PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE DELIGNE

Théorie de Hodge : III

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 44 (1974), p. 5-77
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1974__44__5_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORIE DE HODGE, III

par PIERRE DELIGNE

SOMMAIRE

INTRODUCTION 6

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS 7

5. **Descente cohomologique** 8

1. Espaces topologiques simpliciaux 8
2. Cohomologie des espaces topologiques simpliciaux 12
3. Descente cohomologique 14

6. **Exemples d'espaces topologiques simpliciaux** 16

1. Espaces classifiants 16
2. Construction d'hyperrecouvrements 19
3. Cohomologie relative 21
4. Espaces multisimpliciaux 22

7. **Compléments au § 1** 23

1. Catégorie dérivée filtrée 23
2. Compléments au lemme des deux filtrations 25

8. **Théorie de Hodge des espaces algébriques** 28

1. Complexes de Hodge 28
2. Espaces algébriques séparés 38
3. Théorie de Hodge des schémas simpliciaux 41

9. **Exemples et applications** 45

1. Cohomologie des groupes et des classifiants 45
2. Théorie de Hodge des hypersurfaces lisses, d'après Griffiths 48
3. Construction de complexes d'opérateurs différentiels du 1er ordre 50

10. **Théorie de Hodge en niveau ≤ 1** 53

1. 1-motifs 53
2. 1-motifs et biextensions 60
3. Interprétation algébrique du H^1 mixte : cas des courbes 69
4. Traduction d'un théorème de Picard 75

BIBLIOGRAPHIE 77

Introduction

Cet article fait suite à [4] et [5], cités I et II. La numérotation de ses paragraphes prolonge celle de II (qui contient les §§ 1 à 4). Pour renvoyer à un résultat de II, on mentionne simplement son numéro. Par exemple : (3.2.17).

Dans I, nous avons exposé le yoga qui sous-tend II et le présent article III. Toutefois, II et III sont logiquement indépendants de I. Ils ne contiennent pas tous les résultats qui sont annoncés dans I.

Dans II, nous avons exposé la théorie de Hodge des variétés algébriques non singulières (non nécessairement complètes). On traite ici le cas de singularités quelconques. A partir du § 7, un usage essentiel sera fait des résultats des §§ 1 à 3 de II.

Dans le cas d'une variété algébrique singulière *complète* X, l'idée fondamentale est d'utiliser la résolution des singularités pour « remplacer » X par un système simplicial de schémas projectifs et lisses $X_\bullet$

$$\cdots\cdots X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow}\; X_0$$

(ou, comme nous dirons, par un schéma simplicial projectif et lisse). Les résultats des §§ 5 et 6 permettent de trouver de tels schémas simpliciaux $X_\bullet$ ayant, en un sens convenable, même cohomologie que X. On peut alors « exprimer », *via* une suite spectrale, la cohomologie de X en terme de celle des X_n. En conformité avec les principes généraux de I, on peut alors, sur chacun des X_n, utiliser la théorie de Hodge classique, et en déduire une structure de Hodge mixte sur la cohomologie de X.

Dans le cas d'une variété algébrique quelconque X, on « remplace » X par un schéma simplicial lisse $X_\bullet$, compactifié par un schéma simplicial projectif et lisse $\overline{X}_n$. On se débrouille de plus pour que $\overline{X}_n - X_n$ soit un diviseur à croisements normaux, réunion de diviseurs lisses $D_{n,i}$. On « exprime » alors *via* une suite spectrale la cohomologie de X en terme de la cohomologie des intersections p à p des $D_{n,i}$ $(n \geq 0,\ p \geq 0)$, et on en déduit une structure de Hodge mixte sur $H^\bullet(X)$.

Les §§ 5 et 6 constituent un résumé (sans démonstrations) de la théorie de la « descente cohomologique ». Cette théorie, dans le cadre plus général des topos, est exposée par B. Saint-Donat dans *S.G.A.*4, V *bis*.

Au § 7 n° 1, on reprend dans le langage des catégories dérivées filtrées certains des résultats obtenus antérieurement. Le n° 2 contient une démonstration du lemme des deux filtrations plus simple que celle du § 1, n° 3.

Le rebutant n° 1 du § 8 est le cœur de ce travail. Le résultat essentiel est le théorème (8.1.15). Dans sa démonstration, pour pouvoir appliquer le lemme des deux

filtrations, on utilise que tout morphisme de structures de Hodge mixtes est *strictement* compatible aux filtrations W et F (2.3.5). Au n° 2, on définit la structure de Hodge mixte de $H^n(X, \mathbf{Z})$ (X schéma séparé). On montre que les nombres de Hodge h^{pq} de $H^n(X, \mathbf{Z})$ ne peuvent être non nuls que pour $(p, q) \in [0, n] \times [0, n]$. Pour $n > \dim X$, on a un résultat plus précis (8.2.4). Si X est lisse (resp. complet) ils ne peuvent être non nuls que si de plus $p + q \geq n$ (resp. $p + q \leq n$). Si X est un sous-schéma complet de complément U d'un schéma Z, complet et lisse de dimension n, on peut, d'après N. Katz, interpréter cette « dualité » entre les cas complets et lisses comme provenant de la « dualité d'Alexander »

$$\ldots H^i(Z, \mathbf{Q}) \to H^i(X, \mathbf{Q}) \to (H^{2n-i-1}(U, \mathbf{Q}))^* \to H^{i+1}(Z, \mathbf{Q}) \ldots$$

Des propriétés de fonctorialité de la théorie construite, on déduit les utiles corollaires (8.2.5) à (8.2.8), qui s'énoncent en termes indépendants de toute théorie de Hodge.

Au § 8, n° 3, on munit la cohomologie de tout schéma simplicial $X_\bullet$ d'une structure de Hodge mixte. Cette généralité n'est pas illusoire.

a) On peut interpréter des espaces de cohomologie relative comme étant la cohomologie de schémas simpliciaux convenables.

b) Soit B_G l'espace classifiant du groupe de Lie sous-jacent à un groupe algébrique G. On peut interpréter la cohomologie de B_G comme étant celle d'un schéma simplicial convenable.

Au § 9, n° 1, après avoir calculé la structure de Hodge mixte de la cohomologie de B_G (pour G linéaire), on en déduit celle de G. Comme corollaire, on trouve que si un groupe linéaire G agit sur une variété complète non singulière X, alors l'application

$$H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q})$$

se factorise par $H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^0(G, \mathbf{Q}) \subset H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q})$.

Au § 10, on interprète en terme de schémas abéliens les structures de Hodge mixtes purement de type $\{(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0)\}$ (III.0.5), et on considère en détail le H^1 des courbes.

La théorie développée jusqu'ici est une théorie absolue (on n'y étudie pas les foncteurs Rf_*), et ne concerne que des coefficients constants. Je conjecture que si $\mathscr{H}$ est une variation de structures de Hodge polarisable (au sens de Griffiths [6]) sur un schéma X, alors la cohomologie de X à coefficients dans le système local $\mathscr{H}$ est munie d'une structure de Hodge mixte naturelle. Je ne puis le prouver que pour X complet.

Terminologie et notations

(III.0.1) Soit $u : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Nous dirons que u est *propre* si elle est propre au sens de Bourbaki (i.e. universellement fermée) et de plus séparée (i.e. si la diagonale de $X \times_Y X$ est fermée).

(III.0.2) Suivant en cela Gabriel et Zisman, nous dirons *simplicial* là où autrefois on disait semi-simplicial.

(III.0.3) Nous désignerons par A un sous-anneau noethérien de $\mathbf{R}$ tel que $A\otimes\mathbf{Q}$ soit un corps. Les cas utiles sont $A=\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$.

(III.0.4) Une A-*structure de Hodge mixte* consiste en un A-module de type fini H_A, une filtration finie croissante W du $A\otimes\mathbf{Q}$-vectoriel $H_{A\otimes\mathbf{Q}}=H_A\otimes\mathbf{Q}$, et une filtration finie décroissante F du $\mathbf{C}$-vectoriel $H_{\mathbf{C}}=H_A\otimes_A\mathbf{C}$. On exige que les $(\mathrm{Gr}_n^W(H_{A\otimes\mathbf{Q}}), \mathrm{Gr}_n^W(F))$ soient des $A\otimes\mathbf{Q}$-structures de Hodge. Pour $A=\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$) on retrouve (2.3.1) (resp. 2.3.8); les résultats de (2.3) se transposent tels quels.

(III.0.5) Soit $\mathscr{E}$ une partie de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Une structure de Hodge mixte H est de *type* $\mathscr{E}$ si ses nombres de Hodge h^{pq} sont nuls pour $(p, q)\notin\mathscr{E}$.

(III.0.6) Nous noterons désormais $\Omega_X^{\bullet}(\log D)$ ce que nous notions $\Omega_X^{*}\langle D\rangle$ (3.1.2).

(III.0.7) Sauf mention explicite du contraire, *schéma* signifie « schéma de type fini sur $\mathbf{C}$ », et un *faisceau* sur un schéma X est un faisceau sur l'espace topologique sous-jacent à X_{an}.

5. DESCENTE COHOMOLOGIQUE

5.1. Espaces topologiques simpliciaux.

Ce numéro commence par des rappels pour lesquels on peut renvoyer au séminaire homotopique de Strasbourg, 63/64.

(5.1.1) On utilisera les notations suivantes.

$\mathscr{A}^0$ = catégorie opposée d'une catégorie $\mathscr{A}$.
$Hom(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ = catégorie des foncteurs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$.

Désignons par n et k des entiers ≥ -1.

Δ_n = l'ensemble fini totalement ordonné $[0, n]$.
$\delta_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ = l'injection croissante telle que $i\notin\delta_i(\Delta_n)$ $(0\leq i\leq n+1)$.
$s_i : \Delta_{n+1}\to\Delta_n$ = la surjection croissante telle que $s_i(i)=s_i(i+1)$ $(0\leq i\leq n)$.
$\varepsilon : \Delta_{-1}\to\Delta_n$ = l'unique application de Δ_{-1} dans Δ_n.
(Δ^+) = la catégorie ayant pour objets les Δ_n $(n\geq -1)$, et pour flèches les applications croissantes entre les Δ_n.
(Δ) = la sous-catégorie pleine de (Δ^+) d'objets les Δ_n $(n\geq 0)$.
$(\Delta^+)_k$ = la sous-catégorie pleine de (Δ^+) d'objets les Δ_n $(k\geq n)$.
$(\Delta)_k$ = la sous-catégorie pleine de (Δ^+) d'objets les Δ_n $(k\geq n\geq 0)$.

Pour toute catégorie $\mathscr{C}$, un *objet simplicial* (resp. *objet simplicial k-tronqué*) de $\mathscr{C}$ est un objet de $Hom((\Delta)^0, \mathscr{C})$ (resp. $Hom((\Delta)^0_k, \mathscr{C})$). De même, un *objet cosimplicial* (resp. ...) de $\mathscr{C}$ est un objet de $Hom((\Delta), \mathscr{C})$ (resp. ...).

Le foncteur *squelette* sq_k est, pour $k \geq -1$, le foncteur de restriction

$$\mathrm{sq}_k : Hom((\Delta)^0, \mathscr{C}) \to Hom((\Delta)^0_k, \mathscr{C}).$$

Le foncteur *cosquelette* cosq_k est le foncteur adjoint à droite à sq_k

$$\mathrm{cosq}_k : Hom((\Delta)^0_k, \mathscr{C}) \to Hom((\Delta)^0, \mathscr{C}).$$

Soit Y un objet simplicial de $\mathscr{C}$. On appelle encore *squelette* le foncteur

$$\mathrm{sq}_k : Hom((\Delta)^0, \mathscr{C})/\mathrm{Y} \to Hom((\Delta)^0_k, \mathscr{C})/\mathrm{sq}_k(\mathrm{Y}).$$

Son adjoint à droite se note $\mathrm{cosq}_k^{\mathrm{Y}}$ (cosquelette relatif à Y)

$$\mathrm{cosq}_k^{\mathrm{Y}} : Hom((\Delta)^0_k, \mathscr{C})/\mathrm{sq}_k \mathrm{Y} \to Hom((\Delta)^0, \mathscr{C})/\mathrm{Y}.$$

Les foncteurs cosquelettes sont définis si les limites projectives finies existent dans $\mathscr{C}$. Les foncteurs $\mathrm{cosq}_k^{\mathrm{Y}}$ existent dès qu'existent les produits fibrés. On a

$$\mathrm{cosq}_k^{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) = \mathrm{cosq}_k(\mathrm{X}) \times_{\mathrm{cosq}_k \mathrm{sq}_k(\mathrm{Y})} \mathrm{Y}.$$

(5.1.2) Si $\mathrm{X}_\bullet : (\Delta)^0 \to \mathscr{C}$ est un objet simplicial de $\mathscr{C}$, on pose $\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_\bullet(\Delta_n)$, $\delta_i = \mathrm{X}_\bullet(\delta_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}) : \mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{X}_n$ et $s_i = \mathrm{X}_\bullet(s_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n) : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n+1}$.

$$\mathrm{X}_\bullet : \qquad \cdots\cdots \mathrm{X}_2 \;\begin{array}{c}\xrightarrow{\delta_0}\\ \xleftarrow{s_0}\\ \xrightarrow{\delta_1}\\ \xleftarrow{s_1}\\ \xrightarrow{\delta_2}\end{array}\; \mathrm{X}_1 \;\begin{array}{c}\xrightarrow{\delta_0}\\ \xleftarrow{s_0}\\ \xrightarrow{\delta_1}\end{array}\; \mathrm{X}_0$$

(5.1.3) Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. L'*objet simplicial constant* $\mathrm{S}_\bullet$ est l'objet simplicial pour lequel $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}$ et $\delta_i = s_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}}$. Un objet simplicial (resp. simplicial k-tronqué) de $\mathscr{C}$, *augmenté vers* S, est un morphisme $a : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{S}_\bullet$ (resp. $a : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{sq}_k(\mathrm{S}_\bullet)$). Nous identifierons les objets simpliciaux (resp. simpliciaux k-tronqués) de $\mathscr{C}$, augmentés vers S, $a : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{S}_\bullet$ (resp. ...) aux objets $\mathrm{X}^+_\bullet$ de $Hom((\Delta^+)^0, \mathscr{C})$ (resp. $Hom((\Delta^+)^0_k, \mathscr{C})$), tels que $\mathrm{X}^+_\bullet(\Delta_{-1}) = \mathrm{S}$. On a $a_n = \mathrm{X}^+_\bullet(\varepsilon : \Delta_{-1} \to \Delta_n)$. Ces objets seront désignés par une notation du type $a : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{S}$. Les cosquelettes relatifs seront surtout utilisés dans ce cadre, et notés $\mathrm{cosq}_k^{\mathrm{S}}$ ou simplement cosq_k.

(5.1.4) Le cosquelette de l'objet simplicial o-tronqué augmenté $a_0 : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est l'objet simplicial augmenté vers S de composantes les puissances cartésiennes de X dans $\mathscr{C}/\mathrm{S}$

$$\mathrm{cosq}_0(\mathrm{X} \to \mathrm{S}) = (((\mathrm{X}/\mathrm{S})^{\Delta_n})_{n \geq 0} \to \mathrm{S}).$$

(5.1.5) Soient $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue entre espaces topologiques, F un faisceau sur X et G un faisceau sur Y. L'ensemble $\mathrm{Hom}_u(\mathrm{G}, \mathrm{F})$ des *u-morphismes* de G dans F est l'ensemble $\mathrm{Hom}(u^*\mathrm{G}, \mathrm{F}) \sim \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, u_*\mathrm{F})$.

Se donner un u-morphisme f de G dans F revient à se donner, pour tout couple d'ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ tel que $u(U) \subset V$, une application $f_{UV} : G(V) \to F(U)$; ces applications doivent vérifier la condition

(*) Pour $U' \subset U \subset X$, $V' \subset V \subset Y$, $u(U) \subset V$ et $u(U') \subset V'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(V) & \longrightarrow & G(V') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \longrightarrow & F(U') \end{array}$$

est commutatif.

(5.1.6) Un *espace topologique simplicial* est un objet simplicial de la catégorie d'objets les espaces topologiques, et de morphismes les applications continues.

Un *faisceau* $F^\bullet$ sur un espace topologique simplicial $X_\bullet$ consiste en

a) une famille F^n de faisceaux sur les X_n;
b) pour $f : \Delta_n \to \Delta_m$, un $X_\bullet(f)$-morphisme $F^\bullet(f)$ de F^n dans F^m.

On exige de plus que $F^\bullet(f \circ g) = F^\bullet(f) \circ F^\bullet(g)$.

Un morphisme u de $F^\bullet$ dans $G^\bullet$ est une famille de morphismes $u^n : F^n \to G^n$ telle que pour $f \in \mathrm{Hom}_{(\Delta)}(\Delta_n, \Delta_m)$, on ait $u^m F^\bullet(f) = G^\bullet(f)\, u^n$.

(5.1.7) Pour U un ouvert de X_n, soit $F^\bullet(U) = F^n(U)$. Pour $f : \Delta_n \to \Delta_m$, $U \subset X_n$ et V dans X_m tels que $X_\bullet(f)(V) \subset U$, soit $F^\bullet(f, V, U) : F^\bullet(U) \to F^\bullet(V)$ l'application induite par $F^\bullet(f)$. On vérifie aussitôt que le système des ensembles $F^\bullet(U)$ (indexés par n et $U \subset X_n$) et des applications $F^\bullet(f, V, U)$ détermine $F^\bullet$ uniquement (cf. (5.1.5)). Pour qu'un tel système provienne d'un faisceau sur $X_\bullet$, il faut et il suffit que :

a) $F^\bullet(fg, U, W) = F^\bullet(f, U, V)\, F^\bullet(g, V, W)$ chaque fois que cela a un sens;
b) quel que soit n, les $F^\bullet(U)$ pour $U \subset X_n$ forment un faisceau sur X_n.

(5.1.8) Ceci montre que les faisceaux sur $X_\bullet$ peuvent s'interpréter comme les faisceaux sur un site convenable, et en particulier forment un topos $(X_\bullet)^\sim$. On utilisera librement, pour les faisceaux sur $X_\bullet$, la terminologie en usage pour les faisceaux sur un site. Ainsi, un faisceau en groupes abéliens (resp. un faisceau d'anneaux, ...) $F^\bullet$ est un système de faisceaux en groupes abéliens (resp. de faisceaux d'anneaux, ...) F^n sur les X_n, et de morphismes $F^\bullet(f)$.

(5.1.9) *Exemples.* (I) Soit $X_\bullet$ un espace analytique simplicial. Les faisceaux structuraux $\mathcal{O}_{X_n}$ forment un faisceau d'anneaux sur $X_\bullet$.

(II) Soit $X_\bullet$ un espace analytique simplicial augmenté vers S. Les faisceaux $\Omega^1_{X_n/S}$ forment un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur $X_\bullet$. Sa puissance extérieure i-ème est le faisceau

de $\mathcal{O}$-modules $(\Omega^i_{X_n/S})_{n\geq 0}$, noté $\Omega^i_{X_\bullet/S}$. Les complexes de De Rham $(\Omega^\bullet_{X_n/S})_{n\geq 0}$ forment un complexe de faisceaux sur $X_\bullet$.

(III) Soit $F^\bullet$ un faisceau des groupes abéliens sur $X_\bullet$. Les résolutions flasques canoniques de Godement $\mathscr{C}^\bullet(F^n)$ forment un complexe de faisceaux sur $X_\bullet$, et une résolution de $F^\bullet$.

(IV) Soit S un espace topologique. Les faisceaux $F^\bullet$ sur l'espace simplicial constant $S_\bullet$ s'identifient aux faisceaux cosimpliciaux sur S. En particulier, un faisceau abélien $F^\bullet$ sur $S_\bullet$ définit un complexe différentiel $(F^n, d=\sum_i(-1)^i\delta_i)$. Un complexe de faisceaux abéliens K sur $S_\bullet$ définit un double complexe $(K^{n,m})$ encore noté K (m = degré cosimplicial) de complexe simple associé sK :

(5.1.9.1)
$$(sK)^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$$

et

(5.1.9.2)
$$d(x^{pq}) = d_K(x^{pq}) + (-1)^p \sum_i (-1)^i \delta_i x^{pq}.$$

On notera L la seconde filtration de sK :

(5.1.9.3)
$$L^r(sK) = \bigoplus_{q\geq r} K^{pq}.$$

(5.1.10) Soit $u : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux, de composantes $u_n : X_n \to Y_n$. Si G (resp. F) est un faisceau sur $Y_\bullet$ (resp. sur $X_\bullet$), alors $(u_n^* G^n)_{n\geq 0}$ (resp. $(u_{n*}F^n)_{n\geq 0}$) est un faisceau sur $X_\bullet$ (resp. sur $Y_\bullet$); on le note u^*G (resp. u_*F). Les foncteurs u_* et u^* sont adjoints; ce sont les morphismes image directe et réciproque d'un morphisme de topos $u : (X_\bullet)^\sim \to (Y_\bullet)^\sim$.

(5.1.11) Soit $a : X_\bullet \to S$ un espace topologique simplicial augmenté vers S. Si F est un faisceau sur S, $a^*F = (a_n^* F)_{n\geq 0}$ « est » un faisceau sur $X_\bullet$. Le foncteur a^* a un adjoint à droite

(5.1.11.1)
$$a_* : F^\bullet \mapsto \mathrm{Ker}(a_{0*}F^0 \underset{\delta_1^*}{\overset{\delta_0^*}{\rightrightarrows}} a_{1*}F^1).$$

Les foncteurs a_* et a^* sont les foncteurs image directe et réciproque d'un morphisme de topos $a : (X_\bullet)^\sim \to (S)^\sim$.

(5.1.12) Soient $S_\bullet$ l'espace simplicial constant associé à S et $a_\bullet : X_\bullet \to S_\bullet$ le morphisme défini par a. Pour $F^\bullet$ un faisceau abélien sur $X_\bullet$, on identifie $a_{\bullet *}(F^\bullet)$ à un faisceau cosimplicial sur S ((5.1.9) (IV)). Pour K un complexe de faisceaux abéliens sur $X_\bullet$, si K^{pq} est la composante de degré p de la restriction de K à X_q, les composantes du complexe simple associé au double complexe défini par $a_{\bullet *}K$ sont

(5.1.12.1)
$$(sa_{\bullet *}K)^n = \bigoplus_{p+q=n} a_{q*}K^{pq}.$$

La suite spectrale définie par la filtration L ((5.1.9.3)) de $sa_{**}K$ s'écrit

(5.1.12.2) $$E_1^{pq} = H^q(a_{p*}(K \mid X^p)) \Rightarrow H^{p+q}(sa_{**}K).$$

(5.1.13) Faisons $S = P^i$ (espace topologique réduit à un point). On trouve que, pour $F^\bullet$ un faisceau sur $X_\bullet$, les $\Gamma(X_n, F^n)$ sont les composantes d'un ensemble cosimplicial $\Gamma^\bullet(X_\bullet, F^\bullet)$. Le foncteur Γ (sections globales) est le foncteur

(5.1.13.1) $$\Gamma : F^\bullet \mapsto \mathrm{Ker}(\Gamma(X_0, F^0) \rightrightarrows \Gamma(X_1, F^1)).$$

Si K est un complexe de faisceaux abéliens, on désigne par $\Gamma^\bullet(X_\bullet, K)$ le complexe différentiel de composantes les groupes abéliens cosimpliciaux $\Gamma^\bullet(X_\bullet, K^n)$ et par $s\Gamma^\bullet(X_\bullet, K)$ le complexe simple associé.

5.2. Cohomologie des espaces topologiques simpliciaux.

(5.2.1) A chaque espace topologique simplicial $X_\bullet$ est attaché un espace topologique usuel $|X_\bullet|$, appelé sa réalisation géométrique (voir ci-dessous). Dans le cas particulier où les X_n sont discrets, on retrouve la notion habituelle de réalisation géométrique d'un ensemble simplicial.

Dans [14], G. Segal définit la cohomologie de $X_\bullet$ à valeurs dans un groupe abélien A comme étant $H^\bullet(|X_\bullet|, A)$. Sous des hypothèses convenables, la filtration de $|X_\bullet|$ par les squelettes successifs fournit une suite spectrale.

(5.2.1.1) $$E_1^{pq} = H^q(X_p, A) \Rightarrow H^{p+q}(X_\bullet, A).$$

Un des intérêts de cette définition est qu'elle s'applique aussi bien, par exemple, à la définition de groupes $K(X_\bullet)$. Nous en adopterons une autre, mieux adaptée aux techniques faisceautiques.

Réalisation géométrique. — Pour n entier ≥ 0, on désigne par $|\Delta_n|$ le simplexe dans $\mathbf{R}^{\Delta_n}$ de sommets l'ensemble des vecteurs de base. On identifie Δ_n à l'ensemble des sommets de $|\Delta_n|$. Toute fonction $f : \Delta_n \to \Delta_m$ se prolonge par linéarité en $|f| : |\Delta_n| \to |\Delta_m|$.

Soit $X_\bullet$ un espace topologique simplicial. Soit $Y = \coprod_{n \geq 0} (X_n \times |\Delta_n|)$. Soit R la plus fine des relations d'équivalence sur Y pour lesquelles, quels que soient $f : \Delta_n \to \Delta_m$ dans (Δ), $x_m \in X_m$ et $a \in |\Delta_n|$, on ait

$$(x_m, |f|(a)) \equiv (f(x_m), a) \pmod{R}.$$

La *réalisation géométrique* de $X_\bullet$ est par définition

$$|X_\bullet| = Y/R.$$

Définition **(5.2.2)**. — *Soit* $X_\bullet$ *un espace topologique simplicial. Les foncteurs* cohomologie à coefficients dans le faisceau abélien $F^\bullet$ sur $X_\bullet$, $H^i(X_\bullet, F^\bullet)$, *sont les foncteurs dérivés du foncteur* Γ (5.1.13.1).

Cette définition équivaut à la suivante, parfois plus maniable.

(5.2.3) Soit $F^\bullet$ un faisceau abélien sur $X_\bullet$. On montre (par exemple à l'aide de (5.1.9) (III)) que $F^\bullet$ admet toujours des résolutions à droite K telles que

$$H^r(X_q, K^{p,q}) = 0 \quad \text{pour} \quad p, q \geq 0 \quad \text{et} \quad r > 0.$$

Si K est une telle résolution, on a canoniquement

(5.2.3.1) $$H^n(X_\bullet, F^\bullet) \simeq H^n(s\Gamma^\bullet(X_\bullet, K)).$$

Il est facile de vérifier directement que le membre de droite est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix de K; pour ce qui suit, il serait loisible de *définir* $H^\bullet(X_\bullet, F^\bullet)$ par (5.2.3.1). On vérifie de plus que la suite spectrale du complexe $s\Gamma^\bullet(X_\bullet, K)$, filtré par L ((5.1.9.3) et (5.1.12.2) pour $S = P^t$)

(5.2.3.2) $$E_1^{pq} = H^q(X_p, F^p) \Rightarrow H^{p+q}(X_\bullet, F^\bullet)$$

est indépendante (à isomorphisme unique près) du choix de K (cf. (5.2.1.1)).

(5.2.4) Il y a lieu de préciser la construction qui précède en passant aux catégories dérivées, et d'en donner une variante relative.

Soient $a : X_\bullet \to S$, $S_\bullet$ l'espace simplicial constant défini par S, $a_\bullet : X_\bullet \to S_\bullet$ déduit de a et $\varepsilon : S_\bullet \to S$ le morphisme d'augmentation. On a

(5.2.4.1) $$a_* = \varepsilon_* a_{\bullet *} : (X_\bullet)^\sim \to (S)^\sim.$$

Cette formule se dérive en

(5.2.4.2) $$Ra_* = R\varepsilon_* Ra_{\bullet *} : D^+(X_\bullet) \to D^+(S)$$

($D^+(X_\bullet)$ = la catégorie dérivée bornée inférieurement de la catégorie des faisceaux abéliens sur $X_\bullet$). Calculons $Ra_{\bullet *}$ et $R\varepsilon_*$.

(5.2.5) Soit $u : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux. Le foncteur $Ru_* : D^+(X_\bullet) \to D^+(Y_\bullet)$ se calcule « composante par composante » : si K est un complexe de faisceaux abéliens sur $X_\bullet$, pour calculer $Ru_* K$, on prend une résolution $K \overset{\approx}{\to} K'$ telle que les composantes F de K' vérifient $R^i_{u_p *}(F^p) = 0$ pour $i > 0$, $p \geqslant 0$ (cf. (5.1.9) (III)); on a alors $Ru_* K \approx u_* K'$.

(5.2.6) Le foncteur $s : C^+(S_\bullet) \to C^+(S)$ transforme complexe acyclique en complexe acyclique. Il se dérive donc trivialement en

$$s : D^+(S_\bullet) \to D^+(S).$$

Pour F un faisceau injectif sur $S_\bullet$, le complexe différentiel sF est une résolution de $\varepsilon_* F$. On en déduit un isomorphisme $R\varepsilon_* \xrightarrow{\sim} s$ et (5.2.4.2) devient

(5.2.6.1) $$Ra_* = sRa_{\bullet *}.$$

(5.2.7) Jointe à (5.2.5) et spécialisée au cas $S = P^t$, cette formule prouve (5.2.3.1). En termes concrets, elle signifie que pour calculer Ra_*K, on peut procéder en deux étapes :

a) on prend une résolution $K \xrightarrow{\approx} K'$, telle que les composantes F de K′ vérifient $R^i a_{p*}(F^p) = 0$ pour $i > 0$. Le complexe $a_{**}K' \in D^+(S_\bullet)$ (catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens cosimpliciaux sur S) s'identifie à $Ra_{**}K$.

b) Ra_*K est le simple complexe $sa_{**}K'$ associé au double complexe $a_{**}K'$.

La suite spectrale (5.2.3.2) se généralise en une suite spectrale déduite de (5.1.12.2)

(5.2.7.1) $$E_1^{pq} = R^q a_{p*}(K \mid X_p) \Rightarrow R^{p+q} a_* K.$$

5.3. Descente cohomologique.

(5.3.1) Soit $a : X_\bullet \to S$ un espace topologique simplicial augmenté. Pour tout faisceau F sur S, on dispose d'un morphisme d'adjonction

$$\varphi : F \to a_* a^* F.$$

Ce morphisme se dérive en un morphisme de foncteurs de $D^+(S)$ dans $D^+(S)$:

(5.3.1.1) $$\varphi : \mathrm{Id} \to Ra_* a^*.$$

Définition **(5.3.2)**. — *On dit que a est de* descente cohomologique *si pour tout faisceau abélien* F *sur* S, *on a*

$$F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(a_{0*} a_0^* F \to a_{1*} a_1^* F)$$

et $$R^i a_* a^* F = 0 \quad \textit{pour} \quad i > 0.$$

Il revient au même de demander que (5.3.1.1) soit un isomorphisme.

(5.3.3) Si *a* est de descente cohomologique, alors, pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(S)$, l'application canonique

(5.3.3.1) $$R\Gamma(S, K) \to R\Gamma(S, Ra_* a^* K) \sim R\Gamma(X_\bullet, a^* K)$$

est un isomorphisme. En particulier, pour F un faisceau abélien sur S, on a une suite spectrale (5.2.3.2)

(5.3.3.2) $$E_1^{pq} = H^q(X_p, a_p^* F) \Rightarrow H^{p+q}(S, F).$$

Pour un complexe, on a encore, en hypercohomologie, une suite spectrale

(5.3.3.3) $$E_1^{pq} = \mathbf{H}^q(X_p, a_p^* K) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(S, K).$$

Dans les deux cas, les $E_1^{\bullet q}$ (q fixe) forment un groupe simplicial, et

$$d_1 = \sum_i (-1)^i \delta_i : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}.$$

Définition **(5.3.4)**. — *Une application continue* $a : X \to S$ *est de* descente cohomologique *si le morphisme d'augmentation de* $\mathrm{cosq}(X \to S)$:

$$((X/S)^{\Delta_n})_{n \geq 0} \to S$$

est de descente cohomologique. On dit que a est de descente cohomologique universelle *si pour tout* $u : S' \to S$, *l'application continue* $a' : X \times_S S' \to S'$ *est de descente cohomologique.*

(5.3.5) Les résultats fondamentaux, démontrés dans *S.G.A.*4, V *bis*, sont les suivants.

(I) Les applications continues de descente cohomologique universelle forment une topologie de Grothendieck sur la catégorie des espaces topologiques.

On l'appelle la *topologie de la descente cohomologique universelle.*

(II) Une application propre (III.0.1) et surjective est de descente cohomologique universelle.

(III) Une application $a : X \to S$ admettant des sections localement sur S est de descente cohomologique universelle.

(IV) Soit $a : X_\bullet \to S$ un espace simplicial augmenté k-tronqué $(-1 \leq k \leq \infty)$. Pour $k \geq n \geq -1$, soit $\varphi_n : \mathrm{cosq}\, X_\bullet \to \mathrm{cosq}\, \mathrm{sq}_n X_\bullet$ la flèche évidente. On dit que $X_\bullet$ est un *hyperrecouvrement k-tronqué de* S, *pour la topologie de la descente cohomologique universelle*, si les applications

(5.3.5.1) $$(\varphi_n)_{n+1} : X_{n+1} \to (\mathrm{cosq}\, \mathrm{sq}_n X_\bullet)_{n+1} \quad (-1 \leq n \leq k-1)$$

sont de descente cohomologique universelle. Si $X_\bullet$ est un tel hyperrecouvrement, alors l'espace simplicial augmenté vers S, $\mathrm{cosq}(X_\bullet)$, est de descente cohomologique.

(V) Soit a un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux augmenté vers S

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"] & Y_\bullet \arrow[d, "y"] \\ S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

On dit que a est un *hyperrecouvrement* pour la topologie de la descente cohomologique universelle si les applications évidentes $X_n \to (\mathrm{cosq}_{n-1}^{Y_\bullet} \mathrm{sq}_{n-1} X_\bullet)_n$ sont de descente cohomologique universelle. Si a est un tel hyperrecouvrement, alors, pour tout $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(S)$

$$a^* : Ry_* y^* K \xrightarrow{\sim} Rx_* x^* K.$$

(5.3.6) Pour $k = \infty$, (IV) affirme que $a : X_\bullet \to S$ est de descente cohomologique si les $(\varphi_n)_{n+1}$ sont de descente cohomologique universelle. Pour $n = -1$ ou 0, ces applications sont

$$n = -1 : X_0 \xrightarrow{a} S$$
$$n = 0 \quad : X_1 \xrightarrow{(\delta_0, \delta_1)} X_0 \times_S X_0.$$

Pour $n=1$, $(\mathrm{cosq}\,\mathrm{sq}_1(X_\bullet))_1$ est le sous-espace de $X_1\times_S X_1\times_S X_1$ formé des triplets (x, y, z) tels que $\delta_0 x=\delta_0 y$, $\delta_1 x=\delta_0 z$ et $\delta_1 y=\delta_1 z$. L'application $(\varphi_1)_2$ est $x\mapsto(\delta_0 x, \delta_1 x, \delta_2 x)$.

Pour $k=0$, (IV) est la définition (5.3.4).

Exemple **(5.3.7).** — Soit $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert, ou un recouvrement fermé localement fini de S. Soit $X=\coprod_{i\in I} U_i$. Alors, $a : X\to S$ est de descente cohomologique. La suite spectrale (5.3.3.2) pour $X_\bullet=\mathrm{cosq}(X\to S)$ n'est autre que la suite spectrale de Leray du recouvrement $\mathscr{U}$.

(5.3.8) Soit $a : X_\bullet\to S$ comme en (5.3.5) (IV). On dit que $X_\bullet$ est un *hyperrecouvrement propre k-tronqué* de S si les flèches (5.3.5.1) sont propres et surjectives. Pour $k=\infty$, on parle simplement d'hyperrecouvrement propre.

6. EXEMPLES D'ESPACES TOPOLOGIQUES SIMPLICIAUX

6.1. Espaces classifiants.

(6.1.1) Soit $u : X\to S$ une application continue. Pour tout faisceau F sur S, le faisceau u^*F est muni d'une « donnée de descente » relativement à u : on dispose d'un isomorphisme entre les deux images réciproques de u^*F sur $X\times_S X$, et cet isomorphisme vérifie une condition de cocycles. Si, localement sur S, u admet une section, cette construction définit une équivalence entre la catégorie des faisceaux sur S et celle des faisceaux sur X, munis d'une donnée de descente.

Prenons pour X un espace principal homogène (à gauche) de groupe G sur un espace S. Les faisceaux G-équivariants sur X ne sont autres que les faisceaux munis d'une donnée de descente : tout faisceau équivariant sur X est d'une et d'une seule façon (en tant que faisceau équivariant) image réciproque d'un faisceau sur $S=X/G$.

(6.1.2) Si un groupe topologique G agit sur un espace X, alors G agit sur $G^{\Delta_n}\times X$ par

$$g\cdot(g_0, \ldots, g_n, x)=(g_0 g^{-1}, \ldots, g_n g^{-1}, gx).$$

On désigne par $[X/G]_\bullet$ l'espace simplicial

(6.1.2.1) $$[X/G]_\bullet=((G^{\Delta_n}\times X)/G)_{n\geq 0}.$$

a) Si X est un espace principal homogène de groupe G sur $S=X/G$, alors l'application

$$G^{\Delta_n}\times X\to X^{\Delta_n} : (g_0, \ldots, g_n, x)\mapsto(g_0 x, \ldots, g_n x)$$

identifie $[X/G]_n$ au produit fibré itéré $(X/S)^{\Delta_n}$:

$$\mathrm{cosq}(X\to S)=([X/G]_\bullet\to S).$$

En particulier, on a (5.3.5 (III))

(6.1.2.2) $\qquad H^{\bullet}([X/G]_{\bullet}) \simeq H^{\bullet}(X/G)$ (pour un espace principal homogène).

b) Pour tout n, $G^{\Delta_n} \times X$ est un espace principal homogène de groupe G sur $[X/G]_n$. Pour tout faisceau équivariant F sur X, $pr_2^* F$ est un faisceau équivariant sur $G^{\Delta_n} \times X$; d'après (6.1.1), ce dernier est image réciproque de F^n sur $[X/G]_n$. Tout faisceau équivariant F sur X définit ainsi un faisceau sur $[X/G]_{\bullet}$. Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi une équivalence de la catégorie des faisceaux équivariants sur X avec la catégorie des faisceaux $F^{\bullet}$ sur $[X/G]_{\bullet}$ qui vérifient

(*) Pour tout $f : \Delta_n \to \Delta_m$, le morphisme structural $f^* F^n \to F^m$ est un isomorphisme.

c) La construction *b)* est naturelle en (G, X, F). On pose

(6.1.2.3) $$H^{\bullet}(X, G; F) = H^{\bullet}([X/G]_{\bullet}, F^{\bullet})$$

(cohomologie mixte de X, G à coefficients dans F). Sous les hypothèses de *a)*, si F est image réciproque de F^{-1} sur $S = X/G$, on a

(6.1.2.4) $\qquad H^{\bullet}(X, G; F) = H^{\bullet}(X/G, F^{-1})$ (pour un espace principal homogène).

Ceci généralise (6.1.2.2) (qui est le cas $F = \underline{\mathbf{Z}}$).

(6.1.3) Soit P^t l'espace topologique réduit à un point. On appelle *espace classifiant simplicial* de G et on note $B_{\bullet G}$ l'espace simplicial

$$B_{\bullet G} = [P^t/G]_{\bullet}.$$

Soit P un espace principal homogène de groupe G sur S. Le morphisme évident

$$\mathrm{cosq}(P \to S) = [P/G]_{\bullet} \to [P^t/G]_{\bullet} = B_{\bullet G}$$

définit un morphisme composé

(6.1.3.1) $$[P] : H^{\bullet}(B_{\bullet G}) \longrightarrow H^{\bullet}([P/G]_{\bullet}) \underset{6.1.2.2}{\xleftarrow{\sim}} H^{\bullet}(S).$$

On verra ci-dessous que dans les bons cas $H^{\bullet}(B_{\bullet G}) = H^{\bullet}(B_G)$, et que l'image de [P] est formée des *classes caractéristiques* de P.

(6.1.4) Soient G un groupe de Lie, B_G un espace classifiant pour G et $a : U_G \to B_G$ le G-espace principal homogène universel. Soit X un G-espace; $X \times U_G$ est un G-espace principal homogène sur $X \times U_G/G$, de sorte que pour tout faisceau équivariant F sur X, $pr_1^* F$ est image réciproque d'un faisceau F^G sur $X \times U_G/G$. Puisque U_G est contractible et d'après (6.1.2.2), on a

(6.1.4.1) $\qquad H^{\bullet}(X, G; F) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(X \times U_G, G; pr_1^* F) \xleftarrow{\sim} H^{\bullet}(X \times U_G/G, F^G).$

En particulier, pour $X = P^t$

(6.1.4.2) $$H^{\bullet}(B_{\bullet G}) = H^{\bullet}(B_G).$$

On vérifie que l'isomorphisme (6.1.4.2) est le cas particulier de (6.1.3.1) pour $S = B_G$, $P = U_G$.

(6.1.5) La suite spectrale (5.2.3.2) pour $B_{\bullet G}$

$$E_1^{pq} = H^q(G^{\Delta_p}/G) \Rightarrow H^{p+q}(B_{\bullet G}) = H^{p+q}(B_G)$$

est essentiellement la *suite spectrale d'Eilenberg-Moore*. Rappelons brièvement comment elle permet de relier les cohomologies rationnelles de G et de B_G, pour G connexe.

a) L'algèbre $H^\bullet(G, \mathbf{Q})$ est une algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie sur $\mathbf{Q}$. Si $P^\bullet(G)$ est le module gradué de ses éléments primitifs, on a donc

$$H^\bullet(G, \mathbf{Q}) = \wedge P^\bullet(G),$$

et les générateurs de $P^\bullet(G)$ sont de degrés impairs.

b) L'algèbre simpliciale $(E_1^{p\bullet})_{p \geq 0}$ est

$$E_1^{p\bullet} = \wedge(P^\bullet(G)^{\Delta_p}/P^\bullet(G));$$

c'est l'algèbre extérieure de la suspension du module cosimplicial constant $P^\bullet(G)$; on a donc (Quillen [12]) $E_2^{p\bullet} = \mathrm{Sym}^p(P^\bullet(G))$. Les termes E_2^{pq} ne sont non nuls que pour $p+q$ pair; on a donc $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$ et, pour une filtration convenable, on a canoniquement

$$\mathrm{Gr}\, H^\bullet(B_G, \mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Sym}^\bullet(P^\bullet(G)[-1])$$

et non canoniquement

$$H^\bullet(B_G, \mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Sym}^\bullet(P^\bullet(G)[-1]).$$

(6.1.6) Prenons pour G un groupe algébrique linéaire (complexe).

a) Si T est un tore maximal de G, de groupe de Weyl W, on a

(6.1.6.1) $$H^\bullet(B_G, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(B_T, \mathbf{Q})^W.$$

b) Pour un tore T de groupe de caractères X(T), on a

(6.1.6.2) $$H^\bullet(T, \mathbf{Z}) \simeq \dot{\wedge} X(T)$$

(isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées).

Nous n'utiliserons *a)* que sous la forme affaiblie suivante :

a') L'application $H^\bullet(B_G, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(B_T, \mathbf{Q})$ est injective *(splitting principle)*.

Pour être complet, rappelons une démonstration de *a')*.

Si B est un sous-groupe de Borel de G, le fibré U_G/B sur B_G est un fibré en espaces de drapeaux. D'après ([3] 2.1 + 2.6.3) mieux expliqué dans P. A. Griffiths, Periods III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **38**, prop. (3.1), ou d'après [1], la suite spectrale de Leray de $U_G/B \to B_G$ dégénère en cohomologie rationnelle. On a donc $H^\bullet(B_G, \mathbf{Q}) \hookrightarrow H^\bullet(U_G/B, \mathbf{Q})$. On conclut en notant que $U_G/B \sim B_B \sim B_T$.

6.2. Construction d'hyperrecouvrements.

(6.2.1) Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. Désignons par $D(\Delta_n, \Delta_m)$ l'ensemble des applications surjectives croissantes de Δ_n dans Δ_m (opérateurs de dégénérescence), et posons

(6.2.1.1) $$N(X_n) = X_n - \bigcup_{s \in D(\Delta_n, \Delta_{n-1})} s(X_{n-1}).$$

Rappelons que pour tout n, l'application

(6.2.1.2) $$\amalg s : \coprod_{m \leq n} \coprod_{s \in D(\Delta_n, \Delta_m)} N(X_m) \to X_n$$

est bijective.

Définition **(6.2.2)**. — *Un espace topologique simplicial est dit* s-scindé *si les applications* (6.2.1.2) *sont des homéomorphismes.*

Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial k-tronqué. Pour $n \leq k$, on définit encore $N(X_n)$ par (6.2.1.1), et (6.2.1.2) est une bijection. Un espace topologique simplicial k-tronqué est dit *s-scindé* si (6.2.1.2) est un homéomorphisme pour $n \leq k$.

(6.2.3) Pour X un espace topologique simplicial $(n+1)$-tronqué s-scindé, augmenté vers S, soit $\alpha(X)$ le triplet consistant en $sq_n(X)$, NX_{n+1} et en l'application évidente de NX_{n+1} dans $(\text{cosq}\, sq_n X)_{n+1}$.

Ce triplet (Y, N, β) vérifie

(*) Y est un espace topologique simplicial n-tronqué s-scindé augmenté vers S, et β est une application continue de N dans $(\text{cosq}\, Y)_{n+1}$.

Proposition **(6.2.4)** (*S.G.A.*4, V *bis* (5.1.3)). — *Soit* (Y, N, β) *vérifiant* (*) *ci-dessus.*

(i) *A isomorphisme unique près, il existe un et un seul espace topologique* X, $(n+1)$-*tronqué s-scindé augmenté vers* S, *avec* $\alpha(X) \simeq (Y, N, \beta)$.

(ii) *Il revient au même de se donner* $f : X \to Z$ *ou de se donner :*

a) *un morphisme* $f' : Y \to sq_n(Z)$,

b) *un morphisme* $f'' : N \to Z_{n+1}$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f''"'] & (\text{cosq}\, Y)_{n+1} \arrow[d, "f'"] \\ Z_{n+1} \arrow[r] & (\text{cosq}\, sq_n Z)_{n+1} \end{tikzcd}$$

Cette proposition (6.2.4) s'applique aussi aux objets simpliciaux d'autres catégories $\mathscr{C}$ que celle des espaces topologiques. Il suffit que $\mathscr{C}$ vérifie

(6.2.4.1) Les limites projectives finies existent. Les sommes finies existent, sont disjointes et universelles.

(6.2.5) Cette proposition permet de construire comme suit, par induction, des hyperrecouvrements propres de S.

0) On prend $f_0 : X_0 \to S$, propre et surjectif. $\{X_0\}$ est un hyperrecouvrement propre 0-tronqué de S (5.3.8), il est s-scindé.

1) On prend $f_1 : N_1 \to \mathrm{cosq}(\{X_0\})_1$, i.e. $f_1 : N_1 \to X_0 \times_S X_0$. Appliquant (6.2.4), on associe à f_1 l'espace topologique simplicial 1-tronqué augmenté s-scindé

$$ {}_1X_\bullet : N_1 \amalg X_0 \rightleftarrows X_0 \longrightarrow S. $$

On suppose f_1 choisi de telle sorte que

$$ f_1' : N_1 \amalg X_0 \to X_0 \times_S X_0 $$

soit propre et surjectif (par exemple f_1 propre et surjectif). Alors, ${}_1X_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre 1-tronqué s-scindé de S.

. . . . . .

$k+1$) Soit déjà construit un hyperrecouvrement propre k-tronqué s-scindé ${}_kX_\bullet \to S$. On prend $f_{k+1} : N_{k+1} \to (\mathrm{cosq}({}_kX_\bullet))_{k+1}$, et, appliquant (6.2.4), on associe à f_{k+1} un espace topologique semi-simplicial $k+1$-tronqué augmenté s-scindé ${}_{k+1}X_\bullet$. On suppose que f_{k+1} est tel que

$$ f_{k+1}' : {}_{k+1}X_{k+1} \to \mathrm{cosq}({}_kX_\bullet)_{k+1} $$

soit propre et surjectif (par exemple f_{k+1} propre et surjectif). Alors, ${}_{k+1}X_\bullet$ est un hyperrecouvrement propre $k+1$-tronqué s-scindé de S.

. . . . . .

∞) Les ${}_kX_\bullet$ ainsi construits sont les squelettes successifs d'un hyperrecouvrement propre s-scindé de S.

(6.2.6) Un schéma simplicial $X_\bullet$ sur $\mathbf{C}$ sera dit *lisse* si les X_n sont lisses; il sera dit *propre* si les X_n sont compacts. Un *diviseur à croisements normaux* $D_\bullet$ de $X_\bullet$, supposé lisse, est une famille $D_n \subset X_n$ de diviseurs à croisements normaux (3.1.2) telle que les $U_n = X_n - D_n$ forment un sous-schéma simplicial $U_\bullet$ de $X_\bullet$. Cette définition est justifiée par le lemme suivant.

Lemme **(6.2.7)**. — *Si* $D_\bullet$ *est un diviseur à croisements normaux de* $X_\bullet$, *alors les complexes de De Rham logarithmiques* $(\Omega^\bullet_{X_n}(\log D_n))_{n \geq 0}$, *munis de la filtration par le poids* (3.1.5), *forment un complexe filtré sur* $X_\bullet$.

Résulte de (3.1.3 (ii)). Le complexe $(\Omega^\bullet_{X_n}(\log D_n))_{n \geq 0}$ se notera $\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet)$.

(6.2.8) En utilisant (6.2.5), on montre que pour tout schéma séparé S sur $\mathbf{C}$, il existe :

α) un schéma simplicial $X_\bullet$ sur $\mathbf{C}$, propre et lisse, qu'on peut prendre s-scindé;
β) un diviseur à croisements normaux $D_\bullet$ dans $X_\bullet$; posons $U_\bullet = X_\bullet - D_\bullet$;
γ) une augmentation $a : U_\bullet \to S$ qui fasse de $U_\bullet^{an}$ un hyperrecouvrement propre de S^{an}.

De plus, deux tels systèmes sont coiffés par un même troisième, un morphisme $u : S \to T$ peut être coiffé par un morphisme

$$\begin{tikzcd} & X_\bullet \arrow[rr] & & Y_\bullet \\ U_\bullet \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[d, "a"'] & & V_\bullet \arrow[ur, hook] \arrow[d, "b"] & \\ S \arrow[rr, "u"] & & T & \end{tikzcd}$$

de tels systèmes... (voir *S.G.A.*4, V *bis*).

6.3. Cohomologie relative.

(6.3.1) La construction *cône d'application* pour les morphismes d'ensembles simpliciaux se transpose telle quelle aux objets simpliciaux de toute catégorie $\mathscr{C}$ ayant un objet final e et des sommes finies. Pour $u : Y_\bullet \to X_\bullet$, le cône $C(u)$ vérifie

$$C(u)_n = X_n \amalg \coprod_{i<n} Y_i \amalg e.$$

Nous prendrons pour $\mathscr{C}$:

a) la catégorie des espaces topologiques et applications continues (objet final : P^t);
b) la catégorie des couples (X, F) formés d'un espace topologique X et d'un faisceau abélien F sur X, une flèche $(u, f) : (Y, F) \to (X, G)$ étant une application continue $u : Y \to X$, plus un u-morphisme (5.1.5) $f : G \to F$ (objet final : $(P^t, 0)$).

(6.3.2) Soient $u : Y_\bullet \to X_\bullet$ un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux, de cône $C(u)$, F un faisceau abélien sur $X_\bullet$, G un faisceau abélien sur $Y_\bullet$ et $f : G \to F$ un u-morphisme. Le cône $C(f)$ de f est un faisceau abélien sur $C(u)$, et on pose

(6.3.2.1) $$H^n(C(u), C(f)) = H^n(X_\bullet \bmod Y_\bullet, F \bmod G).$$

Ce sont les *groupes de cohomologie relative.* On vérifie facilement qu'ils s'insèrent dans une suite exacte longue

(6.3.2.2) $$\ldots \to H^i(X_\bullet \bmod Y_\bullet, F \bmod G) \to H^i(X_\bullet, F) \to H^i(Y_\bullet, G) \to \ldots$$

(6.3.3) Plus généralement, soient L et K des complexes bornés inférieurement de faisceaux abéliens sur $Y_\bullet$ et $X_\bullet$, et soit un u-morphisme $f : K \to L$. On en déduit un complexe $C(f)$ sur $C(u)$. On pose encore en hypercohomologie

$$\mathbf{H}^n(C(u), C(f)) = \mathbf{H}^n(X_\bullet \bmod Y_\bullet, K \bmod L).$$

Ces groupes figurent dans une suite exacte analogue à (6.3.2.2), provenant, dans la catégorie dérivée convenable, d'un triangle distingué

(6.3.3.1)
$$\begin{tikzcd} & R\Gamma(Y_\bullet, K) \arrow[dl, "\partial"'] & \\ R\Gamma(C(u), C(f)) \arrow[rr] & & R\Gamma(X_\bullet, L) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(6.3.4) La construction présentée plus haut n'est pas la seule possible. Elle a l'inconvénient que, même si on part de vrais espaces topologiques X et Y (i.e. d'espaces simpliciaux constants), on est conduit à considérer des espaces simpliciaux non constants.

6.4. Espaces multisimpliciaux.

(6.4.1) Soit r un entier ≥ 0. Un *objet r-simplicial* $Z_\bullet$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un foncteur contravariant de $(\Delta)^r$ dans $\mathscr{C}$. L'objet simplicial *diagonal* $\delta Z_\bullet$ est le foncteur composé $(\Delta) \to (\Delta)^r \to \mathscr{C}$.

(6.4.2) On définit comme en (5.1.6) le topos des *faisceaux* sur un espace topologique r-simplicial. Soit $\Gamma^\bullet$ le foncteur

$$F \mapsto (\Gamma(X_{n_1 \dots n_r}, F^{n_1, \dots, n_r}))$$

des faisceaux sur $X_\bullet$ dans les ensembles r-cosimpliciaux. Pour r petit, on le notera souvent plutôt $\Gamma^{\bullet \cdots \bullet}$ (r points). On dispose d'une co-augmentation $\Gamma(X_\bullet, F^\bullet) \to \Gamma^\bullet(X_\bullet, F^\bullet)$. Les foncteurs *cohomologie à valeur dans un faisceau abélien* F sont les dérivés du foncteur « section globale » Γ. Ils peuvent se calculer par un procédé parallèle à (5.2.3) :

(6.4.2.1) $$R\Gamma = sR\Gamma^\bullet : D^+(X_\bullet) \to D^+((Ab)).$$

Un faisceau F sur un espace topologique r-simplicial $X_\bullet$ induit un faisceau δF sur l'espace simplicial diagonal $\delta X_\bullet$. Il résulte du théorème de Cartier-Eilenberg-Zilber que

(6.4.2.2) $$R\Gamma(X_\bullet, K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\delta X_\bullet, \delta K).$$

(6.4.3) Limitons-nous au cas $r = 2$. Un objet bisimplicial 1-augmenté vers un objet simplicial $S_\bullet$ est un foncteur contravariant de $(\Delta^+) \times (\Delta)$ dans $\mathscr{C}$, tel que $S_\bullet$ soit le foncteur composé

$$(\Delta) \xrightarrow{(\Delta_{-1}, \bullet)} (\Delta^+) \times (\Delta) \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Pour désigner un objet bisimplicial 1-augmenté vers $S_\bullet$, d'objet bisimplicial sous-jacent $X_{\bullet\bullet}$, on utilisera une notation du type

$$a : X_{\bullet\bullet} \to S_\bullet.$$

Pour $n \geq 0$, $a : (X_{\bullet n}) \to S_n$ est un objet simplicial augmenté vers S_n. Si F est un faisceau sur $X_{\bullet\bullet}$, les $(a_*(F \mid X_{\bullet n})$ sur $S_n)_{n \geq 0}$ forment un faisceau sur $S_\bullet$; on définit ainsi un morphisme de topos

$$a : X_{\bullet\bullet}^{\sim} \to S_\bullet^{\sim}.$$

On explique dans *S.G.A.*4, V *bis* que Ra_* se calcule « composante par composante » :

$$Ra_* K \mid S_n = Ra_*(K \mid X_{\bullet n}).$$

Il en résulte que si, pour chaque n, $a : (X_{\bullet n}) \to S_n$ est de descente cohomologique, alors $a : X_{\bullet\bullet} \to S_\bullet$ est de descente cohomologique : pour tout complexe de faisceaux abéliens $K \in D^+(S_\bullet)$, on a

$$K \xrightarrow{\approx} Ra_* a^* K.$$

(6.4.4) Dans *S.G.A.*4, V *bis*, on montre que pour tout schéma simplicial séparé $S_\bullet$, il existe un schéma bisimplicial $X_{\bullet\bullet}$ 1-augmenté vers $S_\bullet$, et $i : X_{\bullet\bullet} \hookrightarrow \overline{X}_{\bullet\bullet}$ tels que :

a) Les $\overline{X}_{nm}$ sont projectifs et lisses; X_{nm} est le complément d'un diviseur à croisements normaux D_{nm} dans $\overline{X}_{nm}$. On peut supposer D_{nm} réunion de diviseurs lisses.

b) Pour $n \geq 0$, $X_{\bullet n}$ est un hyperrecouvrement propre de S_n. On peut le supposer s-scindé.

La construction procède comme en (6.2), mais la récurrence est plus compliquée. Les assertions d'unicité (6.2.8) restent valables, *mutatis mutandis*.

7. COMPLÉMENTS AU § 1

7.1. Catégorie dérivée filtrée.

Ce numéro complète le § 1, n° 4.

(7.1.1) Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Posons :

$F\mathscr{A}$ (resp. $F_2\mathscr{A}$) = la catégorie des objets filtrés (resp. bifiltrés) de filtration(s) finie(s) de $\mathscr{A}$.

$K^+F\mathscr{A}$ (resp. $K^+F_2\mathscr{A}$) = la catégorie des complexes filtrés (resp. bifiltrés) bornés inférieurement d'objets de $\mathscr{A}$, à homotopie respectant la filtration (resp. les filtrations) près.

$D^+F\mathscr{A}$ (resp. $D^+F_2\mathscr{A}$) = la catégorie triangulée déduite de $K^+F\mathscr{A}$ (resp. $K^+F_2\mathscr{A}$) en inversant les quasi-isomorphismes filtrés (resp. bifiltrés) (1.3.6). C'est la *catégorie dérivée filtrée* (resp. *bifiltrée*).

(7.1.2) Un quasi-isomorphisme filtré $u : (K, F) \to (K', F')$ induit un isomorphisme de suites spectrales $u : E_\bullet^{\bullet\bullet}(K, F) \to E_\bullet^{\bullet\bullet}(K', F')$. Un objet K de $D^+F\mathscr{A}$ définit donc

une suite spectrale $E_{\bullet}^{\bullet\bullet}(K)$. De même, un objet L de $D^+F_2\mathscr{A}$ définit un amoncellement de suites spectrales du type considéré en (1.4.9).

(7.1.3) Soit T un foncteur exact à gauche de $\mathscr{A}$ dans une catégorie abélienne $\mathscr{B}$. On suppose que tout objet de $\mathscr{A}$ s'injecte dans un objet injectif. Le foncteur T se « dérive » alors en des foncteurs

(7.1.3.1) $$RT : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B}) \quad \text{(pour mémoire)}$$

(7.1.3.2) $$RT : D^+F(\mathscr{A}) \to D^+F(\mathscr{B}),$$

(7.1.3.3) $$RT : D^+F_2(\mathscr{A}) \to D^+F_2(\mathscr{B}).$$

Ils se calculent ainsi : si K′ est une résolution (resp. une résolution filtrée, resp. une résolution bifiltrée) T-acyclique de K ((1.4.5), (1.4.11)), alors $RT(K) = T(K')$.

La suite spectrale d'hypercohomologie (pour T) de $K \in \mathrm{Ob}\, D^+F(\mathscr{A})$ est la suite spectrale de $RTK \in \mathrm{Ob}\, D^+F(\mathscr{B})$ (cf. (1.4.5)).

(7.1.4) Nous aurons besoin de résultats plus précis pour les foncteurs Ra_*, $a : X_{\bullet} \to S$ étant une augmentation d'un espace topologique simplicial. Le cas $S = P^t$, $Ra_* = R\Gamma$ nous suffirait.

Reprenons les notations de (5.1.12), et rappelons la formule (5.2.6.1) :

$$Ra_* = sRa_{\bullet *}.$$

Pour tout complexe $K \in \mathrm{Ob}\, C^+(S_{\bullet})$, le simple complexe sK est muni d'une filtration naturelle L (5.1.9.3). Un quasi-isomorphisme $u : K' \xrightarrow{\approx} K''$ induit un quasi-isomorphisme filtré $u : (sK', L) \to (sK'', L)$. Dès lors, s se factorise par

$$s : D^+(S_{\bullet}) \to D^+F(S)$$

et Ra_* se factorise par

$$Ra_* : D^+(X_{\bullet}) \to D^+F(S).$$

La suite spectrale du complexe filtré $(Ra_*K, L) \in D^+F(S)$ n'est autre que (5.2.7.1).

(7.1.5) Si K est filtré (resp. bifiltré), alors $Ra_{\bullet *}K$ est filtré (bifiltré) : on dispose de

(7.1.5.1) $$Ra_{\bullet *} : D^+F(X_{\bullet}) \to D^+F(S_{\bullet})$$

(7.1.5.2) $$Ra_{\bullet *} : D^+F_2(X_{\bullet}) \to D^+F_2(S_{\bullet}).$$

(7.1.6) Soit K un complexe de faisceaux cosimpliciaux sur S, muni d'une filtration croissante W. On appelle *filtration diagonale* $\delta(W, L)$ de W et L la filtration croissante suivante de sK

(7.1.6.1) $$\begin{aligned}\delta(W, L)_n(sK) &= \bigoplus_{p,q} W_{n+p}(K^{p,q}) \\ &= \sum_p s(W_{n+p}(K)) \cap L^p(sK).\end{aligned}$$

On a

(7.1.6.2) $$\mathrm{Gr}_n^{\delta(W,L)}(sK) \simeq \bigoplus_p \mathrm{Gr}_{n+p}^W(K^{\cdot p})[-p].$$

Le foncteur $(K, W) \mapsto (sK, \delta(W, L))$ transforme quasi-isomorphismes filtrés en quasi-isomorphismes filtrés et définit

(7.1.6.3) $$(s, \delta) : (K, W) \mapsto (sK, \delta(W, L)) : D^+F(S_\bullet) \to D^+F(S)$$

d'où par composition avec (7.1.5.1)

(7.1.6.4) $$(R\Gamma, \delta(\ , L)) : (K, W) \mapsto (R\Gamma K, \delta(W, L)) : D^+F(X_\bullet) \to D^+F(S).$$

On tire de (7.1.6.2) que

(7.1.6.5) $$\mathrm{Gr}_n^{\delta(W,L)}(Ra_*K) = \bigoplus_p Ra_{p*}(\mathrm{Gr}_{n+p}^W K)\,[-p].$$

(7.1.7) Si (K, W, F) est un complexe de faisceaux cosimpliciaux bifiltré, alors sK est muni des trois filtrations W, F et L et définit divers complexes bifiltrés.

Par exemple, pour W croissante, le foncteur $(K, W, F) \mapsto (K, \delta(W, L), F)$ transforme quasi-isomorphisme bifiltré en quasi-isomorphisme bifiltré, donc définit

(7.1.7.1) $$(K, W, F) \mapsto (K, \delta(W, L), F) : D^+F_2(S_\bullet) \to D^+F_2(S).$$

Par composition avec (7.1.5.2), on en déduit

(7.1.7.2) $$(K, W, F) \mapsto (R\Gamma K, \delta(W, L), F) : D^+F_2(X_\bullet) \to D^+F_2(S),$$

et on a

(7.1.7.3) $$\mathrm{Gr}_n^{\delta(W,L)}(R\Gamma K, F) = \bigoplus_p Ra_{p*}(\mathrm{Gr}_{n+p}^W K, F)\,[-p]$$

dans $D^+F(S)$.

7.2. Compléments au lemme des deux filtrations.

Dans ce numéro, nous donnons une nouvelle démonstration du lemme des deux filtrations (1.3.16) et quelques compléments.

(7.2.1) Soit (K, F, W) un complexe bifiltré borné inférieurement d'objets d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. La filtration F est supposée birégulière.

On dit que (K, F, W) est F-*scindable* si le complexe filtré (K, W) peut se représenter comme une somme de complexes filtrés $(K_n, W_n)_{n \in \mathbf{Z}}$

$$(K, W) = \bigoplus_n (K_n, W_n)$$

avec

$$F^nK = \bigoplus_{n' \geq n} K_{n'}.$$

Soit r_0 un entier ≥ 0, ou $+\infty$. La condition suivante a été considérée en (1.3.16), (1.3.17) :

(7.2.2; r_0) Pour tout entier positif ou nul $r < r_0$, les différentielles d_r du complexe gradué $E_r(K, W)$ sont strictement compatibles à la filtration récurrente définie par F.

(7.2.3) Il est clair que si (K, F, W) est F-scindable, la condition (7.2.2; ∞) est vérifiée. Réciproquement, il semble que lorsque la condition (7.2.2; ∞) est vérifiée, tout se passe comme si le foncteur Gr_F était exact. Par exemple, nous montrerons que le Gr_F de la suite spectrale E(K, W) s'identifie alors à la suite spectrale $E(Gr_F K, W)$, et que la suite spectrale E(K, F) dégénère ($E_1 = E_\infty$).

(7.2.4) On déduit aussitôt de la définition (1.3.8) que la première filtration directe de $E_r(K, W)$ est la filtration F_d de $E_r(K, W)$ par les images

$$F_d^p(E_r(K, W)) = \mathrm{Im}(E_r(F^p K, W) \to E_r(K, W)).$$

Dualement, la seconde filtration directe (1.3.9) de $E_r(K, W)$ est la filtration F_{d*} de $E_r(K, W)$ par les noyaux

$$F_{d*}^p(E_r(K, W)) = \mathrm{Ker}(E_r(K, W) \to E_r(K/F^p K, W)).$$

La filtration récurrente F_{rec} de $E_r(K, W)$ est intermédiaire entre ces deux filtrations (1.3.13 (iii)).

Proposition **(7.2.5)**. — *Supposons que* (K, F, W) *vérifie* (7.2.2; r_0). *Alors*

(i) $(F^a K/F^b K, F, W)$ *vérifie encore* (7.2.2; r_0).

(ii) *Pour* $r \leq r_0$, *la suite*

$$0 \to E_r(F^p K, W) \to E_r(K, W) \to E_r(K/F^p K, W) \to 0$$

est exacte; *pour* $r = r_0 + 1$, *la suite*

$$E_r(F^p K, W) \to E_r(K, W) \to E_r(K/F^p K, W)$$

est exacte. En particulier pour $r \leq r_0 + 1$, *les deux filtrations directes et la filtration récurrente de* $E_r(K, W)$ *coïncident.*

Fixons un entier p et prouvons par récurrence sur r l'assertion

$(*)_r$ Si $r \leq r_0$, $E_r(F^p K, W)$ s'injecte dans $E_r(K, W)$; si $r \leq r_0 + 1$, son image est $F_{rec}^p(E_r(K, W))$.

L'assertion $(*)_0$ est toujours vraie. Admettons $(*)_r$ et prouvons $(*)_{r+1}$. On peut supposer que $0 \leq r \leq r_0$. On dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_r(K, W) \arrow[r, "d_r"] & E_r(K, W) \arrow[r, "d_r"] & E_r(K, W) \\
E_r(F^p K, W) \arrow[r] \arrow[u, hook] & E_r(F^p K, W) \arrow[r] \arrow[u, hook] & E_r(F^p K, W), \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

et l'image des inclusions verticales est $F^p_{\mathrm{rec}}(E_r(K, W))$. Parce que i est injectif

$$\begin{aligned} F^p_{\mathrm{rec}}(E_{r+1}(K, W)) &= \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(F^p_{\mathrm{rec}} E_r(K, W) \xrightarrow{d_r} E_r(K, W)) \to E_{r+1}(K, W)) \\ &= \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(E_r(F^p K, W) \xrightarrow{d_r} E_r(F^p K, W)) \to E_{r+1}(K, W)) \\ &= \mathrm{Im}(E_{r+1}(F^p K, W) \to E_{r+1}(K, W)). \end{aligned}$$

Si $r < r_0$, d_r est strictement compatible à F_{rec}, d'où

$$d_r E_r(K, W) \cap E_r(F^p K, W) = d_r E_r(F^p K, W),$$

et $E_{r+1}(F^p K, W)$ s'injecte donc dans $E_{r+1}(K, W)$. Ceci prouve $(*)_{r+1}$.

Les assertions $(*)_r$, jointes aux assertions duales, impliquent (ii).

Il résulte de (ii) que pour $r < r_0$ et $a \leqslant b$, $E_r(F^b K, W)$ s'injecte dans $E_r(F^a K, W)$ et que la différentielle d_r de $E_r(F^a K, W)$ est strictement compatible à la première filtration directe de $E_r(F^a K, W)$. On en déduit par récurrence sur $r < r_0$ que la première filtration directe de $E_r(F^a K, W)$ coïncide avec la filtration récurrente, et (i) en résulte.

(7.2.6) Si la condition $(7.2.2; r_0)$ est vérifiée, et que $r \leq r_0 + 1$, on désignera par F la filtration $F_d = F_{d^*} = F_{\mathrm{rec}}$ de $E_r(K, W)$. Les suites exactes (7.2.5) (ii)

$$\begin{tikzcd}
0 & E_r(K/F^p K, W) \arrow[l] & & E_r(K/F^{p+1} K, W) \arrow[ll] & & 0 \\
& & E_r(K, W) \arrow[ul] \arrow[ur] & & E_r(\mathrm{Gr}^p_F K, W) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
0 \arrow[r] & E_r(F^{p+1} K, W) \arrow[ur] \arrow[rr] & & E_r(F^p K, W) \arrow[ul] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

définissent pour $r \leq r_0$ un isomorphisme (autodual) compatible aux différentielles d_r

(7.2.6.1) $$\mathrm{Gr}^p_F(E_r(K, W)) \simeq E_r(\mathrm{Gr}^p_F K, W) \qquad (r \leq r_0).$$

(7.2.7) Si la condition $(7.2.2; \infty)$ est vérifiée, les suites

$$0 \to E_r(F^p K, W) \to E_r(K, W) \to E_r(K/F^p K, W) \to 0$$

sont exactes pour tout r. Si la filtration W est birégulière, la suite

$$0 \to E_\infty(F^p K, W) \to E_\infty(K, W) \to E_\infty(K/F^p K, W) \to 0$$

est donc exacte. On peut réécrire cette suite

$$0 \to \mathrm{Gr}_W(H(F^p K)) \to \mathrm{Gr}_W(H(K)) \to \mathrm{Gr}_W(H(K/F^p K)) \to 0.$$

Lemme **(7.2.7.1)**. — *Soit* L *un complexe muni d'une filtration birégulière* G. *Pour que* $\mathrm{Gr}_G(L)$ *soit acyclique, il faut et il suffit que* L *soit acyclique et que les différentielles de* L *soient strictement compatibles à la filtration* G.

C'est un cas particulier de (1.3.2).

Appliquons ce lemme, en prenant pour L le complexe

$$0 \to H(F^pK) \to H(K) \to H(K/F^pK) \to 0.$$

On trouve que :

a) cette suite est exacte, i.e. les différentielles de K sont strictement compatibles à la filtration F;

b) la filtration de $H(F^pK)$, déduite de la filtration W de F^pK, coïncide avec la filtration induite par la filtration W de H(K);

c) un énoncé analogue vaut pour K/F^pK.

En conclusion :

Proposition **(7.2.8)**. — *Si* (K, F, W) *vérifie* (7.2.2; ∞), *la suite spectrale* E(K, F) *dégénère* ($E_1 = E_\infty$). *On a de plus un isomorphisme de suites spectrales*

$$\mathrm{Gr}_F^p(E_\bullet(K, W)) \simeq E_\bullet(\mathrm{Gr}_F^p K, W).$$

8. THÉORIE DE HODGE DES ESPACES ALGÉBRIQUES

8.1. Complexes de Hodge.

(8.1.1) Soit A comme en (III.0.3). Un A-*complexe de Hodge* K *de poids n* consiste en :

α) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+(A)$, tel que $H^k(K_A)$ soit un A-module de type fini pour tout k;

β) une filtration F sur $K_A \otimes \mathbf{C}$, i.e. un complexe filtré $(K_{\mathbf{C}}, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(\mathbf{C})$, et un isomorphisme $\alpha : K_{\mathbf{C}} \simeq K_A \otimes \mathbf{C}$ dans $D^+(\mathbf{C})$.

Les axiomes suivants doivent être vérifiés :

(CH 1) la différentielle d de $K_{\mathbf{C}}$ est strictement compatible à la filtration F; en d'autres termes, la suite spectrale définie par $(K_{\mathbf{C}}, F)$ dégénère en E_1 ($E_1 = E_\infty$) (1.3.2);

(CH 2) pour tout k, la filtration F sur $H^k(K_{\mathbf{C}}) \simeq H^k(K_A) \otimes \mathbf{C}$ définit une A-structure de Hodge de poids $n+k$ sur $H^k(K_A)$: la filtration F est $(n+k)$-opposée à sa complexe conjuguée (cela a un sens car $A \subset \mathbf{R}$).

(8.1.2) Soit X un espace topologique. Un A-*complexe de Hodge cohomologique de poids n* sur X, K, consiste en :

α) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, A)$,

β) un complexe filtré $(K_{\mathbf{C}}, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(X, \mathbf{C})$,

γ) un isomorphisme $\alpha : K_{\mathbf{C}} \simeq K_A \otimes \mathbf{C}$ dans $D^+(X, \mathbf{C})$.

L'axiome suivant doit être vérifié :

(CHC) Le triplet $(R\Gamma(K_A), R\Gamma((K_{\mathbf{C}}, F)), R\Gamma(\alpha))$ est un complexe de Hodge de poids n.

Lorsque $A = \mathbf{Z}$, on parlera simplement de complexe de Hodge et de complexe de Hodge cohomologique.

L'énoncé suivant reformule une partie de la théorie de Hodge classique (cf. (2.2.1)).

Scholie **(8.1.3)**. — *Soit* X *une variété kählérienne compacte. Soient* $K_{\mathbf{Z}}$ *le complexe* $\mathbf{Z}[0]$ *réduit au faisceau constant* $\mathbf{Z}$, $K_{\mathbf{C}}$ *le complexe de De Rham holomorphe* $\Omega_X^{\bullet}$ *et* F *sa filtration bête. On dispose de* $\alpha : K_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}[0] \xrightarrow{\approx} \Omega_X^{\bullet}$ *(lemme de Poincaré), et* $(K_{\mathbf{Z}}, (K_{\mathbf{C}}, F), \alpha)$ *est un complexe de Hodge cohomologique de poids* 0.

Remarque **(8.1.4)**. — Si K est un complexe de Hodge (resp. de Hodge cohomologique) de poids n, alors $K[m]$ est un complexe de Hodge (resp. de Hodge cohomologique) de poids $n+m$.

(8.1.5) Un A-*complexe de Hodge mixte* K consiste en :

α) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+(A)$ tel que $H^k(K_A)$ soit un A-module de type fini pour tout k;

β) un complexe filtré $(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(A\otimes\mathbf{Q})$ (W filtration *croissante*) et un isomorphisme $K_{A\otimes\mathbf{Q}} \simeq K_A \otimes \mathbf{Q}$ dans $D^+(A\otimes\mathbf{Q})$;

γ) un complexe bifiltré $(K_{\mathbf{C}}, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2(\mathbf{C})$ (W filtration *croissante* et F filtration *décroissante*) et un isomorphisme $\alpha : (K_{\mathbf{C}}, W) \simeq (K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \otimes \mathbf{C}$ dans $D^+F(\mathbf{C})$.

L'axiome suivant doit être vérifié :

(CHM) Pour tout n, le système formé du complexe $\mathrm{Gr}_n^W(K_{A\otimes\mathbf{Q}}) \in \mathrm{Ob}\, D^+(A\otimes\mathbf{Q})$, du complexe $\mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(\mathbf{C})$ filtré par F et de l'isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_n^W(\alpha) : \mathrm{Gr}_n^W(K_{A\otimes\mathbf{Q}}) \otimes \mathbf{C} \simeq \mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}),$$

est un $A\otimes\mathbf{Q}$-complexe de Hodge de poids n.

(8.1.6) Un A-*complexe de Hodge mixte cohomologique* K sur un espace topologique X consiste en :

α) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, A)$, tel que les $\mathbf{H}^k(X, K_A)$ soient des A-modules de type fini, et que $\mathbf{H}^{\bullet}(X, K_A) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^{\bullet}(X, K_A \otimes \mathbf{Q})$;

β) un complexe filtré $(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \in \mathrm{Ob}\, DF^+(X, A\otimes\mathbf{Q})$ (W une filtration *croissante*) et un isomorphisme $K_{A\otimes\mathbf{Q}} \simeq K_A \otimes \mathbf{Q}$ dans $D^+(X, A\otimes\mathbf{Q})$;

γ) un complexe bifiltré $(K_{\mathbf{C}}, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2(X, \mathbf{C})$ (W une filtration *croissante* et F une filtration *décroissante*) et un isomorphisme $\alpha : (K_{\mathbf{C}}, W) \simeq (K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \otimes \mathbf{C}$ dans $D^+F(X, \mathbf{C})$.

L'axiome suivant doit être vérifié :

(CHMC) Pour tout n, le système formé du complexe $\mathrm{Gr}_n^W(K_{A\otimes\mathbf{Q}}) \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, A\otimes\mathbf{C})$, du complexe $\mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(X, \mathbf{C})$ filtré par F et de l'isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_n^W(\alpha) : \mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}) \simeq \mathrm{Gr}_n^W(K_{A\otimes\mathbf{Q}}) \otimes \mathbf{C}$$

est un $A\otimes\mathbf{Q}$-complexe de Hodge cohomologique de poids n.

On vérifie trivialement :

Proposition **(8.1.7).** — *Si* $K=(K_A, (K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W), (K_{\mathbf{C}}, W, F))$ *est un* A-*complexe de Hodge mixte cohomologique, alors* $R\Gamma K=(R\Gamma K_A, R\Gamma(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W), R\Gamma(K_{\mathbf{C}}, W, F))$ *est un* A-*complexe de Hodge mixte.*

Scholie **(8.1.8).** — *Soient* U *le complément, dans un schéma propre et lisse* X, *d'un diviseur à croisements normaux* D, *et* $j : U \hookrightarrow X$ *le morphisme d'inclusion. Soit* W *la filtration canonique de* $Rj_*\mathbf{Q}=Rj_*\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Q}$: $W_n(Rj_*\mathbf{Q})=\tau_{\leq n}(Rj_*\mathbf{Q})$. *On a* (3.1.8)

$$(Rj_*\mathbf{Q})\otimes\mathbf{C} \overset{\approx}{\to} Rj_*\mathbf{C} \overset{\approx}{\to} j_*\Omega^\bullet_U \overset{\approx}{\leftarrow} \Omega^\bullet_X(\log D).$$

Soient W *la filtration par le poids de* $\Omega^\bullet_X(\log D)$ *et* F *sa filtration de Hodge (par les* $\sigma_{\geq p}$*). Alors,* (3.1.8) *fournit dans* $D^+F(X, \mathbf{C})$ *un isomorphisme* $(Rj_*\mathbf{Q}, W)\otimes\mathbf{C}\simeq(\Omega^\bullet_X(\log D), W)$ *et, d'après* (3.1.5) *et* (3.1.9)

$$(Rj_*\mathbf{Z}, (Rj_*\mathbf{Q}, W), (\Omega^\bullet_X(\log D), W, F))$$

est un complexe de Hodge mixte cohomologique sur X.

Le résultat suivant est une version « abstraite » du numéro (3.2).

Scholie **(8.1.9).** — *Soit* K *un* A-*complexe de Hodge mixte.*

(i) *Sur les termes* ${}_WE_r^{pq}$ *de la suite spectrale de* $(K_{\mathbf{C}}, W)$, *la filtration récurrente et les deux filtrations directes, définies par* F *coïncident.*

(ii) *La filtration* $W[n]$ (1.1.2) *de* $H^n(K_{A\otimes\mathbf{Q}})\simeq H^n(K_A)\otimes\mathbf{Q}$ *et la filtration* F *de* $H^n(K_{\mathbf{C}})\simeq H^n(K_A)\otimes_A\mathbf{C}$ *définissent sur* $H^n(K_A)$ *une* A-*structure de Hodge mixte* ((2.3.1) *amplifié par* (III.0.4)).

(iii) *Les morphismes* ${}_Wd_1 : {}_WE_1^{pq}\to{}_WE_1^{p+1,q}$ *sont compatibles à la bigraduation de Hodge; en particulier, ils sont strictement compatibles à la filtration de Hodge.*

(iv) *La suite spectrale de* $(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)$ *dégénère en* $E_2 : {}_WE_2={}_WE_\infty$.

(v) *La suite spectrale de* $(K_{\mathbf{C}}, F)$ *dégénère en* $E_1 : {}_FE_1={}_FE_\infty$.

(vi) *La suite spectrale du complexe* $Gr_F^p(K_{\mathbf{C}})$, *muni de la filtration induite par* W, *dégénère en* E_2.

La démonstration de (i), (ii), (iii), (iv) est parallèle à celle de (3.2.5). L'analogue des lemmes (3.2.6) et (3.2.7) a été pris pour axiome (CH 1 et CH 2). Les démonstrations de (3.2.8), (3.2.9) et (3.2.10) se transposent alors telles quelles, et comme en (3.2.10), on en déduit (i), (ii), (iii), (iv). Les assertions (v), (vi) résultent alors de (7.2.8).

(8.1.10) Nous abrégerons « différentiel gradué » en DG et « différentiel gradué à degrés bornés inférieurement » en DG^+. Un complexe de A-modules DG peut être vu comme un double complexe de A-modules; le *premier* degré est celui du complexe, le *second* est celui défini par la graduation des modules DG. On désigne par $D^+((A\text{-mod DG})^+)$

la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés inférieurement de A-modules DG, à degrés uniformément bornés inférieurement.

Un A-*complexe de Hodge* K *mixte* DG consiste en :

a) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+((A\text{-mod DG})^+)$;
b) un complexe filtré $(K_{A\otimes \mathbf{Q}}, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F((A\otimes \mathbf{Q}\text{-mod DG})^+)$, et un isomorphisme $K_A \otimes \mathbf{Q} \simeq K_{A\otimes \mathbf{Q}}$ dans D^+;
c) un complexe bifiltré $(K_{\mathbf{C}}, F, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2((\mathbf{C}\text{-mod DG})^+)$, et un isomorphisme $K_{A\otimes \mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C} \simeq K_{\mathbf{C}}$ dans D^+F.

On exige que, pour chaque n, la composante $(K^{\bullet n}, F, W)$ de second degré n de K soit un A-complexe de Hodge mixte.

On désigne par L la filtration par le second degré de sK. On désigne par $\mathrm{Dec}_1 W$ la filtration de $K_{A\otimes \mathbf{Q}}$ déduite par décalage (1.3.3) de W. On ne confondra pas la filtration qu'elle induit sur $sK_{A\otimes \mathbf{Q}}$ (encore notée $\mathrm{Dec}_1 W$) avec la filtration décalée de la filtration induite sur $sK_{A\otimes \mathbf{Q}}$ par W.

Variante **(8.1.10.1)**. — On définit de même les A-*complexes de Hodge mixtes cosimpliciaux* (resp. *r-cosimpliciaux*) en remplaçant partout DG par cosimplicial (resp. *r*-cosimplicial). Le foncteur (A-module cosimplicial) $\to$ (A-module DG) transforme A-complexes de Hodge mixtes cosimpliciaux en A-complexes de Hodge mixtes DG. De même pour *r*-cosimplicial.

(8.1.11) Soit $X_\bullet$ un espace topologique simplicial. Un A-*complexe de Hodge mixte cohomologique* K sur $X_\bullet$ consiste en :

α) un complexe $K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+(X_\bullet, A)$;
β) un complexe filtré $(K_{A\otimes \mathbf{Q}}, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F(X_\bullet, A\otimes \mathbf{Q})$, et un isomorphisme $K_{A\otimes \mathbf{Q}} \simeq K_A \otimes \mathbf{Q}$ dans $D^+(X_\bullet, A\otimes \mathbf{Q})$;
γ) un complexe bifiltré $(K_{\mathbf{C}}, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2(X_\bullet, \mathbf{C})$, et un isomorphisme

$$(K_{\mathbf{C}}, W) \simeq (K_{A\otimes \mathbf{Q}}, W) \otimes \mathbf{C}$$

dans $D^+F(X_\bullet, \mathbf{C})$.

L'axiome suivant doit être vérifié :

(CHM.) La restriction de K à chacun des X_n est un A-complexe de Hodge mixte cohomologique.

Pour $A = \mathbf{Z}$, on parlera simplement de complexe de Hodge mixte cohomologique.

Exemple **(8.1.12)**. — Soit $X_\bullet$ un schéma simplicial propre et lisse (sur $\mathbf{C}$) et soit $Y_\bullet$ un diviseur à croisements normaux dans $X_\bullet$. On pose $U_\bullet = X_\bullet - Y_\bullet$ et on désigne par j l'inclusion de $U_\bullet$ dans $X_\bullet$. Les constructions (8.1.8) peuvent être effectuées « unifor-

mément en X_n » comme (5.2.5) et (6.2.7) le montrent. Elles fournissent donc un complexe de Hodge mixte cohomologique

$$(Rj_*\mathbf{Z}, (Rj_*\mathbf{Q}, \tau_{\leq}), (\Omega^{\bullet}_{X_\bullet}(\log Y_\bullet), W, F))$$

sur $X_\bullet$.

(8.1.13) Soit K un A-complexe de Hodge mixte cohomologique sur $X_\bullet$. Appliquons à K le foncteur $R\Gamma^\bullet$. On obtient

a) un complexe cosimplicial $R\Gamma^\bullet K_A \in \mathrm{Ob}\, D^+((\text{A-modules cosimpliciaux}))$;

b) un complexe filtré cosimplicial $R\Gamma^\bullet(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F((A\otimes\mathbf{Q}\text{-modules cosimpliciaux}))$;

c) un complexe bifiltré cosimplicial

$$R\Gamma^\bullet(K_{\mathbf{C}}, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2((\mathbf{C}\text{-vectoriels cosimpliciaux}));$$

d) des isomorphismes (8.1.10.*b*), *c*)) entre ces objets.

Il est clair que $R\Gamma^\bullet(K, W, F)$ décrit ci-dessus est un A-complexe de Hodge mixte cosimplicial. Il définit un A-complexe de Hodge mixte DG (8.1.10.1).

(8.1.14) Soit K un A-complexe de Hodge mixte DG et considérons la suite spectrale d'aboutissement la cohomologie de $\mathbf{s}K$ qui est définie par la filtration L. Par hypothèse, les termes E_1 de cette suite spectrale sont munis de A-structures de Hodge mixtes. Le contenu du théorème ci-dessous est que toute la suite spectrale, y compris son aboutissement, est munie d'une A-structure de Hodge mixte. En d'autres termes, *c'* est une suite spectrale dans la catégorie abélienne des A-structures de Hodge mixtes. La structure sur l'aboutissement correspond à une « structure » de A-complexe de Hodge mixte naturelle sur $\mathbf{s}K$.

Théorème **(8.1.15)**. — *Soit* K *un* A-*complexe de Hodge mixte* DG.

(i) *Avec les notations de* (8.1.10), (8.1.10.1) *et* (7.1.6), $(\mathbf{s}K, \delta(W, L), F)$ *est un* A-*complexe de Hodge mixte.*

(ii) *On a*

(8.1.15.1)
$$_{\delta(W,L)}E_1^{ab}(\mathbf{s}K\otimes\mathbf{Q}) = \sum_{\substack{a=\gamma-\beta\\ b=\alpha+\beta}} H^\alpha(Gr_\beta^W K^{\bullet,\gamma});$$

le complexe $(_{\delta(W,L)}E_1^{\bullet b}, d_1)$ *est le complexe simple associé au complexe double de* $A\otimes\mathbf{Q}$-*structures de Hodge de poids b suivant*

(8.1.15.2)
$$\begin{array}{ccccc}
H^{b-(\beta+1)}(Gr^W_{\beta+1}K^{\bullet,\gamma+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^{b-\beta}(Gr^W_\beta K^{\bullet,\gamma+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^{b-(\beta-1)}(Gr^W_{\beta-1}K^{\bullet,\gamma+1}) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d''} & & \uparrow{\scriptstyle d''} \\
 & & H^{b-\beta}(Gr^W_\beta K^{\bullet,\gamma}) & \xrightarrow{\partial} & H^{b-(\beta-1)}(Gr^W_{\beta-1}K^{\bullet,\gamma})
\end{array}$$

(iii) *Sur les termes* ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r$ *de la suite spectrale définie par* $(s\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}, \mathrm{L})$, *la filtration récurrente et les deux filtrations directes définies par* $\mathrm{Dec}_1(\mathrm{W})$ *coïncident; de même, sur les* ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r(s\mathrm{K}_{\mathbf{C}})$, *la filtration récurrente et les deux filtrations directes induites par* F *coïncident. On notera ces filtrations* W *et* F.

(iv) *Pour* $r\geq 1$, $({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r, \mathrm{W}, \mathrm{F})$ *est une* A-*structure de Hodge mixte* (III.0.4). *Les différentielles* d_r *sont des morphismes de* A-*structures de Hodge mixtes.*

(v) *La filtration* L *de* $\mathrm{H}^\bullet(s\mathrm{K})$ *est une filtration dans la catégorie des structures de Hodge mixtes, et*

(8.1.15.3) $$\mathrm{Gr}^p_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}^{p+q}(s\mathrm{K}), \delta(\mathrm{W}, \mathrm{L})[p+q], \mathrm{F}) = ({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}^{pq}_\infty, \mathrm{W}, \mathrm{F}).$$

Remarque **(8.1.16)**. — Dans (8.1.15), la filtration $\mathrm{Dec}_1(\mathrm{W})$ (8.1.10) joue un plus grand rôle que W. On a

(8.1.16.1) $$\mathrm{Dec}(\delta(\mathrm{W}, \mathrm{L})) = \mathrm{Dec}_1(\mathrm{W}) \text{ sur } s\mathrm{K},$$

et (8.1.15.3) se réécrit

(8.1.16.2) $$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}(\mathrm{K}), \mathrm{Dec}_1\mathrm{W}, \mathrm{F}) = ({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_\infty, \mathrm{W}, \mathrm{F}).$$

Dans le même esprit, notons que, avec les notations de (8.1.8)

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{R}j_*\mathbf{Z}, (\mathrm{R}j_*\mathbf{Q}, \mathrm{Dec}\,\mathrm{W}), (\Omega^\bullet_{\mathrm{X}}(\log \mathrm{D}), \mathrm{Dec}\,\mathrm{W}, \mathrm{F}))$$

ne dépend que de U et non de la compactification choisie X.

(8.1.17) Prouvons (8.1.15). Les assertions (i) et (ii) résultent de ce que

$$\mathrm{Gr}^{\delta(\mathrm{W},\mathrm{L})}_n(s\mathrm{K}\otimes\mathbf{Q}) = \sum_{p-q=n} \mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_p \mathrm{Gr}^q_{\mathrm{L}}(s\mathrm{K}\otimes\mathbf{Q}) = \sum_{p-q=n} (\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_p \mathrm{K}^{\bullet q})[-q]$$

(cet isomorphisme est compatible à F, et on applique (8.1.4)). La vérification de (8.1.15.2) est laissée au lecteur.

Soient les assertions :

(a_r) Les morphismes d_r de ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r(s\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}})$ sont strictement compatibles à la filtration récurrente définie par $\mathrm{Dec}_1(\mathrm{W})$.

(b_r) Les morphismes d_r de ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r(s\mathrm{K}_{\mathbf{C}})$ sont strictement compatibles à la filtration récurrente définie par F.

(c_r) ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r$, muni des filtrations considérées en (a_r), (b_r), est une A-structure de Hodge mixte.

(d_r) Les d_r sont des morphismes de A-structures de Hodge mixtes.

Nous prouverons (a_r) $(r\geq 0)$, (b_r) $(r\geq 0)$, (c_r) $(r\geq 1)$, (d_r) $(r\geq 1)$ par une récurrence simultanée.

A) *Preuve de* (a_0) : on a

$$({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}^{p\bullet}_0(s\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}), \mathrm{Dec}_1\mathrm{W}) = (\mathrm{K}^{\bullet p}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}, \mathrm{Dec}\,\mathrm{W}).$$

D'après (8.1.9) (iv), la suite spectrale de $(\mathrm{K}^{\bullet p}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}, \mathrm{W})$ dégénère en E_2. D'après (1.3.4), la suite spectrale de $(\mathrm{K}^{\bullet p}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}, \mathrm{Dec}\,\mathrm{W})$ dégénère en E_1, et ceci prouve (a_0) (1.3.2).

B) *Preuve de* (b_0) : on a

$$({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_0^{p\bullet}(s\mathrm{K}_{\mathbf{C}}), \mathrm{F}) = (\mathrm{K}_{\mathbf{C}}^{\bullet p}, \mathrm{F}).$$

On applique (8.1.9) (v) et (1.3.2).

C) *Preuve de* (c_1) : il faut montrer que $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\bullet p})$, muni des filtrations induites par Dec W sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}^{\bullet p}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\bullet p})\otimes\mathbf{Q}$ et F sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathbf{C}}^{\bullet p}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\bullet p})\otimes_{\mathrm{A}}\mathbf{C}$, est une A-structure de Hodge mixte. Dec W induit sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}^{\bullet p})$ la même filtration que $\mathrm{W}[n]$, et on conclut par (8.1.9) (ii).

D) *Preuve de* $(c_r)+(d_r) \Rightarrow (a_r)+(b_r)+(c_{r+1})$: c'est le point clef de la démonstration, et une simple application de (2.3.5) (amplifié par (III.0.4)).

E) *Preuve de* $(a_r)_{r\leq r_0-2}+(b_r)_{r\leq r_0-2}+(c_{r_0}) \Rightarrow (d_{r_0})$: D'après (1.3.16), la filtration récurrente et les filtrations directes induites par $\mathrm{Dec}_1\mathrm{W}$ (resp. F) sur ${}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_r$ coïncident pour $r\leq r_0$, et on applique (1.3.13) (i).

Ceci termine la démonstration par récurrence de *(a)*, *(b)*, *(c)*, *(d)*.

L'assertion (iii) a été prouvée dans la partie E de la récurrence et les assertions de (iv) sont (c_r) et (d_r). On prouvera (8.1.15.3) sous la forme (8.1.16.2). Que

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}(s\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}), \mathrm{Dec}_1\mathrm{W}) = ({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_\infty(s\mathrm{K}_{\mathrm{A}\otimes\mathbf{Q}}), \mathrm{W})$$

résulte de (a_r) et (1.3.17). Que

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}(s\mathrm{K}_{\mathbf{C}}), \mathrm{F}) = ({}_{\mathrm{L}}\mathrm{E}_\infty(s\mathrm{K}_{\mathbf{C}}), \mathrm{F})$$

résulte de (b_r) et (1.3.17). On conclut par le lemme suivant, dont la vérification est laissée au lecteur :

Lemme **(8.1.18)**. — *Soit* $\mathrm{H} = (\mathrm{H}_{\mathrm{A}}, \mathrm{W}, \mathrm{F})$ *une* A-*structure de Hodge mixte. Pour qu'une filtration* L *de* H_{A} *provienne d'une filtration de* H, *dans la catégorie abélienne des* A-*structures de Hodge mixtes, il faut et il suffit que pour tout* n, $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^n(\mathrm{H}_{\mathrm{A}}), \mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^n(\mathrm{W}), \mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^n(\mathrm{F}))$ *soit une* A-*structure de Hodge mixte.*

(8.1.19) Appliquons (8.1.13) et (8.1.15) à l'exemple (8.1.12).

On obtient un complexe de Hodge mixte consistant en *a)*, *b)*, *c)* ci-dessous.

a) Le complexe $\mathrm{R}\Gamma\mathrm{R}j_*\mathbf{Z} \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{U}_\bullet, \mathbf{Z})$, ayant pour groupes de cohomologie les $\mathrm{H}^n(\mathrm{U}_\bullet, \mathbf{Z})$.

b) La filtration $\delta(\mathrm{W}, \mathrm{L})$ de $\mathrm{R}\Gamma j_*\mathbf{Q} \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{U}_\bullet, \mathbf{Q})$. Avec les notations de (3.1.4), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_n^{\delta(\mathrm{W},\mathrm{L})}\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{U}_\bullet, \mathbf{Q}) &\underset{(7.1.6.5)}{\simeq} \bigoplus_m \mathrm{Gr}_{n+m}^{\mathrm{W}}\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{U}_m, \mathbf{Q})[-m] \\ &\simeq \bigoplus_m \mathrm{R}\Gamma(\tilde{\mathrm{Y}}_m^{n+m}, \varepsilon_{\mathbf{Q}}^{n+m}[-n-m])[-m] \\ &\simeq \bigoplus_m \mathrm{R}\Gamma(\tilde{\mathrm{Y}}_m^{n+m}, \varepsilon_{\mathbf{Q}}^{n+m})[-n-2m].\end{aligned}$$

Le terme E_1 de la suite spectrale correspondante est somme de groupes du type $H^p(\widetilde{Y}^r_q, \varepsilon^r_{\mathbf{Q}})$; ce dernier contribue au $H^{p+q+r}(U_\bullet)$; il correspond au $\mathrm{Gr}_a^{\delta(W,F)}$ pour $p+2r=(p+q+r)+a$:

(8.1.19.1) $$_{\delta(W,L)}E_1^{-a,b} = \bigoplus_{\substack{p+2r=b\\ q-r=-a}} H^p(\widetilde{Y}^r_q, \varepsilon^r_{\mathbf{Q}}) \Rightarrow H^{-a+b}(U_\bullet, \mathbf{Q}).$$

c) La bifiltration $(\delta(W, L), F)$ de $R\Gamma Rj_*\mathbf{C} \simeq sR\Gamma^\bullet\Omega^\bullet_X(\log D)$.

La filtration F munit $_{\delta(W,L)}E_1^{-a,b}$ d'une structure de Hodge de poids b, et les différentielles d_1 de $_{\delta(W,L)}E$ sont des morphismes de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge. Le complexe $_{\delta(W,L)}E_1^{\bullet b}$ est le complexe simple associé au complexe double suivant, de composantes des structures de Hodge de poids b :

$$\begin{tikzcd}
H^{b-2(r+2)}(\widetilde{Y}^{r+1}_{q+1}, \varepsilon^{r+1}_{\mathbf{Q}})(-r-1) \arrow[r, "\text{Gysin}"] & H^{b-2r}(\widetilde{Y}^r_{q+1}, \varepsilon^r_{\mathbf{Q}})(-r) \arrow[r, "\text{Gysin}"] & H^{b-2(r-2)}(\widetilde{Y}^{r-1}_{q+1}, \varepsilon^{r-1}_{\mathbf{Q}})(-r+1) \\
 & H^{b-2r}(\widetilde{Y}^r_q, \varepsilon^r_{\mathbf{Q}})(-r) \arrow[u, "\sum_i (-1)^i \delta_i"] \arrow[r, "\text{Gysin}"] & H^{b-2(r-2)}(\widetilde{Y}^{r-1}_q, \varepsilon^{r-1}_{\mathbf{Q}})(-r+1) \arrow[u, "\sum_i (-1)^i \delta_i"]
\end{tikzcd}$$

Les indices des composantes dans E_1^{ab} vérifient $-a=q-r$.

En particulier, les $H^n(U_\bullet, \mathbf{Z})$ se trouvent munis de structures de Hodge mixtes (8.1.9).

Proposition **(8.1.20)**. — *Sous les hypothèses précédentes* :

(i) *La structure de Hodge mixte de* $H^n(U_\bullet, \mathbf{Z})$ *est fonctorielle en le couple* $(U_\bullet, X_\bullet)$.

(ii) *En cohomologie rationnelle, la suite spectrale* (8.1.19.1) *dégénère en* E_2 $(E_2=E_\infty)$ *et aboutit à la filtration par le poids de* $H^n(U_\bullet, \mathbf{Q})$. *La structure de Hodge de* E_2 *induite par celle de* E_1 *est aussi celle de* $\mathrm{Gr}_W H^n(U_\bullet, \mathbf{Q})$.

(iii) *Les nombres de Hodge de* $H^n(U_\bullet, \mathbf{Z})$ *vérifient*

$$h^{pq} \neq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \leq q \leq n.$$

(iv) *Pour* $Y_\bullet = \emptyset$, *les nombres de Hodge de* $H^n(X_\bullet, \mathbf{Z})$ *vérifient*

$$h^{pq} \neq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n \text{ et } p+q \leq n.$$

(i) et (ii) résultent de la théorie générale (8.1.9). Pour prouver (iii), on contemple (8.1.19.2), et on remarque que les structures de Hodge $H^p(\widetilde{Y}^r_q, \varepsilon^r_{\mathbf{Q}})(-r)$ $(p+q+r=n)$ vérifient (iii). Pour prouver (iv), on remarque que les structures de Hodge $H^p(X_q)$ $(p+q=n)$ vérifient (iv).

(8.1.21) On définit un A-*complexe de Hodge mixte cohomologique sur un espace topologique r-simplicial* en transposant (8.1.11). Si K est un tel complexe, on voit comme en (8.1.13) que $R\Gamma^\bullet K$ est un A-complexe de Hodge mixte r-cosimplicial (8.1.10.1).

Soit $X_\bullet$ un schéma propre et lisse r-simplicial. Un diviseur à croisements normaux $D_\bullet$ dans $X_\bullet$ est un système de diviseurs à croisements normaux dans les X_n tel que $X_\bullet - D_\bullet = U_\bullet$ soit un sous-schéma r-simplicial de $X_\bullet$. Soit $j : U_\bullet \hookrightarrow X_\bullet$. On définit comme en (8.1.12) un complexe de Hodge mixte cohomologique $Rj_*\mathbf{Z}$ sur $X_\bullet$.

On pourrait comme en (8.1.20) en déduire une structure de Hodge mixte sur $H^\bullet(U_\bullet, \mathbf{Z})$, mais, puisque

$$H^\bullet(U^\bullet, \mathbf{Z}) = H^\bullet(\delta U_\bullet, \mathbf{Z}),$$

ceci ne nous apprendrait rien de neuf (l'égalité précédente serait une identité entre structures de Hodge mixtes).

(8.1.22) Faisons $r=2$. Pour tout complexe bicosimplicial $K = (K^{pn_1n_2})$ (p = degré différentiel, $n_i = i$-ème degré simplicial) borné inférieurement, on désignera par s_1K le complexe cosimplicial de degré simplicial n_2, donné par

$$(s_1K)^{\bullet n_2} = sK^{\bullet\bullet n_2}.$$

On désignera par L_1 la filtration de s_1K qui, sur chaque $sK^{\bullet\bullet n_2}$ induit la filtration par le degré simplicial n_1.

Soit K un A-complexe de Hodge mixte bicosimplicial. Il résulte de (8.1.15) que $(s_1K, \delta(W, L_1), F)$ est un complexe de Hodge mixte cosimplicial. Soit L_2 la filtration de $sK = ss_1K$ par le degré simplicial n_2. D'après (8.1.14), (8.1.15), la suite spectrale définie par L_2 provient d'une suite spectrale dans la catégorie abélienne des A-structures de Hodge mixtes

(8.1.22.1) $$_{L_2}E_1^{pq} = H^q(sK^{\bullet\bullet p}) \Rightarrow H^{p+q}(sK).$$

Dans cette suite spectrale, la A-structure de Hodge mixte sur E_1^{pq} est la A-structure de Hodge mixte ((8.1.9) (ii)) de la cohomologie du A-complexe de Hodge mixte $(sK^{\bullet\bullet p}, \delta(W, L_1), F)$. La A-structure de Hodge mixte de l'aboutissement est la A-structure de Hodge mixte de la cohomologie du A-complexe de Hodge mixte $(sK, \delta(\delta(W, L_1), L_2), F)$. La filtration $\delta(\delta(W, L_1), L_2) \underset{\text{dfn}}{=} \delta(W, L_1, L_2)$ est donnée par

$$\delta(W, L_1, L_2)_k(K^{pn_1n_2}) = W_{k+n_1+n_2}K^{pn_1n_2}.$$

(8.1.23) En particulier, un A-complexe de Hodge mixte cohomologique sur un espace topologique bisimplicial $X_{\bullet\bullet}$ définit une suite spectrale de A-structures de Hodge mixtes

(8.1.23.1) $$E_1^{pq} = H^q(X_{\bullet p}, K) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\bullet\bullet}, K).$$

Dans le cas particulier considéré en (8.1.21), pour $r=2$, on a $A = \mathbf{Z}$ et (8.1.23.1) s'écrit

(8.1.23.2) $$E_1^{pq} = H^q(U_{\bullet p}, \mathbf{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(U_{\bullet\bullet}, \mathbf{Z}).$$

(8.1.24) Si K′ et K″ sont deux A-complexes de Hodge mixtes, leur produit tensoriel $K'\otimes K''$, défini par

$$(K'\otimes K'')_A = K'_A \overset{L}{\otimes} K''_A,$$
$$((K'\otimes K'')_{A\otimes \mathbf{Q}}, W) = (K'_{A\otimes \mathbf{Q}}, W')\otimes(K''_{A\otimes \mathbf{Q}}, W''),$$
$$((K'\otimes K'')_{\mathbf{C}}, W, F) = (K'_{\mathbf{C}}, W', F')\otimes(K''_{\mathbf{C}}, W'', F''),$$

est encore un A-complexe de Hodge mixte.

Soit U′ (resp. U″) le complément d'un diviseur à croisements normaux Y′ (resp. Y″) dans un schéma propre et lisse X′ (resp. X″). Alors, $U = U'\times U''$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux Y dans $X = X'\times X''$. Soit j (resp. j', j'') l'inclusion de U (resp. U′, U″) dans X (resp. X′, X″).

On dispose d'un quasi-isomorphisme

$$Rj'_*\mathbf{Z} \overset{L}{\boxtimes} Rj''_*\mathbf{Z} \underset{\text{dfn}}{=} \mathrm{pr}_1^* Rj'_*\mathbf{Z} \overset{L}{\otimes} \mathrm{pr}_2^* Rj''_*\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathbf{Z},$$

d'un quasi-isomorphisme filtré

$$(Rj'_*\mathbf{Q}, \tau_{\leq}) \overset{L}{\boxtimes} (Rj''_*\mathbf{Q}, \tau_{\leq}) \xrightarrow{\sim} (Rj_*\mathbf{Q}, \tau_{\leq}),$$

et d'un morphisme bifiltré

$$(\Omega^\bullet_{X'}(\log Y'), W, F) \boxtimes (\Omega^\bullet_{X''}(\log Y''), W, F) \to (\Omega^\bullet_X(\log Y), W, F).$$

Appliquons le foncteur $R\Gamma$; d'après la formule de Künneth, et d'après son analogue en cohomologie des faisceaux analytiques cohérents, on obtient un isomorphisme de complexes de Hodge mixtes

$$R\Gamma(U', \mathbf{Z}) \overset{L}{\otimes} R\Gamma(U'', \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U, \mathbf{Z}),$$

d'où un isomorphisme de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge mixtes

$$H^\bullet(U', \mathbf{Q})\otimes H^\bullet(U'', \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(U, \mathbf{Q}).$$

(8.1.25) Des arguments standards, basés sur le théorème de Cartier-Eilenberg-Zilber, fournissent la variante simpliciale suivante de (8.1.24).

Soit $U'_\bullet$ (resp. $U''_\bullet$) le complément d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma simplicial propre et lisse $X'_\bullet$ (resp. $X''_\bullet$). Soit $U_\bullet = U'_\bullet \times U''_\bullet$ et $X_\bullet = X'_\bullet \times X''_\bullet$.

On a un isomorphisme de complexes de Hodge mixtes

$$R\Gamma(U'_\bullet, \mathbf{Z}) \overset{L}{\otimes} R\Gamma(U''_\bullet, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U_\bullet, \mathbf{Z}),$$

et en particulier un isomorphisme de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge mixtes

$$H^\bullet(U'_\bullet, \mathbf{Q})\otimes H^\bullet(U''_\bullet, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(U_\bullet, \mathbf{Q}).$$

(8.1.26) Soit $U'_{\bullet\bullet}$ (resp. $U''_{\bullet\bullet}$) le complément d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma bisimplicial propre et lisse $X'_{\bullet\bullet}$ (resp. $X''_{\bullet\bullet}$). Soient $U_{\bullet\bullet} = U'_{\bullet\bullet}\times U''_{\bullet\bullet}$ et

$X_{..} = X'_{..} \times X''_{..}$. Des raisonnements standards montrent que, en cohomologie rationnelle, la suite spectrale (8.1.23.2), pour $U_{..}$, est produit tensoriel des suites spectrales (8.1.23.2) pour $U'_{..}$ et $U''_{..}$.

8.2. Espaces algébriques séparés.

(8.2.1) Soit X un schéma (ou un espace algébrique) de type fini sur **C**, supposé séparé. Il existe alors un diagramme

(8.2.1.1)
$$\begin{tikzcd} Y_{\bullet} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & \overline{Y}_{\bullet} \\ X & \end{tikzcd}$$

dans lequel $Y_{\bullet}$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma simplicial propre et lisse $\overline{Y}_{\bullet}$, et est un hyperrecouvrement propre de X. On a (5.3.5 (II))

(8.2.1.2)
$$H^{\bullet}(X) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(Y_{\bullet}).$$

En (8.1.19), on a muni $H^{\bullet}(Y_{\bullet})$ d'une structure de Hodge mixte. Soit $\mathscr{H}(\alpha)$ la structure de Hodge mixte sur $H^{\bullet}(X)$ qui s'en déduit par (8.2.1.2).

Proposition **(8.2.2)**. — *Avec les notations précédentes, la structure de Hodge mixte* $\mathscr{H}(\alpha)$ *sur* $H^{\bullet}(X)$ *est indépendante du choix de* α. *On l'appelle la* structure de Hodge mixte de $H^{\bullet}(X, \mathbf{Z})$. *Pour tout morphisme de schémas* $f : X_1 \to X_2$, $f^{\bullet} : H^{\bullet}(X_2) \to H^{\bullet}(X_1)$ *est un morphisme de structures de Hodge mixtes.*

La démonstration utilise (6.2.8), et est parallèle à celle de (3.2.11 C)) (cf. aussi (8.3.3)).

Remarque **(8.2.3)**. — Pour X lisse, on vérifie en prenant pour $\overline{Y}_{\bullet}$ un schéma simplicial constant que la structure de Hodge mixte (8.2.2) coïncide avec celle définie en (3.2.12).

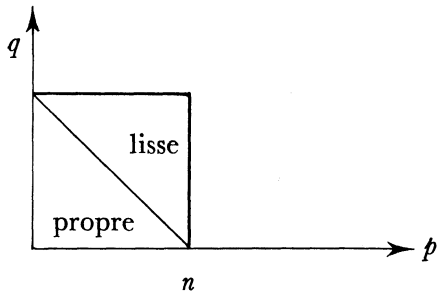
Théorème **(8.2.4)**. — *Les couples* (p, q) *tels que le nombre de Hodge* h^{pq} *de* $H^n(X)$ *soit non nul vérifient les conditions suivantes*

(i) $(p, q) \in [0, n] \times [0, n]$.

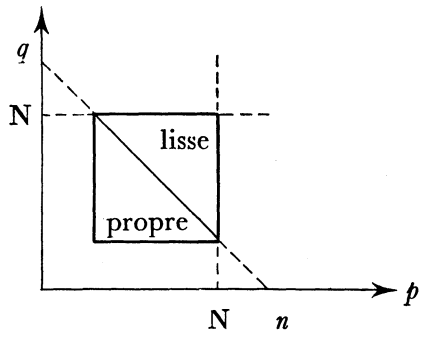
(ii) *Si* $\dim X = N$, *et que* $n \geq N$, *alors*
$$(p, q) \in [n - N, N] \times [n - N, N].$$

(iii) *Si* X *est propre, alors* $p + q \leq n$.

(iv) *Si* X *est lisse, alors* $p + q \geq n$. *La même conclusion vaut pour* X *une « rational homology manifold » équidimensionnelle de dimension* N, i.e. *si pour tout* $x \in X$, $H^i_{\{x\}}(X, \mathbf{Q}) = 0$ *si* $i \neq 2N$, $= \mathbf{Q}$ *si* $i = 2N$.



$n \leq N$



$n \geq N$

L'assertion (ii) sera prouvée en (8.3.10). L'assertion (i) résulte de (8.1.20 (iii)). Pour X propre, on peut trouver un diagramme (8.2.1.1) dans lequel $Y_\bullet = \overline{Y}_\bullet$ et (iii) résulte de (8.1.20 (iv)). Pour X lisse, (iv) résulte de (8.2.3) et (3.2.15). Le cas général en résulte : si $p : \tilde{X} \to X$ est une résolution des singularités de X, $p^* : H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(\tilde{X}, \mathbf{Q})$ est injectif, car le transposé par dualité de Poincaré $p_!$ de $p^* : H^\bullet_c(X, \mathbf{Q}) \to H^\bullet_c(\tilde{X}, \mathbf{Q})$ en est une rétraction.

Proposition **(8.2.5).** — *Supposons* X *propre. Si* $u : Y \to X$ *est un morphisme propre surjectif, avec* Y *lisse, alors le quotient de poids n de* $H^n(X, \mathbf{Q})$ *est l'image de* $H^n(X, \mathbf{Q})$ *dans* $H^n(Y, \mathbf{Q})$. *La suite*

$$\textbf{(8.2.5.1)} \qquad H^n(X, \mathbf{Q}) \longrightarrow H^n(Y, \mathbf{Q}) \underset{pr_1^* - pr_2^*}{\rightrightarrows} H^n(Y \times_X Y, \mathbf{Q})$$

est exacte.

Soit $Y_\bullet$ comme en (8.2.1.1), avec $Y_0 = Y$ et $Y_\bullet = \overline{Y}_\bullet$. D'après ((8.1.20 (ii))), on a une suite exacte

$$\textbf{(8.2.5.2)} \qquad 0 \to H^n(X, \mathbf{Q})/W^{n-1}H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^n(Y_0, \mathbf{Q}) \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} H^n(Y_1, \mathbf{Q})$$

qui implique (8.2.5) (réciproquement, cette suite exacte se déduit aisément de (8.2.5) et (8.2.7) ci-dessous).

Proposition **(8.2.6).** — *Soient des morphismes de schémas*

$$Y \xrightarrow{f} X \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{X}.$$

On suppose que Y *est propre, que* X *est lisse et que* $\overline{X}$ *est une compactification lisse de* X. *Alors,* $H^\bullet(\tilde{X}, \mathbf{Q})$ *et* $H^\bullet(X, \mathbf{Q})$ *ont même image dans* $H^\bullet(Y, \mathbf{Q})$.

La démonstration est parallèle à celle de (3.2.18). Il suffit de prouver que, quels que soient i et n $Gr_i^W(f^*)$ et $Gr_i^W((jf)^*)$ ont même image dans $Gr_i^W H^n(Y, \mathbf{Q})$.

a) Pour $i > n$, ces images sont nulles car $Gr_i^W H^n(Y, \mathbf{Q}) = 0$ (8.2.4 (iii)).
b) Pour $i < n$, ces images sont nulles car $Gr_i^W H^n(X, \mathbf{Q}) = 0$ (8.2.4 (iv)).
c) Pour $i = n$, ces images sont égales car $Gr_n^W(j^*)$ est surjectif (3.2.17).

Proposition **(8.2.7)**. — *Soient des morphismes de schémas*

$$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y.$$

On suppose que Y *est lisse, que* X *est propre, que* $\tilde{X}$ *est propre et lisse et que* π *est surjectif. Alors, les noyaux de* f^* *et de* $(f\pi)^*$ *dans* $H^\bullet(Y, \mathbf{Q})$ *sont égaux.*

Prouvons que $\operatorname{Ker} \operatorname{Gr}_i^W(f^*) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Gr}_i^W((f\pi)^*))$ dans $\operatorname{Gr}_i^W(H^n(Y, \mathbf{Q}))$.

a) Pour $i<n$, ces noyaux sont nuls car $\operatorname{Gr}_i^W H^n(Y, \mathbf{Q}) = 0$ ((8.2.4 (iv))).

b) Pour $i>n$, ces noyaux sont tout $\operatorname{Gr}_i^W(H^n(Y, \mathbf{Q}))$ car $\operatorname{Gr}_i^W H^n(X, \mathbf{Q}) = 0$ ((8.2.4 (iii))).

c) Pour $i=n$, ces noyaux sont égaux car $\operatorname{Gr}_n^W(\pi^*)$ est injectif (8.2.5.2).

Corollaire **(8.2.8)**. — *Soient des morphismes de schémas*

$$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \overset{f}{\hookrightarrow} Y.$$

On suppose que Y *est propre et lisse, que* X *est un sous-schéma fermé de* Y *et que* $\tilde{X}$ *est une résolution des singularités de* X. *Soient* $q = f\pi$ *et* $U = Y - X$. *Alors, la suite*

$$\textbf{(8.2.8.1)} \qquad H^\bullet(\tilde{X}, \mathbf{Q}) \xrightarrow{q_!} H^\bullet(Y, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(U, \mathbf{Q})$$

est exacte.

D'après (8.2.7), on a

$$\operatorname{Ker}(f^* : H^\bullet(Y, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(X, \mathbf{Q})) = \operatorname{Ker}(q^* : H^\bullet(Y, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(\tilde{X}, \mathbf{Q})).$$

La suite exacte longue de cohomologie du couple (Y, X) fournit donc une suite exacte

$$\textbf{(8.2.8.2)} \qquad H_c^\bullet(U, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(Y, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(\tilde{X}, \mathbf{Q}),$$

et (8.2.8.1) est la suite transposée de (8.2.8.2) par dualité de Poincaré.

Remarque **(8.2.9)**. — Le corollaire (8.2.8) est utilisé sous des hypothèses plus générales dans ([8], (9.7), p. 161). Comme l'a fait remarquer Lieberman, la justificati n donnée dans *loc. cit.* est insuffisante.

On déduit de (8.1.25) que

Proposition **(8.2.10)**. — *Les isomorphismes de Künneth*

$$H^\bullet(X \times Y, \mathbf{Q}) \simeq H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(Y, \mathbf{Q})$$

sont des isomorphismes de structures de Hodge mixtes.

Corollaire **(8.2.11)**. — *Le cup-produit*

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(X) \to H^\bullet(X)$$

est un morphisme de structures de Hodge mixtes.

Résulte de (8.2.10) et de (8.2.2) appliqué à l'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$.

8.3. Théorie de Hodge des schémas simpliciaux.

(8.3.1) Pour $X^\bullet$ un schéma (ou espace algébrique) simplicial séparé, nous aurons à considérer des diagrammes de schémas simpliciaux

(8.3.1.1)
$$\begin{tikzcd} Z_\bullet \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p"'] & \overline{Z}_\bullet \\ X_\bullet & \end{tikzcd}$$

vérifiant :

a) j est une immersion ouverte d'image dense; $\overline{Z}_\bullet$ est propre.

b) Les morphismes évidents $Z_n \to (\mathrm{cosq}^{X_\bullet}_{n-1}\mathrm{sq}_{n-1}Z_\bullet)_n$ sont propres et surjectifs.

Pour $\overline{Z}_\bullet$ réduit, on peut regarder j comme un objet simplicial de la catégorie $\mathscr{C}$ des couples $(Y, \overline{Y})$ formés d'un schéma propre réduit $\overline{Y}$ et d'un ouvert (de Zariski) dense Y de $\overline{Y}$. La catégorie $\mathscr{C}$ vérifie (6.2.4.1), ce qui permet de lui appliquer l'analogue de (6.2.4).

Proposition **(8.3.2)**. — (i) *Pour tout schéma simplicial séparé* $X_\bullet$, *il existe un diagramme* (8.3.1.1) *vérifiant a), b) et tel que* $\overline{Z}_\bullet$ *soit propre et lisse et* $Z_\bullet$ *le complément d'un diviseur à croisements normaux.*

(ii) *Soit* $F : X_{\bullet 1} \to X_{\bullet 2}$ *un morphisme de schémas simpliciaux séparés. Soient* $(X_{\bullet i}, Z_{\bullet i}, \overline{Z}_{\bullet i})_{i=1,2}$ *deux diagrammes* (8.3.1.1) *vérifiant a) et b). Il existe alors* $(X_{\bullet 1}, Z_\bullet, \overline{Z}_\bullet)$ *comme en* (i) *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Z_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & \overline{Z}_\bullet \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ Z_{\bullet 1} \arrow[r, hook, "j_1"'] \arrow[d, "p_1"'] & \overline{Z}_{\bullet 1} & Z_{\bullet 2} \arrow[r, hook, "j_2"'] \arrow[d, "p_2"'] & \overline{Z}_{\bullet 2} \\ X_{\bullet 1} \arrow[rr, "f"] & & X_{\bullet 2} & \end{tikzcd}$$

La démonstration, analogue en plus compliqué à (6.2.5), est laissée au lecteur.

(8.3.3) Soit un diagramme (8.3.1.1) comme en (8.3.2 (i)). D'après (5.3.5 (V)), l'application $H^\bullet(X_\bullet, \mathbf{Z}) \to H^\bullet(Z_\bullet, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme. En (8.1.19) et (8.1.20), nous avons muni $H^\bullet(Z_\bullet, \mathbf{Z})$ d'une structure de Hodge mixte, d'où une structure de

Hodge mixte sur $H^{\bullet}(X_{\bullet}, \mathbf{Z})$. Elle est indépendante du choix du diagramme (8.3.1.1) : d'après (8.3.2 (ii)) pour $f = \mathrm{Id}$, deux systèmes $(Z_{\bullet i}, \bar{Z}_{\bullet i}, p_i)_{i=1,2}$ sont toujours coiffés par un troisième $(Z_{\bullet}, \bar{Z}_{\bullet}, p)$, d'où un diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
 & H^{\bullet}(X_{\bullet}, \mathbf{Z}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^{\bullet}(Z_{\bullet 1}, \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^{\bullet}(Z_{\bullet}, \mathbf{Z}) & H^{\bullet}(Z_{\bullet 2}, \mathbf{Z}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Définition **(8.3.4)**. — *La* structure de Hodge mixte *de* $H^{\bullet}(X_{\bullet}, \mathbf{Z})$ *est celle définie plus haut.*

Il résulte de (8.3.2) (ii) que cette structure de Hodge mixte est fonctorielle en $X_{\bullet}$.

Proposition **(8.3.5)**. — *Soit* $X_{\bullet}$ *un schéma simplicial séparé. La suite spectrale*

$$E_1^{pq} = H^q(X_p, \mathbf{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\bullet}, \mathbf{Z})$$

est une suite spectrale de structures de Hodge mixtes.

Pour un diagramme comme en (8.3.1), les applications $p_n : Z_n \to X_n$ sont propres et surjectives. On peut alors appliquer (6.2.4) à la catégorie des objets simpliciaux de la catégorie $\mathscr{C}$ (8.3.1) pour obtenir comme en (6.2.5) le lemme suivant :

Lemme **(8.3.6)**. — *Soit* $X_{\bullet}$ *un schéma simplicial séparé. Il existe un schéma bisimplicial* $Z_{\bullet\bullet}$ *augmenté vers* $X_{\bullet}$:

$$\varepsilon_{n,m} : Z_{n,m} \to X_n$$

et $i : Z_{\bullet\bullet} \hookrightarrow \bar{Z}_{\bullet\bullet}$ *tels que* :

a) $\bar{Z}_{\bullet\bullet}$ *est un schéma bisimplicial propre et lisse, et* $Z_{\bullet\bullet}$ *le complément d'un diviseur à croisements normaux de* $\bar{Z}_{\bullet\bullet}$;

b) pour tout n, le schéma simplicial augmenté $Z_{n\bullet} \to X_n$ *est un hyperrecouvrement propre de* X_n.

En (8.1.2.1), nous avons muni $H^{\bullet}(Z_{\bullet\bullet}, \mathbf{Z})$ d'une structure de Hodge mixte. Si $\delta Z_{\bullet\bullet}$ est le schéma simplicial diagonal de $Z_{\bullet\bullet}$, on a un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd}
H^{\bullet}(X_{\bullet}, \mathbf{Z}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & H^{\bullet}(Z_{\bullet\bullet}, \mathbf{Z}) \arrow[d, equal, "\beta"] \\
 & H^{\bullet}(\delta Z_{\bullet\bullet}, \mathbf{Z})
\end{tikzcd}$$

dans lequel β et γ sont des isomorphismes, et α et β des morphismes de structures de Hodge mixtes; γ est donc un isomorphisme de structures de Hodge mixtes.

On a un morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} H^q(X_p, \mathbf{Z}) & \Longrightarrow & H^{p+q}(X_\bullet, \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(Z_{p\bullet}, \mathbf{Z}) & \Longrightarrow & H^{p+q}(Z_{\bullet\bullet}, \mathbf{Z}) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (5.2.3) \\ \\ (8.1.23.1) \end{array}$$

ce morphisme est un isomorphisme compatible aux structures de Hodge mixtes, de sorte que (8.3.5) résulte de (8.1.23).

Exemple **(8.3.7)**. — Soit $X_\bullet$ un schéma simplicial non nécessairement séparé. Il existe alors un schéma simplicial séparé $Y_\bullet$ et $u : Y_\bullet \to X_\bullet$ tel que pour $n \geq 0$, l'application $u'_n : Y_n \to (\mathrm{cosq}_{n-1}^{X_\bullet} \mathrm{sq}_{n-1} Y_\bullet)_n$ soit étale et surjective (par exemple la somme des ouverts d'un recouvrement ouvert).

L'application $u^\bullet : H^\bullet(X_\bullet, \mathbf{Z}) \to H^\bullet(Y_\bullet, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme ((5.3.5) (V) et (III)). Par définition, la *structure de Hodge mixte* de $H^\bullet(X_\bullet, \mathbf{Z})$ se déduit de celle de $H^\bullet(Y_\bullet, \mathbf{Z})$ *via* $u^\bullet$. Elle ne dépend pas du choix de $Y_\bullet$.

Pour X un schéma non séparé, la *structure de Hodge mixte* de $H^\bullet(X, \mathbf{Z})$ est celle de $H^\bullet(X_\bullet, \mathbf{Z})$, pour $X_\bullet$ le schéma simplicial constant défini par X. Il est vraisemblable, mais non démontré, que (8.2.4) (iv) reste valable pour X lisse non séparé.

Exemple **(8.3.8)**. — Soit $u : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de schémas simpliciaux. Les groupes de cohomologie relative $H^n(Y_\bullet \bmod X_\bullet, \mathbf{Z})$ sont par définition (6.3.2) les groupes de cohomologie du schéma simplicial $C(u)$. Ils sont donc munis d'une structure de Hodge mixte.

Proposition **(8.3.9)**. — *La suite exacte longue de cohomologie relative*

$$H^n(Y_\bullet, \mathbf{Z}) \to H^n(X_\bullet, \mathbf{Z}) \xrightarrow{j} H^{n+1}(Y_\bullet \bmod X_\bullet, \mathbf{Z}) \to H^{n+1}(Y, \mathbf{Z})$$

est une suite exacte longue de structures de Hodge mixtes.

On se ramène au cas où $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont lisses, et où, de plus, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{u} & Y_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X}_\bullet & \xrightarrow{\bar{u}} & \overline{Y}_\bullet \end{array}$$

avec $\overline{X}_\bullet$ et $\overline{Y}_\bullet$ propres et lisses, et $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ compléments de diviseurs à croisements normaux $D_\bullet$ et $E_\bullet$ dans $\overline{X}_\bullet$ et $\overline{Y}_\bullet$.

Il existe alors des résolutions bifiltrées (de gradué à composantes acycliques) $a : \Omega^{\bullet}_{\overline{X}_{\bullet}}(\log D_{\bullet}) \to K$ et $b : \Omega^{\bullet}_{\overline{Y}_{\bullet}}(\log E_{\bullet}) \to L$ qui s'insèrent dans un diagramme commutatif de complexes bifiltrés

$$\begin{tikzcd} \Omega^{\bullet}_{\overline{X}_{\bullet}}(\log D_{\bullet}) \arrow[d, "a"] & \Omega^{\bullet}_{\overline{Y}_{\bullet}}(\log E_{\bullet}) \arrow[l, "\bar{u}^*"'] \arrow[d, "b"] \\ K & L \arrow[l, "v"'] \end{tikzcd}$$

($\bar{u}^*$ et v sont des $\bar{u}$-morphismes). La suite exacte longue (8.3.9) s'identifie alors à la suite exacte déduite du triangle distingué

$$\begin{tikzcd} & C(\Gamma v) \arrow[dl] & \\ \Gamma L \arrow[rr, "v"] & & \Gamma K \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Le complexe $C(v)$ sur $C(\bar{u})$ est une résolution bifiltrée de $C(u^* : \Omega^{\bullet}_{\overline{Y}_{\bullet}}(\log E_{\bullet}) \to \Omega^{\bullet}_{\overline{X}_{\bullet}}(\log D_{\bullet}))$. De là résulte que les filtrations de Hodge et par le poids de $H^{\bullet}(Y_{\bullet} \bmod X_{\bullet}, \mathbf{C})$ se déduisent des filtrations du cône $C(\Gamma v)$, et (8.3.9) en résulte formellement.

(8.3.10) *Démonstration de* (8.2.4) (ii).

La démonstration procède par récurrence sur $N = \dim(X)$. On peut supposer X réduit. Soit U un ouvert de Zariski dense lisse de X et $Y = X - U$. D'après la résolution des singularités, il existe un morphisme propre birationnel $p : X' \to X$ de source lisse qui induise un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ avec U. Soit $Y' = p^{-1}(Y)$. Considérons pour $n \geq N$, le diagramme de structures de Hodge mixtes

$$\begin{tikzcd} & H^n(X \bmod Y, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & H^n(X, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(Y, \mathbf{Z}) \arrow[d] \\ H^{n-1}(Y', \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^n(X' \bmod Y', \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^n(X', \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^n(Y', \mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

Soit Φ la famille de supports sur U formé des $A \subset U$ tels que, dans X (ou X', cela revient au même), $\bar{A} \subset U$. On a

$$H^n(X \bmod Y, \mathbf{Z}) = H^n_{\Phi}(U, \mathbf{Z}) = H^n(X' \bmod Y', \mathbf{Z})$$

de sorte que la flèche marquée p^* est un isomorphisme.

Pour h^{pq} un nombre de Hodge non nul d'une des structures de Hodge mixtes en jeu, on a :

a) pour $H^n(X', \mathbf{Z})$: $(p, q) \in [n-N, N] \times [n-N, N]$
b) pour $H^{n-1}(Y', \mathbf{Z})$: $(p, q) \in [n-N, N-1] \times [n-N, N-1]$
c) pour $H^n(X' \bmod Y', \mathbf{Z}) = H^n(X \bmod Y, \mathbf{Z})$: $(p, q) \in [n-N, N] \times [n-N, N]$
d) pour $H^n(Y, \mathbf{Z})$: $(p, q) \in [n-N+1, N-1] \times [n-N+1, N-1]$
e) pour $H^n(X, \mathbf{Z})$: $(p, q) \in [n-N, N] \times [n-N, N]$.

a) résulte de ce que X′ est lisse, et que l'assertion est vraie pour les termes ${}_WE_1$ de la suite spectrale (3.2.4.1). *b)* et *d)* résultent de l'hypothèse de récurrence : on a $\dim Y, \dim Y' \leq N-1$. *c)* résulte de *a)* et *b)* et *e)* résulte de *c)* et *d)*. Ceci achève la démonstration.

9. EXEMPLES ET APPLICATIONS

9.1. Cohomologie des groupes et des classifiants.

Soit G un groupe algébrique linéaire connexe complexe. On se propose de calculer la structure de Hodge mixte de $H^\bullet(G)$. On commencera par calculer celle de $H^\bullet(B_{\bullet G})$, par réduction au cas des tores; on calculera ensuite celle de $H^\bullet(G)$ *via* la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (6.1.5). En prime, on obtient l'étrange théorème (9.1.7).

Théorème **(9.1.1)**. — *Soit* G *un groupe algébrique linéaire. On a* $H^{2n+1}(B_{\bullet G}, \mathbf{Q}) = 0$, *et* $H^{2n}(B_{\bullet G}, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}$ *est purement de type* (n, n) (III.0.5).

Soit G^0 la composante neutre de G et soit $T \subset G^0$ un tore maximal. Puisque $H^\bullet(B_{\bullet G}, \mathbf{Q}) = H^\bullet(B_{\bullet G^0}, \mathbf{Q})^{G/G^0}$, on a d'après le *splitting principle* (voir (6.1.6))

$$H^\bullet(B_{\bullet G}, \mathbf{Q}) \hookrightarrow H^\bullet(B_{\bullet T}, \mathbf{Q}).$$

Cette inclusion est un morphisme de structures de Hodge mixtes : il suffit de traiter le cas d'un tore, voire même, d'après la formule de Künneth, le cas où $G = \mathbf{G}_m$. Voici deux démonstrations de (9.1.1) dans ce cas.

1re démonstration. — La cohomologie de $\mathbf{G}_m$ (= la droite projective moins deux points) est : $H^0 = \mathbf{Z}$, $H^1 = \mathbf{Z}$. Les seuls nombres de Hodge h^{pq} de $H^1(\mathbf{G}_m)$ qui pourraient être non nuls sont $h^{01} = h^{10}$ et h^{11} ((8.2.4) (i) (iv)). Puisque $h^{01} + h^{10} + h^{11} = 2h^{01} + h^{11} = 1$ on a $h^{01} = 0$ et $H^1(\mathbf{G}_m)$ est purement de type $(1, 1)$ (pour une autre démonstration, voir (10.3.8)). Le terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale (6.1.5), nul pour $p+q$ impair, est donc purement de type $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p+q}{2}\right)$. Son aboutissement présente la même homogénéité.

2e démonstration. — On sait que $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$, muni de $\mathcal{O}(1)$, est une « approximation » de $B_{\mathbf{G}_m}$: l'homomorphisme $[\mathcal{O}(1)] : H^i(B_{\bullet \mathbf{G}_m}) \to H^i(\mathbf{P}^r(\mathbf{C}))$ est bijectif pour $i \leq 2r$. Le groupe de cohomologie $H^{2i}(\mathbf{P}^r(\mathbf{C}))$ est engendré par la classe de cohomologie d'un cycle algébrique (à savoir, un sous-espace linéaire), donc est de type (i, i). La proposition suivante permet d'en déduire que $H^{2i}(B_{\mathbf{G}_m})$ est de type (i, i).

Proposition **(9.1.2).** — *Soient* G *un groupe algébrique (sur* $\mathbf{C}$*) et* P *un espace principal homogène (algébrique) de groupe* G *sur un schéma* X. *Le morphisme*

$$[P] : H^{\bullet}(B_G) = H^{\bullet}(B_{\bullet G}) \to H^{\bullet}(X)$$

est un morphisme de structures de Hodge mixtes.

Résulte de la définition (6.1.3.1) de [P] et de la fonctorialité (8.3.4).

Corollaire **(9.1.3).** — *Les classes caractéristiques, dans* $H^{2n}(S)$, *d'un espace principal homogène (algébrique)* P *sur* S, *de groupe structural un groupe linéaire* G, *sont purement de type* (n, n) : *elles proviennent de morphismes* $\mathbf{Q}(-n) \to H^{2n}(S, \mathbf{Q})$.

Dans le cas particulier où S est quasi-projectif et lisse, on sait que les classes caractéristiques de P sont même algébriques, i.e. dans l'image de l'anneau de Chow $(\otimes \mathbf{Q})$.

(9.1.4) Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, et soit $\overline{G}/\overline{\mathbf{F}}_q$ le groupe qui s'en déduit par extension des scalaires à une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$. Une démonstration parallèle à (9.1.1) montre que, en cohomologie ℓ-adique, les valeurs propres du Frobenius (géométrique) agissant sur $H^{2n}(B_{\bullet\overline{G}}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont de la forme $q^n.\zeta$ (ζ racine de l'unité). Ceci est en accord avec la philosophie (I.3). De même, l'énoncé (9.1.5) ci-dessous est inspiré des formules donnant les nombres de points des groupes réductifs sur les corps finis.

Théorème **(9.1.5).** — *Soit* G *un groupe algébrique linéaire connexe. Soit* $P^{\bullet}(G) \subset H^{\bullet}(G, \mathbf{Q})$ *la partie primitive de l'algèbre de Hopf* $H^{\bullet}(G, \mathbf{Q})$. *C'est une sous-structure de Hodge mixte. On a* $P^{2i}(G) = 0$, *et* $P^{2i-1}(G)$ *est purement de type* (i, i). *Enfin, l'isomorphisme*

$$\wedge P^{\bullet}(G) \to H^{\bullet}(G, \mathbf{Q}) \tag{9.1.5.1}$$

est un isomorphisme de structures de Hodge mixtes.

Dans la suite spectrale (6.1.5), $E^{0,q} = 0$ pour $q > 0$. Pour $n > 0$, le *edge homomorphism*

$$H^{2n}(B_G, \mathbf{Q}) \to E_1^{1,2n} = H^{2n-1}(G, \mathbf{Q})$$

est un morphisme de structures de Hodge mixtes (8.3.5); son image $P^{2n-1}(G)$ est donc une sous-structure de Hodge mixte, elle est purement de type (n, n) d'après (9.1.1). L'isomorphisme (9.1.5.1) est donné par le cup-produit, et on conclut par (8.2.11).

Corollaire **(9.1.6).** — *Soit* G *un groupe algébrique linéaire. Pour* $n > 0$, *on a*

$$W_n(H^n(G, \mathbf{Q})) = 0.$$

On se ramène à supposer G connexe, et on applique (9.1.5).

Théorème **(9.1.7).** — *Soit* X *un espace algébrique propre et lisse sur lequel agit un groupe algébrique linéaire connexe* G. *Soit* $\rho : G \times X \to X$. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d, equal] & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q}) \\
H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q} \arrow[r, equal] & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^0(G, \mathbf{Q}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Puisque l'application composée

$$H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\rho^*} H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q}) \to H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^0(G, \mathbf{Q}) = H^\bullet(X, \mathbf{Q})$$

est l'identité (le composé $X = \{e\} \times X \to G \times X \to X$ est l'identité), il suffit de prouver que pour $i > 0$, la i-ème composante de Künneth de ρ^*

$$\rho_i^* : H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})$$

est nulle. Puisque $H^n(X, \mathbf{Q})$ est purement de poids n et que $H^{n-i}(X, \mathbf{Q})$ est purement de poids $n-i$, on a

$$\mathrm{Im}(H^n(X, \mathbf{Q})) \subset W_n(H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})) = H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes W_i H_i(G, \mathbf{Q}).$$

D'après (9.1.6), cette image est donc nulle.

Variante **(9.1.8).** — *Soit* X *un espace algébrique séparé sur lequel agit un groupe algébrique linéaire connexe* G.

(i) *Si* X *est lisse et que* $\overline{X}$ *est une compactification de* X, *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(\overline{X}, \mathbf{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \arrow[r, "\rho^*"] & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q}) \\
H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \arrow[rr, equal] & & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^0(G, \mathbf{Q}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) *Si* X *est propre et que* $\widetilde{X}$ *est une résolution des singularités de* X, *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d] & H^\bullet(X, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q}) \arrow[r] & H^\bullet(\widetilde{X}, \mathbf{Q}) \otimes H^\bullet(G, \mathbf{Q}) \\
H^\bullet(\widetilde{X}, \mathbf{Q}) \arrow[rr, equal] & & H^\bullet(\widetilde{X}, \mathbf{Q}) \otimes H^0(G, \mathbf{Q}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il suffit de prouver que pour $i>0$, les composantes de Künneth

$$H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}) \to H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})$$
$$H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q}) \to H^{n-i}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})$$

sont respectivement nulles. Dans le cas (i) (resp. (ii)), on a (8.2.4)

$$W_n H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}) = H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}) \quad (\text{resp. } W_n H^n(X, \mathbf{Q}) = H^n(X, \mathbf{Q})),$$

tandis que, par (8.2.4) et (9.1.6)

$$W_n(H^{n-i}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})) = 0 \quad (\text{resp. } W_n(H^{n-i}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}) \otimes H^i(G, \mathbf{Q})) = 0)$$

d'où l'assertion.

9.2. Théorie de Hodge des hypersurfaces lisses, d'après Griffiths.

Ce numéro ne dépend que des §§ 1 à 3. On y explique le théorème (8.6) de [7].

(9.2.1) Soient X une variété algébrique propre et lisse, et Y un diviseur lisse dans X. Soit j l'inclusion de $U = X - Y$ dans X. On a $R^i j_* \mathbf{Z} = 0$ pour $i \neq 0, 1$ et la suite spectrale de Leray pour j s'identifie à la suite exacte longue de cohomologie

(9.2.1.1)
$$\ldots \to H^n_Y(X) \to H^n(X) \to H^n(U) \xrightarrow{\partial} \ldots$$
$$H^n_Y(X) = H^{n-2}(Y, \mathscr{H}^2_Y).$$

Pour une raison rendue claire en (3.1.9), nous identifierons $\mathscr{H}^2_Y$ au faisceau constant $\mathbf{Z}(-1)_Z$. La suite spectrale de Leray de j convergeant par définition vers la structure de Hodge mixte de $H^n(U)$, on trouve que la suite exacte

(9.2.1.2)
$$\ldots \to H^{n-2}(Y, \mathbf{Z})(-1) \to H^n(X, \mathbf{Z}) \to H^n(U, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

est une suite exacte de structures de Hodge mixtes.

La suite spectrale de Leray de j est aussi la suite spectrale du complexe filtré $(\Omega^\bullet_X(\log Y), W)$; la suite exacte précédente s'identifie donc encore à celle déduite de la suite exacte courte

(9.2.1.3)
$$0 \to \Omega^\bullet_X \to \Omega^\bullet_X(\log Y) \xrightarrow{\text{Res}} \Omega^\bullet_Y \to 0.$$

Pour cette raison, l'homomorphisme ∂ dans (9.2.1.2) porte encore le nom d'*opérateur résidu.*

(9.2.2) L'opérateur résidu

(9.2.2.1)
$$\text{Res} : H^{n+1}(U, \mathbf{Z}) \to H^n(Y, \mathbf{Z})(-1)$$

est strictement compatible à la filtration de Hodge. La filtration de Hodge de $H^n(U, \mathbf{C})$ détermine donc celle de $\operatorname{Ker}(H^n(Y, \mathbf{C}) \to H^{n+2}(X, \mathbf{C}))$.

Supposons Y ample. Si X est purement de dimension $N+1$, on a alors $H^i(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(Y, \mathbf{Z})$ pour $i<N$ (Lefschetz). Par dualité de Poincaré, pour $i \neq N$, $H^i(Y, \mathbf{C})$ se calcule donc à partir de $H^\bullet(X, \mathbf{C})$. Posons

$$\begin{aligned} H^N_{\text{év}}(Y, \mathbf{C}) &= \operatorname{Ker}(H^N(Y, \mathbf{C}) \to H^{N+2}(X, \mathbf{C})) \\ &= \text{orthogonal de } H^N(X, \mathbf{C}) \hookrightarrow H^N(Y, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

(partie évanescente de la cohomologie). On a

$$H^N(Y, \mathbf{C}) = H^N_{\text{év}}(Y, \mathbf{C}) \oplus H^N(X, \mathbf{C})$$

et on obtient donc beaucoup d'information sur la structure de Hodge de $H^\bullet(Y, \mathbf{C})$ quand on connaît celle de $H^\bullet(X, \mathbf{C})$ et la filtration de Hodge de $H^{N+1}(U, \mathbf{C})$.

(9.2.3) Par définition, la filtration de Hodge de $H^\bullet(U, \mathbf{C})$ est l'aboutissement de la suite spectrale *dégénérée* en E_1

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p_X(\log Y)) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbf{C}).$$

D'après (3.1.11), cette suite spectrale coïncide avec la suite spectrale du complexe $j_*\Omega^\bullet_U$, muni de la filtration par l'ordre du pôle P.

En particulier, on a

$$F^p(H^\bullet(U, \mathbf{C})) = \mathbf{H}^\bullet(X, P^p(j_*\Omega^\bullet_U)).$$

Rappelons que $P^p(j_*\Omega^\bullet_U)$ est le complexe suivant, de première composante non nulle en degré p

$$\Omega^p_X(Y) \to \Omega^{p+1}_X(2Y) \to \ldots \to \Omega^i_X((i-p+1)Y) \to \ldots$$

Si $H^i(X, \Omega^p_X(nY)) = 0$ pour $i>0$, $n>0$ et $p \geq 0$, on a simplement

$$\mathbf{H}^\bullet(X, P^p(j_*\Omega^\bullet_U)) = H^\bullet(\Gamma(X, P^p(j_*\Omega^\bullet_U))),$$

d'où le résultat suivant :

Proposition **(9.2.4)**. — *Supposons que* $H^i(X, \Omega^p_X(nY)) = 0$ *pour* $i>0$, $n>0$ *et* $p \geq 0$ *(tel est le cas si* Y *est suffisamment ample). Alors une classe de cohomologie* $c \in H^d(U, \mathbf{C})$ *est de filtration de Hodge* $\geq p$ *si et seulement si elle peut se représenter par une d-forme fermée* α *sur* U, *avec un pôle d'ordre* $\leq d-p+1$ *le long de* Y. *Si* α *est une forme fermée sur* U, *avec un pôle d'ordre* k *le long de* Y, *et si la classe de* α *dans* $H^d(U, \mathbf{C})$ *est nulle, alors* $\alpha = d\beta$, *avec* β *présentant un pôle d'ordre* $\leq k-1$ *le long de* Y; *pour* $k \leq 1$, *on a même* $\alpha = 0$.

(9.2.5) Il est bien connu (théorème de Bott) que les hypothèses de (9.2.4) sont vérifiées pour Y une hypersurface dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n \geq 1)$, i.e. que

$$H^i(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Omega^j(m)) = 0 \quad \text{pour} \quad i>0,\ m>0$$

(une démonstration figure par exemple dans SGA 7 XI). De plus, pour $n>1$, l'application résidu identifie $H^n(U, \mathbf{C})$ à la partie primitive de la cohomologie de $H^{n-1}(Y, \mathbf{C})$. Dès lors ([7], (8.6)) :

Proposition **(9.2.6).** — *Soit* Y *une hypersurface lisse de* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n>1)$ *et* $U=\mathbf{P}^n(\mathbf{C})-Y$.

(i) *Pour qu'une classe de cohomologie primitive* $c\in H^{n-1}(Y, \mathbf{C})$ *soit de filtration de Hodge* $\leq p$, *il faut et il suffit qu'elle soit le résidu d'une n-forme différentielle régulière sur* U, *avec un pôle d'ordre* $\leq n-p$ *le long de* Y.

(ii) *Soit* α *une n-forme différentielle régulière sur* U, *avec un pôle d'ordre* $k\geq 1$ *le long de* Y. *Pour que* $\mathrm{Res}(\alpha)\in H^{n-1}(Y, \mathbf{C})$ *soit nul, il faut et il suffit que* $\alpha=d\beta$, *pour une* $(n-1)$*-forme sur* U, *avec un pôle d'ordre* $\leq k-1$ *le long de* Y.

9.3. Construction de complexes d'opérateurs différentiels du 1er ordre.

Ce numéro ne dépend que des §§ 5 et 6. On y prouve le théorème suivant.

Proposition **(9.3.1).** — *Soit* X *un schéma quasi-projectif (sur* $\mathbf{C}$*). Il existe sur* X *un complexe de faisceaux* K *ayant les propriétés suivantes.*

a) Les K^n *sont des faisceaux algébriques cohérents et* $K^n=0$ *pour* $n<0$.

b) Les différentielles $d : K^n\to K^{n+1}$ *sont des opérateurs différentiels algébriques du 1er ordre.*

c) Le complexe de faisceaux analytiques cohérents K^{an} *sur* X^{an} *est une résolution du faisceau constant* $\underline{\mathbf{C}}$. *Plus précisément,* $\mathscr{H}^i(K)=0$ *pour* $i>0$, *et il existe*

$$f : \Omega_X^\bullet\to K$$

avec f^n *algébrique linéaire, tel que l'application composée* $\underline{\mathbf{C}}\to\mathcal{O}_X\xrightarrow{f^0}K^0$ *identifie* $\underline{\mathbf{C}}$ *à* $\mathscr{H}^0(K)$.

d) L'application naturelle

$$\mathbf{H}^i(X, K)\to\mathbf{H}^i(X^{an}, K^{an})\underset{(c)}{\simeq}\mathbf{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$$

est un isomorphisme.

Comme corollaire, on retrouve un cas particulier d'un théorème de Bloom et Herrera [2].

Corollaire **(9.3.2).** — *L'application déduite de* $\underline{\mathbf{C}}\to\Omega_X^{\bullet an}$:

$$H^\bullet(X^{an}, \mathbf{C})\to\mathbf{H}^\bullet(X^{an}, \Omega_X^{\bullet an})$$

identifie $H^\bullet(X^{an}, \mathbf{C})$ *à un facteur direct de* $H^\bullet(X^{an}, \Omega_X^{\bullet an})$.

Nous prouverons d'abord le corollaire. La proposition s'obtiendra en reprenant la démonstration au niveau des complexes. Soit $\varepsilon : X_\bullet\to X$ un schéma simplicial augmenté vers X. On suppose que ε est un hyperrecouvrement propre et que les X_n sont lisses. On dispose d'un diagramme commutatif

(9.3.2.1)

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(X^{an}, \mathbf{C}) \arrow[r, "\sim", "①"'] \arrow[d] & H^\bullet(X_\bullet^{an}, \mathbf{C}) \arrow[d, "\wr", "②"'] \\
\mathbf{H}^\bullet(X^{an}, \Omega_X^\bullet) \arrow[r] & \mathbf{H}^\bullet(X_\bullet^{an}, \Omega_{X_\bullet}^\bullet)
\end{tikzcd}$$

La flèche 1 est bijective d'après (5.3.5) (II) (IV). La flèche 2 est bijective, car $\Omega^{\bullet}_{X_{\bullet}}$ est une résolution de $\mathbf{C}$ (lemme de Poincaré sur les X_n). Le diagramme (9.3.2.1) fournit une rétraction, compatible au cup-produit, de $\mathbf{H}^{\bullet}(X^{an}, \Omega^{\bullet}_X)$ sur $H^{\bullet}(X^{an}, \mathbf{C})$, et ceci prouve (9.3.2).

(9.3.3) Le complexe K que nous voulons construire ne sera autre, dans la catégorie dérivée, que $s\mathrm{R}\varepsilon_{**}\Omega^{\bullet}_{X_{\bullet}}$. Nous ne traiterons que le cas où l'espace simplicial augmenté $X_{\bullet}$ est s-scindé, défini comme en (6.2.5) par des applications propres et surjectives, de sources quasi-projectives et lisses

$$f'_k : N_k \to (\mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(X_{\bullet}))_k \qquad (k \geq 0).$$

Nous allons construire un « système compatible » de recouvrements ouverts affines des X_n. Il y a intérêt, pour cette construction, à regarder un recouvrement ouvert d'un espace Y comme un diagramme

$$Y \xleftarrow{u} U \xrightarrow{\varphi} I$$

avec I discret, u surjectif et $u_i : U_i \underset{\mathrm{dfn}}{=} \varphi^{-1}(i) \hookrightarrow Y$ un plongement ouvert. Procédant comme en (6.2.5), on construit un diagramme

(9.3.3.1) $$X_{\bullet} \xleftarrow{u} U_{\bullet} \xrightarrow{\varphi} I_{\bullet}$$

du type suivant.

a) $I_{\bullet}$ est un ensemble simplicial discret. Les I_n sont finis.

b) Pour tout $k \geq 0$, (9.3.3.1) induit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(X_{\bullet}))_k & (\mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(U_{\bullet}))_k \arrow[l] \arrow[r, "\varphi"] & (\mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(I_{\bullet}))_k \\
N_k \arrow[u, "f'_k"] & N_k(U_{\bullet}) \arrow[l] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u] & N_k(I_{\bullet}) \arrow[u, "a'_k"]
\end{tikzcd}$$

c) Dans le diagramme *b)*, pour $i \in \mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(I_{\bullet})_k$, les $\varphi^{-1}(j)$ pour $a'_k(j) = i$ forment un recouvrement ouvert affine de

$$N_k \times_{(\mathrm{cosq}\ \mathrm{sq}_{k-1}(X_{\bullet}))_k} \varphi^{-1}(i).$$

d) (résulte par récurrence de *c)*). La première (et donc la deuxième) ligne du diagramme *b)* définit un recouvrement ouvert. Les $X_k \leftarrow U_k \rightarrow I_k$ forment donc aussi des recouvrements ouverts.

e) (résulte d'un choix convenable des recouvrements affines en *c)*). $U_{n_i} = \varphi_n^{-1}(i)$ est le complément d'un sous-schéma $D_{n,i}$ de X_n, réunion de quelques composantes connexes de X_n et d'un diviseur. Pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X_n et des entiers $(a_i)_{i \in I_n}$ $(a_i \geq 0)$, on pose

$$\mathscr{F}(\sum_i a_i D_{n,i}) = \begin{cases} 0 \text{ sur les composantes de } X_n \text{ contenues dans un } D_{n,i} \text{ avec } a_i > 0 \\ \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}(\sum_{a_i > 0} a_i D_{n,i}) \text{ sur les autres.} \end{cases}$$

Dans la construction inductive de (9.3.3.1), les recouvrements ouverts (c) sont choisis arbitrairement. Ceci permet de supposer

f) Quels que soient les $a_i > 0$ $(i \in I_k)$

$$R^{\ell}\varepsilon_{k*}(\Omega^m_{X_k}(\sum_i a_i D_{k,i})) = 0 \quad \text{pour} \quad \ell > 0.$$

g) Quel que soit $\alpha : \Delta_m \to \Delta_n$ et $i \in I_n$, on a

$$X_\bullet(\alpha)^{-1}(D_{m,\alpha(i)}) \subset D_{n,i} \quad \text{(comme schéma)}.$$

Pour chaque k, le complexe de faisceaux sur X

$$R\varepsilon_{k*}(\Omega^\bullet_{X_k})$$

peut se calculer de façon čechiste. Si, pour $P \subset I_k$, j_P est l'inclusion de $U_P = \bigcap_{i \in P} U_k$, dans X_k, c'est le complexe simple associé au double complexe des

$$\check{K}^{k,p,q} = \sum_{\# P = p+1} (\varepsilon_k j_P)_* j_P^* \Omega^q_{X_k}.$$

Ce complexe double admet comme sous-complexe double le complexe de composantes les faisceaux cohérents

$$K^{k,p,q} = \sum_{\# P = p+1} \varepsilon_{k*}\Omega^q_{X_k}((q+1)\sum_{i \in P} D_{k,i}).$$

Pour k et q fixes, il résulte de *f)* que l'inclusion de $K^{k,\bullet,q}$ dans $\check{K}^{k,\bullet,q}$ est un quasi-isomorphisme. Pour k fixe, l'inclusion de $K^{k,\bullet,\bullet}$ dans $\check{K}^{k,\bullet,\bullet}$ elle aussi est un quasi-isomorphisme. Enfin, pour k variable, les $K^{k,\bullet,\bullet}$ forment, d'après *g)*, un complexe double simplicial. Le complexe simple associé K coïncide avec $R\varepsilon_{\bullet *}\Omega^\bullet_{X_\bullet}$, dans la catégorie dérivée.

Prouvons que K vérifie (9.3.1). Les propriétés *a)* et *b)* de K sont claires; on définit $f : \Omega^\bullet_X \to K$ par les applications évidentes des Ω^q_X dans les $K^{0,0,q}$.

Dans la catégorie analytique, le complexe de faisceaux analytiques cohérents K^{an} est donné par les mêmes formules que K. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^i(X, K) \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{H}^i(X_\bullet, \Omega^\bullet_{X_\bullet}) \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{H}^i(X^{an}, K^{an}) \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathbf{H}^i(X^{an}_\bullet, \Omega^\bullet_{X^{an}_\bullet})
\end{tikzcd}$$

et 1 est l'aboutissement d'un morphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^a(X_b, \Omega^\bullet_{X_\bullet}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \mathbf{H}^{a+b}(X_\bullet, \Omega^\bullet_{X_\bullet}) \arrow[d] \\
\mathbf{H}^a(X^{an}_b, \Omega^\bullet_{X^{an}_\bullet}) \arrow[r, Rightarrow] & \mathbf{H}^{a+b}(X^{an}_\bullet, \Omega^\bullet_{X^{an}_\bullet}).
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme est un isomorphisme d'après [9], d'où *d)*.

Pour prouver *c)*, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{C}} \arrow[r, dash, "\approx"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "①"] & R\varepsilon_{\bullet *}\underline{\mathbf{C}} \arrow[d, "\approx"] \arrow[dl, phantom, "②"] \\
\Omega^{\bullet\,\mathrm{an}}_{X_\bullet} \arrow[r, "f"] & K^{\mathrm{an}} \arrow[r, dash, "\approx"] & R\varepsilon_{\bullet *}\Omega^{\bullet\,\mathrm{an}}_{X_\bullet}
\end{tikzcd}$$

Que 1 soit un quasi-isomorphisme résulte de (5.3.5).

Que 2 en soit un résulte du lemme de Poincaré sur les X_n. L'assertion *c)* en résulte.

(9.3.4) La même construction fournit des résolutions vérifiant *a)*, *b)* pour d'autres faisceaux $\mathscr{F}$ sur X^{an} que le faisceau constant $\mathbf{C}$ (on peut sans doute prendre pour $\mathscr{F}$ n'importe quel faisceau « algébriquement constructible »). Malheureusement, je ne puis pas prouver que les résolutions obtenues sont essentiellement uniques (dans une catégorie dérivée convenable). En l'absence d'une telle unicité, (9.3.1) est sans grand intérêt.

10. THÉORIE DE HODGE EN NIVEAU ≤ 1

10.1. 1-motifs

Définition **(10.1.1)**. — (i) *Une structure de Hodge mixte* H *est* sans torsion *si* $H_{\mathbf{Z}}$ *est sans torsion.*

(ii) *Si* H *est sans torsion, on désigne encore par* W *la filtration de* $H_{\mathbf{Z}} \subset H_{\mathbf{Q}}$ *induite par* W. *On désigne par* $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_n(H)$ *le* $\mathbf{Z}$*-module sans torsion* $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_n(H_{\mathbf{Z}})$, *muni de sa structure de Hodge de poids n.*

Définition **(10.1.2)**. — *Un* 1-motif *sur un corps algébriquement clos k consiste en* :

a) *un* $\mathbf{Z}$*-module libre de type fini* X, *une variété abélienne* A *et un tore* T;

b) *une extension* G *de* A *par* T;

c) *un homomorphisme* $u : X \to G(k)$.

Il est souvent utile de regarder un 1-motif M comme étant un complexe de schémas en groupes, concentré en degrés 0 et 1

$$M = [X \xrightarrow{u} G].$$

Construction **(10.1.3)**. — *On construira une équivalence* $M \mapsto T(M)$ *de la catégorie des* 1*-motifs sur* $\mathbf{C}$ *avec la catégorie des structures de Hodge mixtes sans torsion* H *de type*

$$\{(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)\}$$

telles que $\mathrm{Gr}^W_{-1}(H)$ *soit polarisable. De plus, on construira des isomorphismes naturels en* $M = (X, A, T, G, u)$:

$$\begin{aligned} H_1(T, \mathbf{Z}) &\simeq \mathrm{Gr}^W_{-2} T(M)_{\mathbf{Z}} \\ H_1(A, \mathbf{Z}) &\simeq \mathrm{Gr}^W_{-1} T(M) \qquad \textit{(isomorphisme de structures de Hodge)} \\ X &\simeq \mathrm{Gr}^W_{0} T(M)_{\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

Soit M un 1-motif. L'application exponentielle $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ a pour noyau $H_1(G)$. On définit $T_{\mathbf{Z}}(M)$ (que nous noterons plutôt $T_{\mathbf{Z}}(M)$) comme étant le produit fibré de Lie(G) et X au-dessus de G

(10.1.3.1)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_1(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[r, "\exp"] & G \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_1(G) \arrow[r] & T_{\mathbf{Z}}(M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"] & X \arrow[r] \arrow[u, "u"] & 0 \end{tikzcd}$$

On pose

$$\begin{aligned} W_{-1}(T_{\mathbf{Z}}(M)) &= \mathrm{Ker}(\beta) = H_1(G) \\ W_{-2}(T_{\mathbf{Z}}(M)) &= H_1(T) = \mathrm{Ker}(H_1(G) \to H_1(A)). \end{aligned}$$

Ceci définit la *filtration par le poids*. Le morphisme α se prolonge en

$$\alpha_{\mathbf{C}} : T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \mathbf{C} \to \mathrm{Lie}(G).$$

On pose $F^0(T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \mathbf{C}) = \mathrm{Ker}(\alpha_{\mathbf{C}})$, et ceci définit la *filtration de Hodge* de

$$T_{\mathbf{C}}(M) = T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \mathbf{C}.$$

Lemme **(10.1.3.2).** — *Le triplet* $T(M) = (T_{\mathbf{Z}}(M), W, F)$ *est une structure de Hodge mixte sans torsion de type* $\{(0, 0)(0, -1)(-1, 0)(-1, -1)\}$ *et* $\mathrm{Gr}^W_{-1}(T(M))$ *est polarisable.*

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & & W_{-1}(T_{\mathbf{C}}(M)) \cap F^0 \arrow[r, "\sim", "②"'] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\alpha_{A,\mathbf{C}}) \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & H_1(T, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, "①"', "\approx"] & H_1(G, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{G,\mathbf{C}}"] & H_1(A, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{A,\mathbf{C}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}(T) \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

a) On a $W_{-2}(T_{\mathbf{C}}(M)) \cap F^0 = 0$, car ι est injectif : dès lors, $(W_{-2}(T_{\mathbf{C}}(M)), F)$ est une structure de Hodge de type $(-1, -1)$.

b) Puisque ς est surjectif, F induit sur $\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathbf{Z}}(M)) \otimes \mathbf{C} \simeq H_1(A, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$ la filtration de Hodge de $H_1(A, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$: c'est une structure de Hodge polarisable de type $(-1, 0) + (0, -1)$ (cf. (4.4.3)).

c)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & W_{-1}(T_{\mathbf{C}}(M)) \cap F^0 \arrow[r] \arrow[d] & F^0 \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1(G, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes \mathbf{C} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Lie}(G) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

F^0 s'envoie sur $\mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathbf{C}}(M))$, qui est donc de type $(0, 0)$.

Ceci termine la construction de $T(M)$. Il est clair que $T(M)$ est fonctoriel en M.

Soit H une structure de Hodge mixte sans torsion de type

$$\{(0, 0)\ (0, -1)\ (-1, 0)\ (-1, -1)\}.$$

Supposons $\mathrm{Gr}^W_{-1}(H)$ polarisable; le tore complexe

$$A = H_{\mathbf{Z}} \backslash \mathrm{Gr}^W_{-1}(H_{\mathbf{C}}) / F^0 \mathrm{Gr}^W_{-1}(H_{\mathbf{C}})$$

est alors une variété abélienne (cf. (4.4.3)). Soit T le tore de groupe de caractères le dual de $\mathrm{Gr}^W_{-2}(H_{\mathbf{Z}})$:

$$H_1(T) = \mathrm{Gr}^W_{-2}(H_{\mathbf{Z}}).$$

Le groupe analytique complexe

$$G = W_{-1}(H_{\mathbf{Z}}) \backslash W_{-1}(H_{\mathbf{C}}) / F^0 \cap W_{-1}(H_{\mathbf{C}})$$

est une extension de A par T.

Lemme **(10.1.3.3).** — *Le foncteur* $E \mapsto E^{\mathrm{an}}$ *est une équivalence de la catégorie des groupes algébriques extensions de* A *par* T *avec celle des groupes analytiques extensions de* A *par* T.

On se ramène au cas où $T = \mathbf{G}_m$. D'après G.A.G.A., $E \mapsto E^{an}$ est alors plus généralement une équivalence de la catégorie des torseurs sous $\mathbf{G}_m$ sur A avec celle des torseurs sous $\mathbf{G}_m$ sur A^{an}.

On dispose donc de G, extension de A par T. Soit $X = Gr_0^W(H_{\mathbf{Z}})$. On définit ainsi $u : X \to G$ (cf. (2.2.1)) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{-1}(H_{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & W_{-1}(H_{\mathbf{C}})/W_{-1}(H_{\mathbf{C}}) \cap F^0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & G \arrow[r] & 0 \\
 & & H_{\mathbf{C}}/F^0 & & \\
0 \arrow[r] & W_{-1}(H_{\mathbf{Z}}) \arrow[r] & H_{\mathbf{Z}} \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[uu] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est clair que la construction précédente, qui à H associe un 1-motif sans torsion, est inverse de T, et est fonctorielle.

Si G_i $(i = 1, 2)$ est extension d'une variété abélienne A_i par un tore T_i, pour tout morphisme $u : G_1 \to G_2$, $u(T_1) \subset T_2$ et $\mathrm{Ker}(u : A_1 \to A_2)^0 = \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(u : G_1 \to G_2) \to A_1)^0$. Ceci correspond au fait qu'un morphisme de $\mathbf{Q}$-structures de Hodge mixtes est strictement compatible à la filtration par le poids.

(10.1.4) Soit H une structure de Hodge mixte sans torsion de type

$$\{(0, 0)\ (0, -1)\ (-1, 0)\ (-1, -1)\}.$$

La filtration W de $H_{\mathbf{Z}}$ définit alors une filtration de H par des sous-structures de Hodge mixtes. Parallèlement, si $M = (X, A, T, G, u)$ est un 1-motif, on désigne par W la filtration croissante suivante de M :

$$\begin{aligned}
&W_i(M) = 0 \quad \text{pour} \quad i < -2 \quad \text{et} \quad W_i(M) = M \quad \text{pour} \quad i \geq 0;\\
&W_{-1}(M) = G \quad (\text{i.e. } (\{0\}, A, T, G, 0));\\
&W_{-2}(M) = T \quad (\text{i.e. } (\{0\}, 0, T, T, 0)).
\end{aligned}$$

En un sens évident, les $Gr_i^W(M)$ successifs pour $i = 0, -1, -2$ sont X, A et T.

(10.1.5) La construction (10.1.3) qui à un 1-motif M sur $\mathbf{C}$ associe $T_{\mathbf{Z}}(M)$ est transcendante. Nous allons montrer que

$$\hat{T}(M) = T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \hat{\mathbf{Z}} = \prod_{\ell} T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \mathbf{Z}_{\ell}$$

peut se définir de façon purement algébrique.

Soit M un 1-motif sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. On identifie M à un complexe $[X \xrightarrow{u} G]$ (degré 0 et 1). Pour tout entier $n > 0$, soit le complexe $[\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z}]$ (degré -1 et 0), et soit $T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M)$ le H^0 du complexe $[X \xrightarrow{u} G] \otimes [\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z}]$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & G \\ \uparrow{\scriptstyle n} & & \uparrow{\scriptstyle -n} \\ X & \xrightarrow{u} & G \end{array}$$

On a

$$T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M) = \{(x, g) \mid u(x) = ng\}/\{(nx, u(x)) \mid x \in X\}.$$

Dans la catégorie dérivée, on a

$$T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M) = H^0(M \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Pour $n = md$, on définit des morphismes de transition

$$\varphi_{m,n} : T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M) \to T_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}}(M) \quad \text{par} \quad \varphi_{m,n}((x, g)) = (x, dg).$$

On pose

$$\hat{T}(M) = \varprojlim T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M).$$

La filtration W de M induit une filtration W des $T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M)$ et de $\hat{T}(M)$. On a

$$\begin{aligned} Gr_0^W(\hat{T}(M)) &= X \otimes \hat{\mathbf{Z}} \\ Gr_{-1}^W(\hat{T}(M)) &= \varprojlim A_n = \hat{T}(A) \\ Gr_{-2}^W(\hat{T}(M)) &= \varprojlim T_n = Y \otimes \hat{\mathbf{Z}}(1), \end{aligned}$$

pour Y le dual du groupe des caractères de $T = W_{-2}(M)$.

Construction **(10.1.6).** — *Soit* $M = [X \xrightarrow{u} G]$ *un* 1-*motif sur* **C**. *On a*

(10.1.6.1) $$\hat{T}(M) \simeq T_{\mathbf{Z}}(M) \otimes \hat{\mathbf{Z}}.$$

Le morphisme naturel $[T_{\mathbf{Z}}(M) \to \mathrm{Lie}(G)] \to [X \to G]$ est un quasi-isomorphisme. Les quasi-isomorphismes

$$\left[\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & G \\ \uparrow{\scriptstyle n} & & \uparrow{\scriptstyle -n} \\ X & \xrightarrow{u} & G \end{array}\right] \longleftarrow \left[\begin{array}{ccc} T_{\mathbf{Z}} & \xrightarrow{u} & \mathrm{Lie}(G) \\ \uparrow{\scriptstyle n} & & \wr\uparrow{\scriptstyle -n} \\ T_{\mathbf{Z}} & \xrightarrow{u} & \mathrm{Lie}(G) \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} T_{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle n} & & \uparrow \\ T_{\mathbf{Z}} & \xrightarrow{c} & 0 \end{array}\right]$$

fournissent des isomorphismes

(10.1.6.2) $$T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M) \simeq T_{\mathbf{Z}}/nT_{\mathbf{Z}}.$$

Par cet isomorphisme, à $t \in W_{-1}(T_{\mathbf{Z}})$ on associe $\exp(t/n) \in G_n$. Par passage à la limite, on déduit (10.1.6.1) de (10.1.6.2).

Des techniques de Grothendieck permettent de transposer en cohomologie de De Rham ce que nous venons de faire en cohomologie ℓ-adique. Soit M un 1-motif sur un corps algébriquement clos k.

Construction **(10.1.7)**. — *Construisons un espace vectoriel* $T_{DR}(M)$ *sur* k, *muni de filtrations* W *et* F.

Soit $M=(X, A, T, G, u)$, et considérons M comme un complexe concentré en degrés -1 et 0. Une *extension* de M par $\mathbf{G}_a$ est une extension de M par le complexe réduit à $\mathbf{G}_a$ placé en degré 0. On a $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_a)=\mathrm{Ext}^1(X, \mathbf{G}_a)=0$. Dès lors :

a) les extensions de M par $\mathbf{G}_a$ n'ont pas d'automorphismes;

b) la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(M, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_a) \to 0$$

est exacte.

On a $\mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_a)=\mathrm{Ext}^1(T, \mathbf{G}_a)=0$, de sorte que

c) $$\mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_a).$$

L'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbf{G}_a)$ est donc de dimension finie et, d'après *a)*, il existe donc une extension universelle de M par un groupe vectoriel; on la note $M^\natural : X \to G^\natural$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M, \mathbf{G}_a)^* \arrow[r] & G^\natural \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On pose

$$T_{DR}(M) = \mathrm{Lie}(G^\natural)$$
$$F^0 T_{DR}(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Lie}\, G^\natural \to \mathrm{Lie}\, G) \simeq (\mathrm{Ext}^1(M, \mathbf{G}_a))^*.$$

T_{DR} est fonctoriel en M (ainsi que $M^\natural$), et on définit la filtration W de $T_{DR}(M)$ comme provenant de la filtration W de M.

Construction **(10.1.8)**. — *Soit* M *un* 1-*motif sur* $\mathbf{C}$. *On a*

$$(T_{DR}(M), F, W) \simeq (T_{\mathbf{C}}(M), F, W).$$

Les $\mathrm{Ext}^i(X, \mathbf{G}_a)$, $\mathrm{Ext}^i(A, \mathbf{G}_a)$ et $\mathrm{Ext}^i(T, \mathbf{G}_a)$ $(i=0, 1)$ sont les mêmes dans les catégories algébrique et analytique. Soit l'application $T_{\mathbf{C}}(M)=T_{\mathbf{Z}}(M)\otimes\mathbf{C} \to \mathrm{Lie}(G) \to G$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{\mathbf{C}}(M)/H_1(G) \arrow[d] \\
X \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

définit une extension de M^{an} par le groupe vectoriel $F^0T_{\mathbf{C}}M$, donc une extension de M par ce groupe. Il nous faut prouver que c'est l'extension universelle. Pour cela, il suffit de vérifier que la catégorie des extensions de $[X \to T_{\mathbf{C}}(M)/H_1(G)]$ par $\mathbf{G}_a$ est triviale (un seul objet, pas d'automorphisme). C'est aussi la catégorie des extensions de $T_{\mathbf{C}}(M)/T_{\mathbf{Z}}(M)$ par $\mathbf{G}_a$, et on a en effet

$$\mathrm{Ext}^i(T_{\mathbf{C}}(M)/T_{\mathbf{Z}}(M), \mathbf{G}_a) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1.$$

Remarque **(10.1.9)**. — $M^\natural$ est caractérisé par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & G^\natural \arrow[r] & G \\ T_{\mathbf{Z}}(M) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G^\natural) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

de carré extérieur (10.1.3.1), et induisant un isomorphisme $T_{\mathbf{C}}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G^\natural)$.

Variante **(10.1.10)**. — Un 1-*motif lisse* M sur un schéma S consiste en :

a) un schéma en groupes X sur S, qui localement pour la topologie étale est un schéma en groupes constants défini par un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini; un schéma abélien A sur S, et un tore T sur S;

b) une extension G de A par T;

c) un morphisme $u : X \to G$.

Pour tout entier n, une construction analogue à (10.1.5) associe à un 1-motif lisse M sur S un schéma en groupes $T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M)$ fini et plat sur S. Pour ℓ inversible sur S, le système projectif

$$T_\ell(M) = \varprojlim T_{\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}}(M)$$

est un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau sur S. En général, $T_\ell(M)$ correspond à un groupe ℓ-divisible (= de Barsotti-Tate) sur S.

La filtration W de M, définie comme en (10.1.4), définit une filtration W de $T_\ell(M)$. On a encore

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_0^W T_\ell(M) &= X \otimes \hat{\mathbf{Z}} \\ \mathrm{Gr}_{-1}^W T_\ell(M) &= T_\ell(A) \\ \mathrm{Gr}_{-2}^W T_\ell(M) &= Y \otimes \mathbf{Z}_\ell(1) \end{aligned}$$

pour $Y = \mathit{Hom}(T, \mathbf{G}_m)^\vee$.

De même, une construction analogue à (10.1.7) associe à M un fibré vectoriel $T_{DR}(M)$.

Terminologie **(10.1.11)**. — Soit M un 1-motif. On appelle $T(M)$, $T_\ell(M)$ et $T_{DR}(M)$ les *réalisations de Hodge*, *ℓ-adique* et *de De Rham* du 1-motif M.

10.2. 1-motifs et biextensions

Les résultats de ce numéro ne seront pas utilisés dans la suite de ce paragraphe. Nous ferons usage de la notion de biextension (S.G.A. 7, VII (2.1)) et de la généralisation suivante.

(10.2.1) Soient $K_i : [A_i \to B_i]$ $(i = 1, 2)$ deux complexes de faisceaux, concentrés en degré 0 et -1 (sur un topos quelconque). Une *biextension* de K_1 et K_2 par un faisceau abélien H consiste en :

a) une biextension P de B_1 et B_2 par H, i.e. un H-torseur P sur $B_1 \times B_2$, avec $P_{b_1 b_2}$ dépendant biadditivement de b_1 et b_2;

b) une trivialisation (= section biadditive) de la biextension de B_1 et A_2 par H, image réciproque de P;

c) une trivialisation de la biextension de A_1 et B_2 par H, image réciproque de P; on exige que les trivialisations *b)* et *c)* coïncident sur $A_1 \times A_2$.

On désigne par $\boldsymbol{Biext}(K_1, K_2; H)$ la catégorie des biextensions de K_1 et K_2 par H. C'est une catégorie de Picard (les objets s'additionnent). Le groupe $\mathrm{Biext}^0(K_1, K_2; H)$ des automorphismes d'une quelconque biextension de K_1 et K_2 par H est

$$\mathrm{Biext}^0(K_1, K_2; H) = \mathrm{Hom}(H^0(K_1) \otimes H^0(K_2), H).$$

On note $\mathrm{Biext}^1(K_1, K_2; H)$ le groupe des classes d'isomorphismes de biextensions. On vérifie comme dans (S.G.A. 7, VII (3.6.5)) que

$$\mathrm{Biext}^i(K_1, K_2; H) = \mathrm{Ext}^i(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2; H) \qquad (i = 0, 1).$$

Sur cette formule, ou de façon élémentaire, on vérifie que si $K_i' \to K_i$ est un quasi-isomorphisme $(i = 1, 2)$, il revient au même de se donner une biextension de K_1 et K_2 par H ou de K_1' et K_2' par H.

Ceci s'applique encore en remplaçant « faisceaux » par « groupes algébriques » (resp. « groupes analytiques complexes ») : on peut interpréter ceux-ci comme des faisceaux sur un site convenable.

(10.2.2) Dans ce paragraphe, nous identifierons un 1-motif $M = (X, T, A, G, u)$ à un complexe concentré en *degrés* 0 *et* -1

$$M : [X \to G].$$

Sur $\mathbf{C}$, nous désignerons par M^{an} le complexe de groupes analytiques complexes $[X \to G^{an}]$. On a le résultat de rigidité :

Lemme **(10.2.2.1)**. — *Soient* $M_i = (X_i, A_i, T_i, G_i, u_i)$ $(i = 1, 2)$ *deux* 1*-motifs. On a*

$$\mathrm{Biext}^0(M_1, M_2; \mathbf{G}_m) = 0.$$

Sur $\mathbf{C}$, *on a de même* $\mathrm{Biext}^0(M_1^{an}, M_2^{an}; \mathbf{G}_m) = 0$.

Tout morphisme biadditif $G_1 \times G_2 \to \mathbf{G}_m$ est en effet trivial.

Construction **(10.2.3).** — *Soient* $M_i = (X_i, A_i, T_i, G_i, u_i)$ $(i = 1, 2)$ *deux* 1*-motifs sur* $\mathbf{C}$. *On a*

$$\mathrm{Biext}^1(M_1, M_2; \mathbf{G}_m) = \mathrm{Hom}(T(M_1) \otimes T(M_2), \mathbf{Z}(1)).$$

Nous allons d'abord calculer $\mathrm{Biext}^1(M_1^{\mathrm{an}}, M_2^{\mathrm{an}}; \mathbf{G}_m)$.

Si V et W sont deux espaces vectoriels, on a *dans la catégorie analytique*

$$\textbf{(10.2.3.1)}_{\mathrm{an}} \qquad \mathrm{Biext}^0(V, W; \mathbf{G}_m) \underset{\exp}{\xleftarrow{\sim}} \mathrm{Hom}(V \otimes W, \mathbf{C})$$

$$\textbf{(10.2.3.2)}_{\mathrm{an}} \qquad \mathrm{Biext}^1(V, W; \mathbf{G}_m) = 0.$$

De ce qu'une extension de W par $\mathbf{G}_m$, sur une base quelconque, est toujours localement triviale, il résulte en effet formellement que

$$\begin{aligned} \mathrm{Biext}^i(V, W; \mathbf{G}_m) &= \mathrm{Ext}^i(V, \mathit{Hom}(W, \mathbf{G}_m)) \\ &= \mathrm{Ext}^i(V, W^*) \qquad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Soient $V_{\mathbf{Z}}$ et $W_{\mathbf{Z}}$ deux $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini. Puisque

$$[V_{\mathbf{Z}} \to V_{\mathbf{C}}] \to [0 \to V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}}]$$

est un quasi-isomorphisme, le foncteur « image réciproque » est une équivalence.

$$\textbf{(10.2.3.3)}_{\mathrm{an}} \qquad \boldsymbol{Biext}(V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}}, W_{\mathbf{C}}/W_{\mathbf{Z}}; \mathbf{G}_m) \overset{\approx}{\to} \boldsymbol{Biext}([V_{\mathbf{Z}} \to V_{\mathbf{C}}], [W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]; \mathbf{G}_m).$$

Tout morphisme biadditif de $V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}} \times W_{\mathbf{C}}/W_{\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{G}_m$ est trivial, d'où *a)* ci-dessous :

Lemme **(10.2.3.4)**

a) $\mathrm{Biext}^0(V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}}, W_{\mathbf{C}}/W_{\mathbf{Z}}; \mathbf{G}_m) = 0$.

b) $\mathrm{Biext}^1(V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}}, W_{\mathbf{C}}/W_{\mathbf{Z}}; \mathbf{G}_m) = \mathrm{Hom}(V_{\mathbf{Z}} \otimes W_{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}(1))$.

Soient $\psi_i : V_{\mathbf{C}} \otimes W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ deux applications bilinéaires, avec $\psi = \psi_1 - \psi_2$ à valeurs dans $\mathbf{Z}(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$ sur $V_{\mathbf{Z}} \otimes W_{\mathbf{Z}}$. Soit $P(\psi_1, \psi_2)$ la biextension suivante de $[V_{\mathbf{Z}} \to V_{\mathbf{C}}]$ et $[W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]$ par $\mathbf{G}_m$: la biextension triviale de $V_{\mathbf{C}}$ et $W_{\mathbf{C}}$ par $\mathbf{G}_m$, munie des trivialisations $\varphi_1 = \exp \psi_1 : V_{\mathbf{Z}} \otimes W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{G}_m$ et $\varphi_2 = \exp \psi_2 : V_{\mathbf{C}} \otimes W_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{G}_m$. D'après (10.2.3.2), toute biextension est de cette forme; d'après (10.2.3.1) $P(\psi_1, \psi_2) \simeq P(\psi_1', \psi_2')$ si et seulement si $\psi_1' - \psi_2' = \psi_1 - \psi_2$. Les $P(\psi, 0)$ représentent donc chaque biextension une fois et une seule.

(10.2.3.5) Sous les hypothèses générales de (10.2.1), soient des complexes $K_i = [A_i + F_i \to B_i]$ $(i = 1, 2)$. Soit K_i' le sous-complexe $[A_i \to B_i]$. On vérifie qu'il revient au même de se donner soit une biextension de K_1 et K_2 par H, soit :

a) une biextension P de K_1' et K_2' par H; et

b) des trivialisations des biextensions de $[0 \to F_1]$ et K_2' (resp. K_1' et $[0 \to F_2]$) par H, images réciproques de P; ces trivialisations doivent coïncider sur $F_1 \times F_2$.

Dans le cas particulier où

$$\mathrm{Biext}^i(F_1, K_2'; H) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

et

$$\mathrm{Biext}^i(K_1', F_2; H) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

il existe une et une seule trivialisation φ_1, section de P sur $F_1 \times B_2$ (resp. φ_2, section de P sur $B_1 \times F_2$) comme en *b)*. La catégorie $\boldsymbol{Biext}(K_1, K_2; H)$ s'identifie alors à la sous-catégorie de $\boldsymbol{Biext}(K_1', K_2'; H)$ formée des P pour lesquels $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $F_1 \times F_2$.

(10.2.3.6) Soient $V_{\mathbf{Z}}$ et $W_{\mathbf{Z}}$ deux $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini, et F, G des sous-espaces vectoriels de $V_{\mathbf{C}}$ et $W_{\mathbf{C}}$. On a

$$\mathrm{Biext}^i(F, [W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]; \mathbf{G}_m) = 0.$$

Pour $i = 0$, cela résulte de (10.2.3.1) et de ce qu'une application bilinéaire

$$B : F \times W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C} \quad \text{avec} \quad B(F, W_{\mathbf{Z}}) \subset \mathbf{Z}(1)$$

est nulle. Pour $i = 1$, cela résulte de ce que tout morphisme biadditif $F \times W_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{G}_m$ provient d'un morphisme biadditif $F \times W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{G}_m$. Autrement dit, on utilise la suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Biext}^0(F, [W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]; \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Biext}^0(F, W_{\mathbf{C}}; \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^0(F, W_{\mathbf{Z}}; \mathbf{G}_m)$$
$$\to \mathrm{Biext}^1(F, [W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]; \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Biext}^1(F, W_{\mathbf{C}}; \mathbf{G}_m).$$

Nous pouvons donc appliquer (10.2.3.5) aux complexes $K_1 = [V_{\mathbf{Z}} \oplus F \to V_{\mathbf{C}}]$ et $K_2 = [W_{\mathbf{Z}} \oplus G \to W_{\mathbf{C}}]$. On trouve que les biextensions de K_1 et K_2 par $\mathbf{G}_m$ s'identifient à certaines biextensions de $V_{\mathbf{C}}/V_{\mathbf{Z}}$ et $W_{\mathbf{C}}/W_{\mathbf{Z}}$ par $\mathbf{G}_m$, i.e. à certaines formes $\psi : V_{\mathbf{Z}} \otimes W_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}(1)$ (10.2.3.4). Pour que $P(\psi_1, \psi_2)$ (10.2.3.4) provienne d'une biextension de K_1 et K_2 par $\mathbf{G}_m$, il faut et suffit que $\exp \psi_2 : F \times W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{G}_m$ et $\exp \psi_1 : V_{\mathbf{C}} \times G \to \mathbf{G}_m$ coïncident sur $F \times G$, c'est-à-dire que $\psi(F, G) = 0$.

Lemme **(10.2.3.7)**. — *Avec les notations précédentes, on a* $\mathrm{Biext}^0(K_1, K_2; \mathbf{G}_m) = 0$ *et* $\mathrm{Biext}^1(K_1, K_2; \mathbf{G}_m)$ *s'identifie à l'ensemble des formes* $\psi : V_{\mathbf{Z}} \otimes W_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}(1)$ *de complexifiées vérifiant* $\psi(F, G) = 0$.

Pour ψ comme en (10.2.3.7), avec $\psi = \psi_1 - \psi_2$, la biextension correspondant à ψ est donnée par les trivialisations suivantes de la biextension triviale de $V_{\mathbf{C}}$ et $W_{\mathbf{C}}$ par $\mathbf{G}_m$:

sur $(V_{\mathbf{Z}} \oplus F) \times W_{\mathbf{C}}$: $\exp \psi_1(v_{\mathbf{Z}}, w_{\mathbf{C}}) . \exp \psi_2(f, w_{\mathbf{C}})$

sur $V_{\mathbf{C}} \times (W_{\mathbf{Z}} \oplus G)$: $\exp \psi_2(v_{\mathbf{C}}, w_{\mathbf{Z}}) . \exp \psi_1(v_{\mathbf{C}}, g)$.

(10.2.3.8) Pour les 1-motifs M_i, on a des quasi-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathbf{Z}}(M_i) \oplus F^0 T_{\mathbf{C}}(M_i) \arrow[r] \arrow[d] & T_{\mathbf{Z}}(M_i) \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\
T_{\mathbf{C}}(M_i) \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G_i) \arrow[r] & G_i
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathrm{Biext}^1(M_1^{an}, M_2^{an}; \mathbf{G}_m)$ s'identifie donc au groupe des applications

$$\psi : T_{\mathbf{Z}}(M_1) \otimes T_{\mathbf{Z}}(M_2) \to \mathbf{Z}(1)$$

de complexifié compatible à la filtration de Hodge.

Lemme **(10.2.3.9)**. — *L'application* $\mathrm{Biext}^1(M_1, M_2; \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Biext}^1(M_1^{an}, M_2^{an}; \mathbf{G}_m)$ *est injective. Son image est formée des biextensions* P *dont la restriction à* $G_1 \times G_2$ *est image réciproque d'une biextension de* A_1 *et* A_2 *par* $\mathbf{G}_m$.

On a

$$\mathrm{Biext}^1(A_1, A_2; \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(G_1, G_2; \mathbf{G}_m) \qquad \text{(S.G.A. 7, VIII (3.5))}$$

et

$$\mathrm{Biext}^1(A_1, A_2; \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(A_1^{an}, A_2^{an}; \mathbf{G}_m) \qquad \text{(G.A.G.A.)}.$$

Soit P une biextension de M_1 et M_2 par $\mathbf{G}_m$. Si P^{an} est trivial, alors :

a) la restriction de P à $G_1 \times G_2$ est image d'une biextension P_0 de A_1 et A_2 par $\mathbf{G}_m$; cette dernière est triviale. Sinon elle serait analytiquement non triviale, donnerait lieu à une forme bilinéaire non nulle ψ_0, et la forme ψ correspondant à P serait non nulle *a fortiori*. La restriction de P à $G_1 \times G_2$ est donc triviale (et uniquement trivialisable, même analytiquement).

b) P est donc défini par des applications biadditives $X_1 \times G_2 \to \mathbf{G}_m$ et $G_1 \times X_2 \to \mathbf{G}_m$. Celles-ci sont nulles dans la catégorie analytique, donc sont nulles, et P est trivial.

Soit P une biextension de M_1^{an} et M_2^{an} par $\mathbf{G}_m$ qui vérifie la condition (10.2.3.9). Il reste à prouver que P est algébrisable. Par hypothèse et G.A.G.A., sa restriction P_1 à $G_1 \times G_2$ l'est. On conclut en montrant qu'une trivialisation de P_1 sur $X_1 \times G_2$ (resp. $G_1 \times X_2$) est automatiquement algébrique : P_1 s'interprète comme une extension de $X_1 \otimes G_2$ par $\mathbf{G}_m$, ce qui ramène à montrer que

$$\mathrm{Ext}^i(G_1, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i(G_1^{an}, \mathbf{G}_m) \qquad (i = 0, 1).$$

Cela résulte de la même assertion pour une variété abélienne (G.A.G.A.) et pour $\mathbf{G}_m$.

D'après (10.2.3.9), $\mathrm{Biext}^1(M_1, M_2; \mathbf{G}_m)$ s'identifie à l'ensemble des

$$\psi : T_{\mathbf{Z}}(M_1) \otimes T_{\mathbf{Z}}(M_2) \to \mathbf{Z}(1)$$

tels que :

a) ψ est compatible à la filtration de Hodge (10.2.3.8);

b) la restriction de ψ à $W_{-1}T_{\mathbf{Z}}(M_1) \otimes W_{-1}T_{\mathbf{Z}}(M_2)$ provient d'une forme sur

$$\mathrm{Gr}^W_{-1} T_{\mathbf{Z}}(M_1) \otimes \mathrm{Gr}^W_{-1} T_{\mathbf{Z}}(M_2).$$

La condition *b)* signifie que ψ est compatible à W, et ceci achève la construction (10.2.3).

Remarque **(10.2.4)**. — Une biextension P de M_1 et M_2 par $\mathbf{G}_m$ définit de façon évidente une biextension P^0 de M_2 et M_1 par $\mathbf{G}_m$. Si ψ (resp. ψ^0) est la forme bilinéaire

définie par P (resp. P^0), on a $\psi(x,y) = -\psi^0(y,x)$. C'est clair sur les formules de (10.2.3.7).

La construction (10.2.3) a des analogues purement algébriques en cohomologie ℓ-adique ou de De Rham.

Construction **(10.2.5)**. — *Soient* $M_i = (X_i, A_i, T_i, G_i, u_i)$ $(i = 1, 2)$ *deux* 1*-motifs sur un corps algébriquement clos k de caractéristique* 0. *Soit* P *une biextension de* M_1 *et* M_2 *par* $\mathbf{G}_m$. *On lui associe un morphisme*

$$T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M_1) \otimes T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M_2) \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(1).$$

Soit $m_i \in T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(M_1)$, représenté par (x_i, g_i) avec $u_i(x_i) = ng_i$. Construisons deux isomorphismes a_1 et a_2 de $P^{\otimes n}_{g_1 g_2}$ avec le torseur trivial $\mathbf{G}_m$:

$$a_1 : P^{\otimes n}_{g_1, g_2} \xrightarrow{\sim} P_{ng_1, g_2} = P_{u(x_1), g_2} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m$$

$$a_2 : P^{\otimes n}_{g_1, g_2} \xrightarrow{\sim} P_{g_1, ng_2} = P_{g_1, u(x_2)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m.$$

On pose $a_2 = \Phi(m_1, m_2) a_1$. On vérifie que $\Phi(m_1, m_2)$ ne dépend pas du choix des (x_i, g_i) et est une racine n-ième de l'unité. C'est la forme cherchée.

Proposition **(10.2.6)**. — *Sur* $\mathbf{C}$, *la forme* (10.2.5) *se déduit de celle construite en* (10.2.3) *par réduction modulo n.*

Cela se vérifie à l'aide des formules données en (10.2.3.7).

Construction **(10.2.7)**. — *Soient* $M_i = (X_i, A_i, T_i, G_i, u_i)$ *deux* 1*-motifs sur un corps algébriquement clos k. Soit* P *une biextension de* M_1 *et* M_2 *par* $\mathbf{G}_m$. *On lui associe un morphisme*

$$T_{DR}(M_1) \otimes_k T_{DR}(M_2) \to k.$$

Rappelons les définitions (dues à Grothendieck) des $\natural$-extensions et biextensions.

(10.2.7.1) Une $\natural$-*extension* d'un groupe commutatif lisse G par un groupe commutatif lisse H consiste en :

a) une extension E de G par H; si $\mu : G \times G \to G$ est l'addition, on regarde E comme un H-torseur sur G muni d'un morphisme de H-torseurs sur $G \times G$ (l'addition)

$$\nu : pr_1^* E + pr_2^* E \to \mu^* E;$$

b) une connexion sur le H-torseur E, telle que l'application ν soit horizontale. Cette connexion est automatiquement à courbure nulle.

Si G est extension d'une variété abélienne par un tore, toute extension de G par $\mathbf{G}_m$ admet une $\natural$-structure; deux $\natural$-structures diffèrent par une forme invariante sur G (à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}_m$). On définit de façon évidente la somme de Baer de deux $\natural$-extensions.

(10.2.7.2) Soit P une biextension de G_1 et G_2 par H. Regardons P comme un H-torseur P sur $G_1 \times G_2$, muni de morphismes

$$\nu_1 : \mathrm{pr}_{13}^* P + \mathrm{pr}_{23}^* P \to (\mu_1 \times \mathrm{Id})^* P \quad \text{sur} \quad G_1 \times G_1 \times G_2$$
$$\nu_2 : \mathrm{pr}_{12}^* P + \mathrm{pr}_{13}^* P \to (\mathrm{Id} \times \mu_2)^* P \quad \text{sur} \quad G_1 \times G_2 \times G_2 .$$

Une $\natural$-1-*structure* sur P est une connexion sur le H-torseur P, relative à $G_1 \times G_2 \to G_2$ (la dérivée covariante n'est définie que pour des champs de vecteurs parallèles à G_1), telle que ν_1 et ν_2 soient horizontaux. On définit de même les $\natural$-2-*structures*. Une $\natural$-*structure* est la donnée d'une $\natural$-1-structure et d'une $\natural$-2-structure. C'est aussi une connexion sur le H-torseur P, telle que ν_1 et ν_2 soient horizontaux.

La *courbure* R d'une $\natural$-biextension P est la courbure de la connexion de P. C'est une 2-forme invariante par translation sur $G_1 \times G_2$, à valeurs dans Lie(H), i.e. c'est une forme alternée sur $\mathrm{Lie}(G_1) \times \mathrm{Lie}(G_2)$, à valeurs dans Lie(H). Sa restriction à $\mathrm{Lie}(G_1)$ et à $\mathrm{Lie}(G_2)$ est nulle, de sorte que R définit un accouplement (encore appelé *courbure* de P)

(10.2.7.3) $$\Phi : \mathrm{Lie}(G_1) \otimes \mathrm{Lie}(G_2) \to \mathrm{Lie}(H),$$

avec $$R(g_1 + g_2, g_1' + g_2') = \Phi(g_1, g_2') - \Phi(g_1', g_2).$$

Pour des complexes de groupes lisses $K_i : [A_i \to B_i]$, une $\natural$-*biextension* (resp. $\natural$-*i*-*biextension*) de K_1 et K_2 par H est une $\natural$-biextension (resp. $\natural$-*i*-biextension) de B_1 et B_2 par H, munie de trivialisations (en tout que $\natural$-biextension, resp. $\natural$-*i*-biextension) comme en (10.2.1).

Proposition **(10.2.7.4)**. — *Soit* $P^\natural$ *la biextension de* $M_1^\natural$ *et* $M_2^\natural$ *par* $\mathbf{G}_m$ *image réciproque de* P. *Il existe sur* $P^\natural$ *une et une seule* $\natural$-*structure.*

Prouvons l'unicité : il faut vérifier que sur la biextension triviale de $M_1^\natural$ et $M_2^\natural$ par $\mathbf{G}_m$, toute $\natural$-structure est triviale. Une $\natural$-structure est d'abord une connexion sur le $\mathbf{G}_m$-torseur trivial sur $G_1^\natural \times G_2^\natural$, i.e. un champ de formes sur $G_1^\natural \times G_2^\natural$, soit $\Gamma_{g_1, g_2}(t_1 + t_2)$. L'axiome des $\natural$-structures donne que

$$\Gamma_{g_1 g_2}(t_1 + t_2) = \Phi_1(g_1, t_2) + \Phi_2(t_1, g_2)$$

avec Φ_1 et Φ_2 biadditifs. $G_i^\natural$ est extension de $X_i \otimes k$ par l'extension universelle G_i' de G_i par un groupe additif. Tout morphisme $G_i' \to \mathbf{G}_a$ est trivial. Dès lors, Φ_1 se factorise par $(X_1 \otimes k) \otimes \mathrm{Lie}(G_2^\natural)$. Enfin, la restriction de Γ à $X_1 \times G_2^\natural$ doit être triviale, donc aussi la restriction de Φ_1 à $X_1 \times \mathrm{Lie}(G_2^\natural)$. On a donc $\Phi_1 = 0$. De même, $\Phi_2 = 0$, et $\Gamma = 0$.

Pour prouver l'existence, il suffit de construire une $\natural$-2-structure sur la biextension de $M_1^\natural$ et M_2 par $\mathbf{G}_m$ image réciproque de P : par image réciproque, on obtiendra une $\natural$-2-structure sur $P^\natural$ et, symétriquement, une $\natural$-1-structure.

Pour $g \in G_1$, P_g est une extension de G_2 par $\mathbf{G}_m$. Soit C_g l'ensemble des $\natural$-structures sur P_g. C'est un torseur sous $\mathrm{Lie}(G_2)^*$. Pour $g \in G_1$, les C_g sont les fibres d'un torseur C sur G_1; l'addition de Baer des $\natural$-extensions fait même de C une extension de G_1 par

$\mathrm{Lie}(G_2)^*$. Relevons $u_1 : X \to G_1$ en $u_1' : X \to C$ en associant à $x \in X$ la connexion triviale de l'extension trivialisée $P_{u_1(x)}$. On obtient ainsi une $\natural$-2-structure sur la biextension de $[X \to C]$ et M_2 par $\mathbf{G}_m$ image réciproque de P.

Vu la propriété universelle de $M_1^\natural$, il existe un unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & {[X \arrow[r] & G]} & \\ M_1^\natural \arrow[ur] \arrow[rr, "v"] & & {[X \arrow[r] & C]} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

prenant une image réciproque par v, on trouve la $\natural$-2-structure cherchée.

Par définition, l'accouplement (10.2.7) est l'opposé de la courbure de la $\natural$-biextension (10.2.7.4).

Proposition **(10.2.8).** — *Sur* $\mathbf{C}$, *l'accouplement* (10.2.7) *est le complexifié de l'accouplement* (10.2.3).

La $\natural$-biextension $P^\natural$ définit, dans la catégorie analytique, une $\natural$-biextension de $[T_{\mathbf{Z}}(M_1) \to T_{\mathbf{C}}(M_1)]$ et $[T_{\mathbf{Z}}(M_2) \to T_{\mathbf{C}}(M_2)]$ par $\mathbf{G}_m$. La proposition (10.2.8) résulte alors du

Lemme **(10.2.9).** — *Soient* $V_{\mathbf{Z}}$ *et* $W_{\mathbf{Z}}$ *deux* $\mathbf{Z}$*-modules libres de rang fini, et* P *une* $\natural$*-biextension de* $[V_{\mathbf{Z}} \to V_{\mathbf{C}}]$ *et* $[W_{\mathbf{Z}} \to W_{\mathbf{C}}]$ *par* $\mathbf{G}_m$, *de biextension sous-jacente* P.

Alors, la courbure $\psi : V_{\mathbf{C}} \otimes W_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ *de* $P^\natural$ *coïncide avec l'opposé de la complexifiée de la forme correspondant à* P *par* (10.2.3.4).

Prenons $P = P(\psi_1, \psi_2)$ (10.2.3.4). Une $\natural$-structure sur P est d'abord une connexion sur le $\mathbf{G}_m$-torseur trivial sur $V_{\mathbf{C}} \times W_{\mathbf{C}}$, i.e. un champ de formes $\Gamma_{v,w}(v' + w')$ sur $V_{\mathbf{C}} \times W_{\mathbf{C}}$. Cette connexion définit une $\natural$-structure sur ce torseur si et seulement si

$$\Gamma_{v,w}(v' + w') = \Phi_1(v, w') + \Phi_2(v', w)$$

avec Φ_1 et Φ_2 bilinéaires. Les trivialisations $\exp \psi_1(v_{\mathbf{Z}}, w_{\mathbf{C}})$ et $\exp \psi_2(v_{\mathbf{C}}, w_{\mathbf{Z}})$ sont horizontales si et seulement si $\Phi_i = -\psi_i$. La courbure de la connexion est le champ de 2-formes $d\Gamma$:

$$R_{v,w}(v' + w', v'' + w'') = \Phi_1(v', w'') + \Phi_2(v'', w') - \Phi_1(v'', w') - \Phi_2(v', w'').$$

La courbure de P est donc la forme

$$\Phi_1(v', w'') - \Phi_2(v', w'') = -(\psi_1(v', w'') - \psi_2(v', w'')) = -\psi(v', w'').$$

(10.2.10) Soit M un 1-motif sur $\mathbf{C}$. A M correspond une structure de Hodge mixte T(M) de type $\{(0, 0)\ (0, -1)\ (-1, 0)\ (-1, -1)\}$. La structure de Hodge mixte $\mathrm{Hom}(T(M), \mathbf{Z}(1))$ est encore de ce type, donc définit un 1-motif M^*. L'application évidente $T(M) \otimes T(M^*) \to \mathbf{Z}(1)$ définit une biextension P de M et M^* par $\mathbf{G}_m$. Le 1-motif M^*, muni de la biextension P, est le *dual de Cartier* de M. On appelle P la *biextension de Poincaré.*

(10.2.11) La construction (10.2.10) peut être rendue purement algébrique. A un 1-motif $M=(X, A, T, G, u)$ sur un corps algébriquement clos k, nous allons associer un *dual de Cartier* $M^*=(X', A', T', G', u')$:

a) X' est le groupe des caractères de T, A' la variété abélienne duale de A et T' le tore de groupe de caractères X.

b) Traitons tout d'abord le cas où $T=0$. Une extension de M par $\mathbf{G}_m$ consiste alors en une extension E de A par $\mathbf{G}_m$, plus une trivialisation $\tilde{u}$ de l'extension u^*E de X par $\mathbf{G}_m$

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dl, "\tilde{u}"'] \arrow[d, "u"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(M, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_m) \to 0.$$

Les extensions de M par $\mathbf{G}_m$ n'ont pas d'automorphisme non trivial. Le foncteur des classes d'isomorphie d'extensions est représentable; on définit G' comme étant le groupe algébrique qui représente ce foncteur; c'est une extension de A' par T'. On dispose d'une biextension P de M et G' par $\mathbf{G}_m$.

c) Dans le cas général, on pose $G'=\mathrm{Ext}^1(M/W_{-2}M, \mathbf{G}_m)$. La biextension naturelle P'' de $M/W_{-2}M$ et G' par $\mathbf{G}_m$ induit une biextension P' de M et G' par $\mathbf{G}_m$. Pour chaque $\chi \in X'$, l'extension M de $M/W_{-2}M$ par T définit une extension de $M/W_{-2}M$ par $\mathbf{G}_m$, d'où $u'(\chi) \in G'$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & M/W_{-2}M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & P''_{u(\chi)} \arrow[r] & M/W_{-2}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'application v trivialise l'extension $P'_{u(\chi)}$ de M par $\mathbf{G}_m$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_{u(\chi)} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[dl, "v"'] \arrow[d] & 0 \\ & \mathbf{G}_m \arrow[r] & P'_{u(\chi)} \arrow[r] & M/W_{-2}M & \end{tikzcd}$$

Ces trivialisations font de P' une biextension de M et $M^*=[X' \xrightarrow{u'} G']$ par $\mathbf{G}_m$. Le 1-motif M^*, muni de P', est le dual de Cartier cherché.

(10.2.12) Cette construction permet de donner des 1-motifs une description plus symétrique.

Soit $M=(X, A, T, G, u)$ un 1-motif, de dual de Cartier $M^*=(X', A', T', G', u')$, et soit P_0 la biextension de Poincaré. Les morphismes u et u' définissent par passage au quotient des morphismes

(10.2.12.1) $$\bar{u} : X \to A \quad \text{et} \quad \bar{u}' : X' \to A'.$$

La biextension de G et G' par $\mathbf{G}_m$ déduite de P_0 est image réciproque de la biextension de Poincaré P de A et A' par $\mathbf{G}_m$. Par hypothèse, les trivialisations (des images réciproques) de P sur $X \times G'$ et $G \times X'$ coïncident sur $X \times X'$, d'où

(10.2.12.2) une trivialisation ψ de $(\bar{u} \times \bar{u}')^* P$.

Un morphisme $f : M_1 \to M_2$, de transposé (en un sens évident) $M_2^* \to M_1^*$ donne lieu à des diagrammes commutatifs

(10.2.12.3) $$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_X"] & A_1 \arrow[d, "f_A"] \\ X_2 \arrow[r] & A_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1' \arrow[r] & A_1' \\ X_2' \arrow[r] \arrow[u, "f_X'"] & A_2' \arrow[u, "f_A'"] \end{tikzcd}$$

De plus, f_A et f_A' sont transposés et, *via* l'isomorphisme $(1, f_A')^* P_1 \simeq (f_A, 1)^* P_2$ on a

(10.2.12.4) $$\psi_1(x_1, f_X'(x_2')) = \psi_2(f_X(x_1), x_2')$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_1' \arrow[r, "\psi_1"] & (P_1 \text{ sur } A_1 \times A_1') \\ X_1 \times X_2' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & (1, f_A')^* P_1 = (f_A, 1)^* P_2 \text{ sur } A_1 \times A_2' \arrow[u] \arrow[d] \\ X_2 \times X_2' \arrow[r, "\psi_2"] & (P_2 \text{ sur } A_2 \times A_2'). \end{tikzcd}$$

(10.2.13) On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des 1-motifs dans la catégorie suivante. Les objets consistent en :

a) deux variétés abéliennes en dualité A et A';
b) deux **Z**-modules libres de rang fini X et X';
c) des morphismes $v : X \to A$ et $v' : X' \to A'$;
d) une trivialisation ψ de l'image réciproque par (v, v') de la biextension de Poincaré de A et A' par $\mathbf{G}_m$.

Les flèches consistent en les diagrammes (10.2.12.3) vérifiant les conditions de (10.2.12).

Proposition **(10.2.14)**. — *Le foncteur* (10.2.13) *est une équivalence de catégories.*

La vérification est laissée en exercice au lecteur.

10.3. Interprétation algébrique du H^1 mixte : cas des courbes.

(10.3.1) Soit X_0 une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos k. Soit $p : X' \to X_0$ la normalisée de X_0, et soit $\overline{X}'$ la courbe projective non singulière dont X' est un ouvert dense. On désignera par X (resp. par $\overline{X}$) la courbe déduite de X' (resp. de $\overline{X}'$) en contractant en un point chacun des ensembles finis $p^{-1}(s)$ pour $s \in X_0$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "j'"'] \arrow[d, "r"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\bar{r}"] \\ X \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[d, "p_0"'] & \overline{X} \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

On peut caractériser X et $\overline{X}$ par les propriétés suivantes.

a) p_0 est fini et radiciel, donc induit des isomorphismes

$$H^\bullet(X_0, \mathbf{Z}_\ell) \to H^\bullet(X, \mathbf{Z}_\ell) \qquad (\ell \text{ premier à la caractéristique}).$$

b) Les singularités de X sont analytiquement isomorphes à celles que présente une réunion d'axes de coordonnées dans l'espace affine.

c) $\overline{X}$ est projective et $\overline{X} - X$ est un ensemble fini de points où $\overline{X}$ est lisse.

(10.3.2) Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ se dévisse comme suit.

a) Soit I l'ensemble des composantes irréductibles de $\overline{X}$ (= l'ensemble des composantes irréductibles de X_0). Pour chaque composante irréductible Y de $\overline{X}$, le degré de la restriction à Y d'un faisceau inversible est un homomorphisme

$$\deg_Y : \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbf{Z} : \mathscr{L} \to \deg_Y(\mathscr{L}).$$

On en déduit

$$deg : \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbf{Z}^I.$$

Cet homomorphisme est surjectif, de noyau $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$.

b) Le morphisme de $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$ dans la variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(\overline{X}')$ est surjectif. Son noyau est un tore.

(10.3.3) Soient S l'ensemble fini $\overline{X}-X$, $\alpha_0 : S \to I$ l'application qui à $s \in S$ associe l'unique composante irréductible de $\overline{X}$ telle que $s \in \alpha_0(s)$ et soit $\alpha : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{Z}^I$ induit par α_0.

Chaque $s \in S$ définit un faisceau inversible $\mathcal{O}(s)$, d'où $u_0 : \mathbf{Z}^S \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$. On a $\deg u_0 = \alpha$.

Définition **(10.3.4)**. — *Le* H^1 motivique *de* X_0, *noté* $H^1_m(X_0)(1)$ *est le* 1-*motif*

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Pic}^0(\overline{X}).$$

Par définition, on a donc $H^1_m(X_0)(1) = H^1_m(X)(1)$.

Remarques **(10.3.5)**. — (i) On a

$$\mathrm{Gr}^W_0(H^1_m(X)(1)) = \mathrm{Ker}(\alpha : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{Z}^I)$$
$$\mathrm{Gr}^W_{-1}(H^1_m(X)(1)) = \mathrm{Pic}^0(\overline{X}').$$

(ii) Le conoyau de α est sans torsion : il s'identifie au $\mathbf{Z}$-module libre de base $I - \alpha_0(S)$. On dispose d'une suite exacte courte de complexes et d'un quasi-isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {[\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(\overline{X}_0)]} \arrow[r] & {[\mathbf{Z}^S \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{X}_0)]} \arrow[r] & {[\mathrm{Im}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{Z}^I]} \arrow[r] & 0 \\
 & & & & & {[0 \arrow[r] & \mathrm{coker}(\alpha)]} &
\end{tikzcd}$$

Construction **(10.3.6)**. — *Pour n un entier* >0 *premier à la caractéristique de k, nous construisons un isomorphisme*

$$H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})(1) = H^1(X, \mu_n) \simeq T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(H^1_m(X)(1)).$$

On sait que $H^1(X, \mu_n)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X, munis d'un isomorphisme $\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}$. Puisque $p_0 : X_0 \to X$ est fini et radiciel, on a $H^1(X, \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_0, \mathbf{Z}/n)$, et $H^1(X, \mu_n)$ est encore l'ensemble des classes d'isomorphie de couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ pour $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X_0, et α un isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}$.

Soit un tel couple $(\mathcal{L}, \alpha)$. Le faisceau inversible $\mathcal{L}$ se prolonge en $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\overline{X}$, et il existe un diviseur D de support S tel que α se prolonge en $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D)$. S'il existe un isomorphisme β de $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ avec $\mathcal{O}(E)$, cet isomorphisme est uniquement déterminé à multiplication près par un élément du groupe divisible $H^0(\overline{X}, \mathcal{O}^*)$. On en déduit que $(\overline{\mathcal{L}}, D)$ détermine $(\mathcal{L}, \alpha)$ à isomorphisme près. Pour qu'un couple $(\overline{\mathcal{L}}, D)$ provienne d'un couple convenable $(\mathcal{L}, \alpha)$, il faut et il suffit que $n[\mathcal{L}] = [\mathcal{O}(D)]$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{X})$. Il provient de $(\mathcal{O}_{X_0}, 0)$ si et seulement s'il est de la forme $(\mathcal{O}_{X_0}(D), nD)$.

Ceci identifie $H^1(X, \mu_n)$ au H^0 du complexe produit tensoriel de $[\mathbf{Z}^S \to \mathrm{Pic}(\overline{X})]$ (degrés 0 et 1) et $[\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z}]$ (degrés -1 et 0) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^S \arrow[r, "u_0"] & \mathrm{Pic}(\overline{X}) \\ \mathbf{Z}^S \arrow[u, "n"] \arrow[r, "u_0"] & \mathrm{Pic}(\overline{X}) \arrow[u, "-n"'] \end{tikzcd}$$

$$H^1(X, \mu_n) \simeq H^0([\mathbf{Z}^S \to \mathrm{Pic}(\overline{X})] \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Puisque $\mathrm{coker}(\alpha)$ est sans torsion, on lit sur (10.3.5) (ii) que

$$\begin{aligned} H^1(X, \mu_n) &\simeq H^0([\mathbf{Z}^S \to \mathrm{Pic}(\overline{X})] \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xleftarrow{\sim} H^0(H^1_m(X) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \\ &\simeq T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(H^1_m(X)\,(1)). \end{aligned}$$

Variante **(10.3.7)**. — *Pour ℓ premier à la caractéristique p de k, on a*

$$H^1(X_0, \mathbf{Z}_\ell(1)) \simeq T_\ell(H^1_m(X_0)\,(1)).$$

Construction **(10.3.8)**. — *Soit X_0 une courbe sur $\mathbf{C}$. On construira un isomorphisme de structures de Hodge mixtes*

$$H^1(X_0)\,(1) \simeq T(H^1_m(X_0)\,(1)).$$

Nous pouvons supposer et supposerons que $X = X_0$.

Construction **(10.3.9)**. — (i) *Soit $j^m_* \mathcal{O}^*_X$ le sous-faisceau des fonctions méromorphes dans $j_* \mathcal{O}^*_X$. On a*

$$H^1(X, \mathbf{Z}(1)) = \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{\exp} j^m_* \mathcal{O}^*_X]).$$

(ii) $$H^1(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{d} r_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)]).$$

(iii) *L'inclusion de $H^1(X, \mathbf{Z})$ dans $H^1(X, \mathbf{C})$ est définie par le morphisme de complexes*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\overline{X}} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\wr"'] & j^m_* \mathcal{O}^*_X \arrow[d, "df/f"] \\ \mathcal{O}_{\overline{X}} \arrow[r] & r_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S) \end{tikzcd}$$

Soit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1(X, \mathbf{Z}(1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "①"] & \mathbf{H}^1(X, [\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_X]) \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "②"] & \mathbf{H}^1(\overline{X}, [j_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} j_* \mathcal{O}^*_X]) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "③"] & \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{\exp} j^m_* \mathcal{O}^*_X]) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\ H^1(X, \mathbf{C}) \arrow[r] & \mathbf{H}^1(X, [\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} r_* \Omega^1_{\overline{X}'}]) & \mathbf{H}^1(\overline{X}, [j_* \mathcal{O}_X \longrightarrow j_* r_* \Omega^1_{X'}]) \arrow[l] & \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow r_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)]) \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales du carré 1 sont des isomorphismes, car les suites

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} r_*\Omega^1_{X'} \longrightarrow 0$$

sont exactes. Celles de 2 le sont car $R^1 j_* \mathcal{O}_X = 0$. Celles de 3 le sont car les morphismes de complexes qui les définissent sont des quasi-isomorphismes. Ce diagramme définit (10.3.9).

(10.3.10) Rappelons que si $d : F \to G$ est un morphisme de faisceaux abéliens sur un espace Z, alors $\mathbf{H}^1(Z, [F \to G])$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples (P, α), où P est un F-torseur (=espace principal homogène sous F) et où α est une trivialisation du G-torseur dP.

En particulier :

a) $\mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}^*_{\overline{X}} \to r_*\Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)])$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de couples $(\mathcal{L}, \alpha)$, pour $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\overline{X}$, et α une connexion sur $\bar{r}^*\mathcal{L}$, holomorphe sur X′ et pouvant présenter un pôle simple en les points de S. Soit a la projection de $\overline{X}$ sur Spec(**C**) (=un point). En topologie *fppf*, le faisceau $R^1 a_*([\mathcal{O}^*_{\overline{X}} \to r_*\Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)])$ est représentable par un schéma en groupes $\mathrm{Pic}^\natural(X)$, dont $\mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}^*_{\overline{X}} \to r_*\Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)])$ est l'ensemble des points. $\mathrm{Pic}^\natural(X)$ est une extension d'un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, contenant $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$, par $H^0(\overline{X}', \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S))$.

On définit une application

(10.3.10.1) $$\mathbf{Z}^S \to \mathrm{Pic}^\natural(X)$$

en associant à chaque diviseur D de $\overline{X}$, concentré en S, le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)$.

b) $H^1(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \to r_*\Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)])$ est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Pic}^\natural(X)$. C'est l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (P, α), pour P un $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-torseur et α une connexion comme en *a)* sur P.

c) $H^1(X, \mathbf{Z}(1)) = \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \to j_*^m \mathcal{O}^*_{\overline{X}}])$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (P, α), pour P un $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-torseur, et α un isomorphisme du faisceau inversible exp(P) avec un faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ (D concentré en S). L'application

$$\mathrm{Aut}(P) = \mathbf{C} \to \mathrm{Aut}(\exp(P)) = \mathbf{C}^*$$

est surjective. Ceci permet encore d'identifier $H^1(X, \mathbf{Z}(1))$ à l'ensemble des couples (p, d), pour p une classe d'isomorphie de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-torseurs, i.e. un élément de $\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}\,\overline{X})$, et $d \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, définissant un diviseur concentré en S ayant $\exp(p)$ pour image dans $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$. En d'autres termes, on a défini un isomorphisme

(10.3.10.2) $$H^1(X, \mathbf{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} T_{\mathbf{Z}}(H^1_m(X)(1)).$$

De la partie (i) du lemme suivant, on déduit que cet isomorphisme est compatible à la filtration par le poids.

Lemme **(10.3.11).** — (i) *On a*

$$W^1(H^1(X, \mathbf{Z})) = \mathrm{Im}(H^1(\overline{X}, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathbf{Z}))$$

$$W^0(H^1(X, \mathbf{Z})) = \mathrm{Ker}(H^1(\overline{X}, \mathbf{Z}) \to H^1(\overline{X}', \mathbf{Z})).$$

(ii) *La suite spectrale définie par la filtration bête de* $[\mathcal{O}_{\overline{X}} \to \overline{r}_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)]$ *dégénère et aboutit à la filtration de Hodge de* $H^*(X, \mathbf{C})$.

Prouvons (i). Il suffit de prouver la première assertion : la seconde résulte de (8.2.5). Comparons les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
H^1(\overline{X}, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathbf{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H^2(\overline{X} \bmod X, \mathbf{Z}) \arrow[d, "\wr"] & \\
H^1(\overline{X}', \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^1(X', \mathbf{Z}) \arrow[r, "\partial"] & H^2(\overline{X}' \bmod X', \mathbf{Z}) \arrow[r] & H^2(\overline{X}', \mathbf{Z})
\end{tikzcd}$$

Il résulte de (8.3.7) et (3.2.17) que $H^2(\overline{X}' \bmod X, \mathbf{Z})$, donc $H^2(\overline{X} \bmod X, \mathbf{Z})$ est purement de poids 2. Compte tenu de (8.2.4), ceci prouve (i).

Pour prouver (ii), il nous faudra revenir à la définition (8.2.1) et utiliser que le schéma simplicial $((X'/X)^{\Delta_n})_{n \geq 0}$ est lisse (le produit fibré itéré $(n+1)$-uple $(X'/X)^{\Delta_n}$ est somme disjointe de X', diagonal, et d'un nombre fini de points) et qu'il admet $((\overline{X}'/\overline{X})^{\Delta_n})_{n \geq 0}$ pour compactification lisse. Soit $\varepsilon : ((\overline{X}'/\overline{X})^{\Delta_n})_{n \geq 0} \to \overline{X}$ le morphisme d'augmentation. Soit (K, F) le complexe $\mathcal{O} \to \Omega^1(\log S)$ sur $((\overline{X}'/\overline{X})^{\Delta_n})_{n \geq 0}$, muni de la filtration bête. On dispose d'un morphisme d'augmentation

$$\alpha : [\mathcal{O}_{\overline{X}} \to \overline{r}_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)] \to s\varepsilon_{**} K.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^1(((\overline{X}'/\overline{X})^{\Delta_n})_\bullet, K) & \mathbf{H}^1(\overline{X}, s\varepsilon_{**} K) \arrow[l, "1"'] \\
H^1(X, \mathbf{C}) \arrow[u, equal] \arrow[r, equal] & \mathbf{H}^1(\overline{X}, [\mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow \overline{r}_* \Omega^1_{\overline{X}'}(\log S)]) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et 1 est un isomorphisme car les ε_n sont finis, de sorte que $R^i\varepsilon_{n*} = 0$ pour $i > 0$. L'assertion résulte alors de ce que α est un quasi-isomorphisme filtré.

(10.3.12) Achevons la construction (10.3.8). Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathbf{Z}(1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T_{\mathbf{Z}}(H^1_m(X)(1)) \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}(\overline{X}) = H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \arrow[d, equal] \\
H^1(X, \mathbf{C}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^\natural(X) \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}(\overline{X}) = H_1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après (10.3.11) (ii) et la définition des filtrations de Hodge, (10.3.10.2) est compatible à la filtration de Hodge.

Corollaire **(10.3.13)**. — $H^1_m(X)(1)^\natural$ *est l'extension*

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Pic}^\natural(X)^0$$

de $H^1_m(X)(1)$ *déduite de* (10.3.10.1).

On a en effet un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^\natural(X)^0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \\
H^1(X, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^\natural(X) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}(\overline{X}), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et on applique (10.1.9).

Exercice **(10.3.14)**. — Vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathbf{Z}(1)) \arrow[r, equal] \arrow[d] & T_{\mathbf{Z}}(H^1_m(X)(1)) \arrow[d] \\
H^1(X, \mu_n) \arrow[r, equal] & T_{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}(H^1_m(X)(1))
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Remarque **(10.3.15)**. — L'isomorphisme déduit de (10.3.8) et (10.3.9) (ii), entre $\mathbf{H}(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}} \to r_*\Omega^1_{\overline{X}'}(\log S))$ (qu'on peut appeler $H^1_{DR}(X)$) et $T_{DR}(H^1_m(X)(1))$, égal à $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Pic}^\natural(X)$ d'après (10.3.13), a été défini de façon purement algébrique.

10.4. Traduction d'un théorème de Picard.

(10.4.1) Soit $\mathscr{H}$ une structure de Hodge mixte telle que $h^{pq}=0$ pour p ou $q<0$ (resp. pour p ou $q>n$). Je noterai provisoirement $\mathrm{I}(\mathscr{H})$ (resp. $\mathrm{II}_n(\mathscr{H})$) le 1-motif défini par la plus grande sous-structure de Hodge mixte de $(\mathscr{H}_{\mathbf{Z}}/\text{torsion})(1)$ (resp. par le plus grand quotient de $(\mathscr{H}_{\mathbf{Z}}/\text{torsion})(n)$ qui soit purement de type

$$\{(-1,-1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (0,0)\}.$$

Si X est une variété algébrique complexe de dimension $\leq \mathrm{N}$, je conjecture que les 1-motifs $\mathrm{I}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))$, $\mathrm{II}_n(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))$ (pour $n\leq \mathrm{N}$) et $\mathrm{II}_{\mathrm{N}}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))$ (pour $n\geq \mathrm{N}$) admettent une définition purement algébrique. Les morphismes

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_\ell(\mathrm{I}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))) \to (\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}_\ell)/\text{torsion})(1)\\
&\mathrm{T}_\ell(\mathrm{II}_n(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))) \leftarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}_\ell)(n) \qquad (\text{pour } n\leq \mathrm{N})\\
&\mathrm{T}_\ell(\mathrm{II}_{\mathrm{N}}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}))) \leftarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbf{Z}_\ell)(\mathrm{N}) \qquad (\text{pour } n\geq \mathrm{N})
\end{aligned}$$

et leurs analogues en cohomologie de De Rham devraient aussi admettre une définition purement algébrique. C'est ce que nous avons vérifié pour $\dim(\mathrm{X})=1$. Voici un autre exemple.

(10.4.2) Soient S une surface projective et lisse, U un ouvert (de Zariski) dense de S et $\mathrm{C}=\mathrm{S}-\mathrm{U}$. Posons

$$\mathrm{H}_2^{\log}(\mathrm{U},\mathbf{Z})=\mathrm{Ker}(\mathrm{H}_2(\mathrm{U},\mathbf{Z})\to \mathrm{H}_2(\mathrm{S},\mathbf{Z})).$$

D'après [8] § 9, ce groupe ne dépend pas de la compactification lisse choisie S de U. Modulo groupes finis, ce n'est autre (3.2.17) que $\mathrm{W}_{-3}\mathrm{H}_2(\mathrm{U},\mathbf{Z})$ $(\mathrm{H}_2(\mathrm{U},\mathbf{Q}))$, dual de $\mathrm{H}^2(\mathrm{U},\mathbf{Q})$, est muni de la structure de Hodge mixte duale). On peut vérifier que le 1-motif défini par $(\mathrm{H}_2^{\log}(\mathrm{U},\mathbf{Z})/\text{torsion})(-1)$ admet la description suivante :

a) Par dualité de Poincaré, on a $\mathrm{H}_2(\mathrm{U},\mathbf{Z})=\mathrm{H}_c^2(\mathrm{U},\mathbf{Z})$. La suite exacte longue de cohomologie de (S, C) fournit une suite exacte

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbf{Z})\to \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathbf{Z})\to \mathrm{H}_2^{\log}(\mathrm{U},\mathbf{Z})\to 0.$$

b) Soit $\mathrm{H}_m^1(\mathrm{C})$ le quotient de $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$ par son radical unipotent. On sait que $\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathbf{Z})=\mathrm{T}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_m^1(\mathrm{C}))$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbf{Z})=\mathrm{T}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{Pic}^0(\mathrm{S}))$. On dispose donc d'une application

$$\mathrm{H}_2^{\log}(\mathrm{U},\mathbf{Z})\to \mathrm{T}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_m^1(\mathrm{C})/\mathrm{Pic}^0(\mathrm{S})),$$

qui est un isomorphisme modulo groupes finis.

c) L'application déduite de *b)*

(10.4.2.1) $$(\mathrm{H}_2^{\log}(\mathrm{U},\mathbf{Z})/\text{torsion})(-1)\to \mathrm{T}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_m^1(\mathrm{C})/\mathrm{Pic}^0(\mathrm{S}))$$

est un morphisme de structures de Hodge mixte (et un isomorphisme modulo groupes finis).

On peut définir de façon purement algébrique les isomorphismes (modulo groupes finis) déduits de (10.4.2.1) entre les analogues de $H_2^{\log}(U, \mathbf{Z})(-1)$ en cohomologie ℓ-adique ou de De Rham, et les réalisations ℓ-adiques ou de De Rham de $H_m^1(C)/\mathrm{Pic}^0(S)$.

(10.4.3) Nous ne démontrerons pas les constructions et compatibilités précédentes. Le résultat est en germe dans le théorème suivant de E. Picard ([11], tome I, p. 62). P et A y désignent des polynômes.

Tout résidu de l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y)\, dx\, dy}{A(x, y)}$$

peut être regardé comme une période logarithmique ou cyclique d'une intégrale abélienne.

Je rappelle que :

a) Une *intégrale k-uple* sur une variété projective non singulière V de dimension d est une k-forme rationnelle fermée sur V : c'est un élément $\alpha \in H^0(U, \Omega^k)$, pour U un ouvert dense de V, qui vérifie $d\alpha = 0$. Ici, $k = 2$ et $V = \mathbf{P}^2$, de sorte que $k = \dim V$ et que la condition $d\alpha = 0$ est vide.

b) Une intégrale k-uple α définit un élément encore noté α de $H^k(U, \mathbf{C})$. Les *périodes* de α sont les nombres $\langle \alpha, c \rangle$ pour $c \in H_k(U, \mathbf{Z})$. Si c est défini par une chaîne singulière C, on a

$$\langle \alpha, c \rangle = \int_C \alpha.$$

c) Les *résidus* d'une intégrale k-uple $\alpha \in H^0(U, \Omega^k)$ sont les nombres $\langle \alpha, c \rangle$ pour

$$c \in \mathrm{Ker}(H_k(U, \mathbf{Z}) \to H_k(V, \mathbf{Z})).$$

Dans le cas considéré par Picard, l'application $H_2(U, \mathbf{Z}) \to H_2(\mathbf{P}^2, \mathbf{Z})$ est nulle et il n'y a pas lieu de distinguer entre périodes et résidus. Pour le cas général, cf. Lefschetz, [10], note I.

d) Par « période logarithmique ou cyclique d'une intégrale abélienne », Picard entend simplement « période d'une intégrale simple β sur une courbe Y ». Il est sous-entendu que β et Y sont déterminés rationnellement par P et A.

(10.4.4) Traduisons ce théorème. Soient donc S et U comme en (10.4.2) (par exemple $S = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$), une intégrale double $\beta \in H^0(U, \Omega_U^2)$ et un cycle $c \in H_2^{\log}(U, \mathbf{Z})$. Par définition

$$\langle \beta, c \rangle = \int_c \beta$$

est un résidu de β. Soit $A = H_m^1(C)(1)/\mathrm{Pic}^0(S)$ (une extension d'une variété abélienne par un tore). La 2-forme β définit une classe de cohomologie $\mathrm{cl}(\beta) \in H_{DR}^2(U)$ et induit

une forme linéaire β' sur $H^{\log}_{DR2}(U) = T_{DR}(A)$. La correspondance $\beta \mapsto \beta'$ est rationnelle. La classe c définit $c' \in T_{\mathbf{Z}}(A) \otimes \mathbf{Q}$, et on a

$$\langle \beta, c \rangle = 2\pi i \langle \beta', c' \rangle. \tag{10.4.4.1}$$

On peut représenter c' par un cycle sur C, et β' comme une intégrale simple sur C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Blanchard, Sur les variétés analytiques complexes, *Ann. Sc. E.N.S.*, **73** (1956).

[2] T. Bloom and M. Herrera, De Rham cohomology of an analytic space, *Inv. Math.*, **7** (1969), 275-296.

[3] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **35** (1968), 107-126.

[4] P. Deligne, Théorie de Hodge I, *Actes du Congrès international des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Gauthier-Villars, 1971, **1**, 425-430.

[5] P. Deligne, Théorie de Hodge II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **40** (1971), 5-58.

[6] P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds. Summary of main results and discussion of open problems, *Bull. Am. Math. Soc.*, **76** (1970), 228-296.

[7] P. A. Griffiths, On the periods of certain rational integrals : I, *Annals of Math.*, **90** (1969), 460-495.

[8] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland Publ. Co., 88-188.

[9] A. Grothendieck, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **29** (1966), 96-103.

[10] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, 1924 (reproduit dans *Selected Papers*, Chelsea Publ. Co., 1971).

[11] E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. I et II, Paris, Gauthier-Villars, 1895, 1906.

[12] D. G. Quillen, *Notes on the homology of commutative rings*, M.I.T., 1968.

[13] B. Saint-Donat (d'après des notes de P. Deligne), Techniques de descente cohomologique, S.G.A. 4 V *bis* (à paraître avec S.G.A. 4, dans les *Lecture Notes*, Springer-Verlag).

[14] G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **34** (1968), 105-112.

[15] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1966), cité G.A.G.A.

SIGLES

S.G.A., Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie, 1 à 7, diffusé par l'I.H.E.S.; 1, 3, 4, 6, 7 I sont parus aux *Springer Lecture Notes*, n° 224; 151, 152 et 153; 269, 270, 305; 225, 288 — S.G.A. 2 a été publié par North Holland Publ. Co.

Manuscrit reçu le 2 mars 1972.