstration. — Comme toujours, seule la surjectivité fait problème. Pour la vérifier, il suffit de montrer que l'inverse de τ construit au § (3.2.2), appliqué à une fonction Gevrey d'ordre s (resp. Gevrey précisé de type s, $A+$) fournit une fonction de même nature. Or, en reprenant les termes de la proposition (3.2.3), si $\varphi \in \Gamma(V, \mathscr{A}_{0,s,A+})$ on a $||\zeta^{-n}\varphi(\zeta)||_\gamma < M_n = K_\varepsilon \cdot (n!)^{s-1}(A+\varepsilon)^n$ pour tout $\varepsilon > 0$ et les inégalités (3.2.3) montrent que $H_\gamma(\varphi)$ vérifie des majorations analogues.

Remarquons bien que si un élément de $\mathscr{L}(\hat{G}^k)$ a son image dans $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_s))$ ou dans $H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{s,A+}))$ il appartient nécessairement à $\mathscr{L}(\hat{G}^k_s)$ ou à $\mathscr{L}(\hat{G}^k_{s,A+})$. ■

(4.4.3) *Démonstration du théorème* (4.4.1). — Soit un élément de $H^1(S^1; \Lambda_s)$ (ou $\Lambda_{s,A+}$) représenté par un 1-cocycle $\{g_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s)$ relatif à un bon recouvrement $\mathfrak{U}$ de S^1.

Choisissons, par la construction utilisée pour démontrer le théorème (2.3.1), une 0-cochaîne $\{g_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^k)$ trivialisant ce cocycle, c'est-à-dire que $g_i \circ g_{i+1}^{-1} = g_{i,i+1}$.

Posons $g_i(x,y) = y + X_i(x,y)$ (soit $g_i = I + X_i$) et de même $g_{i,i+1} = I + X_{i,i+1}$, et interprétons X_i et $X_{i,i+1}$ comme des sections des faisceaux $\mathscr{L}(\Lambda^k)$ et $\mathscr{L}(\Lambda_s)$ respectivement (ceci est assez abusif, mais revient à passer des difféomorphismes aux champs de vecteurs en remplaçant l'application exponentielle par sa « partie principale », en

profitant de la structure affine de $\mathbf{C}^n$). Posons enfin $Y_{i,i+1} = X_{i,i+1} \circ g_{i+1}$ (que nous interprétons encore comme un champ de vecteurs). On a : $g_i = g_{i,i+1} \circ g_{i+1}$ par définition, soit $I + X_i = (I + X_{i,i+1}) \circ g_{i+1}$ d'où $I + X_i = I + X_{i+1} + Y_{i,i+1}$ et finalement $\partial_{ab}\{X_i\} = \{Y_{i,i+1}\}$.

La remarque essentielle est maintenant que $Y_{i,i+1} = X_{i,i+1} \circ g_{i+1}$ est Gevrey d'ordre s (resp. Gevrey précisé de type s, A +) comme l'est $X_{i,i+1}$. En effet :

$$Y_{i,i+1}(x,y) = X_{i,i+1}(x, g_{i+1}(x,y))$$

et g_{i+1} est un difféomorphisme : il préserve donc la propriété de décroissance exponentielle (voir la remarque (4.1.3)) caractéristique des fonctions plates Gevrey d'ordre s (ou Gevrey précisé).

Il en résulte, par le théorème (4.4.2), que la o-cochaîne $\{X_i\}$ est à valeurs dans le faisceau $\mathscr{L}(\Lambda_s^k)$ (resp. $\mathscr{L}(\Lambda_{s,A+})$), et ceci achève la démonstration. ■

Remarque **(4.4.3)**. — Les isomorphismes « infinitésimaux » (4.4.2) sont encore les différentielles des isomorphismes (4.4.1).

5. VERSION q-SOMMABLE DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

(5.1) Définitions relatives à la q-sommabilité

Pour les généralités sur la q-sommabilité (dans des situations plus simples) le lecteur se reportera à Ramis [57] (voir aussi Watson [66] et Nevanlinna [50]).

Soit $s > 1$, $s = 1 + 1/q$ $(q > 0)$.

Définition **(5.1.1)**. — *Un élément $\hat{g} \in \hat{G}_s^0$ est dit q-sommable dans la direction $\alpha \in S^1$ s'il est développement asymptotique d'un $g \in \Lambda_s^0(U)$ où U est un arc ouvert de bissectrice α et de longueur strictement supérieure à π/q. Il est dit q-sommable s'il est q-sommable dans toutes les directions sauf éventuellement un nombre fini formant son « support singulier » $\Sigma(\hat{g})$.*

Les éléments q-sommables de $\hat{G}_s^0$ forment clairement un sous-groupe, contenant G^0; nous le noterons G_s^0. On pose $G_s^k = G_s^0 \cap \hat{G}^k$; $G^k \subset G_s^k \subset \hat{G}_s^k$.

Si $\hat{g}$ est q-sommable dans la direction α, la « somme » $g \in \Lambda_s^0$ est unique (à la longueur de U près) et se calcule par une formule intégrale :

Après s'être ramené par rotation à $\alpha = \mathbf{R}^+$, à $\hat{g} = y + \sum_{p \geq 1} a_p(y) x^p$ on associe la série convergente $\hat{\varphi}(t,y) = y + \sum_{p \geq 1} (a_p(y)/\Gamma(1 + p/q)) t^p$; φ s'étend en une fonction sur $\mathbf{R}^+ \times \Omega$, et $g(x,y) = q/x^q \int_0^{+\infty} \varphi(t,y) \exp(-t^q/x^q) t^{q-1} dt$. (Cf. Ramis [57].)

Si $\hat{g} \in G_s^0$ et si α_1, α_2 sont deux directions singulières consécutives $(\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma(\hat{g}))$, les sommes de $\hat{g}$ se recollent et fournissent une somme g de $\hat{g}$ holomorphe sur un domaine en forme d'œil, d'angle au sommet $|\alpha_2 - \alpha_1| + \pi/q : g \in \Gamma(]\alpha_1 - \pi/2q, \alpha_2 + \pi/2q[; \Lambda_s^0)$.

(Il faut éventuellement interpréter ce qui précède sur la surface de Riemann du Logarithme.)

Ainsi chaque élément $\hat{g} \in G_s^0$ détermine *canoniquement* un élément de $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^0)$ associé à un recouvrement $\mathfrak{U}$ lui-même *canoniquement* déterminé « de » S^1 (en fait les ouverts de $\mathfrak{U}$ peuvent être à interpréter sur la surface de Riemann du Logarithme car ils font parfois plus d'un tour!).

Définition **(5.1.2).** — *Un élément de* $H^1(S^1; \Lambda_s)$ *est dit q-sommable s'il peut être représenté par un cocycle (Gevrey d'ordre s)* $\{g_{i,i+1}\}$ *associé à un bon recouvrement* $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, *tel que chaque* $U_{i,i+1}$ *soit contenu dans un* $V_{i,i+1}$, *d'ouverture* π/q ($V_{i,i+1}$ *est éventuellement dessiné sur le revêtement universel de* S^1), *les* $g_{i,i+1}$ *se prolongeant en des* $h_{i,i+1} \in \Gamma(V_{i,i+1}; \Lambda_s)$. *(Un tel cocycle sera également dit q-sommable.)*

Remarque **(5.1.3).** — Les $(V_{i,i+1}; h_{i,i+1})$ sont *extrémaux* au sens où si :

$$\text{ouv}(V_{i,i+1}) > \pi/q, \quad \text{alors } h_{i,i+1} = 0$$

(Ramis [59]).

(5.2) Interprétation de G_s^k/G^k

Théorème **(5.2.1).** — *Soit* $k \in \mathbf{N}$. *Soit* $s > 1$ ($q = 1/(s-1)$). *L'image de* G_s^k/G^k *par l'isomorphisme naturel* $\hat{G}_s^k/G^k \to H^1(S^1; \Lambda_s)$ *est formée des éléments q-sommables de* $H^1(S^1; \Lambda_s)$.

D'après l'étude faite en (5.1), il est clair que l'image d'un élément de G_s^0 dans $H^1(S^1; \Lambda_s)$ est un élément q-sommable. Inversement soit $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s)$ un cocycle q-sommable. On peut supposer que $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ est un bon recouvrement (qui n'est pas q-bon!) tel que les $U_{i,i+1}$ soient de longueur « petite » $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \pi/2q$), indépendante de i. On désigne par $\alpha_i \in S^1$ les directions des bissectrices des $V_{i,i+1}$ (longueur de $V_{i,i+1} = \pi/q$), que l'on repère par $\alpha_i \in [0, 2\pi[$; les α_i sont alors rangés par ordre croissant, ce qui permet d'identifier l'ensemble d'indices I à $[1, \ldots, p]$. On suppose également que les α_i bissectent les $U_{i,i+1}$. On note $g = \{g_{i,i+1}\}$ le cocycle; les $g_{i,i+1}$, qui appartiennent à $\Gamma(U_{i,i+1}; \Lambda_s)$, se prolongent en des éléments (toujours notés $g_{i,i+1}$) de $\Gamma(V_{i,i+1}; \Lambda_s)$. On associe au 1-cocycle $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s)$ un germe de variété holomorphe fibrée $M_g \xrightarrow{\pi} (C, 0)$, puis après trivialisation holomorphe de celle-ci (par H), une 0-cochaîne $\varphi = \{\varphi_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_s^0)$ (cf. (2.2), 4 et (4.4)). (L'image de g dans $\hat{G}_s^0/G_s^0$ est $\hat{\varphi}^{-1}$.) Il s'agit de montrer que $\hat{\varphi}^{-1} \in G_s^0$, ou ce qui revient au même que $\hat{\varphi} \in G_s^0$. Ceci résultera clairement du

Lemme **(5.2.2).** — *Les* $\varphi_i \in \Gamma(U_i; \Lambda_s^0)$ *se prolongent (évidemment de manière unique) en des* $\varphi_i \in \Gamma(]\alpha_i - \pi/2q, \alpha_{i+1} + \pi/2q[; \Lambda_s^0)$.

Faisons tourner (par exemple dans le sens positif) le bon recouvrement $\mathfrak{U}$ d'un (petit) angle $\eta > 0$. On obtient un bon recouvrement $\mathfrak{U}_\eta$ et, si $\eta < \varepsilon$, on a

$\mathfrak{U}_{\eta;i,i+1} \cap U_{i,i+1} \neq \emptyset$. Soit $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ l'unique bon recouvrement de S^1 tel que $W_{i,i+1} = U_{\eta;i,i+1} \cap U_{i,i+1}$; il est plus fin que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}_\eta$, et il existe un unique cocycle $g_\eta \in Z^1(\mathfrak{U}_\eta; \Lambda_s^0)$ dont la restriction à $Z^1(\mathfrak{W}; \Lambda_s^0)$ coïncide avec la restriction de g à $Z^1(\mathfrak{W}; \Lambda_s^0)$.

Le germe de variété fibrée M_{g_η} est (naturellement) isomorphe au germe M_g, et si l'on trivialise $M_{g_{\eta_0}}$ en utilisant cet isomorphisme et H on obtient une o-cochaîne $\varphi_\eta \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}_\eta; \Lambda_s^0)$ telle que les restrictions de φ et φ_η à $\mathscr{C}^0(\mathfrak{W}; \Lambda_s^0)$ coïncident (cf. (2.3.3)). On a ainsi prolongé les φ_i : $\varphi_i \in \Gamma(]\alpha_i - \varepsilon/2, \alpha_i + \varepsilon/2 + \eta[; \Lambda_s^0)$. Par (petites) rotations successives dans les deux sens, on peut ainsi faire tourner $\mathfrak{U}$ de $\pm(\pi/2q - \varepsilon/2)$, et on obtient des prolongements $\varphi_i \in \Gamma(]\alpha_i - \pi/2q, \alpha_{i+1} + \pi/2q[; \Lambda_0^s)$, qui répondent à la question. ■

Un cocycle q-sommable g est défini par un bon recouvrement $\mathfrak{U}$, les

$$g_{i,i+1} \in \Gamma(U_{i,i+1}; \Lambda_s^0)$$

et les bissectrices α_i des $V_{i,i+1}$. Un tel cocycle sera dit réduit si $g_{i,i+1} \not\equiv 0$ $(i \in I)$. L'image d'un 1-cocycle q-sommable réduit dans $H^1(S^1; \Lambda_s)$ ne dépend clairement que des α_i $(i \in I)$ et des germes $(g_{i,i+1})_{\alpha_i}$ des $g_{i,i+1}$ (ou de leurs prolongements) en α_i. On a inversement la

Proposition **(5.2.3).** — *Si un élément q-sommable c de $H^1(S^1; \Lambda_s)$ est représenté par un 1-cocycle q-sommable réduit g défini par $(\mathfrak{U}; \{g_{i,i+1}\}_{i \in I}; \{\alpha_i\}_{i \in I})$, l'ensemble $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ et les germes $(g_{i,i+1})_{\alpha_i}$ sont indépendants du représentant choisi. Si $\hat{\psi}$ est l'image de g dans G_s^0 (modulo G^0), on a $\Sigma(\hat{\psi}) = \{\alpha_i\}_{i \in I}$.*

La vérification (facile) est laissée au lecteur. (On utilise la construction de $\hat{\varphi}^{-1} = \psi$ et l'unicité de la somme d'une série q-sommable dans une direction non exceptionnelle.)

On dispose ainsi d'une représentation *intrinsèque* d'un élément q-sommable c de $H^1(S^1; \Lambda_s)$.

6. REMARQUE GÉNÉRALE

Considérons une application formelle $\hat{\varphi}$: « $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ » $(\hat{\varphi} \in (\mathbf{C}[[x, y]])^n)$, telle que $\hat{\varphi}(0, y) = y$. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $i \in I$, un bon recouvrement de S^1. Supposons donnée une collection $\varphi = \{\varphi_i\}$ de germes d'applications $\varphi_i : (U_i, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ tels que, pour tout i, les conditions suivantes soient satisfaites :

(6.1) (i) φ_i est holomorphe sur $(U_i - 0, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0)$,

(ii) φ_i est, en $(0, 0) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, *asymptote à $\hat{\varphi}$ au sens de Gérard-Sibuya* [25].

La condition (ii) signifie que, pour tout secteur fermé $\overline{V}_i \subset U_i$ et pour tout polydisque fermé $\overline{\Omega}$ centré en $0 \in \mathbf{C}^n$ (secteur et polydisque de rayons assez petits), on a, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$||\varphi_i(x,y) - \hat{\varphi}^k(x,y)|| < C_{k,\overline{V}_i,\overline{\Omega}}||(x,y)||^{k+1} \quad (x,y) \in \overline{V}_i \times \overline{\Omega},$$

où $\hat{\varphi}^k$ est le k-jet de $\hat{\varphi}$, $C_{k,\overline{V}_i,\overline{\Omega}}$ une constante, et $||\ ||$ une norme quelconque sur $\mathbf{C}^n$. En d'autres termes, φ_i admet $\hat{\varphi}^k$ comme développement limité à l'ordre k en 0, et ceci pour tout k.

On déduit aisément des conditions (6.1) que les applications φ_i sont inversibles (en y) sur des produits $U_i \times \Omega$ (avec des rayons assez petits), et que les inverses φ_i^{-1} ont pour développement asymptotique en (0, 0) l'inverse formel $\hat{\varphi}^{-1}$ de $\hat{\varphi}$ par rapport à y (et toujours au sens de Gérard-Sibuya).

Enfin, les applications $\varphi_{i,i+1} = \varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}$ sont alors asymptotiques à l'identité de $\mathbf{C}^n$ sur $(U_{i,i+1}, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0)$, toujours dans le même sens.

Proposition **(6.2).** — *Supposons que dans les conditions ci-dessus* $\varphi_{i,i+1}$ *soit un élément de* $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ *(resp. de* $Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_s)$, *resp. q-sommable). Alors* $\hat{\varphi}$ *est un élément de* $\hat{G}^0$ *(resp. de* $\hat{G}^0_s$, *resp. de* G^0_s*).*

En effet $\{\varphi_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$ provient (théorème (2.3.1)) d'une 0-cochaîne $\{g_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda^0)$, qui définit un élément $\hat{g} \in \hat{G}^0$. On a donc, sur $(U_{i,i+1}, 0)$, $\varphi_i^{-1} \circ g_i = \varphi_{i+1}^{-1} \circ g_{i+1}$, ce qui définit une application holomorphe $f = \varphi_i^{-1} \circ g_i$ $(i \in I)$ sur $(\mathbf{C} - \{0\}, 0) \times \mathbf{C}^n$. Cette application est bornée sur un polydisque convenable $D \times \Omega$ et se prolonge donc en $f \in G^0$. On a alors $\hat{\varphi} \circ f = g$, ce qui établit le résultat (les variantes Gevrey et q-sommables se démontrent de la même façon). ■

Ainsi en pratique des renseignements sur la représentation d'une transformation formelle $\hat{\varphi}$ comme 1-cocycle donnent des renseignements précis sur $\hat{\varphi}$. Cette remarque jouera un rôle important dans la suite (chapitre III). (La remarque (2.3.4) faite plus haut va dans le même sens.)

La proposition (6.2) peut être raffinée en la

Proposition **(6.3).** — *Soit* $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ *une collection d'applications*

$$\varphi_i : (U_i, 0) \times (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0),$$

telles que (pour tout $i \in I$*) on ait* (6.1) (i) *et que* φ_i *soit continue en* $0 = (0, 0)$. *Si* $\{\varphi_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda)$, *il existe* $\hat{\varphi}$ *unique telle que* (6.1) (ii) *soit satisfaite. On a de plus* $\hat{\varphi} \in \hat{G}^0$.

7. L'ISOMORPHISME FONDAMENTAL DANS LE CAS DES GROUPES DE LIE

Les résultats que nous avons exposés jusqu'ici concernaient les développements asymptotiques à valeurs dans le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}^n$. Ils ne sont que l'extension à un pseudo-groupe infini d'une théorie qui vaut pour tout

groupe de Lie complexe. Le cas du groupe $GL(n; \mathbf{C})$ redonne la théorie de Malgrange-Sibuya [43], [62] avec des variantes « à paramètre holomorphe », Gevrey, q-sommables (cf. Ramis [58]).

Soit H un groupe de Lie complexe, d'élément neutre 1, et $\mathscr{L}(H)$ son algèbre de Lie. On désigne par G_H^k (resp. $\mathscr{L}(G_H^k)$) le groupe (resp. l'algèbre de Lie) des germes d'applications holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ dans $(H, 1)$ (resp. dans $(\mathscr{L}(H), 0)$) k-plates en 0 ($k \geqslant 0$). L'exponentielle de H induit une bijection $\mathscr{L}(G_H^k) \to G_H^k$ pour tout k. On désigne par $\hat{G}_H^k$ et $\mathscr{L}(\hat{G}_H^k)$ le groupe et l'algèbre de Lie des applications formelles k-plates en 0, qui sont encore en bijection par l'application exponentielle; par $\hat{G}_{H,s}^k$ (resp. $G_{H,s}^k$) et $\mathscr{L}(\hat{G}_{H,s}^k)$ (resp. $\mathscr{L}(G_{H,s}^k)$) les groupes et algèbres des séries Gevrey d'ordre s (resp. q-sommables, où $q = 1/(s-1)$). Enfin on désigne par Λ_H^k (resp. $\mathscr{L}(\Lambda_H^k)$) et Λ_H (resp. $\mathscr{L}(\Lambda_H)$) les faisceaux sur S^1 formés par les applications analytiques définies sur les secteurs de sommet 0, $\mathscr{C}^\infty$ à l'origine (infiniment plates dans le cas de Λ_H), et à valeurs dans H (resp. $\mathscr{L}(H)$); l'adjonction de l'indice s représentera les sous-faisceaux des applications Gevrey d'ordre s.

On établit le théorème de Borel-Ritt (resp. de Borel-Ritt Gevrey) pour $\hat{G}_H^k$ en utilisant son analogue pour $\mathscr{L}(\hat{G}_H^k)$ et l'application exponentielle. On en déduit la définition de l'isomorphisme canonique

$$C^0(\mathfrak{U}; \Lambda_H) \backslash \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_H^k) / H^0(\mathfrak{U}; \Lambda_H^k) \xrightarrow{\sim} \hat{G}_H^k / G_H^k$$

et des injections

$$\hat{G}_H^k / G_H^k \to H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_H) \to H^1(S^1; \Lambda_H)$$

et des analogues Gevrey d'ordre s.

Théorème (**7.1**). — (i) *On a, pour tout* $k \geqslant 0$, *des isomorphismes canoniques* « *biholomorphes* »

$$\mathscr{L}(\hat{G}_H^k) / \mathscr{L}(G_H^k) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_H))$$

et

$$\hat{G}_H^k / G_H^k \xrightarrow{\sim} H^1(S^1; \Lambda_H).$$

(ii) *Pour tout* $s > 1$ *les isomorphismes précédents induisent des isomorphismes*

$$\mathscr{L}(\hat{G}_{H,s}^k) / \mathscr{L}(G_H^k) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{H,s})$$

et

$$\hat{G}_{H,s}^k / G_H^k \xrightarrow{\sim} H^1(S^1; \Lambda_{H,s}).$$

De plus l'image de $G_{H,s}^k / G_H^k$ (*resp.* $\mathscr{L}(G_{H,s}^k) / \mathscr{L}(G_H^k)$) *est formée des éléments q-sommables* ($q = 1/(s-1)$).

Commentaires

1) Les isomorphismes infinitésimaux (cohomologie abélienne) s'obtiennent exactement comme au § 3. Pour établir la surjectivité de $\hat{G}_H^k / G_H^k \to H^1(S^1; \Lambda_H)$ on reprend la stratégie développée en (2.2), en remplaçant la fibre $(\mathbf{C}^n, 0)$ par le groupe de Lie H, considéré comme opérant sur lui-même par translations à droite; on obtient alors, pour

$g \in H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_H)$ donné, un triplet $(M_g, \pi, \mathbf{C})$ où M_g est une variété analytique complexe, π est une submersion analytique, $\pi^{-1}(x)$ est une variété isomorphe à H, et enfin H opère analytiquement à gauche sur M_g : $(M_g, \pi, \mathbf{C})$ est donc un germe de *fibré principal* de groupe H. Les trivialisations analytiques de ce fibré (chacune d'elles est déterminée par le choix d'un germe de section σ de π avec $\sigma(0) = 1 \in H$) définissent comme en (2.3.1) l'inverse de l'injection canonique.

2) Pour obtenir l'isomorphisme (ii) (dans le cas non abélien), on se ramène au cas abélien via l'application exponentielle (au lieu de sa « partie principale » dans la théorie précédente). La remarque importante est celle-ci :

Soient $X \in \mathscr{L}(\Lambda_{H,s})(U)$ *et* $Y \in \mathscr{L}(\Lambda_H^k)(U)$; *posons* $\exp X \circ \exp Y = \exp Z$, $Z \in \mathscr{L}(\Lambda_H^k)(U)$. *Alors* $Z - Y$ *est élément de* $\mathscr{L}(\Lambda_{H,s})(U)$.

En effet on a $Z = X + Y + R(X, Y)$ où R est une fonction analytique en (0, 0), nulle pour $X = 0$ et pour $Y = 0$ (série de Haussdorff). Ayant choisi une norme quelconque sur $\mathscr{L}(H)$, on en déduit, Y restant petit sur un voisinage convenable de 0 dans U, que $||Z - Y|| \leqslant (1 + \varepsilon).||X||$ (ε arbitrairement petit). Les propriétés de décroissance exponentielle de X caractérisant les fonctions plates Gevrey (et aussi Gevrey précisé si l'on veut) valent donc aussi pour $Z - Y$.

Ceci acquis, soit $\{g_{i,i+1}\} \in Z^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{H,s})$, et $g_i \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_H^k)$ une cochaîne telle que $\partial\{g_i\} = \{g_{i,i+1}\}$. En posant $\exp X_{i,i+1} = g_{i,i+1}$ et $\exp Y_i = g_i$ on vérifie immédiatement que $\partial_{ab}\{Y_i\} = \{Y_{i,i+1}\}$ où $Y_{i,i+1}$ est défini par l'équation

$$\exp X_{i,i+1} \circ \exp Y_{i+1} = \exp(Y_{i,i+1} + Y_{i+1}).$$

La remarque précédente montre que $\{Y_{i,i+1}\} \in H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_H))$ est en fait Gevrey d'ordre s; il en résulte que $\{Y_i\}$ est elle-même Gevrey d'ordre s et donc que $\{g_i\}$ l'est aussi.

Remarque (**7.2**). — Dans les applications, le groupe H est en général donné comme opérant sur une variété analytique complexe Y : nous rencontrerons au chapitre VI les cas de $H = PGl(2; \mathbf{C})$ opérant sur $Y = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ et $H = Gl(2; \mathbf{C})$ avec $Y = \mathbf{C}^2$.

Il est alors important d'observer qu'à un cocycle $g \in H^1(S^1; \Lambda_H)$ correspondra, non seulement le germe de fibré principal $M_g \xrightarrow{\pi} (\mathbf{C}, 0)$ évoqué plus haut, mais aussi un germe de fibré

$$M_g(Y) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{C}, 0)$$

de fibre Y et de groupe structural H.

La variété $M_g(Y)$ s'obtient en recollant les $U_i \times Y$ via les applications de transitions $g_{i,i+1}$, considérées comme des difféomorphismes globaux de Y; toute o-cochaîne $\{g_i\}$ telle que $\partial\{g_i\} = \{g_{i,i+1}\}$ définit alors une trivialisation analytique $M_g(Y) \simeq (\mathbf{C}, 0) \times Y$.

Cette remarque nous amène à poser le problème suivant :

Soit Y une variété analytique complexe, et $H = \mathrm{Diff}(Y)$ le groupe des difféo-

morphismes analytiques (globaux) de Y; H n'est pas nécessairement un groupe de Lie, si Y est non compacte. Cependant, le faisceau Λ_H sur S^1 reste défini de manière évidente, ainsi que le groupe G^0_H (mais on ne voit pas comment définir $\hat{G}^0_H$); si $g \in H^1(S^1; \Lambda_H)$ la construction (2.2) définit encore un germe de variété analytique (M_g, Y), pourvu d'une submersion π holomorphe à valeurs dans $(\mathbf{C}, 0)$; il n'est plus alors évident que ce germe soit analytiquement isomorphe au produit $(\mathbf{C}, 0) \times Y$. Peut-on malgré tout obtenir un analogue, dans ce cadre, de l'isomorphisme fondamental?

II. — FORMES NORMALES

1. DÉFINITION

Nous considérons les formes différentielles ω holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$, satisfaisant les trois propriétés suivantes :

1. L'origine est une singularité isolée de ω.
2. Le 1-jet de ω en 0 est de rang 1.
3. La différentielle $d\omega$ est non nulle en 0.

Ce sont là des propriétés invariantes par multiplication de ω par une fonction holomorphe non nulle en 0; ce sont donc en fait des propriétés de l'*équation différentielle* $\omega = 0$.

Nous désignerons dans toute la suite par E l'ensemble des germes d'équations différentielles à l'origine de $\mathbf{C}^2$, vérifiant les propriétés précédentes.

Les deux dernières conditions signifient simplement que le 1-jet de ω en 0 peut être mis, dans un système de coordonnées convenables, sous la forme $y.dx = 0$. Au premier ordre, le feuilletage défini par l'équation $\omega = 0$ est donc formé de droites parallèles.

En termes de champs de vecteurs, les propriétés 1, 2, 3 caractérisent les germes de champs holomorphes admettant une singularité isolée en 0, dont la partie linéaire est de rang 1 et non nilpotente.

Le groupe Diff($\mathbf{C}^2$, 0) des difféomorphismes locaux *analytiques* de $\mathbf{C}^2$ en 0 opère de façon évidente sur l'ensemble E; deux équations seront dites analytiquement isomorphes si elles appartiennent à une même orbite.

Nous nous proposons essentiellement de décrire l'espace des orbites de Diff($\mathbf{C}^2$, 0) dans E. En fait, nous serons amenés de façon naturelle, après une étude préliminaire, à considérer aussi l'action de divers sous-groupes de Diff($\mathbf{C}^2$, 0) sur des sous-ensembles intéressants de E. D'autre part, nous envisagerons aussi des problèmes de *déformations* dans E, c'est-à-dire l'étude de familles d'éléments de E dépendant analytiquement de un ou plusieurs paramètres complexes.

2. FIBRATIONS TRANSVERSES

(2.1) Le théorème de Dulac

Dulac [16] (voir aussi Mattei-Moussu [47] pour un exposé plus moderne) a établi le résultat suivant :

Si une équation différentielle $\omega = 0$ *appartient à* E, *il existe un système de coordonnées locales holomorphes au voisinage de* $0 \in \mathbf{C}^2$ *dans lequel elle s'écrit*

$$x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0 \tag{1}$$

où $p \geqslant 1$ *est entier, et* $A(0,y) = \lambda y$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

On lit sur cette expression les propriétés géométriques suivantes :

1) L'équation différentielle admet une solution holomorphe et régulière à l'origine ($x = 0$), qu'elle partage avec sa partie linéaire ($y\,dx = 0$). Cette solution est *unique*, et sera appelée dans la suite *variété invariante* de l'équation.

2) En dehors de l'ensemble $\{x = 0\}$, le feuilletage local défini par l'équation est *transverse à la fibration* $(x,y) \mapsto x$.

3) L'origine est un point singulier de multiplicité $(p+1)$: l'idéal engendré par les composantes de ω est en fait engendré par x^{p+1} et y.

(2.2) Définition et étude des fibrations transverses

Définition **(2.2.1).** — *Étant donné dans* E *une équation* $\omega = 0$, *nous dirons qu'une fibration holomorphe locale* $\pi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *est transverse à l'équation si :*

(i) *la fibre* $\pi^{-1}(0)$ *est une solution de l'équation, et sa tangente en* 0 *est solution de la partie linéaire de* ω;

(ii) *les autres fibres de* π *sont transverses aux solutions de* $\omega = 0$.

Le théorème de Dulac est en fait équivalent à l'existence d'une fibration transverse; la fibre en 0 est seule bien déterminée : c'est la variété invariante de l'équation. Nous allons maintenant comparer les diverses fibrations transverses à une même équation.

Nous supposons l'équation considérée mise sous la forme

$$\omega = x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0. \tag{1}$$

Toute fibration transverse est alors biunivoquement déterminée par les solutions d'une équation différentielle :

$$\alpha = dx - u(x,y)dy = 0 \quad \text{où } u(0,y) = 0 \text{ (condition (i))}.$$

La condition (ii) équivaut au fait que $\alpha \wedge \omega$ ne s'annule que pour $x = 0$ au voisinage de l'origine; comme $\alpha \wedge \omega = (x^{p+1} - A.u)dx \wedge dy$ et $A(0,y) = \lambda y$ ($\lambda \neq 0$), cette condi-

tion est satisfaite si et seulement si $u(x,y) = x^{p+1}.v(x,y)$, où v est holomorphe. Finalement, en intégrant l'équation $\alpha = 0$, on voit que toute fibration transverse est définie par une application $\pi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de la forme $\pi(x,y) = x + x^{p+1}.v(x,y)$. Ces fibrations sont donc toutes identiques à l'ordre p le long de la variété invariante $\{x = 0\}$.

Lemme (**2.2.2**). — *Soit $f(x,y)$ un germe de fonction holomorphe tel que :*

$$f(x,y) = \mathrm{P}(x) + x^{p+1}r(x,y) \quad \text{où } \mathrm{P}(x) = a_1x + \ldots,\ a_1 \neq 0,$$

est de degré $\leqslant p$.

Il existe un germe de difféomorphisme analytique Φ de $(\mathbf{C}^2, 0)$ tel que

$$\omega \wedge \Phi^*\omega = 0 \quad \textit{et} \quad f \circ \Phi = \mathrm{P}.$$

Démonstration. — Elle se fait très facilement par une « méthode de chemin ». On pose

$$f(t, x, y) = f_t(x,y) = \mathrm{P}(x) + tx^{p+1}r(x,y).$$

On cherche une famille à un paramètre de champs de vecteurs holomorphes

$$\mathrm{X}_t(x,y) = \xi(t, x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

telle que

a) $\omega(\mathrm{X}_t) = 0$

b) $\mathrm{X}_t.f_t = -\dfrac{\partial f_t}{\partial t} = -x^{p+1}r(x,y).$

L'intégration du champ X_t définira alors une famille Φ_t de difféomorphismes locaux de $(\mathbf{C}^2, 0)$ telle que Φ_t conserve l'équation différentielle $\omega = 0$ (condition *a)*) et $f_t \circ \Phi_t = f_0 = \mathrm{P}$ (condition *b)*).

La première équation donne

$$\mathrm{X}_t = g.\left(x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

où $g(t, x, y)$ est arbitraire.

La seconde équation donne alors

$$g.\left(x^{p+1}\frac{\partial f_t}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial f_t}{\partial y}\right) = -x^{p+1}r(x,y),$$

soit

$$g.\left(\frac{\partial f_t}{\partial x} + t\mathrm{A}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -r(x,y),$$

ce qui détermine bien une fonction holomorphe g, car le coefficient de g est non nul pour $x = y = 0$ $(a_1 \neq 0)$. ■

Proposition (**2.2.3**). — *Soit* π *une fibration transverse à l'équation différentielle* $\omega = x^{p+1}dy - A\,dx = 0$. *Il existe un difféomorphisme local* Φ *de* $(\mathbf{C}^2, 0)$ *conservant l'équation différentielle, qui transforme la fibration* π *en la projection canonique* $(x,y) \mapsto x$. *En fait,* Φ *laisse invariante chaque feuille de* $\omega = 0$.

Il suffit d'appliquer le lemme à $\pi(x,y) = x + x^{p+1}v(x,y)$. ■

Remarque. — Le théorème de Dulac et la proposition précédente s'étendent sans difficulté au cas de *familles* d'équations différentielles éléments de E, dépendant analytiquement de paramètres; les difféomorphismes locaux dépendront aussi analytiquement des paramètres.

3. PREMIÈRE RÉDUCTION DU PROBLÈME DE CLASSIFICATION

Dans la suite, nous désignerons par $E_p \subset E$ l'ensemble des équations dont l'origine est un point singulier de multiplicité $p+1$.

L'ensemble E_p est évidemment invariant sous l'action de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$.

Proposition (**3.1**). — *L'espace des orbites de* $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ *dans* E_p *est en bijection canonique avec celui des orbites du groupe* G′ *(défini ci-dessous) opérant sur l'ensemble* E'_p *des équations holomorphes* :

(1) $$x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0 \quad \text{où } A(0,y) = \lambda y,\ \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Le groupe $G' \subset \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ *est constitué des transformations de la forme*

$$(x,y) \mapsto (h(x), \varphi(x,y)) \quad \text{où } \varphi(0,y) = \beta y \text{ et } \beta \in \mathbf{C}^*$$

(remarquer que G′ *laisse bien* E'_p *invariant).*

La démonstration utilise les résultats du paragraphe précédent.

D'abord, toute orbite de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ dans E_p coupe E'_p : c'est le théorème de Dulac. Reste à vérifier que si deux équations $\omega_i = x^{p+1}dy - A_i(x,y)dx = 0$ $(i = 1, 2)$ sont isomorphes via $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$, elles sont G′-isomorphes. Soit donc $\Psi \in \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ tel que $\omega_1 \wedge \Psi^* \omega_2 = 0$ (c'est la définition de l'équivalence analytique dans E); la fibration $\pi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ image inverse par Ψ de la projection canonique $(x,y) \mapsto x$ est évidemment transverse à $\omega_1 = 0$; d'après la proposition (2.2.3) il existe un automorphisme Φ de ω_1 ramenant π sur la projection canonique; alors le difféomorphisme $\Phi \cdot \Psi$ est de la forme $(x,y) \mapsto (h(x), \varphi(x,y))$ et transforme $\omega_2 = 0$ en $\omega_1 = 0$; on en déduit par un calcul facile que $\varphi(0,y) = \beta y$ avec $\beta \in \mathbf{C}^*$, et donc que $\Phi \circ \Psi \in G'$. ■

Remarque (3.2). — Une famille analytique d'éléments de E_p, paramétrée par une variété analytique complexe S, consiste en la donnée :

a) d'un fibré holomorphe sur S, de fibre $(\mathbf{C}^2, 0)$;

b) d'une équation différentielle analytique $\omega = 0$ sur ce fibré, induisant dans chaque fibre un élément de E_p; la forme ω est entendue ici comme définie modulo les formes « semi-basiques » sur le fibré, c'est-à-dire comme une forme « verticale ».

On a une définition analogue pour les familles d'éléments de E'_p; on utilise pour cela des fibrés dont le *groupe de structure* est $G' \subset \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$.

Avec ces définitions il est clair, compte tenu de la remarque faite en (2.2), que toute famille sur S d'éléments de E_p est isomorphe à une famille sur S d'éléments de E'_p; de plus, deux familles sur S d'éléments de E'_p, isomorphes via $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$, le sont par rapport au groupe G'.

On peut aussi définir de façon analogue des familles analytiques d'éléments de E. Il est naturel de s'intéresser aux familles telles que la famille d'idéaux sous-jacente soit *plate* : ceci impose que la multiplicité de la singularité soit constante, c'est-à-dire que l'on ait en fait une famille dans E_p; la famille d'idéaux est alors « rigide ».

4. CLASSIFICATION FORMELLE. FORMES NORMALES

Nous considérons ici l'espace $\hat{E}'_p$ des équations différentielles *formelles*

$$\omega = x^{p+1}\,dy - A(x,y)\,dx = 0,$$

où $A(x,y) = \lambda y + \sum_{n \geq 1} a_n(y).x^n$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$ est une série formelle en x, dont les coefficients a_n sont holomorphes sur un même voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$.

Soit $\hat{G}^0$ le groupe, déjà introduit en I.2, des transformations *formelles*

$$\varphi : (x,y) \mapsto (x, \varphi(x,y))$$

où $\varphi(x,y) = y + \sum_{n \geq 1} \varphi_n(y).x^n$ est formelle en x, à coefficients holomorphes sur un même voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$; dans la suite, nous désignerons toujours par la même lettre la transformation elle-même et sa seconde composante.

Proposition (4.1). — *Le groupe $\hat{G}^0$ opère simplement dans $\hat{E}'_p$. L'espace des orbites s'identifie à un ouvert de $\mathbf{C}_{p+1}$. Plus précisément, tout élément de $\hat{E}'_p$ est réductible via $\hat{G}^0$ à une et une seule des équations (formes normales)*

$$x^{p+1}\,dy - yP(x)\,dx = 0,$$

où P *est un polynôme de degré au plus égal à p, et* $P(0) \neq 0$.

Ce résultat est établi par exemple dans Hukuhara-Kimura-Matuda [34]. La théorie de la normalisation des champs de vecteurs formels (Brjuno [11]) le donne assez rapi-

dement. Pour l'intelligence de la suite, il est nécessaire d'en résumer ici une démonstration.

1) Toute équation $\omega \in \hat{E}'_p$ admet une *unique* solution formelle nulle en 0

$$y = u(x) = \sum_{n \geqslant 1} u_n x^n.$$

Si l'on pose alors $\varphi_1(x, y) = y + u(x)$, on a

$$\omega_1 = \varphi_1^* \omega = x^{p+1} dy - yB(x, y)dx \in \hat{E}'_p \quad \text{où } B(0, y) = \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

2) Posons maintenant $B(x, 0) = P(x) + x^{p+1}R(x)$, où P est le polynôme de Taylor de degré p de $B(x, 0)$ en 0; si $\varphi_2(x, y) = y . \exp v(x)$, où $v(x) = \int_0^x R(\xi)d\xi$, on vérifie que l'équation $\varphi_2^* \omega_1 = 0$ s'écrit

$$\omega_2 = x^{p+1} dy - yC(x, y)dx = 0,$$

où $C(x, 0) = P(x)$ et $P(0) = \lambda \in \mathbf{C}^*$.

3) Posons $\omega_0 = x^{p+1} dy - yP(x)dx$. On détermine $\varphi \in \hat{G}^0$, $\varphi(x, y) = y + \sum_1^\infty \varphi_n(y)x^n$, telle que $\omega_2 \wedge \varphi^* \omega_0 = 0$; par identification en les puissances de x, les φ_n sont définis par des équations différentielles de la forme

$$(y\varphi'_n - \varphi_n) = \text{combinaison linéaire des } \varphi_k \text{ et } y\varphi'_k \ (k < n).$$

Ces équations déterminent par récurrence des fonctions φ_n holomorphes, 1-plates en 0, de rayon de convergence *constant*.

4) La simplicité de l'opération de $\hat{G}^0$ sur $\hat{E}'_p$ se vérifie aisément : le groupe d'isotropie de la forme canonique ω_0 est réduit à l'identité.

5) Un calcul élémentaire montre que deux formes normales distinctes ne sont jamais $\hat{G}^0$-équivalentes. ■

Remarques (**4.2**). — *a)* Nous aurons besoin au chapitre IV de déterminer la transformation φ de la troisième étape ci-dessus sous la forme

$$\varphi(x, y) = y + \sum_{n \geqslant 2} g_n(x)y^n, \quad \text{où } g_n \in \mathbf{C}[[x]].$$

Par identification de $\omega_2 \wedge \varphi^* \omega_0$ à 0 selon les puissances de y, les séries g_n sont déterminées par les équations différentielles

$$x^{p+1} g'_n + (n-1)P . g_n + (n-1)C_1 . g_{n-1} + (n-2)C_2 . g_{n-2} + \ldots + C_{n-1} = 0,$$

où $n \geqslant 2$, et l'on a posé $C(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} C_n(x)y^n$ avec $C_0(x) = P(x)$.

Les séries g_n sont donc déterminées par récurrence; à chaque étape, on utilise l'argument invoqué pour la première réduction, simplifié par le fait que l'équation à résoudre est *linéaire*, avec second membre.

b) Les *invariants formels* d'une forme $\omega \in \hat{E}'_p$ (coefficients du polynôme $P(x)$) sont déterminés par le $(p+1)$-jet de ω à l'origine.

c) Si $\omega_s \in \hat{E}'_p$ est une famille dépendant analytiquement de $s \in \mathbf{C}^n$, les calculs précédents montrent que les difféomorphismes « normalisants » $\varphi_s \in \hat{G}^0$ dépendent analytiquement de s.

Considérons maintenant l'opération sur $\hat{E}'_p$ du groupe $\hat{H}$ formé des transformations

$$(x, y) \mapsto (h(x), \varphi(x, y)),$$

où h est un difféomorphisme *formel* de $\mathbf{C}$ en 0, et $\varphi \in \hat{G}^0$.

Proposition **(4.3)** (Voir aussi Brjuno [10], pp. 148-149.) — *L'espace des orbites de* $\hat{H}$ *dans* $\hat{E}'_p$ *s'identifie à* $\mathbf{C}$. *Plus précisément, tout élément de* $\hat{E}'_p$ *est* $\hat{H}$*-isomorphe à une et une seule des équations*

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}dy - y(1 + \lambda x^p)dx = 0 \quad \text{où } \lambda \in \mathbf{C}.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que $\hat{G}^0 \subset \hat{H}$ est un sous-groupe normal, et d'étudier l'opération induite du groupe quotient $\hat{H}/\hat{G}^0$ (groupe des difféomorphismes formels de $\mathbf{C}$ en 0) sur l'espace des équations réduites de la proposition (4.1). Le résultat s'en déduit par un calcul facile, réutilisant l'étape 2) de la proposition (4.1). ■

Définition **(4.4)**. — *Nous désignerons dans la suite par* $\mathscr{E}_p \subset E'_p$ *(resp.* $\hat{\mathscr{E}}_p \subset \hat{E}'_p$*) l'ensemble des équations différentielles analytiques (resp. formelles) dont la forme réduite via* $\hat{G}^0$ *est une des équations* $\omega_{p,\lambda} = 0$.

D'après les considérations précédentes :

1) $\mathscr{E}_p \subset E'_p$ et $\hat{\mathscr{E}}_p \subset \hat{E}'_p$ sont des sous-variétés de codimension finie p, puisque *déterminées* par une sous-variété de codimension p de l'espace des $(p+1)$-jets d'éléments de E'_p.

2) Le groupe G^0 (resp. $\hat{G}^0$) laisse invariant $\mathscr{E}_p$ (resp. $\hat{\mathscr{E}}_p$) et y opère simplement.

3) On vérifie aisément que le groupe G (resp. $\hat{G}$) obtenu en adjoignant à G^0 (resp. $\hat{G}^0$) les transformations linéaires $(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y)$ où $\alpha^p = 1$ et $\beta \in \mathbf{C}^*$, laisse également $\mathscr{E}_p$ (resp. $\hat{\mathscr{E}}_p$) invariant.

5. DEUXIÈME RÉDUCTION DU PROBLÈME DE CLASSIFICATION

Proposition **(5.1)**. — *L'espace des orbites du groupe* G′ *opérant dans* E'_p *est en bijection canonique avec l'espace des orbites du groupe* G *opérant dans* $\mathscr{E}_p$.

Démonstration. — D'abord, toute G′-orbite dans E'_p coupe $\mathscr{E}_p$; il suffit pour cela de réduire une équation à la forme normale $\omega_{p,\lambda} = 0$ à l'ordre $(p+1)$ seulement; ceci peut se faire par une transformation *polynomiale* appartenant à $\hat{H}$, donc à G′.

Soient maintenant $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{E}_p$, isomorphes via G′. Il nous faut vérifier que les équations $\omega_i = 0$ sont G-isomorphes; l'argument est le suivant :

Soit $\Phi \in G'$ $(\Phi(x, y) = (h(x), \varphi(x, y)))$ telle que $\omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2 = 0$. En appliquant

à la fonction h et à ω_1 le lemme (2.3) on se ramène au cas où h est un polynôme de degré au plus égal à p. On va montrer que ceci implique $h(x) = \alpha x$ avec $\alpha^p = 1$, ce qui achèvera la démonstration.

Pour cela utilisons le fait que ω_1 et ω_2 sont dans $\mathscr{E}_p$: elles ont la même forme normale $\omega_{p,\lambda}$ et il existe donc deux éléments Ψ_1 et $\Psi_2 \in \hat{G}^0$ tels que

$$\omega_i \wedge \Psi_i^*(\omega_{p,\lambda}) = 0.$$

Il en résulte que la transformation $\Psi_2 \circ \Phi \circ \Psi_1^{-1} \in \hat{H}$ laisse *invariante* l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$. Mais cette transformation a pour première composante $h(x)$. On en déduit, par un calcul simple relatif à $\omega_{p,\lambda}$ que le difféomorphisme $\Psi_2 \circ \Phi \circ \Psi_1^{-1}$ est de la forme

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y) \quad \text{où } \alpha^p = 1 \text{ et } \beta \in \mathbf{C}^*. \quad \blacksquare$$

Remarque **(5.2)**. — Pour décrire l'espace des orbites de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ dans E_p nous sommes finalement ramenés aux problèmes suivants :

1) Décrire l'espace des orbites du groupe G^0 dans $\mathscr{E}_p$.

2) Étudier l'action du groupe G/G^0 sur cet espace d'orbites; le groupe G/G^0 est isomorphe au groupe des transformations linéaires $(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y)$ où $\alpha^p = 1$ et $\beta \neq 0$.

Pour résoudre le problème 1, l'outil essentiel sera l'*isotropie sectorielle* des formes normales $\omega_{p,\lambda} = 0$, que nous étudierons au paragraphe suivant.

Il nous reste à présenter une observation utile pour la suite, relative aux familles *analytiques* d'éléments de $\mathscr{E}_p$.

Soit S une variété analytique complexe, et ω_1, ω_2 deux familles analytiques d'éléments de $\mathscr{E}_p$ paramétrées par S; elles se définissent comme dans la remarque (3.2), mais le *groupe de structure* des fibrés considérés sur S sera cette fois G^0.

Supposons que, pour tout $s \in S$, les équations $\omega_{1,s}$ et $\omega_{2,s} \in \mathscr{E}_p$ soient G^0-isomorphes. Nous affirmons qu'alors les familles ω_1 et ω_2 sont analytiquement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles se correspondent par un difféomorphisme φ analytique entre les deux fibrés, relevant l'identité de S.

Pour le voir, il suffit de remarquer que :

a) pour chaque $s \in S$, il y a un $\varphi_s \in G^0$ *unique* tel que

$$\omega_{1,s} \wedge \varphi_s^*(\omega_{2,s}) = 0;$$

b) on a donc formellement $\varphi_s = \varphi_{2,s} \circ \varphi_{1,s}^{-1}$ où $\varphi_{i,s}$ est *l'unique* difféomorphisme *formel* (dans $\hat{G}^0$) normalisant ω_i.

Or, il est clair que la forme normale $\omega_{p,\lambda(s)}$ dépend analytiquement de s; nous avons vu d'autre part (remarque (4.2) *c)*) que $\varphi_{i,s}$ dépend analytiquement de s.

Ainsi, la série définissant φ_s est convergente en (x, y) et ses coefficients dépendent analytiquement de s; ceci prouve que l'application de fibrés définie par la famille φ_s est analytique.

6. ISOTROPIE SECTORIELLE DES FORMES NORMALES

On se propose de déterminer le sous-faisceau du faisceau Λ défini en I.1.2 (avec ici $n = 1$) formé des transformations *isotropes* de la forme normale $\omega_{p,\lambda} = 0$.

Plus précisément, étant donné un secteur ouvert U de sommet 0 dans le plan des x, on cherche les $g \in \Lambda(U)$ tels que la transformation $g : (x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ laisse l'équation $\omega = \omega_{p,\lambda} = 0$ invariante, *i.e.* $\omega \wedge g^*\omega = 0$.

La fonction g peut être cherchée sous la forme d'une série en y :

$$g(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} g_n(x) y^n.$$

Cette série doit être convergente sur un disque *fixe* pour $x \in U$ (assez petit); les fonctions g_n doivent être holomorphes dans U; enfin g doit être asymptote à y quand $x \to 0$ dans U.

La condition $\omega \wedge g^*\omega = 0$ équivaut à

$$x^{p+1}\frac{\partial g}{\partial x} + (1 + \lambda x^p) y \frac{\partial g}{\partial y} = (1 + \lambda x^p) g.$$

Ceci donne, par identification des séries en y,

$$x^{p+1} g_n' = (1 - n)(1 + \lambda x^p) g_n$$

donc $$g_n(x) = a_n [\exp(-1/px^p) . x^\lambda]^{(1-n)} \quad a_n \in \mathbf{C}.$$

En désignant par $\Lambda_{p,\lambda} \subset \Lambda$ le sous-faisceau des transformations isotropes, le calcul précédent démontre la

Proposition **(6.1).** — *Le groupe* $\Lambda_{p,\lambda}(U)$ *est défini de la façon suivante* :

(i) *Si* U *est contenu dans l'un des secteurs où* $\mathrm{Re}(x^p) > 0$, $g \in \Lambda_{p,\lambda}(U)$ *équivaut à*

$$g(x, y) = y + a_0 x^\lambda . \exp(-1/px^p)$$

où $a_0 \in \mathbf{C}$ *est arbitraire.*

(ii) *Si* U *est contenu dans l'un des secteurs où* $\mathrm{Re}(x^p) < 0$, $g \in \Lambda_{p,\lambda}(U)$ *équivaut à*

$$g(x, y) = y + \sum_{n \geqslant 2} a_n [x^\lambda . \exp(1/px^p)]^{n-1} . y^n$$

où la série $\sum_{n \geqslant 2} a_n t^n$ *est à rayon de convergence non nul.*

(iii) *Si* U *contient un rayon où* $\mathrm{Re}(x^p) = 0$, *alors* $\Lambda_{p,\lambda}(U)$ *est réduit à l'identité.*

Dans cet énoncé, on désigne par x^λ une détermination quelconque de la fonction $\exp(\lambda \operatorname{Log} x)$ sur le secteur U considéré.

Remarque **(6.2).** — On obtient le même résultat en supposant seulement que g est asymptote à l'identité en $0 \in \mathbf{C}^2$ au sens faible de Gérard-Sibuya (voir I.6); ceci jouera un rôle important dans la suite.

La proposition précédente montre en particulier que le faisceau $\Lambda_{p,\lambda}$ est *constant* sur les secteurs connexes définis par $\mathrm{Re}(x^p) > 0$ et $\mathrm{Re}(x^p) < 0$. Sa fibre aux points $\mathrm{Re}(x^p) = 0$ est réduite à l'identité.

Soit alors $\mathfrak{U}$ le bon recouvrement de S^1 formé des secteurs U_i $(i = 0, \ldots, 2p-1)$ d'ouverture $2\pi/p$, ayant pour bissectrices les directions α_i d'angles polaires $\dfrac{(2i+1)}{2p}.\pi$. On a clairement

$$H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) \simeq H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda}).$$

De plus, la description précédente montre que $C^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda})$ ne contient aucun cobord autre que le cobord trivial; toute cochaîne est évidemment un cocycle (les intersections trois à trois étant vides); ainsi

$$H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda}) \simeq C^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda})$$

et cet espace est donc muni d'une structure naturelle de *groupe*.

Remarquons enfin que les germes de sections de $\Lambda_{p,\lambda}$ sont Gevrey d'ordre s où $s = 1 + 1/p$ (voir I.4.1), au vu de leur décroissance exponentielle. La définition du recouvrement $\mathfrak{U}$ précédent montre aussi que les 1-cocycles à valeurs dans $\Lambda_{p,\lambda}$ sont p-sommables (voir I.5.1.2).

Nous avons ainsi établi le

Théorème **(6.3).** — *Soit* $\mathfrak{U}$ *le bon recouvrement de* S^1 *formé des secteurs* U_i $(i = 0, \ldots, 2p-1)$ *d'ouverture* $2\pi/p$, *dont les bissectrices ont pour angles polaires* $[(2i-1)/2p]\pi$. *On a*

$$H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) \simeq C^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda}).$$

Les éléments de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ *sont p-sommables.*

Remarque **(6.4).** — On peut décrire de manière analogue le faisceau d'algèbres de Lie $\mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})$ (voir I.3) dont les éléments sont les champs de vecteurs $X \in \mathscr{L}(\Lambda)$ qui laissent invariante l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$; ceci signifie que $\omega_{p,\lambda} \wedge \Theta_X \omega_{p,\lambda} = 0$, où Θ_X représente la dérivée de Lie par rapport au champ X.

Le faisceau $\mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})$ est localement constant sur les ouverts $U_i \cap U_{i+1}$, et l'on a aussi

$$H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})) \simeq C^1(\mathfrak{U}; \mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})).$$

(6.5) Une interprétation géométrique des éléments du faisceau $\Lambda_{p,\lambda}$

Considérons le recouvrement du plan des x par les secteurs U_i du bon recouvrement défini dans le théorème (6.3). Désignons par $\mathscr{F}_i$ le feuilletage induit par l'équation différentielle $\omega_{p,\lambda} = 0$ sur $U_i \times \mathbf{C}$. Les feuilles de $\mathscr{F}_i$ sont définies par les équations

$$y = c.x^\lambda.\exp(-1/px^p) \quad \text{où } c \in \mathbf{C}$$

(on a fait choix d'une détermination de x^λ sur U_i).

L'espace des feuilles de $\mathscr{F}_i$ s'identifie donc à la droite complexe **C**. L'origine de **C** ($c = 0$) correspond à la feuille $\{y = 0\}$, qui est la *variété centrale* de l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$; c'est la seule feuille « régulière » en 0; les autres présentent une singularité essentielle à l'origine.

Définissons maintenant les secteurs V_i^+ et V_i^- ($i = 0, \ldots, 2p-1$) par

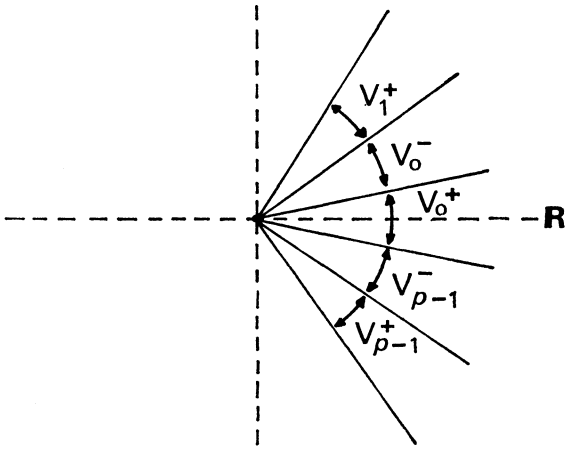
$$V_i^+ = \left\{ \frac{4i-1}{2p}\pi < \operatorname{Arg} x < \frac{4i+1}{2p}\pi \right\},$$

$$V_i^- = \left\{ \frac{4i+1}{2p}\pi < \operatorname{Arg} x < \frac{4i+3}{2p}\pi \right\}.$$

Ce sont des secteurs d'ouverture π/p tels que

$\operatorname{Re}(x^p) > 0$ sur les V_i^+,

$\operatorname{Re}(x^p) < 0$ sur les V_i^-.



On a alors $V_i^+ = U_{2i} \cap U_{2i+1}$ et $V_i^- = U_{2i+1} \cap U_{2i+2}$ (sauf pour $p = 1$, où $U_0 \cap U_1 = V_0^+ \cup V_0^-$).

Désignons par $\mathscr{F}_i^+$ (resp. $\mathscr{F}_i^-$) le feuilletage induit par l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$ sur $V_i^+ \times \mathbf{C}$ (resp. $V_i^- \times \mathbf{C}$). Remarquons que les feuilles de $\mathscr{F}_i^+$ sont tangentes d'ordre infini à la variété centrale $y = 0$; elles rencontrent donc *toutes* un voisinage arbitraire de $0 \in \mathbf{C}^2$. Par contre, les feuilles de $\mathscr{F}_i^-$ ne contiennent pas l'origine dans leur adhérence (sauf $y = 0$); celles qui rencontrent un voisinage donné de $0 \in \mathbf{C}^2$ représentent seulement un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ (espace des feuilles).

Soit maintenant $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$, représenté par un élément de $C^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda})$. On pose $g_i^+ = g_{2i,2i+1}$ et $g_i^- = g_{2i+1,2i+2}$ pour $i = 0, \ldots, p-1$. Pour chaque i, g_i^+ (resp. g_i^-) induit une *permutation* d'une partie de l'espace des feuilles de $\mathscr{F}_i^+$ (resp. $\mathscr{F}_i^-$), donc de **C**.

Reprenant alors les notations de la proposition (6.1) on voit que

g_i^+ s'identifie à une *translation* $c \mapsto c + a_0$ de $\mathbf{C}$;

g_i^- s'identifie à un *difféomorphisme local de* $\mathbf{C}$ *en* 0, *tangent d'ordre un à l'identité* :

$$c \mapsto c + \sum_{n \geqslant 2} a_n c^n.$$

Avec ces identifications, on peut énoncer la

Proposition **(6.6).** — *L'espace* $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ *s'identifie au produit direct* $\mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ *de p exemplaires de* $\mathbf{C}$ *(groupe additif) et de p exemplaires de* $\mathscr{H}$, *groupe des difféomorphismes locaux de* $(\mathbf{C}, 0)$ *tangents d'ordre un à l'identité.*

Remarque **(6.7).** — Le faisceau $\Lambda_{p,\lambda}$ est de nature différente sur les secteurs V^+ et V^-. On peut définir un faisceau plus « homogène », et qui nous permettra une observation intéressante au chapitre V, de la façon suivante :

Fixons une *couronne* $C = \{0 < r \leqslant ||y|| \leqslant R\}$ sur la droite $\mathbf{C}_y$. Désignons par $\Lambda_{p,\lambda}(C)$ le sous-faisceau de $\Lambda(C)$ (voir I.2.3.4) dont les germes de sections préservent l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$. On vérifie aisément que $\Lambda_{p,\lambda}(C)$ est encore localement constant sur les secteurs V^+ et V^-, *indépendant de* C, et que

$$H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}(C)) = \mathscr{H}^{2p}.$$

Nous désignerons par $\Lambda'_{p,\lambda}$ le faisceau ainsi obtenu ($r \to 0$ et $R \to \infty$). Sa structure s'explique très bien en remarquant que la forme normale $\omega_{p,\lambda}$ définit en fait un feuilletage holomorphe sur $\mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$; l'expression de l'équation dans la carte $(x, Y = 1/y)$ est

$$x^{p+1}\,dY + Y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0.$$

Elle admet donc en ($x = 0$, $Y = 0$ ou $y = \infty$) un point singulier de même nature qu'en ($x = 0$, $y = 0$). L'espace $\mathscr{F}_i$ des feuilles sur $U_i \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ s'identifie à la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Les sections de $\Lambda'_{p,\lambda}$ sur les secteurs V_i^- s'identifient à celles de $\Lambda_{p,\lambda}$, et aux difféomorphismes locaux de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en 0; les sections de $\Lambda'_{p,\lambda}$ sur les secteurs V_i^+ s'identifient aux difféomorphismes locaux de l'espace des feuilles $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en l'infini.

III. — LE THÉORÈME DE CLASSIFICATION PREMIÈRES CONSÉQUENCES

1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent (II.5), le problème de classification des équations $\omega \in E_p$ sous l'action de Diff($\mathbf{C}^2$, 0) passe par l'étude de l'espace des orbites du groupe G^0 agissant (simplement) dans l'espace $\mathscr{E}_p$.

Théorème (1). — *L'espace des orbites de* G^0 *dans* $\mathscr{E}_p$ *est en bijection canonique avec* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$.

L'espace « modulaire » $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ doit être interprété de la façon suivante : le premier facteur repère l'invariant formel λ; le facteur $\mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ est à identifier, pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$, à $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ au sens de la proposition II.6.6.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration de ce résultat.

2. L'INJECTION CANONIQUE DE $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ DANS $\mathscr{E}_p/G^0$

Nous fixons ici λ, et considérons la forme normale

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0.$$

D'après les résultats de I.3.3 on a une injection naturelle

$$H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) \hookrightarrow H^1(S^1; \Lambda)$$

et l'isomorphisme canonique $H^1(S^1; \Lambda) \simeq \hat{G}^0/G^0$.

Désignons par $\hat{G}^0_{p,\lambda} \subset \hat{G}^0$ l'ensemble des éléments de $\hat{G}^0$ dont l'image dans $H^1(S^1; \Lambda)$ est un élément de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$.

Proposition (2.1). — *Soit* $\varphi \in \hat{G}^0_{p,\lambda}$; *la forme différentielle* ω (a priori *formelle*) *définie par l'équation*

$$(\partial\varphi/\partial Y).\omega = \varphi^*\omega_{p,\lambda}$$

est analytique et appartient à $\mathscr{E}_p$.

Démonstration. — Soit $g = (g_{i,i+1})$ l'élément de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ « cobord » de φ, représenté par un cocycle relatif au bon recouvrement $\mathfrak{U}$ de II.6.3. Considérons le

germe de variété fibrée $\pi : M_g \to (\mathbf{C}, 0)$ construit en I.2. Pour un choix convenable de coordonnées locales analytiques (x, Y) sur M_g, on a :

1) Sur $U_i \times \mathbf{C}$, $y = \varphi_i(x, Y)$ où $\varphi_i \in \Gamma(U_i; \Lambda^0)$.

2) Sur $U_{i,i+1} = U_i \cap U_{i+1}$, $g_{i,i+1} = \varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}$.

3) Les φ_i admettent φ comme développement asymptotique commun en 0 (voir I.2.3).

Sur $\pi^{-1}(U_i) \subset M_g$ définissons une forme holomorphe ω_i par l'égalité

$$(\partial\varphi_i/\partial Y) \cdot \omega_i = \varphi_i^* \omega_{p,\lambda} = x^{p+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y} dY - \left[\varphi_i(1 + \lambda x^p) - x^{p+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right] dx.$$

La forme ω_i s'écrit donc

$$\omega_i = x^{p+1} dY - h_i(x, Y)\, dx$$

et est asymptote à la forme ω définie dans la proposition.

Sur $\pi^{-1}(U_{i,i+1})$ on a $\omega_i = \omega_{i+1}$; en effet, ω_i et ω_{i+1} sont *proportionnelles par construction*, puisque $g_{i,i+1} = \varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}$ *préserve* l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$; les coefficients de dY étant identiques, les formes sont égales. Il en résulte que ω est holomorphe. Elle est formellement isomorphe à $\omega_{p,\lambda}$ via $\hat{G}^0$, donc appartient à $\mathscr{E}_p$ par définition. ■

Nous avons ainsi défini une application canonique de $\hat{G}^0_{p,\lambda}$ dans $\mathscr{E}_p$, pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$. Cette application est *injective* (en effet l'action de $\hat{G}^0$ dans $\hat{\mathscr{E}}_p$ est *simple*); elle commute aux actions de G^0 dans $\hat{G}^0_{p,\lambda}$ et $\mathscr{E}_p$; il est en effet clair que, si à $\varphi \in \hat{G}^0_{p,\lambda}$ correspond $\omega \in \mathscr{E}_p$ et à $\varphi \circ \psi$ $(\psi \in G^0)$ correspond la forme $\omega' \in \mathscr{E}_p$, le difféomorphisme ψ transforme l'équation $\omega = 0$ en l'équation $\omega' = 0$.

Il en résulte que l'application précédente induit une injection de $\hat{G}^0_{p,\lambda}/G^0$ dans $\mathscr{E}_p/G^0$. D'où la

Proposition (2.2). — *Soit* $\hat{G}^0_p = \bigcup_\lambda \hat{G}^0_{p,\lambda} \subset \hat{G}^0$. *L'application de* $\hat{G}^0_p$ *dans* $\mathscr{E}_p$ *définie dans l'énoncé précédent induit une injection de* $\hat{G}^0_p/G^0 \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ *dans l'espace des orbites* $\mathscr{E}_p/G^0$.

Remarque. — Les sous-ensembles $\hat{G}^0_{p,\lambda} \subset \hat{G}^0$ *ne sont pas des groupes*, bien que $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ soit lui-même un groupe.

3. SURJECTIVITÉ

Soit $\omega \in \mathscr{E}_p$. Il existe un unique $\varphi \in \hat{G}^0$ tel que $\omega \wedge \varphi^* \omega_{p,\lambda} = 0$, où λ est l'invariant formel de ω (voir II.5); il s'agit de montrer que $\varphi \in \hat{G}^0_{p,\lambda}$.

Nous utiliserons pour cela un résultat de Hukuhara-Kimura-Matuda [34] : avec les données précédentes, pour tout secteur U de $\mathbf{C}$, d'ouverture assez petite (en fait,

dans la référence citée, les auteurs obtiennent l'ouverture optimale $\frac{2\pi}{p}\Big)$ il existe une transformation *holomorphe bornée*

$$\varphi_U : U \times \Omega \to U \times \mathbf{C}$$

$$(x, y) \mapsto (x, \varphi_U(x, y))$$

où Ω est un voisinage de o dans $\mathbf{C}$, telle que

(i) $\omega \wedge \varphi_U^* \omega_{p,\lambda} = 0$,

(ii) à l'origine de $\mathbf{C}^2$, φ_U est asymptote (au sens de Gérard-Sibuya) à φ (voir I.6).

Considérons une famille φ_i de telles transformations, associées à un bon recouvrement $\{U_i\}$ du cercle S^1. Les transformations $\varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}$ sont alors *isotropes* pour $\omega_{p,\lambda}$ sur $U_{i,i+1}$ et plates en $0 \in \mathbf{C}^2$ au sens de Gérard-Sibuya. Il en résulte (voir remarque II.6.2) qu'elles appartiennent au faisceau $\Lambda_{p,\lambda}$, et définissent donc un élément $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$; la proposition I.6.2 montre alors que $\varphi \in \hat{G}^0_{p,\lambda}$.

4. SOMMABILITÉ DES TRANSFORMATIONS NORMALISANTES

Théorème (4.1). — *Soit* $\omega \in \mathscr{E}_p$, *et* $\varphi \in \hat{G}^0$ *l'unique transformation normalisant* ω (*c'est-à-dire* $\omega \wedge \varphi^* \omega_{p,\lambda} = 0$). *Alors* :

(i) φ *est p-sommable* : $\varphi \in G^0_s$ $(s = 1 + 1/p)$.

(ii) *Soit* $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ *la classe associée à* ω. *Les rayons singuliers de* φ *sont les bissectrices des secteurs* $U_{i,i+1}$ *tels que* $g_{i,i+1}$ *n'est pas réduit à l'identité.*

Tout ceci est conséquence immédiate du théorème II.6.1.2, du théorème 1 précédent, et des résultats de I.5, en remarquant que la représentation canonique $(g_{i,i+1})$ des éléments de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ se fait par des cocycles *réduits*. ■

Remarque (4.2). — Le résultat précédent s'étend en fait à la normalisation des équations analytiques

$$\omega = x^{p+1}\,dy - A(x, y)\,dx = 0 \quad \text{où} \quad A(0, y) = \alpha y, \quad \alpha \in \mathbf{C}^* \tag{1}$$

Nous avons vu que ces équations $(\omega \in E'_p)$ sont réductibles par une unique transformation $\varphi \in \hat{G}^0$ (proposition II.4.1) à la forme

$$x^{p+1}\,dy - yP(x)\,dx = 0,$$

où P est un polynôme de degré $\leqslant p$.

Mais d'autre part (proposition II.4.2) toute équation (1) se ramène à un élément de $\mathscr{E}_p$ par un changement de variable $x \mapsto h(x)$, où h est un polynôme de degré $\leqslant p$. Il en résulte aisément que φ est encore *p-sommable*. Pour identifier ses rayons singuliers, il suffit d'appliquer une rotation (définie par la partie linéaire de h) aux rayons singuliers donnés par le théorème précédent.

Corollaire **(4.3).** — *Soit* $\omega = x^{p+1}dy - A(x,y)\,dx = 0$ *un élément de* $\mathscr{E}_p$. *Soit* $y = \hat{u}(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ *l'unique solution formelle de cette équation; alors :*

(i) $\hat{u}$ *est p-sommable.*

(ii) *Soit* $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) = \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ *le* 1*-cocycle associé à* ω. *Les rayons singuliers de* $\hat{u}$ *sont les bissectrices des secteurs* $U_{i,i+1}$ *correspondant aux composantes non nulles de* g *dans* $\mathbf{C}^p$.

Démonstration. — Soit φ la transformation normalisant ω ($\omega \wedge \varphi^* \omega_{p,\lambda} = 0$). Il est clair que $\hat{u}$ est définie par l'équation implicite $\varphi(x,y) = 0$ ($\partial\varphi/\partial y(0) = 1$). La p-sommabilité de φ implique celle de $\hat{u}$.

La partie (ii) est évidente : lorsque g est représenté par un 1-cocycle réduit $(g_{i,i+1})$, nous avons vu que $g_{i,i+1}$ s'interprète alternativement comme une translation de $\mathbf{C}$ ($g_{i,i+1} \in \mathbf{C}$) et comme un difféomorphisme local quelconque de $\mathbf{C}$ en 0 ($g_{i,i+1} \in \mathscr{H}$); $\mathbf{C}$ représente toujours l'espace des feuilles de la forme normale sur $U_{i,i+1}$, et $0 \in \mathbf{C}$ correspond à la solution holomorphe $y = 0$ de cette équation. Les $g_{i,i+1} \in \mathscr{H}$ n'affectent pas la feuille $\{y = 0\}$, d'où le résultat. ■

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

Théorème **(4.4).** — *Soit* $\omega \in \mathscr{E}_p$ *et* $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) = \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ *le* 1*-cocycle correspondant à* ω. *Alors l'équation* $\omega = 0$ *admet une solution analytique* $y = u(x)$, $u(0) = 0$, *si et seulement si la composante de* g *dans* $\mathbf{C}^p$ *est nulle.*

On peut donc dire, de façon un peu vague, que dans $\mathscr{E}_p$ l'ensemble des équations admettant une solution holomorphe en 0 autre que la variété invariante (c'est-à-dire une « variété centrale » dans la terminologie des spécialistes des systèmes dynamiques) est de *codimension p.*

Ce dernier théorème généralise des résultats obtenus dans le cas des équations linéaires $(x^{p+1}dy - (a(x)y + b(x))\,dx = 0)$ successivement par Briot et Bouquet [9] qui ont étudié le cas $p = 1$, $\lambda = 0$; puis Horn [32] pour le cas linéaire général; Rambaud [55] a amélioré les calculs de Horn.

Dans le cas non linéaire, Borel [6] avait tenté, sans succès, de prouver la sommabilité de $\hat{u}$ quand $p = 1$; il avait pu établir l'appartenance de $\hat{u}$ à la classe de Gevrey d'ordre 2 quand la forme ω est polynomiale en y.

Mentionnons encore des travaux de Horn [32], Bendixon [2] et Chazy [14] dont les résultats, très partiels, sont conséquence immédiate des théorèmes précédents.

(4.5) *Remarque générale.* — Nous avons ici déduit les résultats relatifs à la sommabilité de la connaissance *a priori* de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$, et du théorème de normalisation sectorielle « faible » de Hukuhara (§ 3 ci-dessus). Nous avons ainsi obtenu un théorème d'analyse fine en combinant un résultat d'analyse élémentaire avec un outil géométrique puissant. Il peut être rassurant pour le lecteur analyste de voir qu'on sait prouver *directement* la sommabilité des transformations normalisant les éléments de $\mathscr{E}_p$, sans trop de difficultés (au moins dans certains cas). C'est ce que nous ferons au chapitre IV.

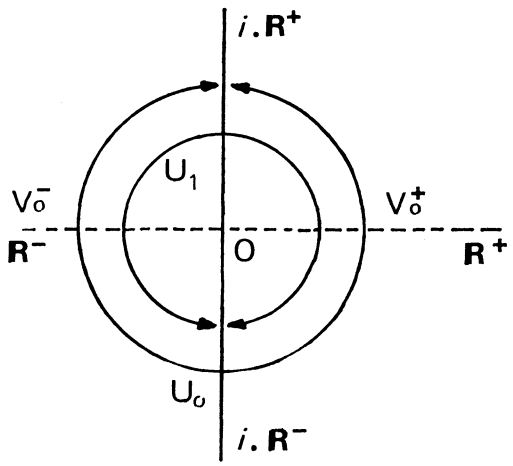
5. ÉTUDE DÉTAILLÉE D'UN EXEMPLE

Dans ce paragraphe, notre but est de calculer explicitement, pour une classe simple d'équations $\omega \in \mathscr{E}_1$, les applications

$$\omega \mapsto \varphi \text{ (transformation normalisante)} \mapsto g \in H^1(S^1; \Lambda_{1,\lambda}).$$

Remarquons d'abord qu'une forme $\omega = x^2 dy - A(x,y)dx$ appartient à $\mathscr{E}_1$ si et seulement si $A(0,y) = y$.

Le recouvrement canonique de S^1 est constitué dans ce cas par les deux secteurs U_0 et U_1 d'ouverture 2π représentés ci-dessous. La transformation formelle $\varphi \in \hat{G}^0$ telle que $\omega \wedge \varphi^* \omega_{1,\lambda} = 0$ admet une *somme unique* φ_0 (resp. φ_1) Gevrey d'ordre 2 sur tout secteur d'ouverture $\geqslant \pi$, strictement contenu dans U_0 (resp. U_1); les transformations φ_0 et φ_1 normalisent ω sur U_0 et U_1. Le cocycle $g \in H^1(S^1; \Lambda_{1,\lambda})$ associé à ω est défini sur $U_{0,1} = V_0^+ \cup V_0^-$ par $g_{0,1} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}$.



Ceci rappelé, considérons dans le faisceau $\Lambda_{1,\lambda}$ le sous-faisceau dont les sections sont à valeurs dans le sous-groupe des transformations *affines* de $\mathbf{C}$; cela signifie que nous sélectionnons, parmi les transformations sectorielles isotropes de

$$\omega_{1,\lambda} = x^2 dy - y(1 + \lambda x)dx = 0,$$

celles qui sont *affines* en la coordonnée « verticale » y. Nous désignerons par Λ_{aff} ce sous-faisceau, en abandonnant les indices 1 et λ qui seront fixés dans le reste de ce paragraphe.

Il est clair que

$$H^1(S^1; \Lambda_{\text{aff}}) \simeq \mathbf{C}.$$

Chaque classe est canoniquement représentée par un 1-cocycle $g_{0,1} = \{g_0^+, g_0^-\}$ (voir II.6.5) où g_0^-, définie sur $V_0^- = \{\text{Re } x < 0\}$, est *l'identité*, et g_0^+, définie sur $V_0^+ = \{\text{Re } x > 0\}$, est une *translation.*

Par l'isomorphisme fondamental, $H^1(S^1; \Lambda_{aff})$ s'identifie à une partie de $\hat{G}^0_{aff}/G^0_{aff}$ (cf. I.7), où $\hat{G}^0_{aff}$ (resp. G^0_{aff}) est constitué des transformations affines formelles (resp. analytiques) en x

$$\varphi(x, y) = \hat{a}(x)y + \hat{b}(x), \quad \hat{a}(0) = 1, \quad \hat{b}(0) = 0.$$

Noter qu'il s'agit ici de la théorie « globale » : on travaille sur $(\mathbf{C}_x, 0) \times \mathbf{C}_y$.

Les équations différentielles fournies par les cocycles précédents sont donc des éléments de $\mathscr{E}_1$ *linéaires* en y, c'est-à-dire de la forme

$$x^2 dy - [f(x)y + g(x)]dx = 0.$$

Réciproquement, toute équation linéaire en y, appartenant à $\mathscr{E}_1$, est réductible via un élément de $\hat{G}^0_{aff}$ à $\omega_{1,\lambda}$ et correspond donc à une classe de $H^1(S^1; \Lambda_{aff})$ (par spécialisation du théorème 1 de ce chapitre). Ceci signifie, en résumé :

L'espace des orbites de G^0_{aff} *opérant sur l'espace des équations linéaires* $\mathscr{E}_{1,aff}$ *est en bijection canonique avec* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ (le premier facteur correspond à l'invariant formel λ, le second à l'invariant analytique $g \in H^1(S^1; \Lambda_{aff}) = \mathbf{C}$).

Nous nous proposons de montrer comment on obtient l'invariant analytique d'une équation linéaire donnée. Nous allons présenter ce calcul sur le cas particulier des équations

$$\omega = x^2 dy - [y(1 + \lambda x) + f(x)]dx = 0$$

où f est un germe de fonction analytique nul en 0 (la considération du cas le plus général n'ajoute pas de difficulté importante).

L'équation considérée se normalise par la transformation $\varphi(x, y) = y - \hat{u}(x)$ (voir II.4.1) où $\hat{u}(x)$ est l'unique solution (formelle) de l'équation différentielle

$$x^2 . \frac{d\hat{u}}{dx} - (1 + \lambda x)\hat{u} = f(x). \tag{1}$$

L'intégration de (1) par la méthode de « variation de la constante » conduit à considérer la fonction

$$u(x) = x^\lambda \exp(-1/x) . \int_0^x t^{-2-\lambda} f(t) \exp(1/t) dt.$$

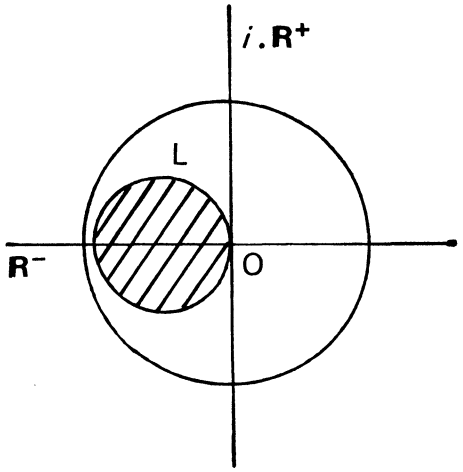
L'intégration se fait sur le segment $[0, x]$; cette expression a un sens et définit une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(x) < 0$ et x appartenant au disque de convergence de f à l'origine. En faisant le changement de variable $(1/t) - (1/x) = -\xi/x$, on obtient

$$u(x) = -\int_0^{-\infty} (1 - \xi)^\lambda f(x/(1 - \xi)) \exp(-\xi/x) \frac{d\xi}{x} \tag{2}$$

qui définit une fonction holomorphe de x sur le même domaine.

Soit L un disque ouvert centré en un point de $\mathbf{R}^-$, $\bar{L}$ étant contenu dans $\{\mathrm{Re}(x) < 0\} \cap \{\text{disque de convergence de } f \text{ en } 0\}$, avec $0 \in \partial L$. La fonction u admet,

uniformément sur $\bar{L}$, comme développement asymptotique en o la solution formelle $\hat{u}$ de (1); ainsi u définit un élément de $\Gamma(]\pi/2, 3\pi/2[; \Lambda^0)$, qui est en fait dans $\Gamma(]\pi/2, 3\pi/2[; \Lambda_2^0)$.

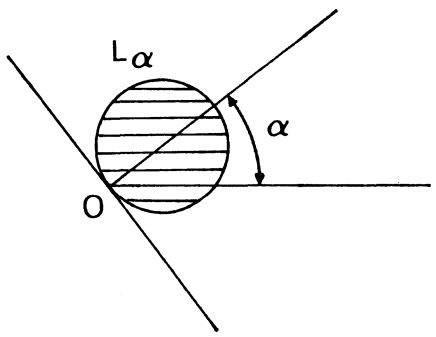


Soit maintenant D une demi-droite issue de o, avec $D \neq \mathbf{R}^+$ (on note $\alpha \in]0, 2\pi[$ l'angle de D avec $\mathbf{R}^+$). Posons :

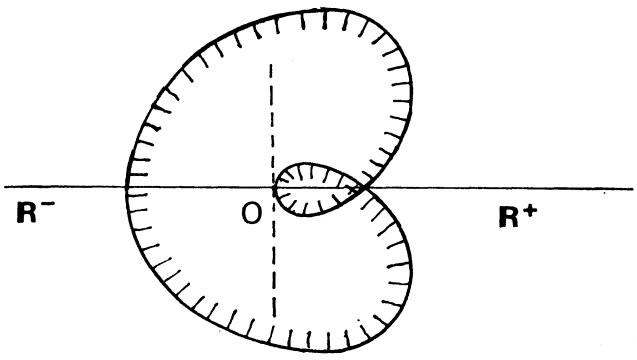
$$u_D(x) = -\int_D (1-\xi)^\lambda f(x/(1-\xi)) \exp(-\xi/x) \frac{d\xi}{x}$$

(la demi-droite D est orientée de o vers l'infini; on définit $(1-\xi)^\lambda$ en utilisant la détermination principale du logarithme).

La fonction u_D ainsi définie est holomorphe sur le domaine intersection du demi-plan $\mathrm{Re}(x.\exp -i\alpha) > 0$ et du transformé du disque de convergence de f en o par l'homothétie h_α (h_α = homothétie de centre o et de rapport égal à $|\sin\alpha|$ pour $\alpha \in]0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[$ et à 1 pour $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2]$). Soit L_α le transformé de L par la composée de la rotation de centre o, d'angle $\pi - \alpha$, avec l'homothétie h_α. La fonction u_D est uniformément asymptotique sur $\bar{L}_\alpha$ à la solution $\hat{u}$ de (1) : c'est la somme, dans la direction D, de la série 1-sommable $\hat{u}$.



Quand on fait tourner D à partir de $\mathbf{R}^-$ ($\alpha = \pi$), les fonctions u_D se recollent. On obtient ainsi une fonction holomorphe sur un domaine d' « ouverture » 3π de la surface de Riemann du Logarithme, uniformément asymptotique à $\hat{u}$ sur le domaine fermé $\bigcup_{\alpha \in]0, 2\pi[} \bar{L}_\alpha$ de celle-ci (donc sur tout germe de secteur $-\pi/2 + \varepsilon < \operatorname{Arg} x < \pi/2 + 2\pi - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$).



Les restrictions à U_0 et U_1 de la fonction que nous venons de définir sont les transformations normalisantes φ_0 et φ_1. Le cocycle correspondant $g_{0,1} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}$ s'obtient donc ici en faisant la *différence* des déterminations de u sur $U_{0,1}$.

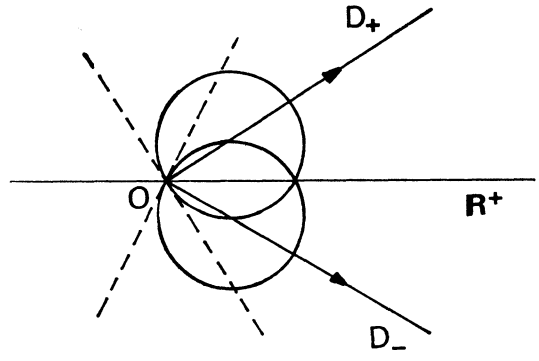
La fonction $\varphi_0 = y - u_0(x)$ est définie par les u_D, où le rayon D est dans le demi-plan $\operatorname{Im} x < 0$, et $\varphi_1 = y - u_1(x)$ par les u_D où D est dans le demi-plan $\operatorname{Im} x > 0$.

Ainsi $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} = y + u_1 - u_0$ est l'*identité* sur $\operatorname{Re} x < 0$. Pour calculer son expression sur $\operatorname{Re} x > 0$, il suffit de considérer

$$g^+(x) = u_{D_+}(x) - u_{D_-}(x),$$

où D_+ et D_- sont choisis comme indiqué sur la figure ci-dessous. Ainsi

$$g^+(x) = \int_{D_+ - D_-} (1 - \xi)^\lambda f(x/(1 - \xi)) \exp(-\xi/x) \frac{d\xi}{x}.$$



Pour achever le calcul, on pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. Ainsi

$$g^+(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n . \int_{D_+ - D_-} (1-\xi)^{\lambda - n} \exp(-\xi/x) \frac{d\xi}{x}.$$

Lemme (5.1). — *Soit* $\mathrm{I}(\alpha; x) = \int_{D_+ - D_-} (1-\xi)^{\alpha} \exp(-\xi/x) \frac{d\xi}{x}$. *On a*

$$\mathrm{I}(\alpha; x) = \frac{-2i\pi}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha} \exp(-1/x).$$

Avec ce résultat, il vient

$$g^+(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n . \frac{-2i\pi}{\Gamma(n-\lambda)} . x^{\lambda - n} \exp(-1/x)$$
$$= -2i\pi x^{\lambda} \exp(-1/x) . \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\Gamma(n-\lambda)}.$$

En utilisant les notations introduites en II.6.5 pour représenter les éléments de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^1; \Lambda_{1,\lambda}) = \mathbf{C} \times \mathscr{H}$, on obtient la

Proposition (5.2). — *Soit l'équation*

$$x^2 dy - [y(1+\lambda x) + f(x)]dx = 0, \quad \text{où} \quad f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$$

est un germe de fonction analytique. La classe associée à cette équation dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^1; \Lambda_{1,\lambda}) = \mathbf{C} \times \mathscr{H}$ *est le couple* (c, Id), *où*

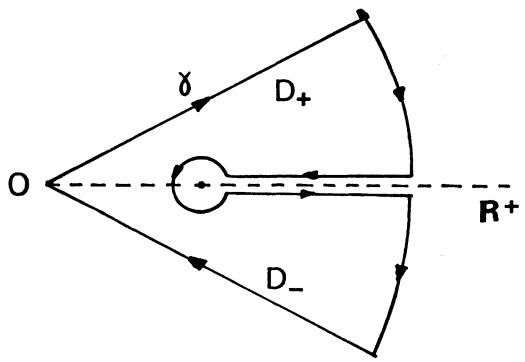
$$c = -2i\pi \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\Gamma(n-\lambda)}.$$

Démonstration du lemme (5.1). — Par intégration par parties, on obtient

(1) $$\mathrm{I}(\alpha; x) = \alpha \times \mathrm{I}(\alpha - 1; x).$$

On vérifie que $\mathrm{I}(\alpha; x)$ est analytique sur le produit de $\mathbf{C}$ et d'un secteur en x contenant $\mathbf{R}^+$. Il suffit donc de calculer $\mathrm{I}(\alpha; x)$ pour $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ et d'utiliser le prolongement analytique. On peut également faire le prolongement analytique en utilisant (1) ce qui fournit le résultat pour $\alpha \notin -\mathbf{N}^*$; si $\alpha \in -\mathbf{N}^*$ on fait un calcul direct par résidus.

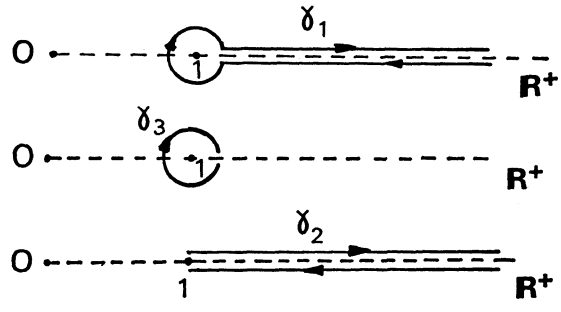
Supposons donc $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$.



On a $\int_\gamma (1-\xi)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x} = 0$ et, en passant à la limite,

$$I(\alpha; x) = \int_{\gamma_1} (1-\xi)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x}$$
$$= \int_{\gamma_3} (1-\xi)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x} + \int_{\gamma_2} (1-\xi)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x}.$$

L'intégrale sur γ_3 tend vers 0 quand le rayon de γ_3 tend vers 0, car $\operatorname{Re}\alpha > -1$.



Finalement

$$I(\alpha; x) = \int_{\gamma_2} (1-\xi)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x},$$

soit $$I(\alpha; x) = 2i \sin \pi\alpha . \int_1^{+\infty} (\xi-1)^\alpha \exp(-\xi/x)\frac{d\xi}{x},$$

d'où $$I(\alpha; x) = 2i \sin \pi\alpha . \exp(-1/x) . \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\frac{t}{x}} \frac{dt}{x} = 2i . e^{-\frac{1}{x}} \sin \pi\alpha . x^\alpha \Gamma(1+\alpha).$$

Cette expression n'est pas *a priori* définie pour $\alpha \in -\mathbf{N}^*$; on utilise la formule des compléments

$$\Gamma(1+\alpha).\Gamma(-\alpha) = -\pi/\sin \pi\alpha,$$

et l'on obtient

$$I(\alpha; x) = \frac{-2i\pi}{\Gamma(-\alpha)} e^{-\frac{1}{x}} x^\alpha,$$

expression qui garde un sens pour toutes les valeurs de α; ceci démontre le lemme. ■

Remarques **(5·3)**. — 1) Dans le cas $\lambda = 0$, l'étude que nous venons de faire est celle de la fameuse *équation d'Euler* $x^2 y' - y = f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. Le calcul de $c = -2i\pi \sum_{n\geqslant 1} a_n/(n-1)!$ se trouve déjà chez Briot-Bouquet [9]. Dans le cas général, un calcul analogue figure dans Rambaud [55].

2) Le calcul précédent est une démonstration directe du théorème de classification pour les équations linéaires. Il montre de plus que la famille

$$\omega_{\lambda\, a,} = x^2 dy - [y(1+\lambda x) + ax]dx = 0$$

est universelle pour l'ensemble $\mathscr{E}_{1,\lambda,\mathrm{aff}}$, *si* $\lambda \notin \mathbf{N}^*$. En effet, $\omega_{\lambda, a}$ a pour invariant formel λ et pour invariant analytique $c = -2i\pi a/\Gamma(1-\lambda)$, et tout élément de $\mathscr{E}_{1,\lambda,\mathrm{aff}}$ est donc G^0_{aff}-isomorphe à une et une seule des $\omega_{\lambda, a}$.

Si $\lambda = n \in \mathbf{N}^*$, on peut prendre comme famille universelle [1]

$$\omega_{\lambda, a} = x^2 dy - [y(1+\lambda x) + ax^{n+1}]dx = 0.$$

3) Nous avons calculé le cocycle associé à une équation donnée. Dans l'autre sens, étant donné $\xi \in H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda^0_{\mathrm{aff}}))$ (voir les notations de I.7), on obtient aisément un représentant de ξ dans $\mathscr{L}(\hat{G}^0_{\mathrm{aff}})$. Le champ ξ est de la forme

$$= c.e^{-\frac{1}{x}} x^{\lambda} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{où} \quad c \in \mathbf{C} \text{ et } \operatorname{Re} x > 0.$$

On obtient $\hat{X}$, représentant de ξ, par la transformation de Cauchy-Heine (I.3.2)

$$\hat{X} = \left(\frac{c}{2i\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{\lambda} \exp(-1/\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta\right).\frac{\partial}{\partial y},$$

à un élément de $\mathbf{C}\{x\}\dfrac{\partial}{\partial y}$ près; ceci donne

$$\hat{X} = \frac{c}{2i\pi}\Big(\sum_{n\geqslant 1} \Gamma(n-\lambda)x^n\Big).\frac{\partial}{\partial y}.$$

Par intégration des champs ξ et $\hat{X}$, on obtiendrait une application de $H^1(S^1; \Lambda_{\mathrm{aff}})$ dans $\hat{G}^0_{\mathrm{aff}}$, section de la projection canonique.

6. ESPACE DES ORBITES DE DIFF($\mathbf{C}^2$, 0) DANS E_p

Nous avons vu (II.5.2) que cet espace est en bijection canonique avec celui des orbites de G dans $\mathscr{E}_p$, où $G \supset G^0$ est obtenu en adjoignant à G^0 les transformations linéaires

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y), \qquad \alpha^p = 1, \ \beta \in \mathbf{C}^*.$$

Sachant que $\mathscr{E}_p/G^0 \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$, il nous reste à étudier l'action du groupe linéaire $G/G^0 = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \mathbf{C}^*$ sur l'espace modulaire précédent.

Soient donc $\omega, \omega' \in \mathscr{E}_p$ et $\Psi \in G$ tel que $\omega' \wedge \Psi^*\omega = 0$; soient $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}' \in \hat{G}^0$

[1] Nous remercions A. D. Brjuno d'avoir attiré notre attention sur ce point.

les transformations normalisant ω et ω' $(\omega \wedge \hat{\varphi}^*(\omega_{p,\lambda}) = \omega' \wedge \hat{\varphi}'^*(\omega_{p,\lambda}) = 0)$; on a trivialement

$$D\Psi \circ \hat{\varphi}' = \hat{\varphi} \circ \Psi$$

où $D\Psi$ désigne la partie linéaire de Ψ (élément du groupe linéaire défini ci-dessus).

Si $g_{i,i+1} = \hat{\varphi}_i \circ \hat{\varphi}_{i+1}^{-1}$ et $g'_{i,i+1} = \varphi'_i \cdot \hat{\varphi}'^{-1}_{i+1}$ sont les cocycles associés à $\hat{\varphi}$ et $\hat{\varphi}'$, on a

$$g_{i,i+1} = D\Psi \circ g'_{i,i+1} \circ (D\Psi)^{-1}.$$

Finalement, on obtient l'espace d'orbites cherché en faisant opérer le groupe linéaire considéré par conjugaison sur $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$.

Posons $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) = \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ avec $g = (g_i^+; g_i^-)$ $i = 0, \ldots, p-1$ (notations de II.6.5), les $g_i^+ \in \mathbf{C}$ et $g_i^- \in \mathscr{H}$ étant interprétés comme difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}$ (espace des feuilles des feuilletages $\mathscr{F}_i^+$ et $\mathscr{F}_i^-$).

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \mathbf{C}^*$ et $g \in \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$. On vérifie que le transformé g' de g par (α, β) a pour composantes

$$g'_i(c) = \beta e^{-\frac{2i\pi k}{p}\lambda} g_{i-k}\left(\frac{1}{\beta} \cdot e^{\frac{2i\pi k}{p}\lambda} \cdot c\right)$$

(on a posé $\alpha = \exp(2i\pi k/p)$).

D'où le

Théorème **(6.1).** — *L'espace des orbites de* $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ *dans* E_p *s'identifie au quotient de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ *par l'action de* $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \mathbf{C}^*$ *définie ainsi : l'image de* (λ, g) *par* (k, β) *est* (λ, g') *où* g'_i *est le conjugué de* g_{i-k} *par l'homothétie de rapport* $\beta \exp(-2ik\pi\lambda/p)$.

Exemple **(6.2).** — Dans le cas $p = 1$, où $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) = \mathbf{C} \times \mathscr{H}$, on doit former le quotient de $\mathbf{C} \times \mathscr{H}$ par $\mathbf{C}^*$ pour l'action $\beta.(t, h) = (\beta t, \beta h \beta^{-1})$. Le quotient se décompose en quatre « strates » :

1. $\{t = 0; h = \text{Identité}\}$ représente une orbite de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C} \times \mathscr{H}$, qui correspond aux $\omega \in E_p$ analytiquement isomorphes à la forme normale $\omega_{p,\lambda}$.

2. $\{t \neq 0; h = \text{Identité}\}$ représente *une* orbite également, donc un point de l'espace modulaire, qui correspond aux $\omega \in E_p$ analytiquement linéarisables (mais non normalisables).

3. $\{t = 0; h \neq \text{Identité}\}$ définit une famille « lisse » d'orbites (quotient de $\mathscr{H}$ sous l'action de $\mathbf{C}^*$), qui correspond aux équations $\omega \in E_p$ admettant une « variété centrale » (nous reviendrons sur ces équations au chapitre V).

4. $\{t \neq 0; h \neq \text{Identité}\}$ définit une famille lisse qu'on peut « paramétrer » par $\mathscr{H}$-{Identité} (on se ramène à $t = 1$ par exemple en utilisant l'action de $\mathbf{C}^*$). Cette strate représente les équations les « plus générales ».

On retiendra surtout que l'espace modulaire pour l'action de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ dans E_p n'est *pas lisse*, au contraire de ce qui se passe pour l'action de G^0 dans $\mathscr{E}_p$.

Remarque **(6.3).** — Le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \mathbf{C}^*$ est un groupe d'*invariance* pour chaque forme normale $\omega_{p,\lambda}$. Nous avons ici obtenu une action naturelle de ce groupe sur l'espace modulaire $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ relatif à l'action de G^0. On peut interpréter $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ comme la base d'une *famille universelle* d'éléments de $\mathscr{E}_p$, ou en d'autres termes d'un *déploiement universel* (dans $\mathscr{E}_p$) de l'équation $\omega_{p,0} = x^{p+1}\,dy - y\,dx = 0$ (cette terminologie sera précisée au chapitre VI). Avec cette formulation, le phénomène observé est à rapprocher de la remarque suivante, qui nous a été communiquée par R. Thom, à propos des applications différentiables : si F est le déploiement universel d'une application singulière f, et si G est un groupe de Lie qui laisse f invariante, alors l'action de G s'étend de manière naturelle au déploiement et à sa base, de manière que F soit G-invariante.

7. POINT DE VUE INFINITÉSIMAL

Nous utilisons ici les observations générales de I.3, en introduisant $H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda}))$, où $\mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})$ est le faisceau d'algèbres de Lie défini en II.6.1.3. On a évidemment $H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})) \approx \mathbf{C}^p \times (\mathscr{L}(\mathscr{H}))^p$ où $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, algèbre de Lie de $\mathscr{H}$, est l'espace des germes de champs de vecteurs à l'origine de $\mathbf{C}$, 1-plats en 0. D'après l'isomorphisme fondamental I.3.1, l'espace $H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda})) \subset H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda))$ *s'injecte canoniquement* dans $\mathscr{L}(\hat{G}^0)/\mathscr{L}(G^0)$, et cette injection est calculable par Cauchy-Heine (I.3.2.2). Elle représente la différentielle en l'identité de l'injection

$$H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) \hookrightarrow \hat{G}^0/G^0. \tag{1}$$

Noter que l'injection considérée n'est pas compatible avec les structures d'algèbre de Lie (d'ailleurs $\mathscr{L}(\hat{G}^0)/\mathscr{L}(G^0)$ n'est pas une algèbre de Lie, car $\mathscr{L}(G^0)$ n'est pas un idéal de $\mathscr{L}(\hat{G}^0)$).

D'après I.3.3 cette différentielle sera utilisable pour *calculer explicitement* l'injection (1) dans les cas suivants : on fait choix *a priori* d'un *sous-groupe abélien* K du groupe des difféomorphismes de l'espace des feuilles de $\omega_{p,\lambda} = 0$. On reprend ce qui précède avec les sous-faisceaux $\Lambda_{p,\lambda}(K)$ et $\mathscr{L}(\Lambda_{p,\lambda}(K))$; dans ce cas, les deux injections précédentes commutent aux exponentielles; le calcul de la trivialisation du cocycle « infinitésimal » permet d'obtenir la trivialisation de tout élément de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}(K))$. C'est essentiellement ce calcul que nous avons fait au § 5 ci-dessus, avec K = groupe des translations de $\mathbf{C}$, et le faisceau $\Lambda_{1,\lambda}(K)$.

Les seuls autres groupes de Lie abéliens (connexes) que l'on puisse considérer sont les sous-groupes à un paramètre $K \subset \mathscr{H}$. Un tel groupe est défini par la donnée d'un germe de champ de vecteurs holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}$

$$\eta(c) = f(c)\frac{\partial}{\partial c}, \quad \text{où} \quad f(c) = c^{k+1} + \ldots,\ k \geqslant 1.$$

Si nous travaillons avec $\Lambda_{1,0}(K)$, pour simplifier, le champ η définit un 1-cocycle $\tilde{\eta} = (0, \eta) \in \mathbf{C} \times \mathscr{L}(\mathscr{H}) = H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{1,0}))$; il s'interprète comme la section de $\mathscr{L}(\Lambda_{1,0})$ sur $\{\operatorname{Re} x < 0\}$ définie par le champ de vecteurs dans $\mathbf{C}^2$

$$\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = \exp(-1/x).f(y\exp(1/x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Le cocycle $\tilde{\eta}$ admet pour trivialisation dans $\mathscr{L}(\hat{G}^0)$ le champ formel $\hat{X}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ où (voir I.3.2.2)

$$X(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\xi(u,y)}{u-x}\,du \quad (\gamma = \text{segment d'origine 0 dans } \mathbf{R}^-).$$

Posons $\hat{\varphi}_t = \exp t\hat{X} \in \hat{G}^0$; les équations différentielles holomorphes $\varphi_t^* \omega_{1,0}$ admettent alors $\exp t\tilde{\eta}$ comme invariant dans $H^1(S^1; \Lambda_{1,0})$.

Un calcul explicite serait très lourd dans le cas général. Remarquons seulement qu'aux cocycles $\tilde{\eta} \in H^1(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_{1,0}))$, où

$$\eta(c) = c^{k+1}\frac{\partial}{\partial c} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \qquad (k \geqslant 1), \tag{1}$$

correspondent les équations différentielles dans $E_{1,0}$

$$\omega_k = x^2\,dy - y(1 + \alpha x y^k)\,dx = 0 \qquad (\alpha \in \mathbf{C}). \tag{2}$$

Ceci se voit en fait directement, par réduction au cas linéaire déjà étudié; si l'on pose dans (2) $Y = 1/y^k$ et $x = -kX$, l'équation différentielle se transforme en

$$X^2\,dY - (Y - \alpha k X)\,dX = 0,$$

à laquelle correspond (proposition (5.2)) la classe $(t, 0) \in \mathbf{C} \times \mathscr{H} = H^1(S^1; \Lambda_{1,0})$, avec $t = 2i\pi\alpha k$. En remontant à l'espace (x,y) initial, on vérifie que (2) a pour cocycle caractéristique $(0, \exp -2i\pi\alpha.\eta)$.

IV. — SOMMABILITÉ DES TRANSFORMATIONS NORMALISANTES

1. RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION DE BOREL [6]

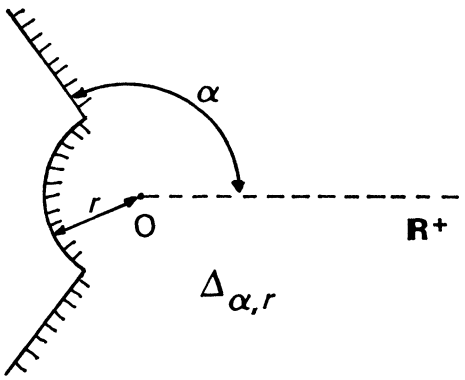
(1.1) Transformation de Borel

Soit $0 < \alpha < \pi$, et r, λ deux nombres strictement positifs. On désigne par $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda,r}$ l'espace vectoriel des séries formelles $a \in \mathbf{C}[[x]]$, $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ telles que :

(i) La série $A(t) = \mathscr{B}a(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ (transformée de Borel de a) a un rayon de convergence $\geqslant r$.

(ii) Elle définit une fonction continue sur l'ensemble fermé $\Delta_{\alpha,r}$ (union du disque de centre 0 et de rayon r, et du secteur d'ouverture 2α, de bissectrice $\mathbf{R}^+$) et holomorphe à l'intérieur.

(iii) $||a||_{\lambda,r} = \operatorname{Sup}_{t \in \Delta_{\alpha,r}} |\mathscr{B}a(t) . \exp(-\lambda|t|)| < +\infty$.



L'espace $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda,r}$ est, avec la norme $||\ ||_{\lambda,r}$, un espace de Banach. Si $\mu \geqslant \lambda$ on a $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda,r} \subset \mathscr{B}_{\alpha,\mu,r}$ et $||\ ||_{\mu,r} \leqslant ||\ ||_{\lambda,r}$. Si $a \in \mathbf{C}\{x\} \subset \mathbf{C}[[x]]$ est une série convergente de rayon de convergence $R > 0$, $\mathscr{B}a$ est une fonction *entière*, et $a \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda,r}$ pour tout $r > 0$, $\lambda > 1/R$ et $0 < \alpha < \pi$.

Dans toute la suite, nous supposerons r *fixé*. Nous simplifierons les notations précédentes en Δ_α, $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$ et $||\ ||_\lambda$. Dans les applications (§§ 1 et 2) toute valeur $r < 1$ conviendra.

Soit $D \subset \mathbf{C}$ une demi-droite d'origine 0. On définit les espaces $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$ en reco-

piant les définitions précédentes, où Δ_α est remplacé par le domaine $\Delta_\alpha(D)$ admettant D (au lieu de $\mathbf{R}^+$) comme axe de symétrie.

Noter que si $a \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$ on a alors $a \in \mathscr{B}_{\alpha',\lambda}(D')$ où l'angle $\theta = (D, D')$ est strictement inférieur à α, et $\alpha' = \alpha - \theta$.

(1.2) Sommation de Borel

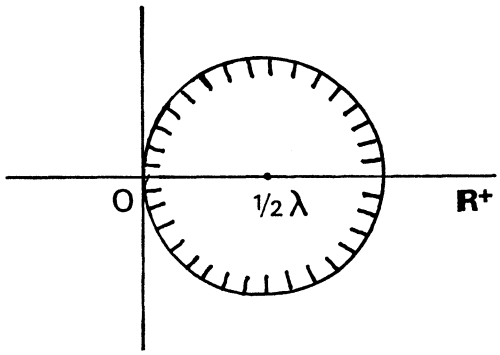
Soit $A(t)$ une fonction continue sur Δ_α et holomorphe à l'intérieur, telle que

$$\operatorname*{Sup}_{t \in \Delta_\alpha} |A(t).\exp(-\lambda|t|)| < +\infty \quad \text{pour un } \lambda > 0.$$

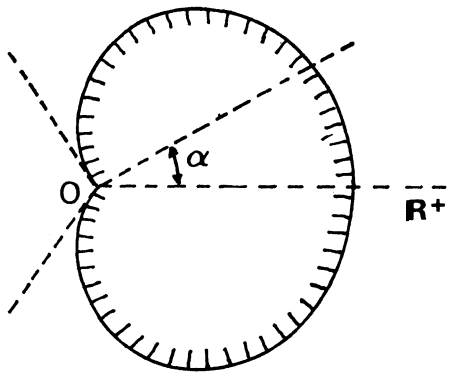
Posons

$$\tilde{a}(x) = \int_0^{+\infty} A(t).\exp(-t/x)\frac{dt}{x}. \tag{1}$$

Cette égalité définit une fonction holomorphe $\tilde{a}$ sur le disque *ouvert* de centre $1/2\lambda \in \mathbf{R}^+$ et de rayon $1/2\lambda$. De même, l'intégrale $\int_D A(t).\exp(-t/x)\frac{dt}{x}$ où $D \subset \Delta_\alpha$ est une demi-droite issue de 0 (on intègre de 0 à l'infini) définit une fonction holomorphe sur le disque ouvert centré sur D, de rayon $1/2\lambda$ et passant par 0. Cette fonction est égale à $\tilde{a}$ sur le domaine commun.



Ceci montre que $\tilde{a}$ se prolonge analytiquement à tout secteur (sur le revêtement universel de S^1) de sommet 0, d'ouverture $2\alpha + \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, et de bissectrice $\mathbf{R}^+$.



En utilisant l'intégration par parties, on vérifie que $\tilde{a}$ admet un *développement asymptotique* en o sur les secteurs précédents, donné par la série

$$a(x) = \sum_{n\geqslant 0} n!A_n x^n \quad \text{où} \quad A(t) = \sum_{n\geqslant 0} A_n t^n.$$

La formule (1) définit donc un « inverse » de la transformation de Borel $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$. La fonction $\tilde{a}$ est appelée la *somme de a, au sens de Borel.*

Les séries formelles $a \in \mathbf{C}[[x]]$ telles que $\mathscr{B}a$ est convergente sont les éléments de la *classe de Gevrey d'ordre 2*, $\mathbf{C}[[x]]_2$ (voir I.4.1). Les séries $a \in \bigcup_{\substack{\alpha>0\\ \lambda>0}} \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$ sont les séries *2-sommables dans la direction* D. La somme $\tilde{a}$ est alors une *fonction Gevrey d'ordre 2* (voir I.4).

Les séries formelles 1-sommables $a \in \mathbf{C}\{x\}_1$ sont telles que $\mathscr{B}a$ se prolonge analytiquement à $\mathbf{C} - \Sigma$, où Σ est une réunion *finie* de demi-droites

$$\Delta_i = \{t \mid \operatorname{Arg} t = \theta_i,\ |t| \geqslant \rho_i > 0\}$$

et $\mathscr{B}a$ est à *croissance exponentielle* sur $\mathbf{C} - \Sigma$. Les θ_i sont les arguments singuliers de *a*. Dans ce cas, pour tout rayon $D \subset \mathbf{C} - \Sigma$, il existe α et λ tels que $a \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$ (le rayon *r* étant fixé, inférieur au rayon de convergence de $\mathscr{B}a$ en o).

Remarque. — Soit maintenant une série $a(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(x)y^n$ avec $a_n \in \mathbf{C}[[x]]$. Elle est 1-sommable *par rapport* à *x* dans la direction D, et pour $|y| < R$, si pour tout ρ $(0 < \rho < R)$ on a $a_n \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda,r}(D)$ et $\|a_n\|_\lambda \leqslant C.\rho^n$ $(\alpha, \lambda, r, C > 0)$.

La série *a* est 1-*sommable* pour $|y| < R$ si elle l'est dans toute direction, sauf un nombre fini d'entre elles.

(1.3) Produits

Proposition. — *Soit* $a \in \mathscr{B}_{\alpha,\mu}$ *et* λ *un nombre strictement supérieur à* μ. *L'application linéaire* $b \mapsto xa.b = c$, $b \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$, *définit un endomorphisme continu de* $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$. *Plus précisément on a*

(i) $\mathscr{B}c(t) = \int_0^t \mathscr{B}a(u).\mathscr{B}b(t-u)\,du$, $t \in \Delta_\alpha$,

(ii) $\|c\|_\lambda \leqslant \dfrac{1}{\lambda - \mu}\|a\|_\mu.\|b\|_\lambda$.

Démonstration. — Soit $b \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$; considérons d'abord la fonction

$$C(t) = \int_0^t \mathscr{B}a(u).\mathscr{B}b(t-u)\,du.$$

Il est clair que C est continue sur Δ_α et holomorphe à l'intérieur. D'autre part

$$C(t).\exp(-\lambda|t|) = \int_0^t \mathscr{B}a(u).\mathscr{B}b(t-u).\exp(-\lambda|t|)\,du$$

et

$$|\mathscr{B}a(u)| \leqslant \|a\|_\mu \exp(\mu|u|), \qquad |\mathscr{B}b(t-u)| \leqslant \|b\|_\lambda \exp(\lambda(|t| - |u|)).$$

On en déduit

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\Delta_\alpha} |\mathrm{C}(t)\exp(-\lambda|t|)| \leqslant \frac{1}{\lambda-\mu}\,||a||_\mu . ||b||_\lambda .$$

Il reste à voir que $\mathrm{C} = \mathscr{B}(xab)$. Pour cela, on utilise la formule d'inversion (1); il suffit alors de vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{C}(t)\exp(-t/x)\frac{dt}{x} = \tilde{xa}.\tilde{b}.$$

On a, par définition de C,

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t \mathscr{B}a(u)\mathscr{B}b(t-u)\,du\right]\exp(-t/x)\frac{dt}{x}$$

$$= \int_\Delta \mathscr{B}a(u)\mathscr{B}b(t-u)\exp(-t/x)\frac{du\,dt}{x}$$

où $\Delta = \{(t,u)\in\mathbf{R}^2 \mid t\geqslant 0;\ 0\leqslant u\leqslant t\}$.

En posant $t-u=v$, on obtient

$$\int_D \mathscr{B}a(u)\mathscr{B}b(v)\exp(-(u+v)/x)\frac{du\,dv}{x}$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathscr{B}a(u)\exp(-u/x)\,dx . \int_0^{+\infty} \mathscr{B}b(v)\exp(-v/x)\frac{dv}{x}.$$

Une intégration par partie montre enfin que

$$\int_0^{+\infty} \mathscr{B}a(u)\exp(-u/x)\,dx = \int_0^{+\infty} \mathscr{B}(xa)(u)\exp(-u/x)\frac{du}{x}$$

ce qui achève la démonstration. ■

(1.4) Application à l'équation d'Euler

On considère ici l'opérateur

$$x^2\frac{d}{dx} + k :\ \mathbf{C}[[x]] \to \mathbf{C}[[x]] \quad \text{avec } k\in\mathbf{C}^*$$

qui à tout $f\in\mathbf{C}[[x]]$ associe $g = x^2.\dfrac{df}{dx} + k.f.$

On s'intéresse au cas où $f(0) = g(0) = 0$; en posant $f(x) = xa(x)$ et $g(x) = xb(x)$ il vient

$$\mathrm{P}a = x^2\frac{da}{dx} + (x+k)a = b, \quad \text{soit} \quad \mathrm{P} = x^2\frac{d}{dx} + (x+k).$$

Un calcul immédiat montre que, si l'on applique la transformation de Borel, on obtient

$$\mathscr{B}Pa = (t+k)\mathscr{B}a.$$

On en déduit aisément la

Proposition. — *Soit* $b \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$; *si* $-k \notin \Delta_\alpha(D)$, *l'équation différentielle*

$$x^2\frac{da}{dx} + (x+k)a = b$$

admet une unique solution $a \in \mathscr{B}_{\alpha,\lambda}(D)$; *de plus*

$$||a||_\lambda \leqslant \frac{1}{d}||b||_\lambda,$$

où d est la distance de $-k$ *à* $\Delta_\alpha(D)$.

2. SOMMABILITÉ DES TRANSFORMATIONS NORMALISANTES; CAS DE $\mathscr{E}_1$

Soit $\omega = x^2dy - A(x,y)dx = 0$ une équation différentielle élément de l'espace $\mathscr{E}_1$ (voir II.4.4). Nous la supposons déjà normalisée à l'ordre 2, c'est-à-dire que

$$A(x,y) = y(1+\lambda x) + \text{termes d'ordre} \geqslant 3.$$

Nous nous reportons maintenant à la méthode de normalisation formelle exposée en II.4.1.

(2.1) Première étape

La solution formelle unique $y = u(x) = \sum_{n\geqslant 1} u_n x^n$ de l'équation $\omega = 0$ est 1-*sommable* ($u \in \mathbf{C}\{x\}_2$) et admet au plus un seul rayon singulier $\Sigma = \mathbf{R}^+$; de plus, $\mathscr{B}u$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 (une étude plus précise montrerait que son seul point singulier est $+1$). Ce résultat se déduit par exemple d'un théorème de Braaksma [7] (Theorem 2, p. 111) moyennant l'équivalence entre diverses définitions de la 1-sommabilité (Watson [66], Nevanlinna [50], Ramis [57]; cf. également Braaksma-Harris [8], Harris [30] et Ramis [59]). Signalons aussi que Ecalle obtient des renseignements beaucoup plus précis sur $\mathscr{B}u$ par ses méthodes de fonctions résurgentes [17], [18], [19].

Les deux premières réductions (voir encore II.4.1) utilisent donc des transformations 1-sommables, de rayon singulier (éventuel) $\mathbf{R}^+$. De plus, la forme réduite ainsi obtenue

$$\omega = x^2dy - yC(x,y)dx = 0$$

est telle que la série $C(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} C_n(x)y^n$ vérifie les conditions suivantes :

1) $C_0(x) = 1 + \lambda x$ (cette condition traduit le fait que ω est dans $\mathscr{E}_1$);
2) $C_n(0) = 0$ pour $n \geqslant 1$; ceci est conséquence de la seconde réduction, et nous en profitons pour changer les notations, et écrire

$$C(x) = (1 + \lambda x) + x.\sum_{n\geqslant 1} C_n(x)y^n;$$

3) la série C est 1-sommable (en x) pour $|y| < R$ ($R > 0$) et admet $\mathbf{R}^+$ comme unique rayon singulier (au plus); ceci est conséquence du fait que la composée d'une fonction holomorphe et d'une fonction 1-sommable est encore 1-sommable).

Ceci posé, en poursuivant la lecture de II.4.1 et 4.2, il nous reste à établir que la série

$$\varphi(x,y) = y + \sum_{n\geqslant 2} g_n(x)y^n$$

où les $g_n \in \mathbf{C}[[x]]$ sont déterminés par les équations différentielles

$$x^2\frac{dg_n}{dx} + (n-1)(1+\lambda x)g_n + (n-1)xC_1g_{n-1} + \ldots + xC_{n-1} = 0$$

(et $g_n(0) = 0$), est 1-*sommable* en x, pour $|y| < R$.

Nous allons démontrer ce résultat dans le cas particulier où *l'invariant* λ *est nul*, pour la seule raison que les estimations requises sont particulièrement simples dans ce cas.

(2.2) Deuxième étape

Posons $g_n(x) = xa_n(x)$, $n \geqslant 2$. Les a_n sont alors déterminés par les équations différentielles (voir (1.4) ci-dessus)

$$x^2\frac{da_n}{dx} + (x+n-1)a_n + (n-1)xC_1a_{n-1} + (n-2)xC_2a_{n-2} + \ldots + xC_{n-1} = 0$$

avec, au départ,

$$x^2\frac{da_2}{dx} + (x+1)a_2 + xC_1 = 0.$$

Les séries C_n sont 1-sommables dans toute direction autre que $\mathbf{R}^+$. Il résulte alors immédiatement des propositions (1.3) et (1.4) et d'une récurrence que les séries a_n sont toutes 1-sommables, et de rayons singuliers (éventuels) $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^-$; de plus le rayon de convergence des fonctions $\mathscr{B}a_n$ est minoré par 1 (on suppose ici que $\mathscr{B}C$ est convergente sur un voisinage du polydisque $|x| < 1$, $|y| \leqslant R$).

Fixons maintenant une direction D (distincte de $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^-$) et un domaine $\Delta_\alpha(D)$ ne contenant ni $\mathbf{R}^+$ ni $\mathbf{R}^-$.

La sommabilité de C équivaut à l'existence de constantes λ et $R>0$ telles que

$$||C_n||_\lambda \leqslant R^n \quad \text{(voir (1.2) ci-dessus, remarque)},$$

où les normes sont prises sur $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha(D)$.

Il suffit, pour conclure, de prouver l'existence de constantes $\mu, \rho > 0$ telles que

$$a_n \in \mathscr{B}_{\alpha,\mu}(D) \quad \text{et} \quad ||a_n||_\mu \leqslant \rho^{n-1}.$$

Pour cela, posons $\mu = \lambda + 1$ et choisissons $\rho > 0$ assez grand pour que

$$||a_2||_\mu \leqslant \rho \quad \text{et} \quad R/\rho(1 - R/\rho) \leqslant d,$$

où $d > 0$ est tel que distance$(-n, \Delta_\alpha) \geqslant n.d$ $(n \geqslant 1)$.

Supposons avoir déjà montré que $||a_p|| \leqslant \rho^{p-1}$ si $p \leqslant n$; alors, en utilisant les propositions (1.3) et (1.4), on obtient

$$||a_{n+1}||_\mu \leqslant \frac{1}{nd}(nR\rho^{n-1} + (n-1)R^2\rho^{n-2} + \ldots + R^n)$$

$$\leqslant \frac{\rho^n}{d}(R/\rho + R^2/\rho^2 + \ldots + R^n/\rho^n) \leqslant \rho^n.$$

Ceci achève la démonstration, et donne donc la

Proposition **(2.3).** — *Soit* $\omega \in \mathscr{E}_1$; *la transformation* $\varphi \in \hat{G}^0$ *normalisant l'équation* $\omega = 0$ *est* 1*-sommable*; *de plus* $\mathscr{B}\varphi$ *a un rayon de convergence au moins égal à* 1; *ses points singuliers sont contenus dans l'ensemble* $-\mathbf{N}^* \cup \{+1\}$.

Remarque. — Pour démontrer le même résultat si $\lambda \neq 0$, il faut inverser, dans les espaces $\mathscr{B}_{\alpha,\lambda}$, l'opérateur

$$x^2\frac{d}{dx} + k(1 + \lambda x).$$

Ceci ne pose pas de problème difficile, mais c'est un peu plus compliqué.

3. SOMMABILITÉ DES TRANSFORMATIONS NORMALISANTES CAS DE $\mathscr{E}_p$ $(p > 1)$

On considère maintenant l'équation

$$x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0,$$

où A est analytique au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$, et

$$A(x,y) = y(1 + \lambda x^p) + \text{termes d'ordre supérieur à } p+1$$

(on suppose l'équation normalisée à l'ordre $p+1$).

Le même théorème (6.10) de Ramis [57] montre encore que la solution formelle

$y = u(x)$ $(u(0) = 0)$ de cette équation est *p-sommable*, et que ses rayons singuliers éventuels ont pour arguments $\exp(2i\pi k/p)$, $k = 0, \ldots, p-1$.

Comme précédemment, les deux premières réductions de II.4.1 se font donc par une transformation p-sommable; on est ainsi ramené à l'étude de la normalisation d'une équation

$$\omega = x^{p+1}dy - yC(x,y)dx = 0$$

où $C(x,y) = (1 + \lambda x^p) + x \sum_{n\geqslant 1} C_n(x)y^n$ est p-sommable par rapport à x, de support singulier connu, pour $|y| \leqslant R$.

Pour terminer la démonstration, on est amené, comme au paragraphe précédent, à étudier l'opérateur

$$D = x^{p+1}\frac{d}{dx} + n(1 + \lambda x^p) \quad \text{et } n \geqslant 1.$$

L'idée consiste ici à se ramener au cas $p = 1$ de la façon suivante (cet argument se trouve déjà dans Rambaud [55]) :

On pose $x^p = \xi$. On a une décomposition canonique

$$\mathbf{C}[[x]] = \mathbf{C}[[\xi^{\frac{1}{p}}]] = \bigoplus_{k=0}^{p-1} \xi^{\frac{k}{p}}\mathbf{C}[[\xi]].$$

On constate que D opérant sur cet espace laisse invariante cette décomposition et s'écrit $D = \bigoplus D_k$ où $D_k : \mathbf{C}[[\xi]] \to \mathbf{C}[[\xi]]$ est défini par

$$D_k = \xi^2\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{p}(n + (n\lambda + k)\xi).$$

D'autre part, on sait que $a \in \mathbf{C}[[x]]$ est p-sommable si et seulement si, en écrivant

$$a(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \xi^{\frac{k}{p}} a_k(\xi),$$

les séries $a_k \in \mathbf{C}[[\xi]]$ sont 1-sommables (*i.e.* sommables au sens de Borel). Moyennant ces identifications, la démonstration esquissée pour $p = 1$ s'étend au cas général.

V. — HOLONOMIE

1. RAPPELS SUR LA THÉORIE D'ÉCALLE [17], [18], [19]

Soit $\mathscr{H}$ le groupe des difféomorphismes locaux holomorphes de $\mathbf{C}$ en 0, tangents d'ordre 1 à l'identité. On se propose de classifier les éléments de $\mathscr{H}$ à conjugaison analytique près relativement au groupe $\mathscr{H}' \supset \mathscr{H}$ de tous les germes de difféomorphismes analytiques de $(\mathbf{C}, 0)$.

(1.1) Classes de conjugaison formelles

On désigne par $\hat{\mathscr{H}}$ (resp. $\hat{\mathscr{H}}'$) le groupe des difféomorphismes *formels* de $\mathbf{C}$ en 0, tangents d'ordre 1 à l'identité (resp. de partie linéaire arbitraire).

Soit $\hat{T}(x) = x + \ldots$ un élément quelconque de $\hat{\mathscr{H}}$. On vérifie facilement qu'il existe toujours un *unique* champ de vecteurs *formel*

$$\hat{X} = \Big(\sum_{n \geqslant 2} a_n x^n\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{X} \in \mathscr{L}(\hat{\mathscr{H}})$$

tel que $\hat{T} = \exp \hat{X}$ ($\hat{X}$ est appelé le logarithme de $\hat{T}$).

Tout champ $\hat{X} \in \mathscr{L}(\hat{\mathscr{H}})$, non nul, se réduit, via un élément de $\hat{\mathscr{H}}'$ (transformation normalisante), à une et une seule des *formes normales* suivantes :

$$X_{p,\mu} = \frac{x^{p+1}}{1 + \mu x^p} \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \text{où } p \geqslant 1 \text{ est un entier, et } \mu \in \mathbf{C}$$

(voir par exemple Takens [64] ou Ecalle [17]).

Les classes de conjugaison des éléments de $\hat{\mathscr{H}}$, relativement au groupe $\hat{\mathscr{H}}'$, sont donc « énumérées » par les formes normales

$$T_{p,\mu} = \exp X_{p,\mu}.$$

Exemple. — Pour $p = 1$ et $\mu = 0$ on a $T_{1,0}(x) = x/(1-x)$; si l'on envoie l'origine à l'infini en posant $x = 1/X$, $T_{1,0}$ s'interprète comme la translation $X \mapsto X - 1$.

Remarques. — Les classes de conjugaison de $\hat{\mathscr{H}}$ dans lui-même sont représentées par les formes normales $\exp \alpha X_{p,\mu}$ où $\alpha \in \mathbf{C}$.

La propriété, pour un $\hat{T} \in \hat{\mathscr{H}}$, d'être conjugué à $T_{p,\mu}$ se lit sur le $(2p+1)$-jet de $\hat{T}$.

(1.2) Un isomorphisme fondamental

Soit Γ^k (k entier $\geqslant 1$) le faisceau de groupes sur S^1 associé au préfaisceau défini de la façon suivante :

Soit $U \subset S^1$ un ouvert, représentant un secteur (également noté U) de sommet o dans $\mathbf{C}$; alors $\Gamma^k(U)$ est l'ensemble des germes de fonctions $h : (U, o) \to (\mathbf{C}, o)$ telles que :

(i) h est holomorphe sur $(U - \{o\}, o)$;

(ii) sur tout secteur fermé $\overline{V} \subset U$, h est uniformément asymptote à une série formelle $\hat{h}$ de la forme

$$\hat{h}(x) = x + a_{k+1}.x^{k+1} + \dots$$

(h est k-plate par rapport à l'identité; on écrit $\hat{h} \in \hat{\mathscr{H}}_k$).

L'ensemble $\Gamma^k(U)$ est stable par composition des applications. On a évidemment $H^0(S^1; \Gamma^k) = \mathscr{H}_k \subset \mathscr{H}$ ($\mathscr{H}_k$ est le groupe des germes de difféomorphismes k-plats en o par rapport à l'identité). On désigne par Γ le faisceau intersection de tous les Γ^k, $k \geqslant 1$; les éléments de Γ sont, à l'origine, *infiniment plats* par rapport à l'identité de $\mathbf{C}$.

Soit $\mathfrak{U}$ un bon recouvrement de S^1; on désigne, comme au chapitre I, par $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Gamma^k)$ l'ensemble des cochaînes (h_i) telles que $\hat{h}_i = \hat{h}_j$ pour tous i, j. On a alors le

Théorème **(1.3)** (Malgrange [42] et [44]). — *On a, pour tout* $k \geqslant 1$, *un isomorphisme canonique*

$$H^1(S^1; \Gamma^k) \simeq C^0(\mathfrak{U}; \Gamma^k) \backslash \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Gamma^k) / H^0(\mathfrak{U}; \Gamma^k) \simeq \hat{\mathscr{H}}_k / \mathscr{H}_k.$$

La démonstration de ce théorème se fait de façon analogue à celle de notre théorème I.2.3.1; elle est plus élémentaire car elle utilise le théorème de Newlander-Nirenberg en dimension 1; cependant, pour prouver l' « analyticité » de cet isomorphisme, on doit de nouveau utiliser le théorème d'intégrabilité en dimension supérieure à 1.

Ce théorème admet aussi des versions Gevrey d'ordre s. Pour $s = 1 + 1/p$, les cocycles sommables correspondent toujours à des difféomorphismes p-sommables.

(1.4) Classes de conjugaison analytiques

Considérons la forme normale $T_{p,\mu} \in \mathscr{H}$. Soit $T \in \mathscr{H}$ un difféomorphisme ayant le même $(2p+1)$-jet que $T_{p,\mu}$ en o. Il existe alors un *unique* difféomorphisme formel $\hat{h} \in \hat{\mathscr{H}}_{2p+1}$ tel que $T = \hat{h}^{-1} \circ T_{p,\mu} \circ \hat{h}$. Ecalle démontre l'existence d'une o-cochaîne $h_i \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Gamma^{2p+1})$, où $\mathfrak{U}$ est un bon recouvrement de S^1, telle que $\hat{h}_i = \hat{h}$, et h_i conjugue T et $T_{p,\mu}$ sur le secteur U_i; les transformations $h_i \circ h_{i+1}^{-1}$ déterminent un élément de $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$, en désignant par $\Gamma_{p,\mu} \subset \Gamma$ le sous-faisceau des germes de sections de Γ qui *commutent* avec $T_{p,\mu}$. En fait, il établit directement que $\hat{h}$ appartient à la classe de Gevrey d'ordre $s = 1 + 1/p$ et est *p-sommable*, par une méthode qui paraît voisine de celle que nous exposons au chapitre IV; ainsi à chaque T est associée une *classe canonique* dans $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$.

Inversement, si $\gamma \in H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$, considérons $\hat{h} \in \hat{\mathscr{H}}_{2p+1}$ (défini modulo composition à droite par un élément de $\mathscr{H}_{2p+1}$) image de γ par l'isomorphisme fondamental. On démontre alors que

$$T = \hat{h}^{-1} \circ T_{p,\mu} \circ \hat{h}$$

est *analytique*, par une démarche analogue à celle de III.2, qui sera d'ailleurs explicitée plus loin (cette démarche « géométrique » est due à Malgrange; Ecalle fait, lui, un calcul plus direct).

On arrive ainsi au

Théorème **(1.4)** (Ecalle [17]). — *L'ensemble des classes de conjugaison modulo* $\mathscr{H}_{2p+1}$ *des éléments de* $\mathscr{H}$ *tangents à* $T_{p,\mu}$ *à l'ordre* $2p+1$ *est en bijection canonique avec* $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$.

Pour obtenir l'ensemble des classes de conjugaison, modulo le groupe $\mathscr{H}'$, des difféomorphismes analytiques formellement conjugués à $T_{p,\mu}$, il reste à *quotienter* l'espace classifiant $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$ par le groupe des difféomorphismes *commutant* à $T_{p,\mu}$ (opérant toujours par conjugaison sur les cocycles). Ce groupe est isomorphe à $\mathbf{C} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, opérant sur $\mathbf{C}$ par la loi $(t, k) : x \mapsto \exp(2i\pi k/p) . \exp tX_{p,\mu} . x$.

Remarques **(1.5)**. — 1) La théorie d'Ecalle ne se limite pas au résultat précédent. Ecalle sait calculer explicitement la correspondance entre cocycles et transformations normalisantes, ce qui lui permet d'étudier des problèmes très fins sur la structure des éléments de $\mathscr{H}$. Sa théorie mérite plus d'attention qu'elle n'en a reçu jusqu'ici.

2) Il est important de noter que, dans la suite, nous n'utiliserons du théorème (1.4) que l'*injectivité* de $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$ dans l'ensemble des classes de conjugaison analytiques. L'étude des équations différentielles conduira de plus à une démonstration du théorème (1.4) pour un sous-ensemble privilégié des classes de conjugaison.

2. L'INJECTION NATURELLE DE $\Lambda_{p,\lambda}$ DANS $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}$

(2.1) Holonomie des formes normales $\omega_{p,\lambda}$

Considérons l'équation différentielle (forme normale)

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0. \tag{1}$$

L'holonomie de la variété invariante $\{x = 0\}$ est le difféomorphisme local de $\mathbf{C}$ en 0 obtenu de la façon suivante :

On considère un lacet γ non trivial de cette feuille, par exemple $y = e^{2i\pi\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$; puis une *transversale* τ à cette feuille au point origine de γ, par exemple la droite $y = 1$; soit M un point de τ, d'abscisse x; on relève le lacet γ, en partant de M, sur la feuille passant par M et par l'intermédiaire de la projection $(x, y) \mapsto y$; l'extré-

mité M' du chemin $\tilde{\gamma}$ ainsi obtenu est dans τ, et a pour abscisse $x' = T(x)$, où T est le *difféomorphisme d'holonomie* de $\{x = 0\}$.

Ce difféomorphisme est défini à *conjugaison près*, dans le groupe $\mathscr{H}'$ de tous les difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}$ en 0.

On vérifie immédiatement que le difféomorphisme d'holonomie de $\omega_{p,\lambda} = 0$ est la *forme normale* $T_{p,\lambda/2i\pi}$ du § 1.

(2.2) Comparaison des faisceaux $\Lambda_{p,\lambda}$ et $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}$

Nous considérons toujours ici l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$ et la transversale $\tau = \{y = 1\}$, identifiée à la droite des x.

Soit U un secteur ouvert de sommet 0 de la droite $\mathbf{C}_x$, d'ouverture assez petite, et connexe. Nous désignons aussi par U le secteur correspondant de la transversale τ.

Considérons maintenant la restriction $\mathscr{F}(U)$ à $U \times \mathbf{C}$ du feuilletage défini par l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$. Nous identifions, comme en II.6.5, l'espace des feuilles de $\mathscr{F}(U)$ à $\mathbf{C}$, chaque feuille étant définie par une équation

$$y = c.x^{\lambda}.\exp(-1/px^{p}) \quad c \in \mathbf{C}.$$

Considérons alors l'application

$$\rho : U \to \mathscr{F}(U) = \mathbf{C}$$

qui à $x \in U \subset \tau$ fait correspondre la feuille passant par le point $(x, 1)$; avec les coordonnées choisies (x et c), cette application a pour expression

$$c = \rho(x) = x^{-\lambda}.\exp(1/px^{p}).$$

L'observation géométrique importante est la suivante :

Si le secteur U est contenu dans $\{\mathrm{Re}\, x^{p} > 0\}$ (resp. $\{\mathrm{Re}\, x^{p} < 0\}$), $\rho(U)$ est un voisinage de l'infini (resp. un voisinage épointé de 0); dans les deux cas, le germe de ρ en 0 définit un « *revêtement universel* » [1] du disque épointé D^*, et l'automorphisme fondamental de ce revêtement est la restriction à (U, 0) de $T_{p,\lambda/2i\pi}$, holonomie de $\{x = 0\}$.

Lemme (2.2.1). — *Soit* $\alpha \in V_i^- \subset S^1$ ($\mathrm{Re}\, \alpha^{p} < 0$; voir II.6.5). *L'application de revêtement* ρ *induit un isomorphisme du groupe* $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ *sur le groupe* $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$.

Démonstration. — Soit $\sigma \in \Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ un germe de section en α de $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}$, représenté par un difféomorphisme local $\sigma : (U, 0) \to (U, 0)$. Comme σ commute avec $T_{p,\lambda/2i\pi}$ par définition, il induit un difféomorphisme $g : (D^*, 0) \to (D^*, 0)$; ce difféomorphisme se prolonge donc en un difféomorphisme local g de $\mathbf{C}$ en 0. Posons alors

$$g(c) = c(a + h(c)), \qquad \text{où } h \text{ est holomorphe, nulle en 0, } a \neq 0,$$

$$\sigma(x) = x(1 + \tilde{h}(x)), \qquad \text{où } \tilde{h} \text{ est holomorphe sur U, } \textit{asymptote} \text{ à 0.}$$

---

[1] Par abus de langage : φ n'est pas un revêtement au sens strict !

Écrivons maintenant que $\rho \circ \sigma = g \circ \rho$. En explicitant ρ et en passant aux logarithmes, on obtient

$$(1) \qquad \frac{1}{(1+\tilde{h})^p} - px^p \log(1+\tilde{h}) = 1 + px^p \log[a + h(\rho(x))].$$

Si $x \in U$ est assez petit, $h(\rho(x))$ est voisin de 0 et la détermination du logarithme du second membre ne fait pas problème.

La platitude de $\tilde{h}$ impose que $a = 1$, c'est-à-dire que $g \in \mathscr{H}$. Le choix d'un germe h détermine alors *uniquement* $\tilde{h}$: il suffit de remarquer que la dérivée partielle du premier membre de (1) par rapport à $\tilde{h}$ au point $(x = 0, \tilde{h} = 0)$ est non nulle; le théorème des fonctions implicites résout l'équation (1), et la fonction $\tilde{h}(x)$ obtenue est asymptote à 0 car le second membre de l'équation est asymptote à 1.

Il est ainsi démontré que $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ est isomorphe au groupe $\mathscr{H}$, que nous avons déjà identifié à $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$. ■

Remarque. — L'isomorphisme obtenu est compatible avec les actions de $\mathbf{C}$ sur $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ et de $\mathbf{C}^*$ sur $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$, comme on le vérifie aisément.

Lemme **(2.2.2).** — *Soit* $\alpha \in V_i^+ \subset S^1$ $(\mathrm{Re}\ \alpha^p > 0)$. *Le groupe* $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ *est encore canoniquement isomorphe au groupe* $\mathscr{H}$. *Par l'application de revêtement* ρ, $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$ *s'identifie à un sous-groupe à un paramètre de* $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$.

La première partie se démontre comme le lemme précédent. Il suffit de prolonger l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$ à $\mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ par

$$x^{p+1}\,dY + Y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0 \qquad \text{où } Y = 1/y.$$

Dans cette carte, les solutions s'écrivent

$$Y = c' x^{-\lambda} \exp(1/px^p) \qquad (c' = 1/c)$$

et l'on a $c' = \rho(x) = x^\lambda \exp(1/-px^p)$.

Les translations qui constituent le groupe $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$ forment dans $\mathscr{H}$ (identifié au groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en l'infini) le sous-groupe des transformations $c' \mapsto c'/(1 + ac')$, $a \in \mathbf{C}$. Ceci achève la démonstration. ■

L'injection de $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$ dans $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ commute encore aux actions de $\mathbf{C}^*$ et de $\mathbf{C}$ sur ces espaces.

Remarque. — Le groupe $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ s'identifie à $\Lambda'_{p,\lambda}(\alpha)$, où Λ' est le faisceau qui a été défini en II.6.7.

Enfin on vérifie aisément que si $\mathrm{Re}\ \alpha^p = 0$, la fibre $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}(\alpha)$ est, comme $\Lambda_{p,\lambda}(\alpha)$, réduite à l'identité.

Tout ceci démontre la

Proposition **(2.3).** — *Le faisceau* $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi}$ *est localement constant sur les ouverts* V_i^+ *et* V_i^-, *où sa fibre est isomorphe au groupe* $\mathscr{H}$. *Le faisceau* $\Lambda_{p,\lambda}$ *s'injecte canoniquement dans le précédent; cette injection est un isomorphisme sur les secteurs* V_i^-, *et un sous-groupe à un paramètre sur les secteurs* V_i^+. *Enfin, elle induit une injection de* $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ *dans* $H^1(S^1; \Gamma_{p,\lambda/2i\pi})$.

(2.4) Exemple : $\Lambda_{1,0}$ et $\Gamma_{1,0}$

Soit l'équation différentielle $\omega_{1,0} = x^2\,dy - y\,dx = 0$. Le difféomorphisme d'holonomie de $x = 0$ est $T(x) = x/(1 - 2i\pi x)$, soit, en posant $x = 1/X$, $T(X) = X - 2i\pi$. L'application ρ est définie sur $\tau - \{0\}$ où τ est la transversale $\mathbf{C} \times \{1\} = \{y = 1\}$, et $\rho(x) = c = \exp(1/x)$.

a) Sur $V^- = \{\mathrm{Re}\, x < 0\}$ et si $g \in \Lambda_{1,0}(V^-)$ est définie par $g(c) = c(1 + h(c))$ où h est holomorphe en 0, $h(0) = 0$, on vérifie que $\sigma \in \Gamma_{1,0}(V^-)$, relevé de g par ρ, est définie par

$$\sigma(X) = X + \log(1 + h(e^X)).$$

On obtient ainsi tout le groupe $\Gamma_{1,0}(V^-)$.

b) Sur $V^+ = \{\mathrm{Re}\, x > 0\}$, soit $t \in \Lambda_{1,0}(V^+)$, $t(c) = c + a$ $(a \in \mathbf{C})$. Le relevé σ de t est

$$\sigma(X) = X + \log(1 + ae^{-X})$$

alors que $\Gamma_{1,0}(V^+)$ est constitué par toutes les transformations

$$\sigma(X) = X + \log(1 + h(e^{-X})),$$

où h est une fonction holomorphe en 0, nulle en 0.

3. HOLONOMIE

(3.1) Interprétation de l'injection de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ dans $H^1(S^1; \Gamma_{p,\lambda/2i\pi})$

Soit un élément de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ que nous interprétons comme un cocycle $g \in C^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda})$ où $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $i = 0, \ldots, p-1$ est le bon recouvrement canonique défini en II.6. Nous allons appliquer à g et à $\omega_{p,\lambda}$ les constructions de I.2.2, I.2.3 et III.2.1.

Soit $\overline{D} \subset \mathbf{C}_y$ un disque fermé de centre 0; on suppose que 1 est intérieur à $\overline{D}$. D'après la remarque I.2.3.4, on peut considérer le germe de fibré

$$\pi : (M_g, \{0\} \times \overline{D}) \to (\mathbf{C}, 0)$$

et sur M_g l'équation différentielle $\omega_{p,\lambda}(g) = 0$ construite en III.2.1, par l'intermédiaire d'une trivialisation de π au voisinage de $\{0\} \times \overline{D}$. Nous noterons pour simplifier $\omega = \omega_{p,\lambda}$ et $\omega(g) = \omega_{p,\lambda}(g)$. Le feuilletage défini par ω (resp. $\omega(g)$) sera noté $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}(g)$). Nous désignerons par $\mathscr{F}_i$ (resp. $\mathscr{F}_i(g)$) la restriction de $\mathscr{F}$ à $U_i \times \mathbf{C}$ (resp. à $\pi^{-1}(U_i)$).

Nous disposons (voir III.2.1) d'isomorphismes de variétés feuilletées

$$[(U_i \times \mathbf{C}, \{0\} \times \bar{D}); \mathscr{F}_i(g)] \xrightarrow{\varphi_i} [(U_i \times \mathbf{C}, \{0\} \times \bar{D}); \mathscr{F}_i]$$

et l'on a $g_{i,i+1} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i+1}$; en d'autres termes, $\mathscr{F}(g)$ est obtenu en recollant les $\mathscr{F}_i$ par g^{-1}.

Choisissons maintenant un recouvrement *fermé* $\bar{\mathfrak{U}}' = \{\bar{U}_i'\}$, $i = 0, \ldots, p-1$, de S^1 plus fin que $\mathfrak{U}$. Soit $\tau = \{y = 1\}$ la transversale à $\mathscr{F}$ en $(0, 1)$ déjà considérée. On désigne par τ_i les secteurs de τ correspondant aux $U_i \subset \mathbf{C}_x$; nous considérons les τ_i comme des germes au voisinage de $\bar{U}_i' \times \{1\}$. De même nous désignons par $\tau(g)$ le germe de transversale à $\mathscr{F}(g)$ au point $(x = 0;\ Y = 1)$, défini par $Y = 1$; les $\pi^{-1}(U_i)$ découpent $\tau(g)$ en des secteurs $\tau_i(g)$ que nous considérons aussi comme des germes au voisinage de $\bar{U}_i' \times \{1\}$. On désigne par τ_i' l'image de $\tau_i(g)$ par φ_i; ainsi, on peut considérer que $\tau(g)$ est définie par recollement des τ_i' moyennant les applications de transition de g^{-1}.

Désignons enfin par $h = T_{p,\mu}$ $(\mu = \lambda/2i\pi)$ l'holonomie de la variété invariante $\{x = 0\}$ de $\mathscr{F}$, lue sur la transversale τ. L'holonomie $h(g)$ de $\{x = 0\} = \pi^{-1}(0)$ dans $\mathscr{F}(g)$ sera lue sur $\tau(g)$.

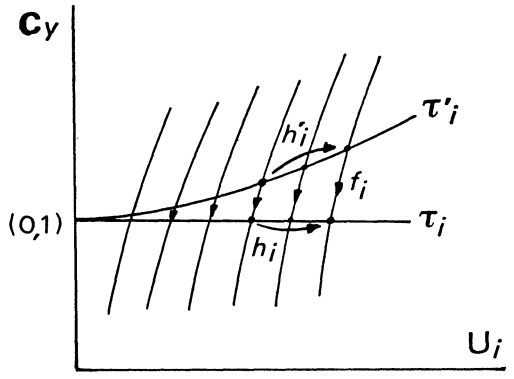
Ces deux holonomies, étant tangentes à l'identité, respectent (au sens des germes) les découpages respectifs $\{\tau_i\}$ et $\{\tau_i(g)\}$ de τ et $\tau(g)$. Plus précisément, quitte à restreindre suffisamment les rayons des secteurs, les relèvements du lacet $y = \exp 2i\pi\theta$, $x = 0$ (resp. $Y = \exp 2i\pi\theta$) issus de points « voisins » de $\bar{U}_i' \times \bar{D}$ restent « voisins » de $\bar{U}_i' \times \bar{D}$; ils induisent donc des automorphismes de germes

$$h_i : \tau_i \to \tau_i \quad \text{et} \quad h_i(g) : \tau_i(g) \to \tau_i(g).$$

Par le difféomorphisme φ_i, $h_i(g)$ définit un automorphisme

$$h_i' = \varphi_i \circ h_i(g) \circ \varphi_i^{-1} : \tau_i' \to \tau_i'.$$

Considérons maintenant la figure formée, dans $U_i \times \bar{D}$, par $\mathscr{F}_i$ et les transversales τ_i et τ_i'. Désignons par $f_i : \tau_i' \to \tau_i$ le germe d'application défini par la projection le long des feuilles de $\mathscr{F}_i$; cette application est bien définie, en restreignant suffisamment le rayon du secteur U_i, car tout se passe alors dans un « ouvert distingué » du feuilletage $\mathscr{F}$ au voisinage du point régulier $(0, 1)$.



Comme φ_i transforme $\mathscr{F}_i(g)$ en $\mathscr{F}_i$, $h_i' : \tau_i' \to \tau_i'$ n'est autre que l'holonomie de $\mathscr{F}_i$ *lue sur* τ_i', et l'on a donc

$$h_i = f_i \circ h_i' \circ f_i^{-1} = f_i \circ \varphi_i \circ h_i(g) \circ \varphi_i^{-i} \circ f_i^{-1}.$$

Ceci montre que le *difféomorphisme d'holonomie* $h(g)$ *s'obtient aussi en recollant les couples* (τ_i, h_i) *par les applications de transition*

$$\gamma_{i+1,i} = f_{i+1} \circ \varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1} \circ f_i^{-1} : \tau_i \to \tau_{i+1}.$$

L'application $f_i \circ \varphi_i : \tau_i(g) \to \tau_i$ est un isomorphisme Gevrey d'ordre $s = 1 + 1/p$. Elle définit une section de Γ_s^0 (faisceau sur S^1 des germes tangents à l'identité, admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre s). Il est par ailleurs clair que

$$(f_i \circ \varphi_i) \circ (f_{i+1} \circ \varphi_{i+1})^{-1} = \gamma_{i,i+1}$$

commute avec l'holonomie h et définit une section de $\Gamma_{p,\lambda/2i\pi} \subset \Gamma_s$. Ainsi les $f_i \circ \varphi_i$ ont toutes le même développement asymptotique $\hat{\psi}$ en $(0, 1)$; $\hat{\psi}$ est Gevrey d'ordre s (et même p-sommable). La 0-cochaîne $\{f_i \circ \varphi_i\}$ est un élément de $\mathscr{C}^0(\{\tau_i\}; \Gamma_s^0)$, dont le cobord est la 1-cochaîne

$$\{\gamma_{i,i+1}\} = \{f_i \circ \varphi_i \circ (f_{i+1} \circ \varphi_{i+1})^{-1}\} \in Z^1(\{\tau_i\}; \Gamma_{p,\lambda/2i\pi}).$$

Par ailleurs $\gamma_{i,i+1}$ est l'image naturelle de $g_{i,i+1}$ au sens du § 2, c'est-à-dire le relevé dans $\tau_i \subset \tau$ de $g_{i,i+1}$ interprété comme permutation de l'espace des feuilles de $\mathscr{F}_i$.

Nous avons finalement « relevé » la correspondance $g_{i,i+1} \mapsto \gamma_{i,i+1}$ en une correspondance $\{\varphi_i\} \mapsto \{f_i \circ \varphi_i\}$ qui associe à un élément de $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_{p,\lambda})$ un élément de $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Gamma_{p,\lambda/2i\pi})$. Remarquons que la connaissance de $\gamma_{i,i+1}$ permet de retrouver $g_{i,i+1}$, tandis que celle de la 0-cochaîne $\{f_i \circ \varphi_i\}$ ne permet pas de reconstituer la 0-cochaîne $\{\varphi_i\}$. Remarquons également que la reconstitution du germe de disque $\tau(g)$ et du difféomorphisme $h(g)$ à partir des (τ_i, h_i) recollés par $\{\gamma_{i+1,i}\}$, ainsi obtenue, n'est autre que la construction d'Ecalle à laquelle il a été fait allusion plus haut (et qui a inspiré notre construction de I.2.2 et I.2.3!).

Soit maintenant $\omega \in E_p$:

$$\omega = x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0.$$

Désignons par $h_\omega \in \mathscr{H}$ le difféomorphisme d'holonomie de la variété invariante $\{x = 0\}$. Il est défini à conjugaison analytique près (dans le groupe $\mathscr{H}'$ de tous les difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}$ en 0). Si ω est formellement conjuguée à $\omega_{p,\lambda}$, h_ω est formellement conjugué à $T_{p,\lambda/2i\pi}$; en effet, ω se normalise en fait sur le voisinage formel d'ordre infini de $\{x = 0\}$ d'après II.4. On définit ainsi une application naturelle de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'équations différentielles dans l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de $\mathscr{H}$. L'argument qui précède établit donc le

Théorème (**3.2**). — *L'application qui à* $\omega \in E_p$ *associe le germe d'holonomie* h_ω *de sa variété invariante induit une injection de l'ensemble des classes d'isomorphisme dans* E_p *dans l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de* $\mathscr{H}$.

Il suffit en effet de remarquer que l'injection de $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ dans $H^1(S^1; \Gamma_{p,\lambda/2i\pi})$ est compatible avec les actions de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{C} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui définissent les espaces modulaires. ■

Corollaire **(3.3).** — *Deux équations différentielles éléments de* E *sont analytiquement isomorphes si et seulement si les holonomies de leurs variétés invariantes sont analytiquement conjuguées.*

(3.4) *Remarque.* — Soit $T \in \mathscr{H}$ un difféomorphisme formellement conjugué à $T_{p,\mu}$; soit $\gamma \in H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$ l'une des classes « caractéristiques » de T. Il existe une équation différentielle $\omega \in E_p$ admettant T comme holonomie de sa variété invariante si et seulement si γ appartient à l'image de $H^1(S^1; \Lambda_{p,2i\mu\pi})$ dans $H^1(S^1; \Gamma_{p,\mu})$. La comparaison de ces deux espaces montre qu'en général, un difféomorphisme local de $(\mathbf{C}, 0)$ tangent à l'identité ne peut être considéré comme holonomie d'une forme $\omega \in E$. Ce phénomène reste pour nous assez mystérieux, et le problème se pose de trouver une *caractérisation a priori* (sans passer par la classe caractéristique γ) des difféomorphismes d'holonomie des éléments de E.

Nous montrerons par contre, dans un article ultérieur [45], que pour tout $T \in \mathscr{H}$, il existe une équation différentielle « résonante » de la forme

$$\omega = x\,dy + y\,dx + \ldots = 0$$

telle que T soit l'holonomie de l'une des deux variétés invariantes de cette équation.

Observons ici que, dans tous les cas, la classe γ associée à $T \in \mathscr{H}$ donné est l'image d'un élément $g \in H^1(S^1; \Lambda'_{p,2i\pi\mu})$ où $\Lambda'_{p,2i\pi\mu}$ est le faisceau introduit en II.6.7, qui est isomorphe à $\Gamma_{p,\mu}$. Si l'on reprend alors la construction faite ci-dessus en (3.1), mais en remplaçant le disque $\overline{D} \subset \mathbf{C}_y$ par une *couronne* $\overline{C} \subset \mathbf{C}_y$ centrée en 0, on voit que l'on obtient une équation différentielle $\omega_{p,\lambda}(g) = 0$ sur un germe de variété fibrée $\pi : (M_g, \{0\} \times \overline{C}) \to (\mathbf{C}, 0)$, dont la feuille $\{0\} \times \overline{C}$ admet T comme difféomorphisme d'holonomie. En fait on peut agrandir arbitrairement la couronne $\overline{C}$ (voir I.2.3.4), et obtenir une équation $\omega_{p,\lambda}(g) = 0$ de la forme

$$\omega_{p,\lambda}(g) = x^{p+1}\,dy - A(x,y)\,dx = 0,$$

où $A(0,y) = y$ et la fonction A est holomorphe sur un voisinage (effilé) de $\{0\} \times \mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^2$.

4. QUELQUES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME 3.2

Nous nous plaçons ici, pour simplifier, dans le cas $p = 1$, et nous fixons $\lambda \in \mathbf{C}$. Comme nous venons de le voir, le type analytique de toute équation $\omega = 0$ formellement isomorphe à $\omega_{1,\lambda} = x^2\,dy - y(1 + \lambda x)\,dx = 0$ est déterminé par l'holonomie $h_\omega \in \mathscr{H}$ de sa variété invariante.

On peut se demander si le « type topologique » de h_ω détermine le « type topologique » de ω. Il n'en est rien : en effet, on sait (Camacho [12]) que tous les difféo-

morphismes $T \in \mathscr{H}$ formellement conjugués à $T_{1,\mu}$ ($\mu \in \mathbf{C}$ quelconque) sont topologiquement conjugués. Soit alors $g \in H^1(S^1; \Lambda_{1,\lambda}) = \mathbf{C} \times \mathscr{H}$, $g = (a, Id)$ avec $a \neq 0$; l'équation $\omega_{1,\lambda}(g) = 0$ n'est pas topologiquement équivalente à la forme normale, bien qu'elle ait même holonomie topologique, car elle n'admet pas de variété centrale (III.4.4).

Il y a mieux. Considérons dans $\mathscr{E}_{1,0}$ ($\lambda = 0$) les équations admettant une variété centrale; elles correspondent à des cocycles de la forme $(0, g) \in \mathbf{C} \times \mathscr{H}$. On vérifie alors trivialement que g représente l'holonomie de la variété centrale du feuilletage $\omega_{1,0}(g) = 0$. La classe de conjugaison topologique de $g \in \mathscr{H}$ est donc un *invariant topologique* de $\omega_{1,0}(g)$; toujours d'après Camacho [12], cet invariant se réduit à l'ordre de platitude de g par rapport à l'identité. Il y a donc dans ce cas une *infinité* de types topologiques d'équations différentielles, pour une holonomie topologiquement fixe de la variété invariante.

Cet argument ne vaut plus si $\lambda \notin \mathbf{R}$; l'holonomie $y' = e^{2i\pi\lambda}.g(y)$ de la variété centrale est alors toujours linéarisable; on peut penser que dans ce cas les équations correspondant à $(0, g) \in \mathbf{C} \times \mathscr{H}$ sont toutes topologiquement isomorphes, mais nous n'avons pas cherché à le démontrer.

Le problème général de la classification topologique (ou différentiable) des équations différentielles éléments de E mériterait d'ailleurs une étude plus poussée (voir à ce sujet Bogdanov [5]).

VI. — ÉQUATIONS DE RICCATI

1. INTRODUCTION

(1.1) Définitions

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux germes d'équations différentielles analytiques sur $(\mathbf{C}, 0) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (équations de Riccati) de la forme :

$$\omega = x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0 \tag{1}$$

où A est un *polynôme* de degré 2 en y, à coefficients holomorphes en x au voisinage de $x = 0$, avec $A(0,y) = a.y$, $a \in \mathbf{C}^*$. La variable y représente ici la coordonnée naturelle sur la droite projective privée du point à l'infini. Dans la seconde carte (x, Y), où $Y = 1/y$, l'équation (1) s'écrit

$$\omega = x^{p+1}dY + Y^2 A\left(x, \frac{1}{Y}\right)dx = 0$$

et $B(x, Y) = Y^2 A(x, 1/Y)$ est de nouveau un polynôme de degré 2 en Y.

La condition $A(0,y) = a.y$, $a \in \mathbf{C}^*$, donne $B(0, Y) = a.Y$, et signifie donc que (1) présente *deux* points singuliers du type étudié dans les chapitres précédents; c'est-à-dire que les germes de ω en les points $(x = 0,\ y = 0)$ et $(x = 0,\ y = \infty$ ou $Y = 0)$ sont des éléments de E_p.

Pour ne pas alourdir les notations, nous désignerons encore par E_p l'ensemble de tous les germes d'équations ainsi définis, étant entendu qu'il s'agira toujours d'équations analytiques sur $(\mathbf{C}, 0) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : nous considérons le groupe G' formé des transformations

$$\Phi : (x,y) \mapsto (h(x), \varphi(x,y)),$$

où $h : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est un difféomorphisme local analytique, et $y \mapsto \varphi_x(y) = \varphi(x,y)$ est une transformation projective de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ $(\varphi_x \in \mathrm{PGl}(2, \mathbf{C}))$ dépendant analytiquement de x, telle que φ_0 laisse fixes 0 et $\infty \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Le groupe G' opère de façon évidente sur E_p (si $\omega \in E_p$, et $\Phi \in G'$, $\Phi^*\omega$ est dans E_p à unité près). Il s'agit de décrire *l'espace des orbites de* G' *dans* E_p.

(1.2) Réduction

Nous désignons ici par $\hat{E}_p$ l'espace des équations de Riccati du type précédent, à *coefficients formels en x*, et par $\hat{G}'$ le groupe « complété formel en x » de G'. Soit $\hat{G}^0 \subset \hat{G}'$ le sous-groupe des transformations telles que $h(x) = x$ et $\varphi(0, y) = y$.

Proposition (1.2.1). — *Le groupe* $\hat{G}^0$ *opère simplement sur* $\hat{E}_p$. *Tout élément de* $\hat{E}_p$ *est* $\hat{G}^0$*-isomorphe à une unique équation de la forme*

$$x^{p+1}\,dy - yP(x)\,dx = 0$$

où P *est un polynôme de degré au plus égal à p.*

La démonstration est analogue à celle de II.4.1. Remarquons que si l'on désigne par $y = \hat{u}_0(x)$ et $Y = \hat{u}_\infty(x)$ les solutions *formelles* d'une équation $\omega = 0$ ($\omega \in E_p$), avec $\hat{u}_0(0) = 0$ et $\hat{u}_\infty(0) = 0$, la transformation

$$\varphi(x, y) = (y - \hat{u}_0(x))/(1 - \hat{u}_\infty(x).y)$$

est telle que $\varphi^*\omega = x^{p+1}\,dy - y.a(x)\,dx$, où $a \in \mathbf{C}[[x]]$. ■

Nous désignerons encore par $\hat{\mathscr{E}}_p \subset \hat{E}_p$ le sous-ensemble des équations telles que $P(x) = 1 + \lambda x^p$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Une étude analogue à celle de II.5 conduit au résultat suivant :

Proposition (1.2.2). — *L'espace des orbites de* G' *dans* E_p *est en bijection canonique avec l'espace des orbites de* G *dans* $\mathscr{E}_p$, *où* G *est l'extension de* G^0 ($G^0 \subset G \subset G'$) *par les transformations de la forme*

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y) \\ \text{avec } \alpha^p = 1 \text{ et } \beta \in \mathbf{C}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (x, y) \mapsto (\alpha x, \beta / y) \\ \text{avec } \alpha^p = -1 \text{ et } \beta \in \mathbf{C}^* \end{cases}$$

Remarque (1.2.3). — Les formes normales formelles des équations de Riccati sont, comme dans l'étude plus générale déjà faite, les équations linéaires et homogènes

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0.$$

Mais les équations $\omega_{p,\lambda} = 0$ et $\omega_{p,-\lambda} = 0$ sont isomorphes par la transformation $(x, y) \mapsto (\alpha x, 1/y)$ où $\alpha^p = -1$. L'espace des orbites « formelles » dans $\mathscr{E}_p$ est donc le quotient de $\mathbf{C}$ par la symétrie $\lambda \mapsto -\lambda$: c'est un espace non lisse; l'équation $\omega_{p,0} = 0$ joue un rôle un peu différent des autres formes normales, en ce qu'elle a un groupe d'isotropie plus grand.

Pour décrire l'espace modulaire $\mathscr{E}_p/G$, nous étudierons d'abord $\mathscr{E}_p/G^0$ comme dans le chapitre III, puis l'action sur cet espace de G/G^0.

2. THÉORÈMES DE CLASSIFICATION; INVARIANTS ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS DE RICCATI

On désigne ici par Λ le faisceau sur S^1 défini par

$$\Lambda(U) = \text{groupe des applications holomorphes } x \mapsto \varphi_x \in PGl(2, \mathbf{C}) \ (x \in U),$$
infiniment plates par rapport à l'identité en $x = 0$.

D'après le théorème I.7.1, on a un isomorphisme canonique

$$\hat{G}^0/G^0 \simeq H^1(S^1; \Lambda),$$

où G^0 est le groupe défini au paragraphe précédent.

Considérons maintenant une forme normale

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0$$

comme équation de Riccati, sur $\mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Son expression dans la carte $(x, Y = 1/y)$ est

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dY + Y(1 + \lambda x^p)\,dx = 0.$$

Définissons le sous-faisceau $\Lambda_{p,\lambda} \subset \Lambda$ par la condition que les germes de sections de $\Lambda_{p,\lambda}$ préservent l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$. Ceci revient à ne retenir, dans le faisceau du même nom défini en II.6, que les éléments induisant des transformations projectives en y.

Sur les arcs définis par $\operatorname{Re} x^p > 0$, il n'y a aucune modification par rapport à la situation antérieure, qui ne donnait que des translations $(y \mapsto y + ax^\lambda \exp(-1/px^p))$; le faisceau $\Lambda_{p,\lambda}$ est donc constant sur de tels arcs, et isomorphe à $\mathbf{C}$. Par contre, sur les arcs où $\operatorname{Re} x^p < 0$, $\Lambda_{p,\lambda}$ est maintenant isomorphe à $\mathbf{C}$ aussi; il suffit d'observer la forme de l'équation au voisinage de l'infini $(Y = 0)$: le comportement de ses solutions $(Y = cx^{-\lambda}\exp(1/px^p))$ est analogue à celui déjà décrit, avec *interversion* des rôles des secteurs $\operatorname{Re} x^p > 0$ et $\operatorname{Re} x^p < 0$. Les sections de $\Lambda_{p,\lambda}$ sur les secteurs $\operatorname{Re} x^p < 0$ sont donc les transformations

$$Y \mapsto Y + bx^{-\lambda}\exp(1/px^p) \quad \text{soit } y \mapsto y/(1 + bx^{-\lambda}\exp(1/px^p)y)$$

ou encore, sur l'espace des feuilles $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (coordonnée c)

$$c \mapsto c/(1 + b.c).$$

Conclusion. — $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathbf{C}^{2p}$.

Théorème (**2.1**). — *L'espace des orbites de* G^0 *opérant sur* $\mathscr{E}_p$ *est en bijection canonique avec* $\mathbf{C} \times H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) \simeq \mathbf{C}^{2p+1}$.

La démonstration est identique à celle du théorème III.1, à ceci près qu'elle utilise les résultats de I.7.

Remarque (**2.2**). — Étant donné $g \in H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$, on voit aisément que le fibré $\pi : M_g \to (\mathbf{C}, 0)$ de fibre $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ se laisse en fait définir comme un fibré de base $\mathbf{C}$ (et

pas seulement le germe de $\mathbf{C}$ en o) ; ceci tient à ce que les applications de recollement $g_{i,i+1}$ sont holomorphes sur tout le « secteur » $U_{i,i+1}\times\mathbf{C}$, et pas seulement sur son germe en $\{o\}\times\mathbf{C}$. Le fibré $\pi : M_g \to \mathbf{C}$ est alors analytiquement trivial (Grauert [27]) donc isomorphe à $\mathbf{C}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. De plus l'équation différentielle $(\omega_{p,\lambda}; g)$ construite à partir de $\omega_{p,\lambda}$ et de g est définie sur M_g. Ceci signifie que toute orbite de G^0 dans $\mathscr{E}_p$ peut être représentée par une équation analytique sur le produit $\mathbf{C}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

On peut en fait montrer que toute orbite contient une *équation analytique sur le produit* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ *(c'est-à-dire une équation algébrique)* en utilisant un argument de Birkhoff [4] :

On passe aux systèmes linéaires (cf. § 3 ci-dessous). Deux exemplaires correspondant respectivement à $(\omega_{p_1,\lambda_1}; g_1)$ et $(\omega_{p_2,\lambda_2}; g_2)$ de même monodromie au sens près (cf. (2.4) ci-dessous) sont placés respectivement en o et à l'infini. On les recolle en utilisant convenablement le théorème de classification des fibrés holomorphes de fibre $\mathbf{C}^2$ sur $P_1(\mathbf{C})$ (Birkhoff [4], Plemelj [53], Grothendieck [29]...). L'équation obtenue est G^0-équivalente à $(\omega_{p_1,\lambda_1}; g_1)$ en o, mais en général seulement *méromorphiquement* équivalente à $(\omega_{p_2,\lambda_2}; g_2)$ à l'infini (les singularités ne sont plus nécessairement en (∞, o) et (∞, ∞) et p_2 ne caractérise plus nécessairement l'irrégularité). En remplaçant $(\omega_{p_2,\lambda_2}; g_2)$ par une équation à points singuliers réguliers (« $p_2 = o$ »), possédant la bonne monodromie, l'équation finale est à points singuliers réguliers à l'infini (Birkhoff [4]).

On peut se poser le problème plus difficile d'algébrisation du module $\mathscr{E}_p/G^0$. Nous en donnerons plus loin (§ 4) une solution explicite pour $p = 1$, par une méthode « artisanale ».

Théorème **(2.3).** — *L'espace des orbites de* G *opérant sur* $\mathscr{E}_p$ *s'identifie au quotient de* $\mathbf{C}^{2p+1}$ *par l'action du groupe* G/G^0 *définie par la conjugaison dans le faisceau* Λ.

Précisons l'action de G/G^0 sur $\mathbf{C}^{2p+1}$, en reprenant les notations de II.6.5. Représentons $(\lambda, g)\in\mathbf{C}\times H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda}) = \mathbf{C}^{2p+1}$ par $(\lambda; \mu_0, \ldots, \mu_{p-1}; \nu_0, \ldots, \nu_{p-1})$ où les $\mu_i\in\mathbf{C}$ identifient les translations g_i^+, et les $\nu_i\in\mathbf{C}$ les transformations g_i^-.

Soit $\Phi : (x,y)\mapsto(\alpha x, \beta y)$ où $\alpha = \exp(2i\pi/p)$ et $\beta\in\mathbf{C}^*$. Un calcul simple montre que

$$\Phi(\lambda; \mu_i; \nu_i) = \left(\lambda; \beta\mu_1 e^{-\frac{2i\pi\lambda}{p}}, \beta\mu_2 e^{-\frac{2i\pi\lambda}{p}}, \ldots; \frac{\nu_1}{\beta} e^{\frac{2i\pi\lambda}{p}}, \frac{\nu_2}{\beta} e^{\frac{2i\pi\lambda}{p}}, \ldots\right).$$

Si $\Phi : (x,y)\mapsto(\alpha x, 1/y)$, où $\alpha = \exp(i\pi/p)$, on a

$$\Phi(\lambda; \mu_i; \nu_i) = (-\lambda; \nu_1\exp(i\pi\lambda/p), \ldots; \mu_1\exp(-i\pi\lambda/p), \mu_2\exp(-i\pi\lambda/p), \ldots).$$

Dans le cas particulier où $p = 1$, que nous étudierons ultérieurement plus en détail, $G/G^0 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\times\mathbf{C}^*$ opère sur $\mathbf{C}^3$ selon la loi

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = (\lambda, \beta\mu, \nu/\beta) \quad \text{si } \Phi(x,y) = (x, \beta y)$$

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = (-\lambda, \nu\exp(i\pi\lambda), \mu\exp(-i\pi\lambda)) \quad \text{si } \Phi(x,y) = (-x, 1/y)$$

Le plan $\lambda = 0$ est invariant, et les orbites du groupe G/G^0 y sont les hyperboles $\mu\nu = \text{cste}$; l'espace des orbites est constitué de trois strates : deux points correspondant à $\mu = \nu = 0$, et $\{\mu = 0, \nu \neq 0\} \cup \{\mu \neq 0, \nu = 0\}$, et une courbe où la coordonnée est l'invariant analytique $\mu\nu$.

Dans les autres cas, les invariants sont : le nombre λ^2, le produit $\mu\nu$ quand il est différent de 0; le cas $\mu\nu = 0$ donne lieu à trois orbites : $\mu = \nu = 0$, $\mu = 0$ et $\nu \neq 0$, et $\mu \neq 0$, $\nu = 0$.

(2.4) Monodromie

Soit $\omega = 0$ une équation de Riccati sur $(\mathbf{C}, 0) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ du type considéré jusqu'ici. En dehors de la fibre $x = 0$, le *feuilletage* défini par cette équation est non singulier, et partout *transverse* aux fibres $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$: il définit une « connexion » sur le fibré restreint à $\mathbf{C}^*$. Cette connexion admet une *monodromie*; c'est l'automorphisme de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (défini à conjugaison près dans le groupe projectif de la droite) obtenu de la façon suivante : on considère un lacet γ d'origine et d'extrémité $x_0 \neq 0$ entourant une fois $0 \in \mathbf{C}_x$ dans le sens direct; pour tout $y \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, on relève γ en $\tilde{\gamma}$ dans la feuille passant par (x_0, y) à partir du point (x_0, y) ; l'extrémité (x_0, y') de $\tilde{\gamma}$ définit l'image y' de y par la monodromie.

Rappelons que, étant donnée une transformation projective $y' = (\alpha y + \beta)/(\gamma y + \delta)$, sa classe de conjugaison est déterminée par le nombre

$$\sigma = \frac{\mathrm{Tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(A) = \text{Trace de } A.$$

Proposition **(2.5).** — *Soit $\omega \in \mathscr{E}_p$ une équation de Riccati admettant pour G^0-invariants $(\lambda; \mu_i; \nu_i) \in \mathbf{C}^{2p+1}$. Sa monodromie est conjuguée à la transformation projective définie par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \exp(2i\pi\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . M_{p-1} \ldots M_0,$$

où

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{pour } i = 0, \ldots, p-2$$

et

$$M_{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu_{p-1}\exp(2i\pi\lambda) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu_{p-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule résulte d'un calcul direct, consistant à composer les applications de recollement définies par $(\lambda; \mu_i; \nu_i)$. ■

Dans le cas $p = 1$, la classe de conjugaison de M est caractérisée par le nombre

$$\sigma = (2\cos\pi\lambda + e^{i\pi\lambda}\mu\nu)^2.$$

Dans le cas général, nous n'avons pas trouvé de formule « agréable » donnant cet invariant.

L'identification de la monodromie met en évidence certaines propriétés du feuil-

letage $\mathscr{F}$ défini sur $\mathbf{C}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ par une équation de Riccati. Soit $\omega = 0$ une telle équation, d'invariants $(\lambda; \mu_i; \nu_i)$; nous pouvons toujours la supposer définie sur $\mathbf{C}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (remarque (2.2)). Fixons une fibre $\{x_0\}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, $x_0 \neq 0$; soit M la monodromie de l'équation, lue dans cette fibre, et $\sigma = \mathrm{Tr}^2(M)/\det(M)$.

1) Si $\sigma \neq 4$, M admet deux points fixes distincts; les feuilles correspondantes sont difféomorphes à $\mathbf{C}^*$ par la projection canonique $\mathbf{C}\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ (elles définissent donc des fonctions « uniformes »). En choisissant la coordonnée dans la fibre considérée de façon que les points fixes de M soient 0 et ∞, M s'écrit $y' = \rho y$, où $\rho + 1/\rho + 2 = \sigma$; les nombres ρ et $1/\rho \in \mathbf{C}^*$ représentent les *holonomies* des deux feuilles uniformes.

On voit ainsi que, pour tout $\rho \in \mathbf{C}^*$, il existe $\omega \in \mathscr{E}_p$ (pour tout p) admettant une feuille d'holonomie ρ. Ceci répond en partie à une question de Painlevé [52].

Notons enfin que les deux feuilles uniformes précédentes présentent en général une singularité essentielle en $x = 0$ (si μ et $\nu \neq 0$).

2) Si $\sigma = 4$, M est *parabolique* (elle n'admet qu'un seul point fixe : elle se lit comme une translation si le point fixe est pris comme point à l'infini de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$). Dans ce cas, $\mathscr{F}$ n'admet qu'une feuille uniforme sur $\mathbf{C}^*$; cette feuille a en général une singularité essentielle en 0.

3. ÉQUATIONS DE RICCATI ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons les systèmes d'équations différentielles linéaires

$$x^{p+1}\frac{dY}{dx} = A(x).Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.Y, \tag{1}$$

où $Y = (y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2$, et A est une matrice 2×2, à coefficients dans $\mathbf{C}\{x\}$, avec $A(0) \neq 0$ et $p \geqslant 1$ est un entier.

Deux systèmes (1), de matrices A et B, sont dits *analytiquement équivalents* (resp. équivalents au sens de Birkhoff) s'il existe une transformation $Y' = T(x).Y$ où $T(x) \in Gl(2, \mathbf{C})$ est à coefficients dans $\mathbf{C}\{x\}$ (resp. $T(0) = Id$), qui transforme une équation en l'autre. Ceci équivaut à

$$B = T^{-1}AT - x^{p+1}T^{-1}\frac{dT}{dx}.$$

Toute équation (1) définit une équation de Riccati $\omega \in \mathscr{E}_p$; il suffit de poser $y = y_2/y_1$ pour obtenir

$$x^{p+1}\frac{dy}{dx} = (y, -1)A(x)\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = -c + (a-d)y + by^2. \tag{1'}$$

Deux systèmes (1) définissent la même équation de Riccati si et seulement si leurs matrices A et B diffèrent d'une matrice scalaire $f(x).I$ où $f \in \mathbf{C}\{x\}$. La formule (1') montre que toute équation de Riccati provient d'un système linéaire (1).

La classification des systèmes linéaires a été développée récemment par divers auteurs : Jurkat-Lutz-Peyerimhof [37], Malgrange [43], Sibuya [62], Balser-Jurkat-Lutz [1], Jurkat [36] (cf. aussi Bertrand [3] pour une élégante interprétation due à Deligne). Modulo le « dictionnaire » ci-dessus, notre classification correspond à celle de Sibuya [62], Malgrange [43], Balser-Jurkat-Lutz [1]. Nous comparerons plus loin notre théorie à celle de [37] (cas $p = 1$).

4. LES INVARIANTS DE JURKAT-LUTZ-PEYERIMHOFF ET LEUR GÉNÉRALISATION

(4.1) Rappels

Rappelons d'abord brièvement la définition et les propriétés essentielles de ces invariants. On considère (au voisinage de l'infini) des systèmes linéaires d'ordre 2 de la forme

$$\frac{dY}{dz} = A(z).Y \quad \text{où} \quad A(z) = A_0 + A_1 z^{-1} + \sum_{n \geqslant 2} A_n z^{-n} \tag{4.1.1}$$

(A est à coefficients dans $\mathbf{C}\{1/z\}$). On suppose que A_0 est diagonale (les auteurs étudient également le cas général où A_0 est sous forme de Jordan; nous n'en avons pas besoin ici) :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

On note $\{\lambda_1', \lambda_2'\}$ la diagonale de A_1.

Le système (4.1.1) admet une solution fondamentale *formelle* de la forme

$$F(z) z^{A_1} e^{A_0 z}, \quad \text{avec } F(z) = I + \sum_{n \geqslant 1} F_n z^{-n}. \tag{4.1.2}$$

On a alors le

Théorème **(4.1.3).** — *On pose* $K_n = \operatorname{diag}\{((-1)^n n^{\lambda_2' - \lambda_1'}, n^{\lambda_1' - \lambda_2'})\}(\lambda_2 - \lambda_1)^{-n}\Gamma(n)$, $n \geqslant 1$.

(i) $\lim_{n \to +\infty} F_n K_n^{-1}$ *existe et est de la forme*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) A_0, A_1 *et* C *forment un système complet d'invariants de Birkhoff pour le système* (4.1.1).

(iii) A_0, A_1 *et la matrice* C *modulo conjugaison par une matrice diagonale non singulière* (à coefficients complexes) *forment un système complet d'invariants holomorphes pour* (4.1.1).

(Les définitions de l'équivalence analytique et de l'équivalence au sens de Birkhoff ont été rappelées au § 3.)

En d'autres termes, $\mathbf{C}^2$ (resp. $\mathbf{C}^2$ modulo l'action de $\mathbf{C}^*$: $(\sigma_1, \sigma_2) \overset{t}{\mapsto} (\sigma_1/t, t\sigma_2)$) représente l'espace des orbites des systèmes (4.1.1) formellement équivalents au sens de Birkhoff (resp. formellement équivalents) au système

$$\frac{dY}{dz} = (A_0 + A_1 z^{-1}).Y$$

sous l'action du sous-groupe des matrices tangentes à l'identité de $Gl(2; \mathbf{C}\{1/z\})$ (resp. du groupe $Gl(2; \mathbf{C}\{1/z\})$). Remarquons qu'il s'agit ici d'un résultat du type « *modules grossiers* » : on n'a pas *a priori* de structure holomorphe sur l'espace modulaire ainsi obtenu.

Nous nous proposons d'établir le théorème (4.1.3) en montrant que c'est une conséquence facile du théorème d'isomorphisme fondamental (ici le théorème de Malgrange-Sibuya; voir I.7), moyennant la formule de Stirling et l'astuce de Malgrange dont nous avons déjà fait usage en I.4 et I.7. Cette méthode de démonstration permet d'étendre le résultat au « rang de Poincaré » quelconque (le théorème (4.1.3) concerne le rang de Poincaré un) tout en donnant explicitement l'isomorphisme entre l'espace modulaire de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff et celui de Malgrange-Sibuya; il en résultera que l'espace modulaire de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff est un véritable espace de modules, avec structure holomorphe, et pas seulement un espace de « modules grossiers » comme dans [37].

(4.2) Formes normales des systèmes d'ordre 2. Isotropie sectorielle

On se place ici dans le cas global linéaire (cf. I.7), avec $H = Gl(2; \mathbf{C})$. On considère un système différentiel linéaire de la forme $(p \geqslant 1)$

$$\Delta Y = x^{p+1}\frac{dY}{dx} - A.Y = 0 \qquad A \in \mathrm{End}(2; \mathbf{C}\{x\}). \tag{4.2.1}$$

Une section $X \in \Gamma(U; \Lambda_H)$ (notations de I.7) laisse invariant le système (4.2.1) si et seulement si (cf. 3 ci-dessus)

$$x^{p+1}\frac{dX}{dx} - [A, X] = 0. \tag{4.2.2}$$

Cette équation définit donc le sous-faisceau $\Lambda_A \subset \Lambda_H$ d'isotropie sectorielle de (4.2.1) (cf. Malgrange [43]). Nous allons expliciter ce faisceau quand $A = A_0$ correspond à une forme normale formelle « assez générale » de l'équation (4.2.1).

Une solution fondamentale formelle de (4.2.1) s'écrit $\hat{F}(t).t^L.\exp(Q(1/t))$ (où $t^q = x$ pour q convenable; $\hat{F} \in Gl(2; \mathbf{C}[[t]])$; $L \in \mathscr{L}(H) = \mathrm{End}(2; \mathbf{C})$ et $Q \in \mathrm{End}(2; \mathbf{C}[1/t])$ est une matrice diagonale). Nous nous limiterons à l'étude du cas où $q = 1$ et où $Q(1/x) = \begin{pmatrix} -\beta_1/x^p & 0 \\ 0 & -\beta_2/x^p \end{pmatrix}$ avec $\beta_1 \neq \beta_2$.

On peut alors supposer L diagonale de la forme $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Le système (4.2.1) est alors équivalent au système

$$\textbf{(4.2.3)} \qquad \Delta_0 Y = x^{p+1}\frac{dY}{dx} - A_0.Y = 0 \quad \textit{(forme normale)},$$

où $$A_0(x) = -x^{p-1}Q'(1/x) + x^p L = \begin{pmatrix} -p\beta_1 + \lambda_1 x^p & 0 \\ 0 & -p\beta_2 + \lambda_2 x^p \end{pmatrix}.$$

L'espace des solutions de l'équation matricielle associée

$$\textbf{(4.2.4)} \qquad x^{p+1}\frac{dX}{dx} - [A_0, X] = 0$$

est l'espace des matrices $x^L.\exp(Q(1/x)).C.\exp -Q(1/x).x^{-L}$ où $C \in \mathrm{End}(2; \mathbf{C})$; une base de cet espace est formée des matrices X_{ij} correspondant à $C = E_{ij}$, où $\{E_{ij}\}$ est la base canonique de l'espace des matrices carrées 2×2. Le seul coefficient non nul de X_{ij} est le terme (i,j) qui est $x^{\lambda_{ij}}.\exp(-\beta_{ij}/x^p)$, avec $\lambda_{ij} = \lambda_j - \lambda_i$ et $\beta_{ij} = \beta_j - \beta_i$ ($\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$; $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$). Posons $\lambda = \lambda_{12}$ et $\beta = \beta_{12}$.

Le calcul précédent montre que les *transformations isotropes* de (4.2.3) (plates par rapport à l'identité) sont

a) $g_\nu^+ = \begin{pmatrix} 1 & \nu.x^\lambda.\exp(-\beta/x^p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur tout secteur où $\mathrm{Re}(\beta/x^p) > 0$ ($\nu \in \mathbf{C}$),

b) $g^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu x^{-\lambda}\exp\beta/x^p & 1 \end{pmatrix}$ sur tout secteur où $\mathrm{Re}(\beta/x^p) < 0$ ($\mu \in \mathbf{C}$),

c) réduites à l'identité sur tout secteur (connexe) contenant un rayon où $\mathrm{Re}(\beta/x^p) = 0$.

Introduisons le recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i; i = 0, \ldots, 2p-1\}$ de S^1 défini par

$$U_{2j} = \left\{x \,\middle|\, \frac{\mathrm{Arg}\,\beta}{p} + (4j-1)\frac{\pi}{2p} < \mathrm{Arg}\,x < \frac{\mathrm{Arg}\,\beta}{p} + (4j+3)\frac{\pi}{2p}\right\},$$

$$U_{2j+1} = \left\{x \,\middle|\, \frac{\mathrm{Arg}\,\beta}{p} + (4j+1)\frac{\pi}{2p} < \mathrm{Arg}\,x < \frac{\mathrm{Arg}\,\beta}{p} + (4j+5)\frac{\pi}{2p}\right\},$$

où $0 \leqslant \mathrm{Arg}\,\beta < 2\pi$. Les secteurs $V_j^+ = U_{2j-1,2j}$ et $V_j^- = U_{2j,2j+1}$ (si $p = 1$, $V_0^+ \cup V_0^- = U_{0,1} = U_{1,0}$) sont alors les composantes connexes des ouverts où $\mathrm{Re}(\beta/x^p) > 0$ (resp. < 0).

Le faisceau Λ_{A_0} est ainsi *constant* sur les ouverts V_j^+ et V_j^-, et sa fibre est un espace affine de dimension 1 sur chacun de ces secteurs. De plus, ses fibres au bord des V_j^+ et V_j^- (c'est-à-dire au « centre » des U_i) sont réduites à un point. Il est donc clair que

$$H^1(S^1; \Lambda_{A_0}) \simeq H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{A_0})$$

et chaque élément de cet espace est défini biunivoquement par une collection $\{g_{\mu_k}^-; g_{\nu_l}^+ \mid k, l = 0, \ldots, p-1\}$ où $g_{\mu_k}^-$ est défini sur V_k^- et $g_{\nu_l}^+$ sur V_l^+.

Ceci identifie donc $H^1(S^1; \Lambda_{A_0})$ avec l'espace $\mathbf{C}^{2p}$ des paramètres $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1};$

$\nu_0, \ldots, \nu_{p-1}$). Pour *normaliser* cette identification, nous choisissons une fois pour toutes une détermination de Arg x sur chacun des secteurs V_j^+ et V_j^- : celle qui est précisée par les inégalités de définition données plus haut. Ainsi, la détermination de x^λ (ou $x^{-\lambda}$) sur chaque V_j^+ (ou V_j^-) est fixée.

(4.3) Propriétés asymptotiques des trivialisations des éléments de $H^1(S^1; \Lambda_{A_0})$

Considérons l'isomorphisme fondamental

$$\hat{G}_H^0/G_H^0 \xrightarrow{\sim} H^1(S^1; \Lambda_H)$$

où $H = Gl(2; \mathbf{C})$ (nous utilisons les notations de I.7). A tout $g \in H^1(S^1; \Lambda_{A_0}) \subset H^1(S^1; \Lambda_H)$ correspond par cet isomorphisme un $\hat{F} \in \hat{G}_H^0$ défini modulo G_H^0 (matrices holomorphes) ; on aura

$$\hat{F}(x) = I + \sum_{n \geqslant 1} x^n . F_n, \quad \text{avec } F_n \in \mathscr{L}(H) = \mathrm{End}(2; \mathbf{C}).$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique (quand $n \to \infty$) des coefficients des F_n en fonction des paramètres $(\mu_i; \nu_j) \in \mathbf{C}^{2p}$ du cocycle g.

Nous allons exploiter pour cela l'idée déjà utilisée en I.4 et I.7, qui consiste à se ramener à l'isomorphisme « abélien » infinitésimal (calculable par la transformation de Cauchy-Heine)

$$\mathscr{L}(\hat{G}_H^0)/\mathscr{L}(G_H^0) \xrightarrow{\sim} H^1_{ab}(S^1; \mathscr{L}(\Lambda_H)).$$

Nous utiliserons l'application $h \mapsto I + h$ de $\mathscr{L}(\Lambda_H)$ dans Λ_H, qui établit une bijection entre les deux faisceaux (partie principale de l'exponentielle).

Soit donc $g = \{g_{i,i+1}\} \in H^1(\mathfrak{U}; \Lambda_{A_0})$ et posons

$$g_{i,i+1} = I + f_{i,i+1} \quad \{f_{i,i+1}\} \in H^1_{ab}(\mathfrak{U}; \mathscr{L}(\Lambda_{A_0})).$$

Soit $\{g_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \Lambda_H^0)$ une o-cochaîne telle que $\partial\{g_i\} = g$. Posons

$$g_i = I + f_i \quad \{f_i\} \in \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}; \mathscr{L}(\Lambda_H^0)).$$

Nous avons vu (cf. I.4.4.3) que

$$\partial_{ab}\{f_i\} = \{h_{i,i+1}\} \in H^1_{ab}(\mathfrak{U}; \mathscr{L}(\Lambda_H)) \quad \text{avec } h_{i,i+1} = f_{i,i+1} \circ g_{i+1}.$$

Notons que, la matrice $f_i(x)$ étant nulle pour $x = 0$, elle s'écrit $f_i(x) = x . L_i(x)$ où L_i est une matrice à coefficients *bornés* sur tout secteur strict de U_i. On peut donc écrire

$$h_{i,i+1} = f_{i,i+1} + x . f_{i,i+1} . L_{i+1}. \tag{4.3.1}$$

Finalement la cochaîne $\{f_i\}$ s'obtient en faisant la somme des transformées de Cauchy-Heine $H_{\gamma_i}(h_{i,i+1})$ où γ_i est un segment d'origine o situé dans le secteur $U_{i,i+1}$; l'élément de $\hat{G}_H^0$ correspondant à g sera donc

$$\hat{F} = I + \sum_i \hat{H}_{\gamma_i}(h_{i,i+1}) \text{ modulo les matrices holomorphes.}$$

Étudions donc de plus près les séries $\hat{H}_{\gamma_i}(h_{i,i+1})$.

a) $i = 2j-1$; alors $U_{i,i+1} = V_j^+$; on prendra pour γ_i un segment γ_j^+ de la bissectrice δ_j^+ de ce secteur.

On a $f_{i,i+1} = \nu_j x^\lambda \exp(-\beta/x^p).E^+$ où $E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par définition du cocycle g. D'autre part

$$x.f_{i,i+1}.L_{i+1} = \nu_j x^{\lambda+1}\exp(-\beta/x^p).M_j^+,$$

où $M_j^+ = E^+.L_{i+1}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_j^+ & b_j^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et a ses coefficients bornés sur γ_j^+. Un calcul immédiat montre alors que

$$\textbf{(4.3.2)} \qquad \hat{H}_{\gamma_j^+}(h_{2j-1,2j}) = \nu_j \sum_n x^n . \begin{pmatrix} a_{j,n} & b_{j,n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où
$$a_{j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^+} \zeta^{\lambda-n}\exp(-\beta/\zeta^p).a_j^+(\zeta)\,d\zeta$$

et
$$b_{j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^+} \zeta^{\lambda-n-1}\exp(-\beta/\zeta^p)\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^+} \zeta^{\lambda-n}\exp(-\beta/\zeta^p)b_j^+(\zeta)\,d\zeta.$$

Proposition **(4.3.3)**. — *On a*

$$b_{j,n} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\exp\left(2j\frac{\lambda-n}{p}.i\pi\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right).(1+\varepsilon_n), \qquad \text{où } \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$$

$$a_{j,n} = \varepsilon'_n\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right), \qquad \text{où } \lim_{n\to\infty}\varepsilon'_n = 0.$$

Cette proposition sera démontrée au § (4.5).

b) $i = 2j$, donc $U_{i,i+1} = V_j^-$ et l'on prend pour γ_i un segment γ_j^- de la bissectrice δ_j^- de ce secteur.

On démontre alors, par un calcul analogue au précédent, que

$$\textbf{(4.3.4)} \qquad \hat{H}_{\gamma_j^-}(h_{2j,2j+1}) = \mu_j \sum_n x^n . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{j,n} & d_{j,n} \end{pmatrix}$$

où
$$c_{j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^-} \zeta^{-\lambda-n-1}\exp(\beta/\zeta^p)\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^-} \zeta^{-\lambda-n}\exp(\beta/\zeta^p)c_j^-(\zeta)\,d\zeta$$

et
$$d_{j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j^-} \zeta^{-\lambda-n}\exp(\beta/\zeta^p)\,d_j^-(\zeta)\,d\zeta.$$

Proposition **(4.3.5)**

$$c_{j,n} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{-\frac{\lambda+n}{p}}\exp\left(-(2j+1)\frac{\lambda+n}{p}.i\pi\right)\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{p}\right).(1+\varepsilon_n) \quad \text{où } \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$$

$$d_{j,n} = \varepsilon'_n\beta^{-\frac{\lambda+n}{p}}\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{p}\right) \quad \text{où } \lim_{n\to\infty}\varepsilon'_n = 0.$$

Ce résultat sera aussi conséquence de (4.5).

Nous allons déduire des deux propositions précédentes le

Théorème **(4.3.6).** — *Soit* $\hat{F} = I + \sum_n x^n.F_n \in \hat{G}^0_H$ *une série formelle correspondant au cocycle* $g = (\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}; \nu_0, \ldots, \nu_{p-1}) \in \mathbf{C}^{2p}$. *On pose* $F_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. *Alors :*

(i) *Pour tout* $q \in \{0, \ldots, p-1\}$ *la suite (indexée par m)*

$$\beta^{m+\frac{q}{p}}.b_{mp+q}/\Gamma\left(m+\frac{q-\lambda}{p}\right)$$

a une limite $\sigma_{2,q} \in \mathbf{C}$ *quand* $m \to \infty$.

(ii) *Pour tout* $q \in \{0, \ldots, p-1\}$ *la suite (indexée par m)*

$$(-1)^m\beta^{m+\frac{q}{p}}.c_{mp+q}/\Gamma\left(m+\frac{q+\lambda}{p}\right)$$

a une limite $\sigma_{1,q} \in \mathbf{C}$ *quand* $m \to \infty$.

(iii) *Les suites* $\beta^{n/p}a_n/\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right)$ *et* $\beta^{n/p}d_n/\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{p}\right)$ *tendent vers zéro quand* $n \to \infty$.

(iv) *On a enfin*

$$\sigma_{2,q} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{\lambda/p}\sum_{j=0}^{p-1}\nu_j\exp\left(2j\frac{\lambda-q}{p}.i\pi\right)$$

$$\sigma_{1,q} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{-\lambda/p}\sum_{j=0}^{p-1}\mu_j\exp\left(-(2j+1)\frac{\lambda+q}{p}.i\pi\right)$$

Démonstration. — La vérification est immédiate pour la série $\hat{F}$ étudiée en (4.3.3) et (4.3.5). Tout autre $\hat{F}' \in \hat{G}^0_H$ correspondant au même g s'écrit $\hat{F}' = \hat{F}.T$ où $T \in G^0_H$ est holomorphe. On a donc $F'_n = F_n + F_{n-1}.T_1 + \ldots + T_n$ avec $T = I + \Sigma x^n.T_n$; comme T est holomorphe, les coefficients de T_n sont majorés en module par $C.A^n$, où C et A sont des constantes positives convenables. On en déduit alors aisément, par les propriétés de la fonction Gamma, que les coefficients de F'_n ont la même partie principale que ceux de F_n. ■

(4.4) Calcul des invariants d'un système linéaire.

Nous appliquons maintenant les résultats précédents au problème fondamental suivant; soit un système (4.2.1)

$$x^{p+1}\frac{dY}{dx} - A.Y = 0$$

supposé être formellement isomorphe (au sens de Birkhoff) à (4.2.3)

$$x^{p+1}\frac{dY}{dx} - A_0.Y = 0, \quad \text{où} \quad A_0 = \begin{pmatrix} -p\beta_1 + \lambda_1 x^p & 0 \\ 0 & -p\beta_2 + \lambda_2 x^p \end{pmatrix}.$$

Il existe alors une *unique* transformation formelle $\hat{F} \in \hat{G}_H^0$ ramenant (4.2.1) à (4.2.3). A cette transformation correspond par l'isomorphisme fondamental une « classe caractéristique » $g \in H^1(S^1; \Lambda_H)$ qui appartient en fait à $H^1(S^1; \Lambda_{A_0})$. Il s'agit de calculer les paramètres $(\mu_j; \nu_j) \in \mathbf{C}^{2p}$ de ce cocycle en fonction des coefficients de la série A.

La réponse est maintenant évidente : la série F se calcule en exprimant que $F(x).\exp(Q(1/x)).x^{-L}$ (notations de (4.2)) est une solution fondamentale de (4.2.1); ceci permet de déterminer par récurrence les coefficients des matrices

$$F_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

On applique ensuite le théorème (4.3.6), en observant que les deux systèmes de p équations à p inconnues (les μ_j et les ν_j)

$$\sigma_{2,q} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{\lambda/p}\sum_j \nu_j.\exp\left(2i\frac{\lambda - q}{p}i\pi\right) \qquad q = 0, \ldots, p-1,$$

$$\sigma_{1,q} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{-\lambda/p}\sum_j \mu_j.\exp\left(-(2j+1)\frac{\lambda + q}{p}i\pi\right) \qquad q = 0, \ldots, p-1,$$

ont des déterminants de Van der Monde, et sont donc de Cramer. On détermine ainsi $(\nu_0, \ldots, \nu_{p-1})$ en fonction de $(\sigma_{2,0}, \ldots, \sigma_{2,p-1})$ et $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1})$ en fonction de $(\sigma_{1,0}, \ldots, \sigma_{1,p-1})$.

Pour $p = 1$, on obtient

(4.4.1) $$\sigma_2 = \frac{1}{2i\pi}\beta^{\lambda}.\nu \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \frac{1}{2i\pi}e^{-i\pi\lambda}.\beta^{-\lambda}.\mu.$$

D'autre part, la formule de Stirling montre que $\Gamma(n-\lambda) \sim n^{-\lambda}\Gamma(n)$; on retrouve ainsi le théorème (4.1.3) de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff.

(4.5) Démonstration des Propositions (4.3.3) et (4.3.5)

Lemme (**4.5.1**). — *Soit*

$$r_{k,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\delta_k^+} \zeta^{\lambda-n-1}\exp(-\beta/\zeta^p)d\zeta$$

et

$$\rho_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_k^+} |\zeta^{\lambda-n-1}\exp(-\beta/\zeta^p)|\,d\zeta.$$

On a

(i) $$r_{k,n} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\exp\left(2k\frac{\lambda-n}{p}.i\pi\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right)$$

(ii) $$\rho_{k,n} = \frac{1}{2\pi p}|\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}|\exp\left(-2k\frac{\operatorname{Im}\lambda}{p}\right).\Gamma\left(\frac{n-\operatorname{Re}\lambda}{p}\right)$$

(iii) $$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}\rho_{k,n-1}/\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right) = 0.$$

Preuve. — Rappelons que δ_k^+ est la demi-droite bissectant V_k^+; elle a pour argument $2k\pi/p + (\operatorname{Arg}\beta)/p$. On définit dans la suite $\beta^{1/p}$ comme le nombre d'argument $(\operatorname{Arg}\beta)/p$ (c'est-à-dire qu'on le fixe sur la bissectrice de V_0^+). Pour calculer $r_{k,n}$ on pose $\beta/\zeta^p = t$ $(t\in\mathbf{R}^+)$ d'où $\zeta = \beta^{1/p}\exp\left(2k\frac{i\pi}{p}\right)t^{-1/p}$ et l'on obtient

$$r_{k,n} = \frac{1}{2i\pi p}\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\exp\left(2k\frac{\lambda-n}{p}.i\pi\right)\int_0^{+\infty} t^{\frac{n-\lambda}{p}-1}e^{-t}dt \quad \text{d'où (i).}$$

L'égalité (ii) s'obtient de la même façon. On a alors

$$\rho_{k,n-1}/\beta^{\frac{\lambda-n}{p}}\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right) = \exp\left(-2k\frac{\operatorname{Im}\lambda}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n-1-\operatorname{Re}\lambda}{p}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{p}\right).$$

L'assertion (iii) est alors conséquence immédiate de la propriété suivante de la fonction Γ (que nous laissons en exercice au lecteur) : soit $a\in\mathbf{C}$ avec $\operatorname{Re}a>0$; on a $\operatorname*{Lim}_{x\to+\infty}\Gamma(x-a)/\Gamma(x) = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer (4.3.3) : observons d'abord que si nous définissons des suites $r'_{k,n}$ et $\rho'_{k,n}$ par les mêmes formules intégrales que ci-dessus, mais en remplaçant la demi-droite d'intégration δ_k^+ par un segment $\gamma_k^+\subset\delta_k^+$ d'origine 0, on a $|r_{k,n}-r'_{k,n}|\leqslant C.B^n$ et $|\rho_{k,n}-\rho'_{k,n}|\leqslant C.B^n$ où C et B sont des constantes positives convenables (ne dépendant que de γ_k^+, de λ et de p). Il en résulte que $r'_{k,n} = (1+\varepsilon_n).r_{k,n}$, où $\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$, et $\rho'_{k,n} = (1+\varepsilon'_n).\rho_{k,n}$ où $\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}\varepsilon'_n = 0$. La proposition s'en déduit aisément. (4.3.5) s'établit de façon analogue. ■

5. UNE FAMILLE D'ÉQUATIONS DE RICCATI. ÉTUDE DES INVARIANTS

(5.1) Définitions. Problèmes

Soient $\lambda, a, b \in \mathbf{C}$. On pose

$$\rho_{\lambda,a,b} = x^2 dy - [y(1+\lambda x) + ax - bxy^2]dx.$$

La forme $\rho_{\lambda,a,b}$ appartient à $\mathscr{E}_1$ et admet $\rho_{\lambda,0} = \omega_{1,\lambda}$ pour forme normale *formelle*.

Nous nous proposons d'étudier l'application associant à chaque équation $\rho_{\lambda,a,b} = 0$ le point correspondant du G^0-espace modulaire $\mathscr{E}_1/G^0 = \mathbf{C}^3$; on est donc amené à étudier l'application

$$(\lambda, a, b) \mapsto (\lambda, \mu, \nu) \quad \text{(notations de (2.3))}.$$

Pour obtenir la G-classification, remarquons que la famille $\rho_{\lambda,a,b}$ est invariante sous l'action du groupe $\mathbf{C}^*$ ($(x,y) \mapsto (x, \beta y)$, $\beta \in \mathbf{C}^*$, transforme $\rho_{\lambda,a,b}$ en $\rho_{\lambda,a/\beta,\beta b}$), et que cette action commute avec celle de $\mathbf{C}^*$ dans l'espace modulaire $\mathbf{C}^3$. L'application précédente induira donc une application

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \ni (\lambda, ab) \mapsto (\lambda, \mu\nu) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*.$$

Remarquons enfin que le changement de variables $(x,y) \mapsto (-x, 1/y)$ transforme $\rho_{\lambda,a,b} = 0$ en $\rho_{-\lambda,b,a} = 0$ (mais $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{C}^3$ en $(-\lambda, \nu e^{i\pi\lambda}, \mu e^{-i\pi\lambda})$).

Nous savons *a priori* que les applications $(\lambda, a, b) \mapsto (\lambda, \mu, \nu)$ et $(\lambda, ab) \mapsto (\lambda, \mu\nu)$ sont *analytiques*, d'après I.2.3.2. Nous allons calculer $\mu\nu$ en fonction de ab, par deux méthodes différentes. La première consiste à étudier la monodromie de l'équation $\rho_{\lambda,a,b} = 0$ *prolongée* à $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ par une étude géométrique directe (cette méthode est rapide mais spécifique de la famille étudiée); la seconde méthode utilise le théorème (4.1.3) de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff relatif aux systèmes linéaires; elle est plus délicate mais de portée plus générale.

(5.2) Un calcul de monodromie

Le changement de variable $x = 1/z$ dans l'équation $\rho_{\lambda,a,b} = 0$ donne

$$z dy + [y(z+\lambda) + a - by^2]dz = 0. \tag{5.2.1}$$

On prolonge ainsi $\rho_{\lambda,a,b} = 0$ à $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

L'équation obtenue a en général deux points singuliers sur la droite $z = 0$ ($x = \infty$), donnés par

$$by^2 - \lambda y - a = 0$$

soit $$y_1 = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4ab})/2b, \quad y_2 = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4ab})/2b.$$

En particulier, pour $\lambda = 0$, on obtient $y_1 = \sqrt{a/b}$ et $y_2 = -\sqrt{a/b}$ (on supposera désormais $ab \neq 0$).

Calculons les valeurs propres de l'équation (*i.e.* de son 1-jet) aux points singuliers *réguliers* $(0, y_1)$ et $(0, y_2)$. Les jets à l'ordre 1 s'écrivent (on pose $y = y_1 + v_1 = y_2 + v_2$)

$$z\,dv_1 + [(\lambda - 2by_1)v_1 + y_1 z]\,dz \quad \text{(resp. } z\,dv_2 + [(\lambda - 2by_2)v_2 + y_2 z]\,dz\text{)}.$$

ce qui donne pour valeurs propres 1 et $2by_1 - \lambda$ (resp. 1 et $2by_2 - \lambda$). En particulier pour $\lambda = 0$ on obtient 1 et $\pm 2\sqrt{ab}$.

Ainsi, si $\pm\sqrt{\lambda^2 + 4ab} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, on se trouve pour les deux points singuliers dans le « domaine de Poincaré », et l'équation différentielle est linéarisable au voisinage de chacun d'eux. On en déduit l'existence de *deux variétés invariantes holomorphes* transverses à $z = 0$ en y_1 et y_2 (on retrouve ces variétés au voisinage de $x = 0$: ce sont les deux feuilles uniformes à singularité essentielle dont nous avons montré l'existence en (2.5)).

La monodromie de l'équation (5.2.1), donc de l'équation initiale $\rho_{\lambda, a, b} = 0$, lue sur une fibre « verticale » $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, est caractérisée par les deux points fixes définis par les deux variétés invariantes précédentes, et un couple de *birapports* (inverses l'un de l'autre) définis par l'*holonomie* de chacune de ces variétés. Ce couple de birapports est déterminé par les équations linéarisées, donc par les valeurs propres calculées plus haut; on obtient

$$e^{2i\pi\sqrt{\lambda^2 + 4ab}} \quad \text{et} \quad e^{-2i\pi\sqrt{\lambda^2 + 4ab}}.$$

Si χ est le birapport, l'invariant de conjugaison de la monodromie est

$$\sigma = \chi + \chi^{-1} + 2$$

soit ici, après simplification,

$$\sigma = 4\cos^2 \pi\sqrt{\lambda^2 + 4ab}.$$

D'autre part, l'invariant de conjugaison de la monodromie de l'équation correspondant à $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{C}^3$ est (proposition (2.5))

$$\sigma = (2\cos \pi\lambda + e^{i\pi\lambda}\mu\nu)^2.$$

On obtient donc

$$\sigma = (2\cos \pi\lambda + e^{i\pi\lambda}\mu\nu)^2 = 4\cos^2 \pi\sqrt{\lambda^2 + 4ab}$$

d'où

$$\mu\nu = 4e^{-i\pi\lambda} \sin \pi\left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4ab}}{2}\right) \sin \pi\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4ab}}{2}\right). \tag{5.2.2}$$

En particulier, si $\lambda = 0$,

$$\mu\nu = -4\sin^2 \pi\sqrt{ab}. \tag{5.2.3}$$

Ces formules, qui n'ont été établies que pour $\pm\sqrt{\lambda^2+4ab}\in\mathbf{C}-\mathbf{R}$, s'étendent à $ab\in\mathbf{C}$ car $\mu\nu$ est fonction analytique de ab.

Le cas où la transformation de monodromie est une translation (voir (2.5)) correspond à un invariant de conjugaison $\sigma=4$, c'est-à-dire à

$$\cos\pi\sqrt{\lambda^2+4ab}=\pm 1 \quad\text{et}\quad 2\cos\pi\lambda+e^{-i\pi\lambda}\mu\nu=\pm 2$$

(on n'est évidemment pas, dans ce cas, dans le domaine de Poincaré pour les singularités à l'infini!).

On obtient donc $\sqrt{\lambda^2+4ab}\in\mathbf{Z}$ et $\mu\nu=2e^{i\pi\lambda}(\pm 1-\cos\pi\lambda)$. Pour $\lambda=0$, cela donne $2\sqrt{ab}\in\mathbf{Z}$ et $\mu\nu=0$, ou $\mu\nu=-4$. On retrouve bien sûr les cas $\mu=0$, $\nu=0$; pour $\mu\nu=-4$ $\left(\sqrt{ab}\in 1/2+\mathbf{Z}\right)$, on obtient des équations admettant une solution uniforme unique, à singularités irrégulières en $x=0$ et régulières en $x=\infty$.

On a d'autre part

$$\frac{d(\mu\nu)}{d(ab)}=-\frac{4\pi e^{-i\pi\lambda}}{\sqrt{\lambda^2+4ab}}\sin\pi\sqrt{\lambda^2+4ab}. \tag{5.2.4}$$

Cette dérivée est nulle pour $\sqrt{\lambda^2+4ab}\in\mathbf{Z}-\{0\}$, et l'image de l'ensemble singulier de $ab\mapsto\mu\nu$ est défini par

$$\mu\nu=2e^{i\pi\lambda}(\pm 1-\cos\pi\lambda)\qquad(\mu\nu=0\text{ ou }-4\text{ pour }\lambda=0).$$

Cet ensemble singulier correspond donc aux équations « à une seule feuille uniforme ».

On a enfin

$$\left(\frac{d(\mu\nu)}{d(ab)}\right)_{\sqrt{\lambda^2+4ab}=0}=-4\pi^2e^{-i\pi\lambda}. \tag{5.2.5}$$

(5.3) Utilisation des invariants de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff

Appliquons le théorème (4.1.3) en fixant

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A_1=\begin{pmatrix}0 & -b\\ -a & -\lambda\end{pmatrix}$$

(*i.e.* $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_1'=0$, $\lambda_2'=-\lambda$). Le système correspond alors à l'équation de Riccati $\rho_{\lambda,a,b}=0$ définie en (5.1), au sens du § 3.

Un calcul de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff ([37], 10, p. 71) montre que

$$\sigma_1=-a/\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta) \tag{5.3.1}$$

$$\sigma_2=-b/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)$$

où $\alpha=\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+4ab}\right)/2$ et $\beta=\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+4ab}\right)/2$

sont les racines de l'équation $u^2 + \lambda u - ab = 0$. Pour $\lambda = 0$ $(\alpha = -\beta = ab)$, on obtient en utilisant la formule des compléments et l'équation fonctionnelle de Γ,

$$\sigma_1 = -\frac{a}{\pi\sqrt{ab}} \sin \pi\sqrt{ab} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -\frac{b}{\pi\sqrt{ab}} \sin \pi\sqrt{ab}. \tag{5·3·2}$$

Remarquons que l'on a, en utilisant toujours la formule des compléments et l'équation fonctionnelle de Γ,

$$\sigma_1\sigma_2 = -\frac{1}{\pi^2} \sin\left(\pi\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2\right) \sin\left(\pi\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2\right), \tag{5·3·3}$$

et, pour $\lambda = 0$,

$$\sigma_1\sigma_2 = -\frac{1}{\pi^2} \sin^2 \pi\sqrt{ab}. \tag{5·3·4}$$

Compte tenu du théorème (4.3.6), on obtient la

Proposition **(5·3·5).** — *Soit* $\lambda \in \mathbf{C}$, *fixé.*

(i) *On a* $f = h \circ g$, *où* $f : \mathbf{C}^2(a, b) \to \mathbf{C}^2(\mu, \nu)$ *est holomorphe et définie par le théorème* (2.1), $g : \mathbf{C}^2(a, b) \to \mathbf{C}^2(\sigma_1, \sigma_2)$ *est l'application holomorphe définie par* (5.3.1), *et* $h : \mathbf{C}^2(\sigma_1, \sigma_2) \to \mathbf{C}^2(\mu, \nu)$ *est la bijection ensembliste entre l'espace de « modules grossiers » de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff et* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^1; \Lambda_{1,\lambda})$.

(ii) *L'application h est biholomorphe et donnée par*

$$h(\sigma_1, \sigma_2) = (2i\pi\sigma_1, 2i\pi e^{i\pi\lambda}\sigma_2) = (\mu, \nu).$$

(iii) *L'application f est donnée par*

$$f(a, b) = (\mu, \nu) = (-2i\pi a/\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta),$$
$$-2i\pi e^{i\pi\lambda} b/\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)),$$

avec

$$\alpha = \left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2 \quad \textit{et} \quad \beta = \left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2.$$

(iv) *Le diagramme commutatif* $f = h \circ g$ *de* (i) *est compatible à l'action de* $\mathbf{C}^*$ *sur* $\mathbf{C}^2$: $(u, v) \mapsto (u/t, tv)$. *On obtient par passage au quotient un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{C}^* \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & \nearrow_{h_1} & \\ \mathbf{C}^* & & \end{array}$$

On a

$$h_1(\sigma_1\sigma_2) = -4\pi^2 e^{i\pi\lambda}\sigma_1\sigma_2 = \mu\nu$$

et

$$f_1(ab) = 4e^{i\pi\lambda} \sin \pi\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2 . \sin \pi\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4ab}\right)/2.$$

Proposition **(5.3.6).** — (i) *Toute équation de Riccati formellement conjuguée (par un élément de* $\hat{G}^0$*) à* $\omega_{1,\lambda}$ *est analytiquement conjuguée (par un élément de* G^0*) à l'une au moins des équations* $\rho_{\lambda,a,b}$.

(ii) *Deux équations* ρ_{λ_1,a_1,b_1} *et* ρ_{λ_2,a_2,b_2} *sont analytiquement conjuguées (par un élément de* G^0*) si et seulement si* $\lambda_1=\lambda_2$ *et* $\pm\sqrt{a_1b_1}\in\pm\sqrt{a_2b_2}+2\mathbf{Z}$ *ou* $1\pm\sqrt{a_2b_2}+2\mathbf{Z}$.

6. UNE AUTRE FAMILLE

La méthode utilisée au paragraphe (5.2) pour calculer la monodromie est agréable mais spécifique de la famille $\rho_{\lambda,a,b}$. Par contre la méthode développée au paragraphe (5.3) basée sur les invariants de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff s'applique toujours (compte tenu de la relation $\mu\nu=-4\pi^2e^{i\pi\lambda}\sigma_1\sigma_2$ établie plus haut) et permet dans le cas d'équations de Riccati à coefficients algébriques (dans $\mathbf{C}[X]$) un calcul de la monodromie, moyennant la résolution d'un nombre fini d'équations linéaires algébriques aux différences finies. (On dispose ainsi d'une méthode de *calcul numérique* de la monodromie dont la convergence paraît assez rapide.) Nous allons expliquer le principe du calcul sur un exemple.

Soient $\lambda=0$ et $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$. On pose

(6.1) $$\gamma_{\alpha,\beta}=x^2\,dy-(y+\alpha x^2-\beta x^2y^2)dx.$$

A $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ on associe la fonction matricielle $B(\alpha,\beta;x)=\begin{pmatrix}0&\beta\\ \alpha&1/x^2\end{pmatrix}$. La transformation $y=y_2/y_1$ $\left(Y=\dfrac{y_1}{y_2}\right)$ transforme l'équation (6.1) en l'équation

$$dY/dx=B(\alpha,\beta;x)Y,$$

et en passant au voisinage de l'infini $(z=1/x)$ on obtient

(6.2) $$dY/dz=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}+1/z^2\begin{pmatrix}0&-\beta\\-\alpha&0\end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution formelle de la forme

(6.3) $$F(z)\exp(A_0z),\quad\text{avec } A_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad F(z)=I+\sum_{n\geqslant1}F_nz^{-n}.$$

On calcule les matrices F_n par récurrence en utilisant les relations

(6.4) $$[A_0,F_n]+(n-1)F_{n-1}+LF_{n-2}=0\quad(n\geqslant2);$$

avec $L=\begin{pmatrix}0&-\beta\\-\alpha&0\end{pmatrix}$ et

(6.5) $$[A_0,F_1]=0;\qquad[A_0,F_2]+F_1+L=0.$$

On pose $F_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Les relations (6.4) s'écrivent

(6.6)
$$\begin{aligned} (n-1)a_{n-1} - c_{n-2} &= 0 \\ b_n + (n-1)b_{n-1} - d_{n-2} &= 0 \\ -c_n + (n-1)c_{n-1} - a_{n-2} &= 0 \\ (n-1)d_{n-1} - b_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Des relations (6.5) on déduit

(6.7) $\quad b_1 = c_1 = 0; \quad a_1 = d_1 = 0; \quad b_2 = \beta \quad$ et $\quad c_2 = -\alpha.$

On pose $c_n = (-1)^n \Gamma(n) v_n$ et $b_n = \Gamma(n) u_n$. Les relations (6.6) donnent $(n \geqslant 4)$

(6.8)
$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)^2(n-3)(v_n + v_{n-1}) - \alpha\beta v_{n-3} &= 0 \\ (n-1)(n-2)^2(n-3)(u_n + u_{n-1}) - \alpha\beta u_{n-3} &= 0. \end{aligned}$$

On a par ailleurs $u_1 = v_1 = 0$; $u_2 = \beta$, $v_2 = -\alpha$; $u_3 = -\beta$ et $v_3 = \alpha$. Si l'on désigne par $\psi(\alpha\beta; n)$ l'unique solution de l'équation linéaire aux différences finies

$$(n-1)(n-2)^2(n-3)(\psi(n) + \psi(n-1)) - \alpha\beta\psi(n-3) = 0,$$

satisfaisant aux conditions initiales $\psi(\alpha\beta; 1) = 0$, $\psi(\alpha\beta; 2) = 1$, $\psi(\alpha\beta; 3) = -1$, on obtient

(6.9) $\quad u_n = \beta\psi(\alpha\beta; n) \quad$ et $\quad v_n = -\alpha\psi(\alpha\beta; n).$

L'invariant de Jurkat-Lutz-Peyerimhoff de $\gamma_{\alpha,\beta}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta\varphi(\alpha\beta) \\ -\alpha\varphi(\alpha\beta) & 0 \end{pmatrix},$$

où $\varphi(\alpha\beta) = \lim_{n \to +\infty} \psi(\alpha\beta; n)$ (qui existe...).

Compte tenu de (5.3.5) (iv), on a $\mu\nu = -4\pi^2\sigma_1\sigma_2$, d'où la relation

(6.10) $\quad \mu\nu = 4\pi^2\alpha\beta\varphi^2(\alpha\beta),$

qui donne l'invariant de monodromie $(2 + 4\pi^2\alpha\beta\varphi^2(\alpha\beta))^2$ de l'équation $\gamma_{\alpha,\beta}$.

Remarque **(6.11)**. — Au voisinage de $x = \infty$, l'équation $\gamma_{\alpha,\beta}$ s'écrit $(z = 1/x)$

$$z^2\, dy/dz + (z^2 y + \alpha - \beta y^2) = 0.$$

Cette dernière a en général deux points singuliers sur la droite $z = 0$ $(x = \infty)$ donnés par $y_1 = \sqrt{\alpha/\beta}$ et $y_2 = -\sqrt{\alpha/\beta}$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit de deux points singuliers irréguliers où la situation est formellement équivalente à celle en (0, 0) ou (0, ∞), ce qui bien sûr ne nous avance guère. Une étude plus approfondie de la famille $\gamma_{\alpha,\beta}$ passerait par celle de la fonction φ, qui paraît délicate.

7. PROBLÈMES DE MODULES

Proposition (7.1). — *Il existe une famille analytique d'équations de Riccati sur* $\mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$

$$\Omega_{\lambda, c} = x^{p+1}\,dy - A(\lambda, c; x, y)\,dx = 0$$

(*où* $\lambda \in \mathbf{C}$ *et* $c \in \mathbf{C}^{2p}$; A *est analytique sur* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, *polynôme de degré* 2 *en* y, *et vérifie* $A(\lambda, c; 0, y) = y$) *qui est universelle pour* $\mathscr{E}_p$, *relativement à l'action du groupe* G^0.

Cet énoncé signifie que pour toute famille analytique d'équations de Riccati $\omega_s = 0$ ($s \in S$ variété analytique complexe quelconque) où $\omega_s \in \mathscr{E}_p$ pour tout s, il existe une *unique* application analytique $\varphi : S \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p}$ et une (unique) famille analytique $\Phi_s \in G^0$ telle que

$$\omega_s \wedge \Phi_s^* \Omega_{\varphi(s)} = 0$$

(l'application φ est « classifiante » pour la famille ω_s).

Démonstration. — La construction de $\Omega_{\lambda, c}$ est évidente. On identifie $\mathbf{C}^{2p}$ à $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$ comme indiqué au § 2. On considère alors l'espace M obtenu en recollant les produits $M_i = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p} \times U_i \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (où $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ est le recouvrement de $\mathbf{C}_x$ défini en II.6) par la règle

$$(\lambda, c; x, y) \in M_i \text{ est identifié à } (\lambda, c; x, c_{i,i+1}(\lambda)(y)) \in M_{i+1}$$

où $c_{i,i+1}(\lambda)$ désigne le cocycle défini par $c \in \mathbf{C}^{2p}$ dans $H^1(S^1; \Lambda_{p,\lambda})$.

En se reportant à la remarque I.2.3.2 (ou plutôt à son analogue pour des faisceaux de groupes de Lie), on voit immédiatement que M est canoniquement une variété analytique complexe, et plus précisément un fibré analytique (pour la projection canonique sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p} \times \mathbf{C}$) de fibre $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Enfin, cette fibration est topologiquement triviale (la base étant contractile), donc analytiquement triviale (Grauert [27]), et $M \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p} \times \mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

D'autre part la forme « verticale » (pour la projection $(\lambda, c; x, y) \mapsto (\lambda, c)$)

$$\omega_{p,\lambda} = x^{p+1}\,dy - y(1 + \lambda x^p)\,dx$$

définie et holomorphe sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{2p} \times \mathbf{C} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (et indépendante de c) détermine, puisque invariante par les applications de recollement, une forme « verticale » Ω analytique sur M (considérée ici comme fibrée sur $\mathbf{C}_\lambda \times \mathbf{C}_c^{2p}$); ceci se voit comme dans la preuve du théorème III.1.

La propriété d'universalité de Ω est alors facile à établir; étant donné une famille *analytique* $\omega_s \in \mathscr{E}_p$, l'invariant formel λ, et l'invariant analytique $c \in \mathbf{C}^{2p}$, sont des fonctions analytiques de s (cf. remarque II.4.2.*c* et l'holomorphie de l'application $\hat{G}^0/G^0 \to H^1(S^1, \Lambda)$); ceci détermine φ; le reste de la vérification utilise la remarque II.5.2. ■

Cette proposition signifie que $\mathbf{C}_\lambda \times \mathbf{C}_c^{2p}$ est un véritable *espace modulaire* pour l'action de G^0 sur l'espace $\mathscr{E}_p$ des équations de Riccati (à singularité de multiplicité fixée $p + 1$).

On voit de même que $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^p$ est un espace modulaire pour les équations *linéaires* (voir III.5) à singularité de multiplicité $p+1$.

Dans aucun de ces cas nous ne savons donner *explicitement* une équation *universelle*. On remarquera que la famille algébrique introduite en (5.1) est seulement *verselle* (on n'a pas unicité de l'application classifiante φ) pour $\mathscr{E}_1$. Dans le cas, *a priori* plus simple, des équations linéaires, et toujours avec $p=1$, nous avons proposé en III.5.3 une famille *universelle algébrique* pour chaque valeur *fixée* de l'invariant formel λ; il s'agit des formes :

$$x^2\,dy - [y(1+\lambda x) + ax]\,dx \qquad \text{si } \lambda \notin \mathbf{N}^*;$$

$$x^2\,dy - [y(1+\lambda x) + ax^{n+1}]\,dx \qquad \text{si } \lambda = n \in \mathbf{N}^*.$$

Il est probable que toute famille universelle en l'invariant formel *et* l'invariant analytique est nécessairement « transcendante » en x.

(7.2) Le cas général

Revenons aux germes d'équations différentielles généraux du chapitre II. Nous avons vu alors que l'espace des orbites de G^0 dans $\mathscr{E}_p$ était en bijection canonique avec $\mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$. Cet espace est un ouvert d'un espace DFN, et admet donc une structure de variété analytique de dimension infinie. Faute d'une version du théorème de Newlander-Nirenberg en dimension infinie, nous ne pouvons construire une famille universelle pour les éléments de $\mathscr{E}_p$.

Cependant, une construction analogue à celle du paragraphe précédent est possible au-dessus de toute sous-variété analytique $\Sigma \subset \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ de *dimension finie*. Si une famille $\omega_s \in \mathscr{E}_p$, $s \in S$, a ses invariants $\varphi(s)$ dans une telle sous-variété Σ, elle est alors isomorphe à l'image inverse par φ de la famille universelle au-dessus de Σ. Cette situation se rencontre en particulier dans les cas suivants (d'après la généralisation due à Barlet-Mazet [48] d'un théorème de Ruget [61]; cf. aussi Saint-Loup [63]) pour un germe (S, s_0) :

a) $\dim_{\mathbf{C}}(S, s_0) = 1$ (germe de courbe);

b) on suppose s_0 *isolé* dans sa fibre au-dessus de $\mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ (pour l'application $\varphi : S \to \mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$).

Dans le cas *a)* l'application φ est propre ou l'image réduite à un point; dans le cas *b)* elle est propre.

Remarquons enfin que, moyennant une version à paramètres différentiables du théorème de Newlander-Nirenberg (qui ne devrait pas poser de problème, même en dimension infinie comme dans le cas présent), on peut construire au-dessus de $\mathbf{C}^p \times \mathscr{H}^p$ une famille $\mathscr{C}^\infty$ d'éléments de $\mathscr{E}_p$, qui serait universelle pour les familles $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque **(7.3).** — Disons qu'une famille analytique d'équations $\omega_s = 0$ ($s \in S$, $\omega_s \in \mathscr{E}_p$) est *de Pfaff* si elle est induite par une forme différentielle ω *complètement intégrable*

sur l'espace $S \times (\mathbf{C}^2, 0)$ (c'est-à-dire que les feuilletages définis dans chaque fibre peuvent « s'agglomérer » pour former un feuilletage de codimension un de l'espace total). C'est alors une *famille triviale*, c'est-à-dire que les invariants sont indépendants du paramètre s; ceci est une conséquence immédiate du « phénomène de Kupka-Reeb » (cf. par exemple Medeiros [49]), car $d\omega$ est nécessairement non nul en tout point de l'ensemble singulier $S \times \{0\}$.

Dans le cas des équations de Riccati et pour $p = 1$, cette condition équivaut aussi, comme on le voit aisément, à l'*isomonodromie* de la famille ω_s.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Balser, W. Jurkat, D. Lutz, A general theory of invariants for meromorphic differential equations, Part II, Proper Invariants, *Funkcialaj Ekvacioj.*, **22** (1979), 257-283.

[2] I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mat.*, **24** (1901), 1-88.

[3] D. Bertrand, Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° **538**, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **770**, Berlin (1980), 228-243.

[4] G. D. Birkhoff, Equivalent singular points of ordinary linear differential equations, *Math. Ann.*, **74** (1913), n° 1, 134-139.

[5] R. I. Bogdanov, Singularities of vector fields on a plane, *Funkcional. Anal. i Priložen.*, **13** (1979), n° 3, 87-89 = *Functional Anal. Appl.*, **13** (1979), 3, 227-229 (1980).

[6] E. Borel, Mémoire sur les séries divergentes, *Ann. École Norm. Sup.*, 3e série, XVI (1899), 2-136.

[7] B. L. J. Braaksma, Laplace integrals, factorial series and singular differential equations, *Proceedings Bicentennial Congress Wiskundige Genootschap*, Part I, Amsterdam, 1976, 101-121.

[8] B. L. J. Braaksma, W. A. Harris, Laplace integrals and factorial series in singular functional differential systems, *Applicable Anal.*, **8** (1978), 21-45.

[9] C. Briot, J.-C. Bouquet, Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles, *J. École Polytechnique*, XXI (1856), 134-198.

[10] A. D. Brjuno, Analytical form of differential equations, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, **25** (1971), 120-262 = *Trans. Moscow Math. Soc.*, **25** (1971), 131-288 (1972).

[11] A. D. Brjuno, Local invariants of differential equations, *Mat. Zametki*, **14** (1973), 499-507 = *Math. Notes*, **14** (1973), 844-848 (1974).

[12] C. Camacho, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in $\mathbf{C}^2$, *Astérisque*, **59-60** (1978), 83-94.

[13] C. Camacho, P. Sad, Topological classification and bifurcation of holomorphic flows with resonance in $\mathbf{C}^2$, *Preprint I.H.E.S.*, Bures-sur-Yvette, 1981.

[14] J. Chazy, Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles algébriques à points critiques fixes, *Acta Mat.*, **41** (1918), 27-49.

[15] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1) (1966), 1-95.

[16] H. Dulac, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. École Polytechnique*, 2, **9** (1904), 1-125.

[17] J. Ecalle, *Théorie des invariants holomorphes*, Thèse, Orsay (1974).

[18] J. Ecalle, Théorie itérative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes, *J. Math. pures et appl.*, **54** (1975), 183-258.

[19] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes*, Vol. I, II, III, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981.

[20] J. Ecalle, *A propos de l'équation* $B_1(x,y)\,dy - B_2(x,y)\,dx = 0$, lettre à J. Martinet et J.-P. Ramis du 1-10-1981.

[21] J. Ecalle, *Classification des équations différentielles analytiques de degré quelconque*, lettre à B. Malgrange, J. Martinet, J.-P. Ramis et Voros du 14-10-1981.

[22] L. EULER, De seriebus divergentibus, *Leonardi Euleri Opera Omnia* I. 14, Teubner, Leipzig-Berlin, 1925, 601-602.

[23] J. FRENKEL, Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. de France*, **85** (1957), 135-218.

[24] R. GARNIER, Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires, *J. Math. Pures et Appl.*, 8e série, **2** (1919), 99-198.

[25] R. GERARD, Y. SIBUYA, Étude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **712**, Berlin (1979), 131-288.

[26] M. GEVREY, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, *Ann. Sc. École Normale Sup.*, 3e série, XXV (1918), 129-190.

[27] H. GRAUERT, Analytische Faserungen über holomorphvollständigen Raümen, *Math. Ann.*, **135** (1958), 263-273.

[28] A. GROTHENDIECK, Sur certains espaces de fonctions holomorphes I et II, *J. für die Reine und Angew. Math.*, **192** (1953), 35-64 et 77-95.

[29] A. GROTHENDIECK, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 121-138.

[30] W. A. HARRIS, Laplace integrals and factorial series in singular differential and difference equations, *Notices of the A.M.S.* (1979), A-245.

[31] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Grundlehren der Math. Wiss. Bd 131, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[32] J. HORN, Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle, *J. für die Reine und Ang. Math.*, **118** (1897), 257-274; **119** (1898), 196-208; **119** (1898), 267-290.

[33] H. HUKUHARA, Pri singula punkto de la ordinaria differenciala ekvacio de unna ordo, *Mem. Fac. Sc. Kyùsyù Univ.*, **3** (1949), 9-21.

[34] H. HUKUHARA, T. KIMURA, Mme T. MATUDA, *Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publ. Math. Soc. of Japan, 1961.

[35] Y. S. IL'YASHENKO, Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear form at a singular point, *Funkcional. Anal. i Prilozen*, **13** (1979), n° 3, 87-89 = *Functional Anal. Appl.*, **13** (1979), n° 3, 227-229 (1980).

[36] W. B. JURKAT, Meromorphe Differentialgleichungen, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **637**, Berlin (1978).

[37] W. JURKAT, D. A. LUTZ, A. PEYERIMHOFF, Birkoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations I., *J. Math. Anal. Appl.*, **53** (1976), 438-470.

[38] J. M. KANTOR, Classes non quasi-analytiques et décomposition des supports des distributions, *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, **44** (1972), 171-180.

[39] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 3, Paris, Dunod édit. (1970).

[40] D. A. LUTZ, Birkhoff invariants and meromorphic differential equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **712**, Berlin (1979), 66-76.

[41] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press (1966).

[42] B. MALGRANGE, Lettre à J. Ecalle (1979).

[43] B. MALGRANGE, Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **712**, Berlin (1979), 77-86.

[44] B. MALGRANGE, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° **582**, novembre 1981.

[45] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonantes du premier ordre; en préparation.

[46] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications IRMA, Strasbourg (1981).

[47] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, Intégrales premières et holonomie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, **13** (1980), 469-523.

[48] P. MAZET, Un théorème d'image directe propre, *Séminaire P. Lelong*, Paris (1972-1973).

[49] A. S. de MEDEIROS, Structural stability of integrable differential forms, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° **597**, Berlin (1977), 395-428.

[50] F. NEVANLINNA, Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen, *Ann. acad. Scient. Fennicae*, ser. A, Fom. XII (1919), 1-81.

[51] A. NEWLANDER, L. NIRENBERG, Complex coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math.*, **65** (1957), n° 3, 391-404.

[52] P. PAINLEVÉ, Leçons de Stockholm (deuxième leçon), *Œuvres complètes*, t. 1, p. 253 (31-32 du texte original).
[53] J. PLEMELJ, Riemannsche Funktionenscharen mit gegebenen Monodromiegruppe, *Monatsh. f. Math. und Phys.*, **19** (1908), 205-246.
[54] A. S. PYARTLI, Birth of complex invariant manifolds close to a singular point of a parametrically dependent vector field, *Funkcional Anal. i Priložen.*, **6** (1972), n° 4, 95-96 = *Functional Anal. Appl.*, **6** (1972), n° 4, 339-340 (1973).
[55] M. RAMBAUD, *Étude des points singuliers pour une équation différentielle linéaire du premier ordre*, Thèse, Lyon (1932).
[56] J.-P. RAMIS, *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*, Ergebnisse der Math. und Grenzg., Bd 53, Springer-Verlag, Berlin (1970).
[57] J.-P. RAMIS, Les séries k-sommables et leurs applications, *Springer, Lecture Notes in Physics*, n° **126**, Berlin (1980).
[58] J.-P. RAMIS, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Publications IRMA, Strasbourg (1981).
[59] J.-P. RAMIS, *Développements asymptotiques Gevrey, séries k-sommables et applications aux équations différentielles et aux différences*, Publications IRMA, Strasbourg (en préparation).
[60] R. RICHBERG, Stetige streng pseudokonvexe Funktionen, *Math. Ann.*, **175** (1968), 257-286.
[61] G. RUGET, A propos des cycles analytiques en dimension infinie (troisième partie), *Inv. Math.*, **9** (1969), 267-312.
[62] Y. SIBUYA, Stokes Phenomena, *Bull. Am. Math. Soc.*, **83** (1977), 1075-1077.
[63] B. SAINT-LOUP, Un théorème d'image directe en géométrie analytique complexe, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **278** (1974), 555-556.
[64] F. TAKENS, Normal forms for certain singularities of vector fields, *Ann. Inst. Fourier*, **23** (2) (1973), 163-195.
[65] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience Publishers (1965).
[66] G. N. WATSON, The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **34** (1912), 41-88.

Département de Mathématique,
Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Manuscrit reçu le 4 mai 1981,
révisé le 12 novembre 1981.