PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

S. ŁOJASIEWICZ

Sur l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 68 (1988), p. 205-210

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__205_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'ADHÉRENCE D'UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT SEMI-ALGÉBRIQUE

par S. ŁOJASIEWICZ

Dédié à René Thom
à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire.

René Thom a conjecturé que les directions limites d'un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M, en un point $a \in M$, forment un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{P}(T_a M)$. Ceci est lié au fait que l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique est aussi partiellement semi-algébrique. Dans [3] je ne l'ai pas prouvé, car je n'en voyais pas de démonstration simple. Or, dans cet article-ci je vais démontrer cette propriété. Ceci impliquera une réponse positive à la conjecture de René Thom.

1. Soit M une variété analytique réelle et soit N un espace vectoriel. (On ne considère ici que des espaces vectoriels réels de dimension finie.) Un sous-ensemble E de $M \times N$ est dit N-semi-algébrique si chaque point de M possède un voisinage ouvert U tel que E soit décrit dans $U \times N$ par des fonctions analytiques qui sont des polynômes en coordonnées linéaires dans N à coefficients analytiques dans U (cf. [3]).

Théorème. — *L'adhérence d'un sous-ensemble* N*-semi-algébrique de* $M \times N$ *est* N*-semi-algébrique.*

2. Voyons d'abord qu'il suffit de prouver le

Lemme **0.** — *Soit* $X = L \times N$ *le produit des espaces vectoriels* L *et* N, *et soit* Γ *une sous-variété analytique fermée d'un ouvert* G *de* L. *Si* Z *est la trace sur* $\Lambda = \Gamma \times N$ *d'un sous-ensemble semi-algébrique de* X, *alors l'adhérence de* Z *dans* $G \times N$ *est* N*-semi-algébrique dans* $G \times N$.

En effet, on a d'abord le lemme évident suivant :

Lemme **1.** — *Soient* $f : M \times \mathbf{R}^m \to N$, $g : M \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *deux applications analytiques, et soit* $(f, g) : M \times \mathbf{R}^m \to N \times \mathbf{R}^n$ *leur produit diagonal. Supposons que* $f(x, y)$ *ne*

dépende pas de y et que $g(x,y)$ soit polynomiale en y, à coefficients analytiques dans M. *Alors l'image inverse par (f,g) d'un sous-ensemble* $\mathbf{R}^n$*-semi-algébrique de* $N \times \mathbf{R}^n$ *est* $\mathbf{R}^m$*-semi-algébrique dans* $M \times \mathbf{R}^m$.

(On appelle produit diagonal des applications $f_i : Z \to Y_i$, $i = 1, \ldots, r$, l'application $(f_1, \ldots, f_r) : Z \ni x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_r(x)) \in Y_1 \times \ldots \times Y_r$.)

Déduisons-en le théorème. Soit donc E un sous-ensemble N-semi-algébrique de $M \times N$. On peut admettre que $N = \mathbf{R}^k$, que M est un ouvert d'un $\mathbf{R}^n$ et que E est décrit dans $M \times N$ par un nombre fini de polynômes à coefficients analytiques dans M. Suivant une idée de B. Malgrange on a alors $E = (g \times \mathrm{id}_N)^{-1}(A)$, où $g : M \to \mathbf{R}^s$ est le produit diagonal des coefficients de ces polynômes et A est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^s \times N$. Considérons l'isomorphisme analytique

$$h : M \times N \ni (x,y) \mapsto (x, g(x), y) \in \Gamma = \Delta \times N,$$

où $\Delta \subset M \times \mathbf{R}^s$ est le graphe de g. On a $E = h^{-1}(\Gamma \cap B)$ avec $B = \mathbf{R}^n \times A$, d'où

$$\overline{E} = h^{-1}(\overline{\Gamma \cap B});$$

observons que Γ est une sous-variété analytique fermée de $M \times \mathbf{R}^s \times N$, donc que l'adhérence de $\Gamma \cap B$ dans Γ est la même que dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$. Or h, regardée comme une application de $M \times N$ dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$, est le produit diagonal des applications $(x,y) \mapsto (x, g(x))$ et $(x,y) \mapsto y$. Par conséquent, vu que d'après le lemme 0 l'ensemble $\overline{\Gamma \cap B}$ est N-semi-algébrique dans $M \times \mathbf{R}^s \times N$, le lemme 1 implique que l'ensemble $\overline{E}$ est N-semi-algébrique dans $M \times N$.

3. Passons maintenant à la démonstration du lemme 0. On aura encore besoin de quelques lemmes.

Lemme **2**. — *Soit* M *une variété analytique et soit* N *un espace euclidien. Si* $E \subset M \times (N \setminus 0)$ *est un sous-ensemble* N*-semi-algébrique de* $M \times N$, *il en est de même de son image par l'involution* $M \times (N \setminus 0) \ni (x,y) \mapsto (x, y/|y|^2) \in M \times (N \setminus 0)$.

Ceci est évident.

Lemme **3**. — *Soient* $E \subset F$ *deux sous-ensembles semi-analytiques compacts d'un espace euclidien* L. *Alors il existe un exposant* $r > 0$ *tel que* $\max_{F \cap B(c,t)} \rho(x, E) > t^r$, *lorsque* $c \in \overline{F \setminus E}$ *et* $0 < t < 1/2$.

En effet, le premier membre de l'inégalité est sous-analytique en tant que fonction de $(c,t) \in B = \overline{F \setminus E} \times [0, 1/2]$, donc l'adhérence C de son graphe est un ensemble compact sous-analytique. On vérifie que l'on a $C \cap (B \times 0) \subset L \times 0 \times 0$, donc la séparation régulière de C et $L \times \mathbf{R} \times 0$ donne l'inégalité.

Lemme **4.** — *Si* E *est un sous-ensemble semi-algébrique du produit* $L \times N$ *de deux espaces vectoriels, alors son adhérence par fibres*

$$E^{\wedge} = \bigcup_{u \in L} u \times \bar{E}_u$$

est semi-algébrique.

(Si $A \subset S \times T$ et $s \in S$, on note A_s la fibre $\{ t \in T : (s, t) \in A \}$.)

Ceci est standard à vérifier car, en supposant N euclidien, on a

$$E^{\wedge} = \{ (x, y) : \forall \varepsilon > 0, \exists z \in N, (x, z) \in E \text{ et } | z - y | < \varepsilon \}.$$

On a enfin un fait bien connu :

Lemme **5.** — *Chaque sous-ensemble semi-algébrique (borné) d'un espace vectoriel est réunion finie de différences* $F \backslash E$ *avec* $E \subset F$ *semi-algébriques fermés (compacts).*

4. *Démonstration du lemme* **0.** — Vu que le problème est local sur Γ et que Γ est localement le graphe d'une application analytique (dans un système des coordonnées), il suffit de considérer le cas où $L = \mathbf{R}^n \times V$ avec V euclidien, $G = H \times V$ où H est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, Γ est le graphe d'une application analytique $g : H \to N$ qui s'étend (analytiquement) à un voisinage de $\overline{H}$, et $N = \mathbf{R}^k$. Quant à l'ensemble semi-algébrique en question, on peut supposer, en vertu des lemmes 2 et 5, qu'il soit de la forme $F \backslash E$ où $E \subset F$ sont des sous-ensembles semi-algébriques compacts de X. Il reste donc à prouver que l'adhérence dans $G \times N$ de l'ensemble $\Lambda \cap F \backslash E$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\Sigma = \overline{\Lambda \cap F \backslash E} \cap \Lambda,$$

est N-semi-algébrique dans $G \times N$.

Selon le lemme 3, appliqué aux ensembles compacts semi-analytiques $E \cap \bar{\Lambda} \subset F \cap \bar{\Lambda}$, il existe un exposant $r > 0$ tel que

(1) pour tout $c \in \Sigma$ on a $\rho(x, E \cap \Lambda) > | x - c |^r$ pour des $x \in \Lambda \cap F$ arbitrairement voisins de c.

Par la séparation régulière on a les inégalités

(2) $\rho(x, E) \geqslant d\rho(x, E \cap \Lambda)^r$ lorsque $x \in \Lambda \cap F$,

(3) $\rho(x, \Lambda) \geqslant d\rho(x, F \cap \Lambda)^r$ lorsque $x \in F$,

avec le même r et un $d > 0$.

Soit $c = (a, b, w) \in \Lambda$ (avec $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in V$ et $w \in N$; on a donc $b = g(a)$) et considérons les sous-ensembles suivants de X

(4) $E(c) = \{ x : \rho(x, E) \leqslant d \mid x - c |^{r^2} \}$,

(5) $\Lambda(c) = \{ (u, v, y) : | v - T_a(u) | \leqslant \frac{1}{2} d^{r+1} \mid u - a |^{r^2} \}$,

où $u \in \mathbf{R}^n$, $v \in V$, $y \in N$ et

$$T_c(u) = b + \sum_{0<|p|\leqslant r^3} \frac{1}{p!} D^p g(a)\,(u-a)^p \tag{6}$$

est le r^3-ième polynôme de Taylor de g en a. On a l'équivalence

$$c \in \overline{\Lambda \cap F\backslash E} \Leftrightarrow c \in \overline{\Lambda(c) \cap F\backslash E(c)}. \tag{*}$$

En effet, si $c \in \overline{\Lambda \cap F\backslash E}$, on a, par (1), (2) et (4), $x \notin E(c)$ pour des $x \in \Lambda \cap F$ arbitrairement voisins de c, ce qui donne la deuxième condition de (*) grâce à l'inclusion des germes $\Lambda_c \subset \Lambda(c)_c$. Si par contre $c \notin \overline{\Lambda \cap F\backslash E}$, alors $(\Lambda \cap F)_c \subset E_c$ et il suffit de vérifier l'inclusion $(\Lambda(c) \cap F)_c \subset E(c)_c$, qui entraîne que la deuxième condition de (*) n'est pas satisfaite; or, si $x = (u, v, y) \in \Lambda(c) \cap F$ est suffisamment voisin de c, on a (vu (5)) : $\rho(x, \Lambda) \leqslant |v - g(u)| \leqslant d^{r+1} |u - a|^{r^3} \leqslant d^{r+1} |x - c|^{r^3}$, ce qui donne, d'après (3), $\rho(x, E) \leqslant \rho(x, F \cap \Lambda) \leqslant d\,|x - c|^{r^3}$, c'est-à-dire (vu (4)) $x \in E(c)$.

Considérons maintenant l'espace $\widetilde{X} = V^\theta \times X^2$, où $\theta = \{p \in \mathbf{N}^n : 0 < |p| \leqslant r^3\}$, et les sous-ensembles semi-algébriques de $\widetilde{X}$

$$\widetilde{E} = \{(\alpha, c, x) : \rho(x, E) \leqslant d\,|x - c|^{r^3}\}, \qquad \widetilde{F} = \{(\alpha, c, x) : x \in F\}, \tag{7}$$

$$\widetilde{\Lambda} = \left\{(\alpha, c, x) : |v - b - \sum_{0<|p|\leqslant r^3} \frac{1}{p!} \alpha_p (u-a)^p| \leqslant \frac{1}{2} d^{r+1} |u-a|^{r^3}\right\}, \tag{8}$$

où $\alpha = \{\alpha_p\}_{p \in \theta} \in V^\theta$ avec $\alpha_p \in V$, et $c = (a, b, w) \in X$, $x = (u, v, y) \in X$ avec $a, u \in \mathbf{R}^n$, $b, v \in V$ et $w, y \in N$. Considérons l'application analytique $\delta : G \ni u \mapsto \{D^p g(u)\}_{p \in \theta} \in V^\theta$. Si $c \in \Lambda$, on a, vu (7), (4), (8), (5) et (6),

$$\widetilde{E}_{(\alpha, c)} = E(c), \qquad \widetilde{F}_{(\alpha, c)} = F \quad \text{et} \quad \widetilde{\Lambda}_{(\delta(a), c)} = \Lambda(c). \tag{9}$$

D'après le lemme 4, l'adhérence par fibres

$$(\widetilde{\Lambda} \cap \widetilde{F}\backslash\widetilde{E})^\wedge = \bigcup_{(a, c)} \overline{\widetilde{\Lambda}_{(\alpha, c)} \cap \widetilde{F}_{(\alpha, c)}\backslash\widetilde{E}_{(\alpha, c)}}$$

est un sous-ensemble semi-algébrique de $\widetilde{X}$, tandis que le sous-ensemble de $V^\theta \times (H \times V \times N)^2$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \{(\alpha, c, x) : \alpha = \delta(a), c = x \in \Lambda\} \\ &= \{(\alpha, c, x) : \alpha = \delta(a), a = u, b = g(a), v = g(u)\}\end{aligned}$$

est $(N \times N)$-semi-algébrique, donc leur intersection $\widetilde{\Sigma}$ est $(N \times N)$-semi-algébrique dans $V^\theta \times (H \times V \times N)^2$. Or, la fibre $\Delta_{(\alpha, c)}$ est vide, sauf lorsque $\alpha = \delta(a)$ et $c \in \Lambda$, auquel cas $\Delta_{(\alpha, c)} = \{c\}$. Par conséquent, en vertu de (9) et (*), la fibre $\widetilde{\Sigma}_{(\alpha, c)}$ est vide sauf si $\alpha = \delta(a)$ et $c \in \overline{\Lambda \cap F\backslash E} \cap \Lambda = \Sigma$, auquel cas $\widetilde{\Sigma}_{(\alpha, c)} = \{c\}$, ce qui montre que

$$\widetilde{\Sigma} = \{\alpha = \delta(a), c = x \in \Sigma\}.$$

L'ensemble Σ est donc l'image inverse de $\tilde{\Sigma}$ par l'application analytique

$$H \times V \times N \ni c \mapsto (\delta(a), c, c) \in V^0 \times (H \times V \times N)^2$$

qui peut être regardée comme le produit diagonal des applications $c \to (\delta(a), a, b, a, b)$ et $c \to (w, w)$. Ceci montre, d'après le lemme 1, que Σ est N-semi-algébrique dans $H \times V \times N$.

5. Un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbf{P}_k$ est semi-algébrique, s'il l'est dans chaque système des coordonnées cartésiennes φ_s, $s = 0, \ldots, k$, c'est-à-dire, si son image par chaque φ_s est semi-algébrique, où

$$\varphi_s : \{x_s \neq 0\} \ni (x_0, \ldots, x_k) \mapsto (x_0/x_s, \ldots, x_{s-1}/x_s, x_{s+1}/x_s, \ldots, x_k/x_s) \in \mathbf{R}^k$$

en coordonnées homogènes. Soit M une variété analytique; un sous-ensemble E de $M \times \mathbf{P}_k$ est dit $\mathbf{P}_k$-semi-algébrique si son image par chaque $\mathrm{id}_M \times \varphi_s$ est $\mathbf{R}^k$-semi-algébrique, auquel cas chaque fibre $E_a \subset \mathbf{P}_k$, $a \in M$, est semi-algébrique.

A toute variété analytique M est associé un fibré projectif analytique $q : \mathbf{P}TM \to M$, où $q^{-1}(x) = \mathbf{P}(T_x M)$ pour $x \in M$, appelé *fibré projectif tangent* de M. Tout isomorphisme $f : M \to N$ de variétés analytiques induit un isomorphisme $f_\# : \mathbf{P}TM \to \mathbf{P}TM$, défini par

$$f_\#(\mathbf{R}u) = \mathbf{R}\, d_x f(u) \quad \text{lorsque } u \in T_x M \backslash 0$$

(sa restriction à chaque fibre $\mathbf{P}(T_x M)$ est un isomorphisme de l'espace projectif $\mathbf{P}(T_x M)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(T_{f(x)} N)$). En particulier, si H est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, alors $\mathbf{P}TH$ est identifié à $H \times \mathbf{P}_{n-1}$ (on identifie $T_x H$ à $x \times \mathbf{R}^n$, $x \in H$); la structure d'une variété analytique de $\mathbf{P}TM$ est définie par l'atlas des cartes associées $\varphi_\#$, où les φ sont les cartes de M.

Un sous-ensemble E de $\mathbf{P}TM$ est dit $\mathbf{P}$-semi-algébrique si son image par chaque carte associée $\varphi_\# : \mathbf{P}TG \to H \times \mathbf{P}_{n-1}$ (où $\varphi : G \to H \subset \mathbf{R}^n$) est $\mathbf{P}_{n-1}$-semi-algébrique. Alors chacune de ses fibres $E_a = E \cap \mathbf{P}(T_a M)$, $a \in M$, est semi-algébrique.

Soit $v : M \to TM$ un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M. Alors $\tilde{v} : \{v \neq 0\} \ni x \mapsto \mathbf{R}v(x) \in \mathbf{P}TM$ est une section analytique sur $\{v \neq 0\}$ de $\mathbf{P}TM$. On appelle ensemble des directions limites de v (resp. en $a \in M$) l'adhérence $\bar{v}$ de la section $\tilde{v}$ identifiée à son image dans $\mathbf{P}TM$ (resp. sa fibre $\bar{v}_a$) (les sections d'un fibré analytique $p : X \to M$ s'identifient à leurs images, sous-variétés analytiques de X de dimension dim M qui intersectent chaque fibre transversalement et en au plus un point). L'image $f_* v$ de v par un isomorphisme $f : M \to N$ de variétés analytiques est défini par $(f_* v)\,(f(x)) = (d_x f)\,(v(x))$. Ceci donne $\widetilde{f_* v} = f_\#(\tilde{v})$, car on a

$$\mathbf{R}(f_* v)\,(f(x)) = f_\#(\mathbf{R}v(x)),$$

et par conséquent

$$(\#) \qquad \overline{f_* v} = f_\#(\bar{v}).$$

Théorème de Thom. — Si v est un champ vectoriel analytique sur une variété analytique M, *alors son ensemble de directions limites $\bar{v}$ est un sous-ensemble* **P**-*semi-algébrique du fibré projectif tangent* **P**TM. *En particulier, l'ensemble des directions limites $\bar{v}_a$ de v en un point $a \in$ M quelconque est semi-algébrique dans* $\mathbf{P}(\mathrm{T}_a \mathrm{M})$.

En effet, le problème est local sur M donc, en vertu de (♯), il suffit de traiter le cas où M = G est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Alors l'image de l'ensemble

$$\tilde{v} = \{(x, \mathbf{R}v(x)) : v(x) \neq 0\} \subset \mathrm{G} \times \mathbf{P}_{n-1}$$

par $(\mathrm{id}_\mathrm{G}) \times \varphi_s$ est égal à

$$\{(x, y_1, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, \ldots, y_n) \in \mathrm{G} \times \mathbf{R}^{n-1} : y_i v_j(x) = y_j v_i(x), y_s = 1, v(x) \neq 0\}.$$

Comme celui-ci est $\mathbf{R}^{n-1}$-semi-algébrique, il suffit d'appliquer le théorème du n° 1.

Remarque. — Le fait que l'ensemble des directions limites en un point a est semi-algébrique peut être déduit du théorème sur semi-algébricité d'un cône semi-analytique (voir [5]). En effet, on peut admettre que M = G est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Or, le cône de $\mathbf{R}^n$ qui correspond à $\bar{v}_a$ est semi-analytique, donc semi-algébrique : il est égal à la fibre W_a de l'adhérence W du sous-ensemble semi-analytique $\{(x, y) \in \mathrm{G} \times \mathbf{R}^n : y \wedge v(x) = 0, v(x) \neq 0\}$ de $\mathrm{G} \times \mathbf{R}^n$.

RÉFÉRENCES

[1] E. Bierstone and P. D. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **67** (1988), 5-42.
[2] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, New York, Springer-Verlag, 1987.
[3] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. (prépublication) (1964).
[4] Id., Sur la séparation régulière, *Seminari di Geometria Università di Bologna*, 1985, 119-121.
[5] Id., Sur les cônes semi-analytiques, *ibid.*, 123-125.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
30-059 Kraków
Reymonta 4
Pologne

Manuscrit reçu le 30 septembre 1988.