PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

MARC BOURDON

Sur le birapport au bord des CAT(-1)-espaces

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 83 (1996), p. 95-104

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1996__83__95_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE BIRAPPORT AU BORD DES CAT(— 1)-ESPACES

MARC BOURDON

Résumé. — Soit X un CAT(— 1)-espace et S un espace symétrique de rang 1, non compact, dont le maximum de la courbure est — 1. On montre qu'un plongement de ∂S dans ∂X, qui préserve le birapport, s'étend en un plongement isométrique (au sens fort) de S dans X. On utilise ce résultat pour donner une nouvelle preuve et une généralisation du théorème de rigidité « entropie contre courbure » de U. Hamenstädt.

Abstract. — Let X be a CAT(— 1)-space and S a symmetric space of rank 1, non compact, with the maximum of its sectional curvature equal to — 1. We show that an embedding of ∂S into ∂X, which preserves the cross-ratio, extends to an isometric embedding (in the strong sense) of S into X. We use this result to give a new proof and a generalisation of U. Hamenstädt's rigidity theorem « entropy against curvature ».

0. Introduction

Un CAT(— 1)-espace X est un espace métrique géodésique propre, dont les triangles vérifient le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, le plan hyperbolique réel à courbure — 1. En d'autres termes, soit $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ un triangle de X, soit $\bar{\Delta}$ un triangle de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ, et soit

$$\Delta \to \bar{\Delta}$$

$$u \mapsto \bar{u}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie ; Δ vérifie le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov si, quels que soient u, v appartenant à Δ :

$$| u - v |_X \leqslant | \bar{u} - \bar{v} |_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}}.$$

Les CAT(— 1)-espaces forment une vaste généralisation des variétés riemaniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -1$; les exemples les plus fameux sont les polyèdres hyperboliques de M. Gromov (on renvoie à [B], [Bo] pour plus de détails). Comme les variétés simplement connexes à courbure $\leqslant -1$, les CAT(— 1)-espaces X admettent un bord à l'infini, noté ∂X. On s'intéresse ici à la question suivante : peut-on reconstituer

la géométrie de X à partir de ∂X? Dans cette optique le birapport au bord de X est d'un intérêt certain. Il fournit des informations précises sur la géométrie de X ; par exemple J.-P. Otal ([O], théorème 2.2) a montré que si X admet un groupe d'isométries discret cocompact Γ, alors le birapport au bord de X détermine et est déterminé par le spectre marqué des longueurs de X/Γ. Avant d'énoncer notre résultat, rappelons les définitions de birapport et de plongement de Möbius.

Notons $\partial^4 X$ l'ensemble de quadruplets (ξ, ξ', η, η') de points deux à deux distincts de ∂X. Le birapport en $(\xi, \xi', \eta, \eta') \in \partial^4 X$ est le nombre réel (voir [O])

$$[\xi\xi'\eta\eta'] = \lim_{(a,a',b,b') \to (\xi,\xi',\eta,\eta')} \exp \frac{1}{2}\{ | a - b |_X + | a' - b' |_X - | a - b' |_X - | a' - b |_X \},$$

où a, a', b, b' appartiennent à X et convergent radialement vers ξ, ξ', η, η'.

Soit Y un autre CAT(— 1)-espace. Un plongement topologique

$$f : \partial Y \to \partial X$$

est dit de Möbius s'il respecte le birapport :

$$\forall\ (\xi, \xi', \eta, \eta') \in \partial^4 Y, \quad [f(\xi)f(\xi')f(\eta)f(\eta')] = [\xi\xi'\eta\eta'].$$

En utilisant un angle de comparaison à l'infini contrôlé par le birapport, on établit ici le résultat élémentaire suivant. Soit S un espace symétrique de rang 1, non compact ($S = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}, \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}, \mathbf{H}^n_{\mathbf{H}}, \mathbf{H}^2_{\mathbf{O}}$). Supposons sa métrique normalisée de manière à ce que le maximum de sa courbure soit — 1.

0.1. *Théorème.* — *Tout plongement de Möbius f de ∂S dans ∂X s'étend en un plongement isométrique* F *(au sens fort) de* S *dans* X, *avec* $\partial F = f$.

Question. — La normalisation sur la courbure de S est-elle nécessaire? Si X est seulement un CAT(— 1)-espace, je pense que oui ; on devrait pouvoir construire des contre-exemples en adaptant les idées de M. Arcostanzo [A]. Par contre si X est une variété simplement connexe à courbure $\leqslant -1$, je n'en ai aucune idée.

On utilise le théorème 0.1 pour donner une nouvelle preuve (plus conceptuelle) et une généralisation du théorème de rigidité « entropie contre courbure » de U. Hamenstädt [H]. Soit S un espace symétrique de rang 1, non compact, dont le maximum de la courbure est — 1, et soit Γ un réseau uniforme de S. On s'intéresse aux CAT(— 1)-espaces X sur lesquels Γ agit de manière quasi convexe. Autrement dit Γ agit par isométries, de manière proprement discontinue, et ses orbites sont des ensembles quasi convexes de X.

L'ensemble limite d'une telle action est le sous-ensemble Γ-invariant de ∂X (indépendant du point x de X)

$$\Lambda = (\overline{\Gamma\{x\}}^{X \cup \partial X}) \cap \partial X.$$

Puisque X est un CAT(— 1)-espace, son bord porte une classe naturelle de métriques : les métriques *visuelles*. Ce sont les métriques d sur ∂X qui possèdent la propriété suivante : étant donné une origine x dans X, il existe une constante $C = C(d, x)$, telle que, pour tout couple de points ξ, ξ' de ∂X,

$$\textbf{(0.2)} \qquad C^{-1} e^{-d_X(x,(\xi\xi'))} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant C e^{-d_X(x,(\xi\xi'))}$$

où $(\xi\xi')$ désigne la géodésique de X d'extrémités ξ et ξ'. Cette propriété est indépendante de l'origine x choisie. Donnons un exemple : si $X = S = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, la métrique euclidienne sur $\partial X = S^{n-1}$ est visuelle ; si $X = S = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ ou $\mathbf{H}^n_{\mathbf{H}}$ ou $\mathbf{H}^2_{\mathbf{O}}$, la métrique de Carnot-Carathéodory définie par la distribution normale aux fibres de Hopf est une métrique visuelle sur ∂X (voir [G-P]).

Deux métriques visuelles au bord de X sont clairement Lipschitz-équivalentes, aussi elles donnent les mêmes dimensions de Hausdorff aux sous-ensembles de ∂X. Notons $\dim_H \Lambda$ la dimension de Hausdorff de Λ. D'après un résultat de P. Pansu ([P1], théorème 5.5), on a, pour $S = \mathbf{H}^n_{\mathbf{K}}$ et $k = \dim_{\mathbf{R}} K$,

$$\dim_H \Lambda \geqslant \dim_H \partial S = kn + k - 2.$$

Nous montrons :

0.3. *Théorème.* — *Si* $\dim_{\mathbf{R}} S > 2$ *et si* $\dim_H \Lambda = \dim_H \partial S$, *alors il existe un plongement isométrique* F *(au sens fort) de* S *dans* X, Γ*-équivariant, tel que* $\partial F(\partial S) = \Lambda$.

Lorsque X est une variété riemannienne simplement connexe, à courbure $\leqslant -1$, et lorsque Γ agit de manière cocompacte sur X, ce résultat est le théorème de U. Hamenstädt.

Notons que l'hypothèse « $\dim_{\mathbf{R}} S > 2$ » (c'est-à-dire $S \neq \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$) est nécessaire. En effet deux réseaux uniformes isomorphes de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ ne sont pas en général conjugués dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}})$. Pour $S = \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on est tenté de croire à l'énoncé suivant. Soit Γ un groupe fuchsien cocompact qui agit de manière quasi convexe sur un CAT(— 1)-espace X, et soit Λ son ensemble limite dans ∂X. Si la dimension de Hausdorff de Λ est égale à 1, alors Λ borde un sous-espace totalement géodésique de X, isométrique à $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$.

Cet énoncé a été démontré par R. Bowen [Bow] dans le cas particulier où X est égal à $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$, et par A. Katok [K] lorsque X est une variété de dimension 2, simplement connexe, à courbure $\leqslant -1$ (dans ce cas l'action de Γ sur X est cocompacte).

Le chapitre 1 est consacré à quelques préliminaires utiles à la démonstration des théorèmes 0.1 et 0.3. Au chapitre 2 on réduit, par un argument classique, le théorème 0.3 au théorème 0.1. Ce dernier est démontré au chapitre 3.

Je remercie M. Katz, J.-P. Otal et P. Pansu qui, par leurs remarques et leur intérêt, ont contribué à l'élaboration de ce texte.

1. Quelques préliminaires

On renvoie à ([Bo], chapitre 2) pour les détails de ce paragraphe.

1.1. *Produit de Gromov au bord*

Soit X un CAT(− 1)-espace, x une origine dans X et ξ, ξ' deux points de ∂X. Le produit de Gromov de ξ et ξ' par rapport à x est la quantité

$$(\xi \mid \xi')_x = \lim_{(a, a') \to (\xi, \xi')} \frac{1}{2} (\mid x - a \mid_X + \mid x - a' \mid_X - \mid a - a' \mid_X)$$

où a et a' sont deux points de X qui convergent radialement vers ξ et ξ'. Le produit $(\xi \mid \xi')_x$ est la moitié de la longueur du segment géodésique contenu dans $(\xi\xi')$, délimité par les horosphères basées en ξ et ξ' et passant par x.

Posons

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x}.$$

Proposition. — a) La fonction d_x est une métrique sur ∂X ; elle satisfait la propriété de visibilité 0.2 *de l'introduction.*

b) Si y est une autre origine dans X, *on a*

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi')\, e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y))},$$

où $B_\xi(x, y)$ désigne la distance horosphérique de x à y relativement à ξ.

c) La distance $d_x(\xi, \xi')$ est toujours inférieure à 1 ; elle est égale à 1 si et seulement si x appartient à $(\xi\xi')$.

d) On a

$$\forall\, (\xi, \xi', \eta, \eta') \in \partial^4 X,\ \forall\, x \in X : [\xi\xi'\, \eta\eta'] = \frac{d_x(\xi, \eta)\, d_x(\xi', \eta')}{d_x(\xi, \eta')\, d_x(\xi', \eta)}.$$

1.2. *Angle de comparaison à l'infini*

Soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ le plan hyperbolique à courbure − 1. Etant donné une origine x dans X et deux points a et a' de X, distincts de x, on définit un angle de comparaison, noté $\theta_x(a, a')$, comme suit. Soit $(\bar{x}\bar{a}\bar{a}')$ un triangle de comparaison de (xaa') dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$; on pose $\theta_x(a, a') = \widehat{\bar{a}\bar{x}\bar{a}'}$.

Proposition. — a) Lorsque a et a' convergent radialement vers deux points ξ, ξ' de ∂X, $\theta_x(a, a')$ converge vers un nombre réel noté $\theta_x(\xi, \xi')$ et appelé angle de comparaison à l'infini, qui satisfait :

$$\sin \frac{1}{2} \theta_x(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi').$$

b) La fonction θ_x est une métrique sur ∂X.

1.3. *Une interprétation géométrique du birapport*

Notons $\partial^8 X$ l'ensemble des triplets (ξ, ξ', η) de points deux à deux distincts de ∂X. Pour (ξ, ξ', η) appartenant à $\partial^8 X$, soit $p(\xi, \xi', \eta)$ l'unique point p de $(\xi\xi')$ vérifiant *la relation*

$$d_p(\xi, \eta) = d_p(\xi', \eta).$$

L'existence de l'unicité de $p(\xi, \xi', \eta)$ résulte de 1.1 *b)*. Observons que $p(\xi, \xi', \eta)$ est symétrique en ξ et ξ'. On a

Proposition. Pour $(\xi, \xi', \eta, \eta') \in \partial^4 X$, *on a*

$$| \log[\xi\xi' \eta\eta'] | = | p(\xi, \xi', \eta) - p(\xi, \xi', \eta') |_X.$$

Preuve. — Notons p et p' les points $p(\xi, \xi', \eta)$ et $p(\xi, \xi', \eta')$ de $(\xi\xi')$. On a, d'après 1.1 *d)* puis 1.1 *b)*,

$$\begin{aligned}
[\xi\xi' \eta\eta'] &= \frac{d_p(\xi, \eta)\, d_p(\xi', \eta')}{d_p(\xi, \eta')\, d_p(\xi', \eta)} \\
&= \frac{d_p(\xi', \eta')}{d_p(\xi, \eta')} \\
&= \frac{d_{p'}(\xi', \eta')}{d_{p'}(\xi, \eta')} \exp \frac{1}{2}\{ B_{\xi'}(p', p) + B_{\eta'}(p', p) - B_{\xi}(p', p) - B_{\eta'}(p', p) \} \\
&= \exp \frac{1}{2}\{ B_{\xi'}(p', p) - B_{\xi}(p', p) \}.
\end{aligned}$$

D'où la proposition. □

1.4. *Application de Möbius et conjugaison des flots géodésiques*

Le fibré unitaire tangent au CAT(— 1)-espace X est l'ensemble des géodésiques (bi-infinies) paramétrées de X. En d'autres termes, c'est l'ensemble

$$UX = \{ \gamma : \mathbf{R} \to X, \text{ isométries} \}.$$

On l'équipe de la métrique suivante :

$$| \gamma - \gamma' |_{UX} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \gamma(t) - \gamma'(t) |\, e^{-|t|}\, dt.$$

Le flot géodésique de UX est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes $\{ \Phi_T, T \in \mathbf{R} \}$ provenant de l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur UX. Il est défini par

$$\Phi_T(\gamma) = \gamma_T \quad \text{avec } \gamma_T(t) = \gamma(t + T).$$

Paramétrons UX de la manière suivante : pour $(\xi, \xi', \eta) \in \partial^8 X$, on note $\pi(\xi, \xi', \eta)$ l'élément γ de UX vérifiant

(1.4.1) $\qquad \gamma(-\infty) = \xi, \qquad \gamma(+\infty) = \xi', \qquad \gamma(0) = p(\xi, \xi', \eta).$

1.4.2. *Proposition.* — *Soit* Y *un autre* CAT(— 1)*-espace et* f *un plongement de Möbius de* ∂Y *dans* ∂X. *Alors le plongement*

$$\partial^3 Y \to \partial^3 X$$

$$(\xi, \xi', \eta) \mapsto (f(\xi), f(\xi'), f(\eta))$$

induit un plongement G *de* UY *dans* UX *qui conjugue les flots géodésiques.*

Preuve. — C'est évident en utilisant le paramétrage 1.4.1 et la proposition 1.3. □

2. Réduction (classique) du théorème 0.3 au théorème 0.1

Elle nécessite plusieurs étapes. Tout d'abord les actions de Γ sur S et sur X donnent naissance à une quasi-isométrie Γ-équivariante de S dans X, donc à un plongement Γ-équivariant de ∂S dans ∂X. Notons-le f. Son image dans ∂X est l'ensemble limite Λ. Nous allons voir que sous les hypothèses du théorème 0.3, f préserve le birapport.

Choisissons des origines s et x dans S et X, et équipons ∂S et ∂X des métriques d_s et d_x définies en 1.1. Si le corps structural K de S est $\mathbf{R}$, d_s est Lipschitz-équivalente à la métrique euclidienne de ∂S, sinon elle est Lipschitz-équivalente à la métrique de Carnot-Carathéodory associée à la distribution normale aux fibres de Hopf. Aussi pour $S = \mathbf{H}^n_K$ et $k = \dim_{\mathbf{R}} K$, la dimension de Hausdorff de $(\partial S, d_s)$ est $nk + k - 2$.

Puisque l'homéomorphisme

$$f : (\partial S, d_s) \to (\Lambda, d_x)$$

provient d'une quasi-isométrie de S dans X, et puisque les métriques d_s et d_x vérifient la propriété 0.2 de visibilité, f est quasi conforme. Donc d'après ([P1], théorème 5.5), on a

$$\dim_H(\Lambda, d_x) \geqslant \dim_H(\partial S, d_s).$$

Supposons qu'on ait égalité et notons τ la valeur commune des deux membres. Soient aussi ν_s et ν_x les mesures de Hausdorff de $(\partial S, d_s)$ et de (Λ, d_x). Elles sont finies non nulles, et possèdent la propriété suivante (voir [Bo], 2.7.5 *b)*) : il existe une constante $C \geqslant 1$, telle que pour toute boule $B(r)$ de (S, d_s) (resp. toute boule $B'(r)$ de (Λ, d_x)), on ait

$$C^{-1} r^\tau \leqslant \nu_s(B(r)) \leqslant C r^\tau$$

$$(\text{resp. } C^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B'(r)) \leqslant C r^\tau).$$

On utilise alors la présence d'une vaste famille de courbes dans le bord S (voir [P2], p. 21-22), la quasi-conformité de f, et le corollaire 7.2 de [P2], afin de conclure que ν_s est absolument continue par rapport à $f^* \nu_x$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse $\dim_{\mathbf{R}} S > 2$. Notons que cet argument est la première étape de la preuve de U. Hamenstädt. Notre preuve du théorème 0.3 diverge maintenant de celle de U. Hamenstädt.

On se sert d'un argument ergodique classique pour montrer que f est de Möbius ; il s'agit d'une généralisation d'un argument de D. Sullivan (voir [S], preuve du théorème 5).

Notons $\partial^2 S$ (resp. Λ^2) l'ensemble des couples de deux points distincts de ∂S (resp. Λ). Les mesures respectivement sur $\partial^2 S$ et sur Λ^2 données par

$$\mu(\xi, \eta) = \frac{\nu_s(\xi) \times \nu_s(\eta)}{[d_s(\xi, \eta)]^{2\tau}}$$

$$\mu'(\xi', \eta') = \frac{\nu_x(\xi') \times \nu_x(\eta')}{[d_x(\xi', \eta')]^{2\tau}}$$

sont invariantes et ergodiques pour l'action naturelle de Γ sur $\partial^2 S$ et sur Λ^2 (voir [Bo], § 2.10). Puisque ν_s est absolument continue par rapport à $f^* \nu_x$, et puisque f est Γ-équivariante, les mesures μ et $(f \times f)^* \mu'$ sont égales à une constante près. En notant ω la densité de ν_s par rapport à $f^* \nu_x$, on a

$$\mu(\xi, \eta) = \omega(\xi)\, \omega(\eta) \frac{f^* \nu_x(\xi) \times f^* \nu_x(\eta)}{[d_s(\xi, \eta)]^{2\tau}}$$

et

$$(f \times f)^* \mu'(\xi, \eta) = \frac{f^* \nu_x(\xi) \times f^* \nu_x(\eta)}{[d_x(f(\xi), f(\eta))]^{2\tau}}.$$

Donc on a $(f^* \nu_x(\xi) \times f^* \nu_x(\eta))$ — presque sûrement

$$d_x(f(\xi), f(\eta)) = \text{Cte}\ \omega^{\frac{1}{2\tau}}(\xi)\ \omega^{\frac{1}{2\tau}}(\eta)\ d_s(\xi, \eta).$$

Le support de $f^* \nu_x$ étant ∂S et f étant continue, il résulte de la caractérisation 1.1 *d*) du birapport que f est de Möbius.

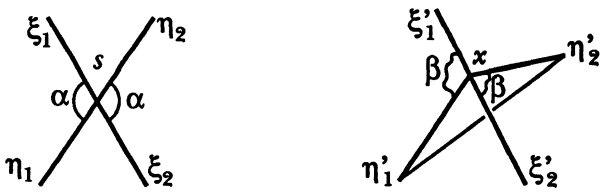
3. Preuve du théorème 0.1

Notons $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ le plan hyperbolique réel à courbure — 1. On établit d'abord 0.1 pour $S = \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. C'est l'objet des trois lemmes suivants.

3.1. *Lemme.* — *Soit* $f : \partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}} \to \partial X$ *un plongement de Möbius, et* $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ *un élément de* $\partial^4 \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ *tel que* $(\xi_1\, \xi_2)$ *et* $(\eta_1\, \eta_2)$ *soient sécantes dans* $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. *Notons* ξ'_1, ξ'_2, η'_1, η'_2 *les images de* ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 *par* f. *Alors les géodésiques* $(\xi'_1\, \xi'_2)$ *et* $(\eta'_1\, \eta'_2)$ *sont sécantes dans* X. *De plus en notant respectivement* s *et* x *les points d'intersection de* $(\xi_1\, \xi_2)$ *et* (η_1, η_2), *et de* $(\xi'_1\, \xi'_2)$ *et* $(\eta'_1\, \eta'_2)$, *on a, pour* $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\widehat{\xi_i\, s\, \eta_j} = \theta_x(\xi'_i, \eta'_j).$$

Preuve. —



Soit x le point de $(\xi_1' \xi_2')$ tel que

$$\theta_x(\xi_1', \eta_1') = \theta_x(\xi_2', \eta_2').$$

Notons β cette valeur commune. Soit aussi α l'angle $\widehat{\xi_1 s\eta_1}$. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que β représente l'angle de comparaison à l'infini et non l'angle riemannien. On a, d'après 1.1 *d)*, 1.2 *a)* et 1.1 *c)*,

$$\begin{aligned}(1)\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} &= [\xi_1\,\eta_2\,\eta_1\,\xi_2] = [\xi_1'\,\eta_2'\,\eta_1'\,\xi_2'] \\ &= \frac{d_x(\xi_1', \eta_1')\, d_x(\eta_2', \xi_2')}{d_x(\xi_1', \xi_2')\, d_x(\eta_2', \eta_1')} \\ &\geqslant d_x(\xi_1', \eta_1')\, d_x(\eta_2', \xi_2') \\ &= \sin^2\frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(2)\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} &= [\xi_1\,\eta_1\,\eta_2\,\xi_2] = [\xi_1'\,\eta_1'\,\eta_2'\,\xi_2'] \\ &= \frac{d_x(\xi_1', \eta_2')\, d_x(\eta_1', \xi_2')}{d_x(\xi_1', \xi_2')\, d_x(\eta_1', \eta_2')} \\ &\geqslant d_x(\xi_1', \eta_2')\, d_x(\eta_1', \xi_2') \\ &= \sin\left[\frac{1}{2}\,\theta_x(\xi_1', \eta_2')\right] \sin\left[\frac{1}{2}\,\theta_x(\eta_1', \xi_2')\right].\end{aligned}$$

Or θ_x est une métrique sur ∂X (voir 1.2 *b)*) : c'est ici qu'intervient l'hypothèse « X est un CAT(— 1)-espace ». Donc, puisque x appartient à $(\xi_1' \xi_2')$,

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta_x(\xi_1', \eta_2') \geqslant \pi - \beta, \\ \theta_x(\eta_1', \xi_2') \geqslant \pi - \beta. \end{cases}$$

Alors (2) puis (3) puis (1) donnent :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\alpha}{2} &\geqslant \sin\left[\frac{1}{2}\,\theta_x(\xi_1', \eta_2')\right] \sin\left[\frac{1}{2}\,\theta_x(\eta_1', \xi_2')\right] \\ &\geqslant \cos^2\frac{\beta}{2} \\ &\geqslant \cos^2\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Donc toutes les inégalités précédentes sont des égalités. Dès lors on a, pour $i, j \in \{1, 2\}$,

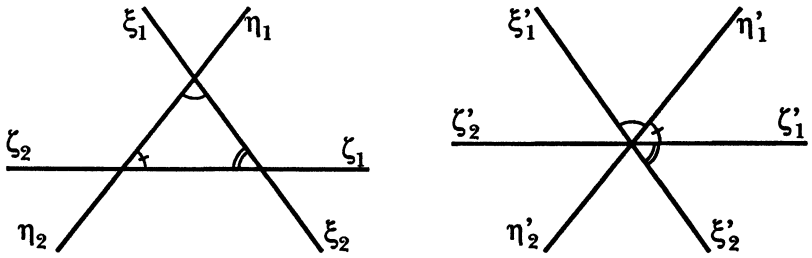
$$\widehat{\xi_i s \eta_j} = \theta_x(\xi_i', \eta_j')$$

et $$d_x(\eta_2', \eta_1') = 1.$$

Cette dernière égalité signifie que x appartient à $(\eta_1' \eta_2')$, d'après 1.1 *c)*. D'où le lemme. □

3.2. *Lemme.* — *Soit* $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ *six points deux à deux distincts, dans cet ordre sur* $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. *Notons* $\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$ *leurs images par f. Si les géodésiques* $(\xi_1' \xi_2')$, $(\eta_1' \eta_2')$, $(\zeta_1' \zeta_2')$ *de* X *sont concourantes, alors il en est de même des géodésiques* $(\xi_1 \xi_2)$, $(\eta_1 \eta_2)$ *et* $(\zeta_1 \zeta_2)$ *de* $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$.

Preuve. —



Si $(\xi_1 \xi_2)$, $(\eta_1 \eta_2)$, $(\zeta_1 \zeta_2)$ ne sont pas concourantes, leurs points d'intersection forment un triangle. D'après le lemme 3.1 la somme des angles intérieurs à ce triangle est

$$\theta_x(\xi_1', \eta_1') + \theta_x(\eta_1', \zeta_1') + \theta_x(\zeta_1', \xi_2'),$$

où x désigne le point de concourance de $(\xi_1' \xi_2')$, $(\eta_1' \eta_2')$, $(\zeta_1' \zeta_2')$. Cette somme est supérieure ou égale à π puisque θ_x est une métrique sur ∂X. C'est absurde. □

3.3. *Lemme.* — *Le théorème* 0.1 *est vrai pour* $S = \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$.

Preuve. — Les lemmes 3.1, 3.2 et un argument du type « non-sens abstrait » montrent que si $(\xi_1 \xi_2)$, $(\eta_1 \eta_2)$, $(\zeta_1 \zeta_2)$ sont concourantes dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, il en est de même des géodésiques $(\xi_1' \xi_2')$, $(\eta_1' \eta_2')$ et $(\zeta_1' \zeta_2')$ de X. Ainsi f s'étend en une application F de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ dans X qui envoie géodésiques sur géodésiques. En utilisant la caractérisation 1.3 du birapport et le lemme 3.1, on voit que F est un plongement isométrique. □

On est maintenant en mesure de montrer 0.1 dans toute sa généralité.

3.4. *Fin de la preuve du théorème* 0.1. — Soit G la conjugaison de US dans UX, construite en 1.4.2. Pour montrer le théorème il suffit de montrer que G est fibrée. D'après le lemme 3.3 et par construction de G, sa restriction au fibré unitaire tangent de chaque copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$ est fibrée.

Soient u, v deux éléments de US dans la même fibre. Puisque S est symétrique, on veut trouver un élément w dans la fibre de u et de v tel que u et w d'une part, v et w d'autre part, soient contenus dans le fibré unitaire tangent d'une copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. Cela entraînera que G est fibrée.

L'existence de w résulte de l'argument suivant. Notons p le point base de S commun à u et à v. Soit $E(u)$ le sous-ensemble de $T_p S$ constitué des vecteurs a tels que u et a appartiennent au fibré tangent d'une même copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. L'intersection de $E(u)$ avec l'orthogonal à u dans $T_p S$ est le sous-espace vectoriel orthogonal à la K-droite engendrée par u (K désigne le corps structural de S). Il est de codimension $k = \dim_{\mathbf{R}} K$. Par suite $E(u)$ est un sous-espace vectoriel de codimension $k - 1$. Dès lors son intersection avec $E(v)$ est un sous-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à

$$\dim_{\mathbf{R}} S - 2(k - 1),$$

donc supérieure ou égale à 2. D'où l'existence de w. □

RÉFÉRENCES

[A] M. Arcostanzo, Des métriques finslériennes sur le disque à partir d'une fonction distance entre les points du bord, *Comment. Math. Helvetici*, **69** (1994), 229-248.

[B] W. Ballmann, Singular spaces of non-positive curvature, in *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*, E. Ghys et P. de La Harpe eds, *Progress in Mathematics*, vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[Bo] M. Bourdon, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(— 1)-espace, *L'enseignement mathématique*, **41** (1995), 63-102.

[Bow] R. Bowen, Hausdorff dimension of quasi-circles, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 11-26.

[G-P] M. Gromov, P. Pansu, Rigidity of lattices : An introduction, in *Geometric Topology, Recent developments*, P. de Bartolomeis, F. Tricerri eds, LNM, **1504** (1991).

[H] U. Hamenstädt, Entropy-rigidity of locally symmetric spaces of negative curvature, *Ann. of Math.*, **131** (1990), 35-51.

[K] A. Katok, Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics, *Erg. Th. Dynam. Syst.*, **8** (1988), 139-152.

[O] J.-P. Otal, Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative, *Revista Matematica Iberoamericana*, **8** (n° 3) (1992), 441-456.

[P1] P. Pansu, Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series AI Mathematica*, **14** (1990), 177-212.

[P2] P. Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1, *Ann. of Math.*, **129** (1989), 1-60.

[S] D. Sullivan, Discrete conformal groups and measurable dynamics, *Bull. (NS) Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 57-73.

Marc Bourdon
Université Nancy I
Département de Mathématiques
54506 Vandœuvre-lès-Nancy
France

Manuscrit reçu le 28 octobre 1994.