

MICHEL RAYNAUD

Spécialisation du foncteur de Picard

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 38 (1970), p. 27-76

http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1970__38__27_0

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPÉCIALISATION DU FONCTEUR DE PICARD

par M. RAYNAUD

INTRODUCTION

Soit S un trait (c'est-à-dire le spectre d'un anneau de valuation discrète), de point fermé s et de point générique t et soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat. On se propose d'étudier le foncteur de Picard relatif $P = \text{Pic}_{X/S}$ de X au-dessus de S et en particulier sa représentabilité.

D'une manière intuitive, on peut dire que P est d'autant plus représentable qu'il est plus séparé sur S , c'est-à-dire qu'il existe moins de faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X (ou plus généralement sur $X \times_S S'$, où S' est un trait au-dessus de S) qui sont non triviaux et qui ont une fibre générique triviale. Par analogie avec le cas des S -schémas en groupes, on est amené à définir un sous-faisceau en groupes E de P , l'adhérence schématique de la section unité dans P , qui mesure le défaut de séparation de P au-dessus de S . On montre alors que le faisceau quotient $Q = P/E$ est un schéma en groupes séparés; Q joue le rôle d'un plus grand quotient séparé de P .

Le faisceau en groupes E a une fibre générique E_t égale au groupe unité, tandis que sa fibre spéciale E_s est un schéma en groupes sur le corps résiduel $\kappa(s)$, localement de type fini, de dimension égale à :

$$r = \dim_{\kappa(s)} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) - \dim_{\kappa(t)} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}).$$

On voit donc que E , et par suite P , est « loin d'être représentable » si $r > 0$, ou comme nous dirons, si f n'est pas cohomologiquement plat. Si au contraire $r = 0$, P est « proche d'être représentable »; plus précisément, P est alors un S -espace algébrique au sens de M. Artin et E est un S -espace algébrique étale. En particulier, si S est strictement hensélien, la connaissance de E équivaut alors à celle du groupe $E(S)$ des points de E à valeurs dans S .

Dès lors, on a cherché à donner des critères de platitude cohomologique qui aillent plus loin que le cas classique élémentaire où l'on suppose les fibres de f géométriquement réduites (cf. EGA, III, (7.8.5)). Dans cette direction, on montre que si $\kappa(s)$ est de caractéristique nulle, f est cohomologiquement plat si X est normal. La situation est nettement plus compliquée lorsque $\kappa(s)$ est de caractéristique $p > 0$ (X peut alors être régulier sans être cohomologiquement plat sur S), et on n'obtient des résultats satisfaisants que dans le cas des courbes relatives (i.e. les fibres de f sont de dimension 1).

On prouve alors que si X est normal et si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, f est cohomologiquement plat, c'est-à-dire $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ universellement, si le pgcd δ des multiplicités totales des composantes irréductibles de X_s est premier à p . Si de plus $\delta = 1$, la composante neutre P^0 de P est représentable par un S -schéma en groupes lisse et séparé sur S ⁽¹⁾.

Je voudrais ici remercier M. A. Grothendieck qui a su m'intéresser à ces problèmes et qui m'a offert la possibilité d'exposer ces résultats à l'I.H.E.S. au cours de l'année 1967.

1. Rappels sur le foncteur de Picard.

(1.0) Nous utiliserons librement les topologies de Grothendieck, naturelles en théorie des schémas : topologie de Zariski (Zar); topologie étale (et); topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf); topologie fidèlement plate quasi-compacte (fpqc). Pour ces notions, le lecteur pourra consulter SGA 3, IV, § 6 et SGA 4.

(1.1) Soit X un schéma. On note $\text{Pic}(X)$ le groupe des classes de faisceaux inversibles sur X . On a donc $\text{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Il résulte de la descente fpqc des faisceaux quasi-cohérents que $\text{Pic}(X)$ est aussi le groupe des torseurs de base X , sous le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, qui sont localement triviaux pour la topologie fpqc. On en déduit des isomorphismes canoniques :

$$\text{Pic}(X) \simeq H_{\text{Zar}}^1(X, \mathbf{G}_m) \simeq H_{\text{et}}^1(X, \mathbf{G}_m) \simeq H_{\text{fppf}}^1(X, \mathbf{G}_m) \simeq H_{\text{fpqc}}^1(X, \mathbf{G}_m).$$

(1.2) Désormais, $f: X \rightarrow S$ désigne un morphisme de schémas, propre et de présentation finie. Pour tout S -schéma S' , on note $f': X' \rightarrow S'$ le morphisme déduit de f par le changement de base $S' \rightarrow S$. On appelle *foncteur de Picard relatif de X au-dessus de S* et on note $\text{Pic}_{X/S}$, ou simplement P s'il n'y a pas ambiguïté sur f , le faisceau fppf associé au préfaisceau :

$$S' \mapsto \text{Pic}(X').$$

Pour tout S -schéma S' , on a donc $P(S') = H^0(S', R_{\text{fppf}}^1 f'_* \mathbf{G}_m)$. En utilisant le fait que $f'_*(\mathcal{O}_{X'})$ est une $\mathcal{O}_{S'}$ -algèbre quasi-cohérente, entière sur S' et le fait que le morphisme canonique $H_{\text{et}}^2(S', \mathbf{G}_m) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(S', \mathbf{G}_m)$ est un isomorphisme ([8], Th. (11.7)), on montre facilement que P est aussi le faisceau associé au préfaisceau $S' \mapsto \text{Pic}(X')$ pour la topologie étale. On a donc $P(S') = H^0(S', R_{\text{et}}^1 f'_* \mathbf{G}_m)$ et tout élément de $P(S')$ peut se représenter, localement pour la topologie étale sur S' , par un faisceau inversible sur X' .

(1.3) Pour qu'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X ait pour image 0 dans $P(S)$, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement de S par des ouverts de Zariski S_i , tel que $\mathcal{L}|_{X \times_S S_i}$ soit trivial. Le morphisme canonique $\text{Pic}(X)/\text{Pic}(S) \rightarrow P(S)$ est injectif si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$; il est bijectif si de plus f possède une section ([6], V, Cor. (2.4)).

(1.4) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules, de présentation finie et plat sur S . Il résulte de EGA, III, (7.7.6) (cf. [12], II, (1.5)), qu'il existe un $\mathcal{O}_S$ -Module $\mathcal{M}$,

⁽¹⁾ Ces résultats ont été annoncés dans deux notes aux C. R. de l'Acad. des Sc. [13].

de présentation finie, tel que le fibré vectoriel V défini par $\mathcal{M}$ (EGA, II, (1.7)) représente le foncteur :

$$S' \mapsto \Gamma(X', \mathcal{F}').$$

Nous nous permettrons de dire que « V représente le foncteur des sections globales de $\mathcal{F}$ au-dessus de S ». La formation de V commute à tout changement de base $S' \rightarrow S$. On dit que $\mathcal{F}$ est *cohomologiquement plat* sur S (en dimension 0, cf. EGA, III, 7) si la formation de $f_*(\mathcal{F})$ commute à tout changement de base $S' \rightarrow S$. Cette condition est réalisée si et seulement si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$ -Module localement libre (*loc. cit.*), c'est-à-dire encore, si V est lisse sur S . Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on dit aussi que f est cohomologiquement plat ou encore que X est cohomologiquement plat sur S .

(1.5) (Théorèmes de représentabilité.)

Théorème (1.5.1). — Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre, plat, de présentation finie.

1. (M. Artin). — Si f est cohomologiquement plat, P est un S -espace algébrique, localement de présentation finie [4].

2. (A. Grothendieck). — Si f est projectif, à fibres géométriquement intègres, P est un S -schéma en groupes, localement de présentation finie et séparé sur S ([6], V, Th. (3.1)).

3. (D. Mumford). — Si f est projectif et si pour tout $s \in S$, X_s est séparable et a toutes ses composantes irréductibles géométriquement irréductibles, alors P est un schéma en groupes, localement de présentation finie (non nécessairement séparé sur S) (démonstration non publiée).

On déduit de (1.5.1, 1)) et de ([3], Th. (3.5)) le résultat suivant :

Corollaire (1.5.2) (J. P. Murre). — Soit $f: X \rightarrow S$ comme dans (1.5.1). Si S est artinien et si f est cohomologiquement plat (en particulier si S est le spectre d'un corps), P est un S -schéma en groupes localement de type fini.

(1.6) Le théorème de M. Artin énoncé ci-dessus éclaire singulièrement la question de la représentabilité de P . Dans la suite, nous allons étudier en détail le cas où la base S est un trait. Notre but est de donner des critères de platitude cohomologique, dans lesquels on ne suppose pas f séparable. Par ailleurs, en utilisant des propriétés spéciales aux schémas en groupes sur un trait, nous donnons des conditions assez générales sous lesquelles l'espace algébrique P est un schéma.

2. Foncteur de Picard avec « rigidificateur ».

Dans ce numéro, $f: X \rightarrow S$ désigne un morphisme propre, plat et de présentation finie.

(2.1) *Rigidificateur.*

Définition (2.1.1). — Un rigidificateur de $P = \text{Pic}_{X/S}$ est un couple (R, i) où R est un S -schéma fini plat et de présentation finie (i.e. R est défini par une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre localement libre

de rang fini) et $i : R \rightarrow X$ est un S -morphisme, tels que, pour tout S -schéma S' , si $i' : R' \rightarrow X'$ désigne le morphisme déduit de i par le changement de base $S' \rightarrow S$, alors l'application $\Gamma(i') : \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow \Gamma(R', \mathcal{O}_{R'})$ est injective.

Soit (R, i) un rigidificateur de P . Pour tout S -schéma S' , considérons les couples $(\mathcal{L}, \alpha)$, où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X' et $\alpha : \mathcal{O}_{R'} \xrightarrow{\sim} (i')^* \mathcal{L}$ est un isomorphisme (autrement dit, α est une trivialisatıon de $(i')^* \mathcal{L}$). Un isomorphisme entre deux couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ et $(\mathcal{M}, \beta)$ est la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -modules $u : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (i')^* \mathcal{L} & \xrightarrow{(i')^* u} & (i')^* \mathcal{M} \\ & \searrow \alpha \quad \nearrow \beta & \\ & \mathcal{O}_{R'} & \end{array}$$

Il résulte immédiatement de la définition d'un rigidificateur que le seul automorphisme du couple $(\mathcal{L}, \alpha)$ est l'identité, ce qui justifie la terminologie.

Pour tout S -schéma S' , notons $(P, R)(S')$ l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de couples $(\mathcal{L}, \alpha)$. Alors $(P, R)(S')$ est de façon naturelle un groupe commutatif, la somme de $(\mathcal{L}, \alpha)$ et de $(\mathcal{M}, \beta)$ étant la classe de $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, \gamma)$ où γ est l'isomorphisme composé :

$$\mathcal{O}_{R'} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{O}_{R'} \otimes_{\mathcal{O}_{R'}} \mathcal{O}_{R'} \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} (i')^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{R'}} (i')^* \mathcal{M} \xrightarrow{\text{can}} (i')^* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}).$$

Pour S' variable dans $\mathbf{Sch}/S$, les applications $S' \mapsto (P, R)(S')$ définissent un foncteur en groupes commutatifs (P, R) appelé le *foncteur de Picard de X/S relatif au rigidificateur R* . (N.B. — Nous omettons de rappeler le morphisme i dans les notations, ce qui sera sans inconvénient dans la suite.)

On a un morphisme de foncteurs en groupes $r : (P, R) \rightarrow P$ qui au couple $(\mathcal{L}, \alpha) \in (P, R)(S')$ associe l'image de $\mathcal{L}$ dans $P(S')$.

Proposition (2.1.2). — a) Le foncteur (P, R) est un faisceau pour la topologie fpqc.

b) Le morphisme $r : (P, R) \rightarrow P$ est couvrant pour la topologie étale.

c) Si $N = \text{Ker}(r)$, pour tout S -schéma S' , $N(S')$ est formé des couples $(\mathcal{L}, \alpha) \in (P, R)(S')$ tels que $\mathcal{L}$ soit trivial localement (pour Zariski) sur S' .

L'assertion a) résulte de la théorie de la descente fpqc des faisceaux inversibles et du fait que $(\mathcal{L}, \alpha)$ n'a pas d'automorphisme autre que l'identité.

L'assertion b) résulte de la conjonction des deux remarques suivantes :

(i) Un élément de $P(S)$ est, localement pour la topologie étale sur S , représentable par un faisceau inversible sur X (1.2).

(ii) Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X , comme R est fini sur S , $i^* \mathcal{L}$ est trivial localement sur S (pour Zariski).

L'assertion c) résulte de (1.3).

(2.2) Existence de rigidificateurs.

Proposition (2.2.1). — Soient R un S -schéma défini par une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre localement libre de rang fini et $i: R \rightarrow X$ un S -morphisme. On note $\check{\mathcal{R}}$ le $\mathcal{O}_S$ -Module dual $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_S)$ et $\mathcal{Q}$ le $\mathcal{O}_S$ -Module de présentation finie, tel que le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathcal{Q})$ représente le foncteur des sections globales de X au-dessus de S (1.4). Au morphisme i correspond alors un morphisme canonique de $\mathcal{O}_S$ -Modules $\check{i}: \check{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{Q}$. Ceci étant, (R, i) est un rigidificateur de $\text{Pic}_{X/S}$ si et seulement si $\check{i}$ est surjectif.

Supposons $\check{i}$ surjectif et montrons que pour tout S -schéma S' , le morphisme $\Gamma(i'): \Gamma(X') \rightarrow \Gamma(R')$ est injectif. Comme la formation de $\check{\mathcal{R}}, \mathcal{Q}, \check{i}$ est compatible avec tout changement de base, on peut supposer $S' = S$. Or $\Gamma(i)$ est injectif puisqu'il s'identifie à l'application composée :

$$\Gamma(X) \simeq \text{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Hom}(\check{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_S) \simeq \Gamma(R).$$

Réciproquement, supposons que (R, i) soit un rigidificateur. Soit $s \in S$; alors l'application $\Gamma(i_s): \Gamma(X_s) \rightarrow \Gamma(R_s)$ est injective, donc l'application :

$$\text{Hom}(\mathcal{Q}_s, \kappa(s)) \rightarrow \text{Hom}(\check{\mathcal{R}}_s, \kappa(s))$$

est injective. Par suite, $\check{i}_s: \check{\mathcal{R}}_s \rightarrow \mathcal{Q}_s$ est surjectif et comme $\mathcal{Q}$ est de type fini sur $\mathcal{O}_S$, $\check{i}$ est surjectif sur un voisinage de s . Ceci étant vrai pour tout point s de S , $\check{i}$ est surjectif.

Notons tout de suite le corollaire suivant :

Corollaire (2.2.2). — Soit (R, i) comme dans (2.2.1) et soit s un point de S . Si $\Gamma(i_s): \Gamma(X_s) \rightarrow \Gamma(R_s)$ est injectif, alors (R, i) est un rigidificateur de $\text{Pic}_{X/S}$ au-dessus d'un voisinage ouvert U de s .

Proposition (2.2.3). — Soit $f: X \rightarrow S$ propre, plat et de présentation finie.

a) Si f est projectif, équidimensionnel (EGA, IV, (13.3.2)), à fibres sans composantes immergées, $\text{Pic}_{X/S}$ possède un rigidificateur localement sur S pour la topologie de Zariski.

b) Si les fibres de f sont sans composantes immergées, $\text{Pic}_{X/S}$ possède un rigidificateur localement sur S pour la topologie étale.

c) Si S est un trait, $\text{Pic}_{X/S}$ possède un rigidificateur.

De plus, dans chacun des cas ci-dessus, on peut choisir le rigidificateur (R, i) de façon que i soit une immersion fermée.

Cas b). — Soit $s \in S$. Pour chacune des composantes irréductibles X_i de X_s , soit x_i un point fermé de $X_i - (\bigcup_{j \neq i} X_j)$, tel que l'anneau local $\mathcal{O}_{X_s, x_i}$ soit de Cohen-Macaulay (SGA 3, VI_A, (1.1.2)). Comme X_s n'a pas de composantes immergées, l'application canonique $\Gamma(X_s) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{X_s, x_i}$ est injective. Soit N_i l'image de $\Gamma(X_s)$ dans $\mathcal{O}_{X_s, x_i}$. Comme N_i est artinien, il existe un système de paramètres $\bar{f}_{i,1}, \dots, \bar{f}_{i,n_i}$ de $\mathcal{O}_{X_s, x_i}$ tel que l'application $N_i \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x_i}/(\bar{f}_{i,1}, \dots, \bar{f}_{i,n_i})$ soit déjà injective. Soit U_i un ouvert de X contenant x_i , tel que $(U_i)_s$ soit irréductible et tel que $\bar{f}_{i,j}$ provienne de $f_{i,j} \in \Gamma(U_i)$. Il résulte alors de EGA, IV, (11.3.8) que $V_i = U_i/(f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i})$ est plat sur S en x_i ; d'autre part, il est quasi-fini sur S en x_i . Il résulte alors du Main theorem

de Zariski et de la définition d'un hensélisé comme limite inductive d'algèbres étales, que l'on peut trouver un voisinage étale (S', s') de (S, s) (à extension résiduelle triviale) et pour tout i , un ouvert R_i de $V_i \times_S S'$, fini sur S' , contenant l'image réciproque x'_i de x_i . Soit $R = \coprod_i R_i$ et notons $u : R \rightarrow X' = X \times_S S'$ le morphisme canonique. Alors, quitte à restreindre S' , on peut supposer R plat de présentation finie sur S' et supposer que u est une immersion (nécessairement fermée). D'autre part, il résulte de notre construction que l'application $\Gamma(u_{s'}) : \Gamma(X'_{s'}) \rightarrow \Gamma(R_{s'})$ est injective. Par suite (R, u) est un rigidificateur au-dessus d'un voisinage de s' (2.2.2), d'où le cas b).

Cas a). — Soit n un entier ≥ 0 . Comme f est équidimensionnel, l'ensemble X_n des points x de X tels que $\mathcal{O}_{X_f(x), x}$ soit équidimensionnel de dimension n est un ouvert (cf. EGA, IV, (13.3.1)); mais X est la réunion des X_n qui sont disjoints, donc X_n est aussi fermé dans X . Il est clair alors que, quitte à remplacer X par X_n , on peut supposer les fibres de f équidimensionnelles de dimension n . Soit alors $s \in S$ et choisissons des points x_i de X_s comme dans la démonstration du cas b). Le schéma X est projectif sur S , donc est le spectre homogène d'une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre graduée $\mathcal{A}$. Il est alors immédiat, par récurrence sur n , que l'on peut trouver n éléments homogènes de degré > 0 de $\mathcal{A}$, soient $h_1, \dots, h_n$, tels que si on pose $H_j = \bigcap_{i \leq j} V(h_i)$, les conditions suivantes soient réalisées :

- 1) $x_i \in H_j, \forall i \text{ et } j$.
- 2) $V(h_{j+1}) \cap \text{Ass}(H_j)_s = \emptyset$ pour $j = 0, \dots, n-1$.

Il résulte alors de la condition 2) et de EGA, IV, (11.3.8) que H_n est plat sur S au voisinage de $(H_n)_s$. Comme H_n est propre sur S , et $(H_n)_s$ fini, on voit que, quitte à restreindre S , on peut supposer H_n fini, plat et de présentation finie sur S . D'autre part, il résulte de la condition 1) que, quitte à remplacer les h_j par des puissances convenables, on peut supposer que le morphisme canonique $\Gamma(X_s) \rightarrow \Gamma((H_n)_s)$ est injectif. Mais alors H_n est un rigidificateur au-dessus d'un voisinage de s (2.2.2).

Cas c). — Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (2.2.4). — Soient S un trait de point fermé s , X un S -schéma de type fini, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -Module de type fini, plat sur S , $\bar{\mathcal{P}}$ un $\mathcal{O}_X$ -Module de longueur finie, quotient de $\mathcal{M}_s$. Alors il existe un $\mathcal{O}_X$ -Module $\mathcal{N}$, plat sur S , quasi-fini sur S , quotient de $\mathcal{M}$, tel que $\bar{\mathcal{P}}$ soit en fait un quotient de $\mathcal{N}_s$, c'est-à-dire, tel que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\text{can}} & \mathcal{N}_s \\ & \searrow \text{can} & \uparrow \\ & & \bar{\mathcal{P}} \end{array}$$

Le faisceau $\bar{\mathcal{P}}$ est somme directe de ses composantes locales $\bar{\mathcal{P}}_i$. Supposons avoir résolu le problème pour $\bar{\mathcal{P}}_i$ à l'aide du Module $\mathcal{N}_i$ et soit $\mathcal{K}_i$ le noyau de l'épimorphisme $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}_i$. On résout alors le problème pour $\bar{\mathcal{P}}$ en prenant $\mathcal{N} = \mathcal{M} / (\bigcap_i \mathcal{K}_i)$; en effet, $\mathcal{N}$ est plat sur S car sans torsion et $\mathcal{N}$ est quasi-fini sur S puisque son support

est réunion d'un nombre fini de fermés quasi-finis sur S . Il suffit donc de traiter le cas où le support de $\bar{\mathcal{P}}$ est un point fermé x de X_s . Procédons par récurrence sur $\dim_x(\mathcal{M}_s)=n$.

Si $n=0$, $\mathcal{M}$ est quasi-fini sur S en x . Il existe alors un ouvert U de X , contenant x , au-dessus duquel $\mathcal{M}$ est quasi-fini sur S . Soit $\bar{U}$ l'adhérence schématique de U dans X , et soit $\mathcal{N}$ l'image réciproque de $\mathcal{M}$ sur $\bar{U}$ débarrassée de sa torsion. Alors $\mathcal{N}$ est un quotient de $\mathcal{M}$, plat sur S , quasi-fini sur S et $\bar{\mathcal{P}}$ est un quotient de $\mathcal{N}$, puisque $\mathcal{M}$ coïncide avec $\mathcal{N}$ au voisinage de x .

Supposons $n>0$ et le lemme démontré pour les valeurs strictement inférieures à n . Quitte à remplacer X par un sous-schéma fermé convenable, on peut supposer que $\mathcal{M}$ a pour support X . On a alors $\dim_x(X_s)=n$. Il existe donc un voisinage ouvert U de x dans X et un S -morphisme quasi-fini $U \rightarrow S[T_1, \dots, T_n]$. Localement pour la topologie étale sur U et sur $S[T_1, \dots, T_n]$, on se ramène à un morphisme fini. Plus précisément, on peut trouver un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & Y \\ h \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

où h est un morphisme étale couvrant x , Y est affine, lisse sur S de dimension relative n , à fibres intègres, et où u est fini. Notons $\mathcal{M}'$ et $\bar{\mathcal{P}}'$ les images réciproques de $\mathcal{M}$ et $\bar{\mathcal{P}}$ par h et posons $u_*(\mathcal{M}')=\mathcal{M}''$, $u_*(\bar{\mathcal{P}}')=\bar{\mathcal{P}}''$. Alors $\mathcal{M}''$ est un $\mathcal{O}_Y$ -Module de type fini, plat sur S et $\bar{\mathcal{P}}''$ est un $\mathcal{O}_Y$ -Module de longueur finie, quotient de $\mathcal{M}''$ par un sous-Module $\bar{\mathcal{K}}$. Il est clair qu'il existe un $\mathcal{O}_Y$ -Module libre de type fini $\mathcal{L}$ et un Y -morphisme $a: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ tel que $a_s: \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{M}_s$ soit injectif, se factorise à travers $\bar{\mathcal{K}}$ et induise un isomorphisme au point générique de Y_s . Comme $\mathcal{M}''$ est plat sur S , a est injectif et $\mathcal{M}_1''=\mathcal{M}''/a(\mathcal{L})$ est plat sur S (EGA 0_{III}, (10.2.4)). De plus, par construction on a $\dim(\mathcal{M}_1'')_s \leq n-1$ et $\bar{\mathcal{P}}''$ est un quotient de $(\mathcal{M}_1'')_s$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{M}_1''$, on voit qu'il existe un quotient $\mathcal{N}''$ de $\mathcal{M}_1''$ (qui est donc aussi un quotient de $\mathcal{M}''$), quasi-fini et plat sur S tel que $\bar{\mathcal{P}}''$ soit en fait un quotient de $\mathcal{N}''$. Soit alors Z'' le sous-schéma fermé de Y défini par l'annulateur de $\mathcal{N}''$; Z'' est quasi-fini sur S et il en est de même de $Z'=u^{-1}(Z'')$. Notons $\mathcal{N}'$ la restriction de $\mathcal{M}'$ à Z' « débarrassée » de sa torsion. Alors $\mathcal{N}'$ est un quotient de $\mathcal{M}'$, plat et quasi-fini sur S , tel que $\bar{\mathcal{P}}'$ soit en fait un quotient de $\mathcal{N}'$. Enfin, soit Z l'image schématique de Z' dans X par h et notons $\mathcal{N}$ la restriction de $\mathcal{M}$ à Z , débarrassée de sa torsion. Il résulte du lemme (2.2.5) ci-après que Z (donc aussi $\mathcal{N}$) est quasi-fini sur S . D'autre part, $\mathcal{N}$ est un quotient de $\mathcal{M}$, plat sur S , tel que $h^*(\mathcal{N})$ soit un quotient de $\mathcal{M}'$ qui majore $\mathcal{N}'$, donc $\bar{\mathcal{P}}$ est un quotient de $\mathcal{N}_s$, d'où le lemme (2.2.4).

Lemme (2.2.5). — Soit $h: Y \rightarrow X$ un S -morphisme de schémas de type fini, où S est

un trait et soit Z l'image schématique de Y par u . Alors on a $\dim Z/S \leq \dim Y/S$ (si R est un S -schéma, on note $\dim R/S$ la dimension relative de R sur S , c'est-à-dire le sup. des dimensions des fibres de R au-dessus de S).

Soit t le point générique de S et notons avec un indice n les schémas obtenus par réduction modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\Gamma(S)$. Soit $\bar{Y}$ l'adhérence schématique dans Y de Y_t , de sorte que $\bar{Y}$ est plat sur S . Alors $Y = \text{Sup}(\bar{Y}, Y_n)$ pour n assez grand et il suffit de traiter le cas où $Y = Y_n$, ce qui est immédiat, et le cas où $Y = \bar{Y}$. Dans ce cas Y et Z sont plats sur S , de sorte que l'on a (cf. EGA, IV, 12) $\dim Y/S = \dim Y_t \geq \dim Z_t = \dim Z/S$.

Corollaire (2.2.6). — Soient S un trait de point fermé s , X un S -schéma propre et plat, $\bar{Z}$ un sous-schéma fermé de X_s , fini sur s . Alors il existe un sous-schéma fermé R de X , fini et plat sur S , tel que R_s majore $\bar{Z}_s$.

En effet, il suffit d'appliquer (2.2.4) avec $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$.

Ceci étant, nous pouvons maintenant étudier le cas $c)$ de (2.2.3). Soit $(x_i)_{i \in I}$, un ensemble fini de points fermés de la fibre fermée X_s , tel que tout $x \in \text{Ass}(X_s)$ soit une généralisation d'au moins un x_i . Alors l'application canonique $\Gamma(X_s) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{X_s, x_i}$ est injective. Comme $\Gamma(X_s)$ est de longueur finie, il existe un quotient $\bar{\mathcal{P}}$ de $\prod_i \mathcal{O}_{X_s, x_i}$, artinien, tel que $\Gamma(X_s) \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ soit déjà injectif. Comme $\bar{\mathcal{P}}$ est aussi un quotient de $\mathcal{O}_{X_s}$, il résulte de (2.2.6) que l'on peut trouver un sous-schéma fermé R de X , fini et plat sur S , tel que $\bar{\mathcal{P}}$ soit en fait un quotient de $\Gamma(R_s)$. *A fortiori*, l'application $\Gamma(X_s) \rightarrow \Gamma(R_s)$ est injective, donc R est un rigidificateur (2.2.2).

(2.3) Représentabilité de (P, R) .

Théorème (2.3.1). — Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre, plat et de présentation finie, et soit (R, i) un rigidificateur de $P = \text{Pic}_{X/S}$. Alors le foncteur (P, R) (2.1) est un S -espace algébrique [3] en groupes, localement de présentation finie sur S .

Nous allons appliquer le critère de représentabilité de M. Artin [4] et adapter au foncteur (P, R) la démonstration de la représentabilité de P (dans le cas où f est cohomologiquement plat), donnée dans *loc. cit.* (§ 7).

L'assertion à démontrer est locale sur S ; on peut donc supposer S affine. Par passage à la limite, on se ramène au cas où $\Gamma(S)$ est de type fini sur $\mathbf{Z}$ (noter que compte tenu de (2.2.2), il est clair que la notion de rigidificateur passe à la limite). Si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre, $(P, R)(\text{Spec}(\mathcal{B}))$ sera aussi noté $(P, R)(\mathcal{B})$.

Vérifions que le foncteur (P, R) satisfait aux six conditions énoncées dans [4] (Theorem (5.3)).

[0'] (P, R) est un faisceau pour la topologie fppf comme il résulte de (2.1.2), $a)$.

[1'] Il est immédiat que (P, R) est localement de présentation finie sur S , c'est-à-dire que si $\mathcal{A}$ est limite inductive filtrante de $\mathcal{O}_S$ -Algèbres $\mathcal{A}_i$, on a :

$$(P, R)(\mathcal{A}) = \varinjlim (P, R)(\mathcal{A}_i).$$

[2'] Soit B un anneau local noethérien complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On prouve, comme pour le foncteur P , que l'on a :

$$(P, R)(B) = \varprojlim (P, R)(B/\mathfrak{m}^n).$$

[3'] Au lieu de vérifier l'axiome [3'] de *loc. cit.*, nous allons vérifier une condition plus forte en montrant que la diagonale :

$$\delta : (P, R) \rightarrow (P, R) \times_s (P, R)$$

est une immersion.

Après changement de base et en utilisant la structure de groupe de (P, R) , on est ramené à établir l'assertion suivante :

Soit $(\mathcal{L}, \alpha) \in (P, R)(S)$ et soit F le sous-foncteur de S tel que :

$$\begin{aligned} F(T) &= \{1\} & \text{si } (\mathcal{L}_T, \alpha_T) = 0 \text{ dans } (P, R)(T) \\ F(T) &= \emptyset & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors F est un *sous-schéma* de S .

Notons que $F(T) = \{1\}$ signifie encore qu'il existe un isomorphisme $u_T : \mathcal{O}_{X_T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_T$ (nécessairement unique), tel que $i_T^*(u_T) : \mathcal{O}_{R_T} \xrightarrow{\sim} i_T^*(\mathcal{L}_T)$ coïncide avec α_T .

Considérons alors le foncteur $T \mapsto \text{Hom}(\mathcal{O}_{X_T}, \mathcal{L}_T) = \Gamma(X_T, \mathcal{L}_T)$. Il est représentable par un fibré vectoriel $V = \mathbf{V}(\mathcal{Q}_L)$, où $\mathcal{Q}_L$ est un $\mathcal{O}_S$ -Module de présentation finie (1.4). Soit U le sous-foncteur de V tel que $U(T) = \text{Isom}(\mathcal{O}_{X_T}, \mathcal{L}_T)$. Il est clair que U est un sous-schéma ouvert de V . Soit de même W le fibré vectoriel qui représente le foncteur $T \mapsto \text{Hom}(\mathcal{O}_{R_T}, i_T^*(\mathcal{L}_T)) = \Gamma(R_T, i_T^*(\mathcal{L}_T))$. On a donc $W = \mathbf{V}(\mathcal{Q}'_L)$ où $\mathcal{Q}'_L = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(i^*(\mathcal{L}), \mathcal{O}_S)$. Au morphisme $i : R \rightarrow X$ correspond canoniquement un morphisme de fibrés vectoriels $j : V \rightarrow W$. Il résulte alors du fait que (R, i) est un rigidificateur, que $j|_U$ est un monomorphisme. Comme j est un morphisme de fibrés vectoriels de présentation finie, $j|_U$ est en fait une immersion. Par ailleurs la trivialisation $\alpha : \mathcal{O}_R \xrightarrow{\sim} i^*(\mathcal{L})$ définit un S -morphisme $s : S \rightarrow W$. Il résulte alors des définitions que l'on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j|_U} & W \\ \uparrow & & \uparrow s \\ F & \hookrightarrow & S \end{array}$$

d'où le fait que F soit un sous-schéma de S .

[4'] Nous allons voir qu'il existe une « deformation theory », au sens technique de [4], § 5, pour le foncteur (P, R) .

Pour cela considérons la catégorie des diagrammes de $\mathcal{O}_S$ -Algèbres :

$$\mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_0$$

où $\mathcal{A}_0$ est intègre noethérien, $\bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_0$ est un morphisme surjectif dont le noyau est un Idéal nilpotent de type fini, $\mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ est surjectif et son noyau $\mathcal{M}$ est un

Idéal de type fini, annulé par $\text{Ker}(\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}_0)$, donc est un $\mathcal{A}_0$ -Module. Pour simplifier posons $X_0 = X_{\mathcal{A}_0}$, $\bar{X} = X_{\bar{\mathcal{A}}}$, $X' = X_{\mathcal{A}'}$, etc. Nous allons étudier le groupe

$$K = K(\mathcal{A}', \bar{\mathcal{A}}) = \text{Ker}((P, R)(\mathcal{A}') \rightarrow (P, R)(\bar{\mathcal{A}})).$$

Pour cela considérons les triplets $(\mathcal{L}', \alpha', \bar{u})$ définis comme suit :

$\mathcal{L}'$ est un faisceau inversible sur X' ; $\alpha' : \mathcal{O}_{R'} \xrightarrow{\sim} i'^*(\mathcal{L}')$ est une trivialisation de $i'^*(\mathcal{L}')$; $\bar{u} : \mathcal{O}_{\bar{X}} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}'|_{\bar{X}}$ est un isomorphisme tel que $\bar{\alpha} = \alpha' \times_{\mathcal{A}', \bar{\mathcal{A}}} \bar{\mathcal{A}} : \mathcal{O}_{\bar{R}} \xrightarrow{\sim} i^* \bar{\mathcal{L}}$ soit égal à $i^* \bar{u}$. Deux tels triplets $(\mathcal{L}', \alpha', \bar{u})$ et $(\mathcal{M}', \beta', \bar{v})$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $w' : \mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ tel que $\beta' = i'^*(w')\alpha'$. Comme (R, i) est un rigidificateur, on a nécessairement alors $\bar{v} = \bar{w} \circ \bar{u}$ où $\bar{w} = w' \times_{\mathcal{A}', \bar{\mathcal{A}}} \bar{\mathcal{A}}$. Il résulte de la définition de (P, R) que l'application $(\mathcal{L}', \alpha', \bar{u}) \mapsto (\mathcal{L}', \alpha')$ définit un isomorphisme fonctoriel entre les classes, à isomorphisme près, de triplets $(\mathcal{L}', \alpha', \bar{u})$ et l'ensemble K . On identifie désormais ces deux ensembles. D'autre part, le groupe des classes de couples $(\mathcal{L}', \bar{u})$, où $\mathcal{L}'$ est un faisceau inversible sur X' et $\bar{u} : \mathcal{O}_{\bar{X}} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme, s'identifie canoniquement au groupe $H^1(X_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{X_0})$ (SGA I, III, (7.1)). D'où un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \varphi : K &\rightarrow H^1(X_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{X_0}) \\ (\mathcal{L}', \alpha', \bar{u}) &\mapsto (\mathcal{L}', \bar{u}). \end{aligned}$$

En fait, comme $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est affine, toute rigidification $\bar{\alpha} : \mathcal{O}_{\bar{R}} \xrightarrow{\sim} i^* \bar{\mathcal{L}}$ se relève en une rigidification $\alpha' : \mathcal{O}_{R'} \rightarrow i'^* \mathcal{L}'$, pour tout relèvement $\mathcal{L}'$ de $\bar{\mathcal{L}}$. Il en résulte que φ est surjectif. Par ailleurs, il est immédiat que $\text{Ker}(\varphi)$ s'identifie à :

$$\frac{\text{Ker}(\Gamma(\mathcal{O}_{R'}^*) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{\bar{R}}^*))}{\text{Ker}(\Gamma(\mathcal{O}_{X'}^*) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{\bar{X}}^*))} = \frac{\Gamma(R_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{R_0})}{\Gamma(X_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{X_0})}.$$

Bref, on a une suite exacte de groupes, dépendant fonctoriellement du triplet $\mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_0$:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Gamma(R_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{R_0}) / \Gamma(X_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow K \rightarrow H^1(X_0, \mathcal{M}\mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow 0.$$

Considérons en particulier les Algèbres $\mathcal{A}'$ de la forme $\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}$. On obtient alors un foncteur :

$$\varphi : \mathcal{M} \mapsto K(\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}, \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0)$$

de la catégorie des $\mathcal{A}_0$ -Modules de type fini, dans celle des groupes commutatifs. Il est clair que φ commute aux sommes directes finies et, par suite, l'addition dans $K(\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}, \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0)$ est égale à $\varphi(s)$, où $s : \mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est l'addition dans $\mathcal{M}$. Il en résulte, formellement, que φ est un foncteur additif et que $K(\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}, \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0)$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{A}_0$ -Module, de type fini d'après (*). Posons $D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M}) = K(\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{M}, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0)$. Il résulte encore de (*) que le morphisme canonique $\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{M}$ donne un isomorphisme de $\mathcal{A}_0$ -Modules

$$K(\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}, \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0) \rightarrow D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M}),$$

grâce auquel nous identifions $K(\bar{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{M}, \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0)$ à $D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M})$.

Ceci étant, revenons à la situation générale $\mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_0$ et soit $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \times_{\bar{\mathcal{A}}} \mathcal{A}'$ qui s'identifie canoniquement à $\mathcal{A}' \oplus \mathcal{M}$. On en déduit l'existence d'un morphisme de groupes canonique $D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M}) \rightarrow K(\mathcal{A}', \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_0)$, compatible avec les suites exactes (*) et qui induit un isomorphisme sur les termes extrêmes, donc qui est un isomorphisme. Il résulte encore de (*) que la formation de $D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M})$ commute à la localisation. Pour achever de vérifier la condition [4'] de *loc. cit.* il reste donc à montrer que la formation de $D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M})$ commute au passage aux corps résiduels au-dessus d'un ouvert non vide de $\text{Spec}(\mathcal{A}_0)$. Comme $\mathcal{A}_0$ est intègre, quitte à restreindre $\text{Spec}(\mathcal{A}_0)$, on peut supposer X_0 cohomologiquement plat sur $\mathcal{A}_0$ en dimension 0 et 1 (EGA, III, (7.3.9)). La formation de $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ commute alors à tout changement de base. Il reste à étudier le comportement du terme de gauche de la suite exacte (*). Notons $\mathbf{V}(\mathcal{Q}_0)$ le fibré vectoriel qui représente le foncteur des sections globales de X_0 au-dessus de $\mathcal{A}_0$ (1.4). Comme X_0 est cohomologiquement plat en dimension 0, $\mathcal{Q}_0$ est un $\mathcal{A}_0$ -Module localement libre, de type fini. Soit $\check{\mathcal{R}}_0$ le dual du $\mathcal{A}_0$ -Module $\Gamma(\mathcal{R}_0)$, qui est aussi un $\mathcal{A}_0$ -Module localement libre de type fini, puisque R est fini et plat sur S . D'après (2.2.1), le morphisme $\check{i}_0 : \check{\mathcal{R}}_0 \rightarrow \mathcal{Q}_0$, déduit de $i_0 : R_0 \rightarrow X_0$, est surjectif. Par suite $\mathcal{E}_0 = \text{Ker } \check{i}_0$ est localement libre sur $\mathcal{A}_0$, et sa formation commute à tout changement de base sur $\text{Spec}(\mathcal{A}_0)$. Notons que le terme de gauche de la suite (*) s'identifie canoniquement à $\text{Hom}_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{E}_0, \mathcal{M})$. Compte tenu des remarques précédentes sur $\mathcal{E}_0$, on voit donc que pour tout point s de $\text{Spec}(\mathcal{A}_0)$, si dans (*) on remplace $\mathcal{A}_0$ par $\kappa(s)$ et $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)$, on obtient la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\kappa(s)}(\mathcal{E}_0 \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s), \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)) & \rightarrow & D(\kappa(s), \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)) \rightarrow H^1(X_s, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)) \rightarrow 0. \\ \cong & & \cong \\ \text{Hom}(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s) & & H^1(X_0, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)) \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s). \end{array}$$

Donc, on a bien $D(\kappa(s), \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)) \simeq D(\mathcal{A}_0, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{A}_0} \kappa(s)$.

[5'] Soit $\mathcal{A}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_0$ comme ci-dessus. Notons qu'un élément $(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\alpha})$ de $(P, R)(\bar{\mathcal{A}})$ se relève en un élément $(\mathcal{L}', \alpha')$ de $(P, R)(\mathcal{A}')$ si et seulement si $\bar{\mathcal{L}}$ se relève en un élément de $\text{Pic}(X')$. L'obstruction à l'existence d'un tel relèvement est un certain élément de $H^2(X_0, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_0})$. La condition [5'] se vérifie alors comme dans le cas du foncteur de Picard P .

Notons que l'on déduit de la remarque précédente et de EGA, III, (4.6.1) le corollaire suivant.

Corollaire (2.3.2). — *Si tout point s de S est tel que $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$ (par exemple si $\dim X/S \leq 1$) alors (P, R) et P sont des foncteurs formellement lisses sur S (EGA, IV, (17.1.1)).*

(2.4) Etude du morphisme $r : (P, R) \rightarrow P$.

(2.4.0) Soit Y un S -schéma. On note Γ_Y le foncteur en anneaux :

$$S' \mapsto \Gamma(Y \times_S S') \quad (\text{pour tout } S' \text{ dans } \mathbf{Sch}/S)$$

et on note Γ_Y^* le sous-foncteur en groupes des unités de Γ_Y . A tout S -morphisme de S -schémas $u : Z \rightarrow Y$ correspondent des morphismes $\Gamma(u) : \Gamma_Z \rightarrow \Gamma_Y$ et $\Gamma(u)^* : \Gamma_Z^* \rightarrow \Gamma_Y^*$.

Soient de nouveau $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, plat et de présentation finie, et (R, i) un rigidificateur de $P = \text{Pic}_{X/S}$. Alors Γ_X est un fibré vectoriel de présentation finie sur S (1.4) et Γ_X^* est un ouvert de Γ_X ; Γ_R est un fibré vectoriel lisse sur S défini par le $\mathcal{O}_S$ -Module localement libre $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_S)$ et par suite Γ_R^* est un S -schéma en groupes lisse, d'ailleurs affine sur S (car égal à l'ouvert de Γ_R où la « norme universelle » de R relativement à S est inversible). De plus $\Gamma(i) : \Gamma_X \rightarrow \Gamma_R$ est une immersion fermée (2.2.1), donc $\Gamma(i)^* : \Gamma_X^* \rightarrow \Gamma_R^*$ est une immersion.

Proposition (2.4.1). — *Si $r : (P, R) \rightarrow P$ est le morphisme canonique, on a une suite exacte canonique de faisceaux (pour la topologie de Zariski) :*

$$(**) \quad 0 \rightarrow \Gamma_X^* \xrightarrow{\Gamma(i)^*} \Gamma_R^* \xrightarrow{u} \text{Ker}(r) \rightarrow 0.$$

En effet, si pour tout $T \in \text{Sch}/S$ et tout $a \in \Gamma(R_T)^*$ on fait correspondre l'élément $(\mathcal{O}_{X_T}, \alpha_a)$ de $(P, R)(T)$, où $\alpha_a : \mathcal{O}_{R_T} \xrightarrow{\sim} i_T^*(\mathcal{O}_{X_T}) = \mathcal{O}_{R_T}$ est la multiplication par a , on définit un morphisme $u : \Gamma_R^* \rightarrow \text{Ker}(r)$. Il est clair que $\text{Ker}(u) = \text{Im } \Gamma_X^*$ et il résulte de (2.1.2, c)) que u est couvrant pour la topologie de Zariski, d'où la proposition.

(2.4.2) Si s est un point de S , on note $\bar{s}$ le spectre d'une clôture séparable de $\kappa(s)$. Pour tout S -schéma Y et tout entier $i \geq 0$, on pose $h^i(X_s) = \dim_{\kappa(s)} H^i(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Enfin $c(Y_{\bar{s}})$ désigne le nombre de composantes connexes de $Y_{\bar{s}}$. On a alors le résultat suivant :

Proposition (2.4.3). — *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, plat, de présentation finie et (R, i) un rigidificateur de $P = \text{Pic}_{X/S}$.*

a) *Pour tout $s \in S$ le morphisme canonique $r_s : (P, R)_s \rightarrow P_s$ est un morphisme lisse surjectif de s -schémas en groupes localement de type fini.*

b) *$\text{Ker}(r_s)$ est un s -schéma en groupes lisse, affine, connexe, de dimension $h^0(R_s) - h^0(X_s)$ et son tore maximal est de dimension $c(R_{\bar{s}}) - c(X_{\bar{s}})$.*

On a déjà remarqué (1.5.2) que P_s est un schéma en groupes localement de type fini et il en est de même de l'espace algébrique $(P, R)_s$ ([4], (4.2)). Comme r_s est couvrant pour la topologie étale (2.1.2), r_s est fidèlement plat et il sera lisse si $\text{Ker}(r_s)$ est lisse. Il reste donc à étudier $\text{Ker}(r_s)$.

D'après (2.4.1), $\text{Ker}(r_s)$ qui est aussi égal à $(\text{Ker}(r))_s$ est isomorphe à $\Gamma_{R_s}^* / \Gamma_{X_s}^*$, donc est quotient d'un groupe algébrique lisse, affine, connexe, et par suite possède les mêmes propriétés (cf. SGA 3, 11.9); sa dimension est égale à :

$$\dim \Gamma_{R_s}^* - \dim \Gamma_{X_s}^* = \dim \Gamma_{R_s} - \dim \Gamma_{X_s} = h^0(R_s) - h^0(X_s).$$

D'autre part, si Λ est un s -schéma fini, il est classique que la dimension du tore maximal de Γ_Λ^* est égale au degré séparable de Λ sur s , égal encore au nombre de composantes locales de $\Lambda_{\bar{s}}$, d'où la dernière assertion.

Proposition (2.4.4). — *Sous les conditions de (2.4.3) les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *P est un S-espace algébrique localement de présentation finie.*
- 2) *La section unité $S \rightarrow P$ de P est représentable par une immersion.*
- 2 bis) *La section unité de P est un morphisme représentable.*
- 3) *Le noyau du morphisme $r : (P, R) \rightarrow P$ est représentable.*
- 4) *X est cohomologiquement plat sur S.*

Les implications $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 2 \text{ bis}) \Rightarrow 3)$ sont claires. Prouvons $3) \Rightarrow 4)$. Comme $\text{Ker}(r)$ est un foncteur localement de présentation finie, s'il est représentable c'est un schéma localement de présentation finie sur S. Considérons alors la suite exacte (**) de (2.4.1). Les fibres, au-dessus des points de S, de l'épimorphisme de groupes u , sont nécessairement des morphismes plats; d'autre part Γ_R^* est lisse, donc plat sur S. Par suite, u est plat (EGA, IV, (11.3.10)) et *a fortiori*, Γ_X^* est plat sur S. Mais Γ_X^* est un ouvert, couvrant S, du fibré vectoriel Γ_X , de sorte que Γ_X^* ne peut être plat sur S que si Γ_X est lisse sur S, c'est-à-dire si X est cohomologiquement plat sur S (1.4). L'implication $4) \Rightarrow 1)$ résulte, au choix, du théorème de M. Artin (1.5.1) ou du fait que P est quotient de l'espace algébrique localement de présentation finie (P, R) par une relation d'équivalence plate de présentation finie, donc est aussi un espace algébrique localement de présentation finie ([3], Cor. (7.3)).

Remarques. — a) Dans ce paragraphe et dans les suivants, au lieu de considérer un S-schéma X propre, plat et de présentation finie, on pourrait plus généralement travailler avec un S-espace algébrique propre, plat et de présentation finie.

b) Il est probable que le morphisme $r : (P, R) \rightarrow P$ est formellement lisse (EGA, IV, (17.1.1)).

c) Soit $f : X \rightarrow S$ propre, plat avec S localement noethérien. On peut montrer que $\text{Pic}_{X/S}$ admet une enveloppe au sens de Schlessinger [14]. La notion de foncteur de Picard avec rigidificateur (P, R) est d'ailleurs une notion voisine de celle d'enveloppe de P. En fait (P, R) sera en général moins « proche de P » qu'une enveloppe, mais présente l'avantage d'être un foncteur en groupes, de nature géométrique.

d) Notons que d'après (2.4.3), les fibres de (P, R) et celles de P ont même rang abélien (=dimension de la plus grande variété abélienne quotient).

e) Dans le paragraphe suivant, on utilise (P, R) comme étant un espace algébrique couvrant P. Si on suppose $X \rightarrow S$ *projectif*, plat et de présentation finie, on peut remplacer, dans une certaine mesure, la considération de (P, R) par celle de l'ouvert D du schéma de Hilbert de X sur S, qui correspond aux diviseurs positifs sur X relativement à S (cf. [6], n° 4). On a alors un morphisme de monoïdes $p : D \rightarrow P$ tel que P soit la réunion des translatés de l'image de D par les multiples d'un faisceau ample. En adaptant convenablement la démonstration de *loc. cit.*, on peut donner une description précise du graphe de p . C'est là la voie suivie par le rédacteur, avant la parution des théorèmes de représentabilité de M. Artin.

3. Compléments sur les schémas en groupes sur un trait.

(3.1) Jusqu'à la fin de l'article, S désigne, sauf mention expresse du contraire, un trait de point fermé s , de point générique t . On note K le corps des fractions de S , k le corps résiduel, p l'exposant caractéristique de k , π une uniformisante de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Pour tout entier $m \geq 0$, S_m est le fermé de S défini par l'idéal engendré par π^{m+1} . Si Y est un S -schéma, on note Y_m le schéma sur S_m , déduit de Y par le changement de base $S_m \rightarrow S$.

(3.2) Soient T un schéma localement noethérien et $F : (\mathbf{Sch}/T)^0 \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant.

a) Nous dirons que F est *séparé sur T* s'il satisfait au critère valuatif de séparation (EGA, II, (7.2)), c'est-à-dire si, pour tout trait S au-dessus de T , l'application $F(S) \rightarrow F(t)$ est injective. Si F est un espace algébrique localement de type fini, F est séparé sur T en tant qu'espace algébrique, si et seulement si F est séparé sur T en tant que foncteur.

b) Nous dirons que $F \rightarrow T$ est *universellement générissant* si, pour tout trait S au-dessus de T et tout $\bar{a} \in F(s)$, il existe un morphisme de traits $S_1 \rightarrow S$ et un élément a_1 de $F(S_1)$ tels que $\bar{a}$ et a_1 aient même image dans $F(s_1)$ (où s_1 désigne le point fermé de S_1). Lorsque F est un schéma localement de type fini sur T , $F \rightarrow T$ est universellement générissant si et seulement si $F \rightarrow T$ est universellement ouvert (EGA, IV, (14.5.8)).

c) Supposons que T soit un trait S et que F soit un faisceau pour la topologie fppf. Si G est un sous-faisceau de F_t , on appelle *adhérence schématique de G dans F* le sous-faisceau fppf de F engendré par les morphismes $Z \xrightarrow{u} F$, où $u : Z \rightarrow F_t$ se factorise à travers G et où Z est plat sur S . Lorsque F est un schéma et G un sous-schéma fermé de F_t , on retrouve l'adhérence schématique de G dans F au sens usuel (EGA, IV, (2.8.5)).

d) Soient k un corps et G un k -schéma en groupes commutatif, localement de type fini. Alors G possède un plus petit sous-groupe ouvert connexe, sa composante neutre G^0 (SGA 3, VI_A, 2); G^0 est de type fini sur k . Le groupe quotient G/G^0 (SGA 3, VI_A, 5) est étale; on note G^τ le sous-groupe ouvert de G image réciproque du sous-groupe de torsion de G/G^0 (cf. [6], VI, 1). Si maintenant T est un schéma et G est un T -foncteur en groupes commutatif, à fibres représentables et localement de type fini (par exemple si $G = \text{Pic}_{X/T}$, où $X \rightarrow T$ est propre (1.5.2)), on définit le sous-foncteur en groupes G^0 comme suit : pour tout T -schéma T' , $G^0(T')$ est le sous-groupe de $G(T')$ formé des éléments qui sur chaque point t de T' induisent un élément de $G_t^0(t)$. On définit de façon analogue le sous-groupe G^τ .

Enfin rappelons le théorème de finitude suivant (SGA 6, XIII).

Théorème (3.2.1). — Soit X un schéma propre sur un corps k . Alors P^τ/P^0 est fini et $P/P^0(\bar{k})$ est un groupe de type fini (où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k).

(3.3) Complément sur les schémas en groupes sur un trait.

Théorème (3.3.1). — Soit T un schéma localement noethérien, normal, de dimension 1. Alors tout T -espace algébrique en groupes G , localement de type fini et séparé sur T , est un schéma.

La démonstration de ce théorème de représentabilité est assez technique et figurera

dans [2], où l'on trouvera également des résultats concernant les espaces homogènes. Pour rassurer le lecteur, nous allons esquisser la démonstration de (3.3.1) dans le cas plus simple où G est lisse sur un trait S , ce qui nous suffira dans la suite pour traiter le cas des courbes.

Lemme (3.3.2). — *Soient S un trait, X un S -schéma de type fini normal, plat sur S , R un sous-schéma fermé de $X \times_S X$ qui est le graphe d'une relation d'équivalence plate sur X . Notons Y le faisceau fppf quotient X/R . Soit V le plus grand ouvert représentable de Y , et U son image réciproque dans X . Alors U contient les points maximaux des fibres de X au-dessus de S .*

Soit x un point maximal de X_s . Comme X est normal, l'anneau local $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. Soient K le corps des fractions de A , $\bar{X} = \text{Spec}(A)$, $\bar{R}$ le sous-schéma fermé de $\bar{X} \times_S \bar{X}$ égal au graphe de la relation d'équivalence induite par R sur $\bar{X}$. Comme U est dense dans X (SGA 3, V, (8.1)), la relation d'équivalence induite par R sur $\text{Spec}(K)$ est effective et le quotient est évidemment de la forme $\text{Spec}(L)$, où L est un sous-corps convenable de K . Soit B l'anneau de valuation discrète induit par A sur L et soit $\bar{Y} = \text{Spec}(B)$. Le morphisme $\bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ est fidèlement plat et son graphe est un sous-schéma fermé de $\bar{X} \times_S \bar{X}$, plat sur $\bar{X}$, qui a même fibre générique que $\bar{R}$; par suite, il est égal à $\bar{R}$. Il en résulte que $\bar{Y}$ est le quotient fpqc $\bar{X}/\bar{R}$.

Prouvons maintenant que $\bar{Y}$ est essentiellement de type fini sur S . Des considérations faciles de dimension montrent que le degré de transcendance r du corps résiduel de B sur $\kappa(s)$ est égal au degré de transcendance du corps des fractions L de B sur $\kappa(t)$. Quitte alors à remplacer $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ par le localisé de $S[T_1, \dots, T_r]$ au point maximal de la fibre fermée, on peut supposer L fini sur $\kappa(t)$. Pour voir que Y est essentiellement fini sur S , il suffit alors de montrer que Y est de type fini sur S . Soient S' le complété de S , s' son point fermé, t' son point générique, $X', \bar{X}', \dots$ les objets déduits de $X, \bar{X}, \dots$ par le changement de base $S' \rightarrow S$. Soit x' l'unique point de $\bar{X}'_{s'}$ et y' l'unique point de $\bar{Y}'_{s'}$. D'après le lemme (3.3.3) ci-dessous, $\mathcal{O}_{\bar{X}', x'}$ est un anneau de valuation discrète; comme $\bar{X}'$ est plat sur $\bar{Y}'$, $\mathcal{O}_{\bar{Y}', y'}$ est aussi un anneau de valuation discrète. Mais L est fini sur $\kappa(t)$ et S' est complet; il en résulte que $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Y}', y'})$ est le normalisé de S' dans une extension finie de $\kappa(t')$ et donc est fini sur S' . Il est clair alors que $\bar{Y}'$ est somme de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Y}', y'})$ et d'un schéma fini sur $\kappa(t')$, donc est de type fini sur S' ; par suite Y est de type fini sur S .

Ceci étant, on peut donc supposer que Y est un localisé d'un S -schéma de type fini Y_1 . Quitte à restreindre X , on peut supposer que le morphisme $\bar{X} \rightarrow Y_1$ provient d'un S -morphisme $u : X \rightarrow Y_1$ que l'on peut supposer plat. Par passage à la limite, on voit qu'il existe un ouvert U' de X , contenant x , tel que la relation d'équivalence induite par R sur U' soit le graphe de $u|_{U'}$. Si alors V' est l'ouvert de Y_1 image de U' , il est clair que V' est un ouvert de X/R , d'où le lemme.

Lemme (3.3.3). — *Soient $X \rightarrow S$ un morphisme localement de type fini, S' le complété de S , $X' \rightarrow S'$ le morphisme déduit de $X \rightarrow S$ par changement de base, x' un point maximal de X'_s , x son image dans X_s . Si X est normal en x , X' est normal en x' .*

Le point x est un point maximal de X_s et il nous suffit de traiter le cas où X est plat sur S en x , auquel cas $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète; soit a une uniformisante. Comme X est localement de type fini sur S , $\mathcal{O}_{X',x'}$ est noethérien, de dimension 1. Comme son idéal est engendré par l'image réciproque de a , $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un anneau de valuation discrète.

Ceci étant, prouvons le théorème (3.3.1) dans le cas où $T=S$ et G est lisse sur S . Il existe donc un S -schéma X , lisse sur S et un morphisme étale surjectif $X \rightarrow G$ tel que $R = X \times_G X$ soit un sous-schéma fermé de $X \times_S X$ étale sur X . Comme G est un groupe, G_t et G_s sont représentables ([4], § 4). D'autre part, il résulte de (3.3.2) que le plus grand ouvert V de G qui est représentable, contient les points maximaux de G_s , donc V_s est dense dans G_s . Soit alors S' un hensélisé strict de S et notons G' , V' , ... les images réciproques de G , V , ... par le morphisme $S' \rightarrow S$. Alors G' est lisse sur S' , V' contient G'_t , et V'_s est dense dans G'_s ; il en résulte que la réunion des translatés de V' par les éléments de $G'(S')$ est égal à G' ; donc G' est représentable et nous sommes ramenés à un problème de descente relativement à $S' \rightarrow S$. Notons que l'on peut recouvrir G par des ouverts G_i dont les fibres sont des composantes irréductibles des fibres de G/S . Il nous suffit de voir que chacun des G_i est un schéma. Soit W un ouvert affine de $V \cap G_i$ qui contient le point générique de $(G_i)_s$, et soit D_t un diviseur positif de $(G_i)_t$ dont le support est $(G_i)_t - W_t$. Notons D'_t son image réciproque dans $(G_i)_t$, et D' l'adhérence schématique de D'_t dans G'_i . Alors D' est un diviseur sur G'_i qui est S' -ample ([12], V, (3.10)) et stable par la donnée de descente relative à $S' \rightarrow S$; donc G_i est représentable (SGA 1, VIII, (7.7)).

(3.3.4) Soit G un S -espace algébrique en groupes, localement de type fini. Les fibres de G sont alors représentables ([4], § 4) et on peut appliquer à G les considérations de (3.2, d)). On note G^{00} le sous-groupe ouvert de G complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de G_s autres que la composante neutre; G^{00} est donc le plus grand sous-groupe ouvert de G à fibre spéciale connexe. Si H_t est un sous-schéma en groupes de G_t , on note $\bar{H}$ l'adhérence schématique de H_t dans G . Par réduction au cas des schémas (cf. EGA, IV, (2.8)), on voit que H est un sous-espace algébrique en groupes de G , fermé dans G et plat sur S .

Proposition (3.3.5). — *Soit E l'adhérence schématique dans G du sous-groupe unité de G_t . Alors E est un sous-espace algébrique en groupes de G , invariant dans G et étale sur S . Le groupe quotient G/E est un schéma en groupes localement de type fini et séparé sur S .*

En effet, comme la section diagonale d'un espace algébrique est une immersion, la section unité $e : S \rightarrow E$ de E est une immersion, donc $e(S)$ est un sous-espace algébrique fermé d'un ouvert U de E . Comme E est plat sur S , U est plat sur S , donc est l'adhérence schématique dans U de $U_t = E_t = e_t(t)$. Par suite e est un isomorphisme de S sur U . Donc la section unité de E est une immersion ouverte; alors E est net sur S et comme E est plat sur S , E est même étale sur S . Il est clair dans ces conditions que G/E est un espace algébrique en groupes, localement de type fini sur S et séparé, donc est représentable (3.3.1).

Proposition (3.3.6). — Soient G un S -espace algébrique en groupes, localement de type fini, et E l'adhérence schématique dans G de la section unité :

- 1) E est un schéma si et seulement si le groupe (étale) E_s est constant.
- 2) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) $\bar{G}^{00}$ (3.3.4) est un schéma en groupes séparé sur S .
 - b) Il existe un sous-groupe ouvert de $\bar{G}$ qui est représentable.
 - c) $\bar{G}^0$ est séparé sur S (3.2, a)).

Si de plus $\kappa(s)$ est séparablement clos, les conditions précédentes entraînent que G est représentable.

- 3) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) G^0 est séparé sur S .
 - b) Il existe un sous-groupe ouvert de G qui est représentable et séparé sur S .
- 4) Supposons G commutatif. Alors si G^τ (3.2, d)) est séparé sur S , G^τ est représentable, et dans ce cas, G est représentable si et seulement si E_s est un groupe constant.

Démonstration. — 1) Supposons que E soit un schéma et soit a un point de E_s . Alors il est clair qu'un ouvert affine de E contenant a est isomorphe à S , d'où le fait que E_s est constant. Réciproquement si E_s est constant, E est représenté par le schéma obtenu en recollant, au-dessus de t , une famille de copies de S indexée par $E(s)$.

Notons H le S -schéma en groupes séparé G/E (3.3.5) et soit $h : G \rightarrow H$ l'épimorphisme étale canonique.

2) On a $a) \Rightarrow b)$ et $b)$ entraîne que $\bar{G}^{00}$ est représentable. On a $h(\bar{G}^{00}) = \bar{H}^{00}$. Supposons que $\bar{G}^{00}$ soit représentable et soit ξ (resp. η) le point générique de $\bar{G}_s^{00}$ (resp. $\bar{H}_s^{00}$). Alors l'image réciproque dans $\bar{G}^{00}$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{H}^{00}, \eta})$ est $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{G}^{00}, \xi})$. Comme $\bar{G}^{00}$ est étale sur $\bar{H}^{00}$ et que h_t est un isomorphisme, on a nécessairement $\mathcal{O}_{\bar{G}^{00}, \xi} \simeq \mathcal{O}_{\bar{H}^{00}, \eta}$ et par suite $\bar{G}^{00} \simeq \bar{H}^{00}$ et $\bar{G}^{00}$ est séparé (cf. SGA 3, VI_B, (5.3)). Donc $a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c)$. Enfin, $c) \Rightarrow a)$, car $\text{Ker}(\bar{G}^{00} \rightarrow \bar{H}^{00})$ est l'adhérence schématique de la section unité dans $\bar{G}^{00}$, donc est contenu dans le foncteur composante neutre $\bar{G}^0$, donc est nul si $\bar{G}^0$ est séparé sur S , et $\bar{G}^{00}$ est alors isomorphe à $\bar{H}^{00}$.

Supposons de plus $\kappa(s)$ séparablement clos et montrons que G est alors représentable. Considérons l'épimorphisme canonique $\bar{G} \rightarrow \bar{H}$ déduit de h . Soit $\bar{G}_i$ un ouvert de $\bar{G}$ obtenu en enlevant de $\bar{G}$ toutes les composantes connexes de $\bar{G}_s$ sauf une. Comme $\kappa(s)$ est séparablement clos, $(\bar{G}_i)_s$ est un toseur trivial sous $\bar{G}_s^{00}$ et la restriction de h à $\bar{G}_i$ est un isomorphisme sur un ouvert de $\bar{H}$ puisqu'il en est ainsi de la restriction de h à $\bar{G}^{00}$. Il en résulte que $\bar{G}_i$ est représentable, et par suite $\bar{G}$ est représentable. Indiquons rapidement comment on déduit de là que G lui-même est représentable. Notons d'abord que pour tout entier $m \geq 0$, G_m (3.1) est représentable ([3], (3.2)). Soit alors G_j un ouvert de G obtenu en enlevant de G_s toutes les composantes connexes sauf une. Il nous suffit de montrer que G_j est représentable. Or, utilisant le fait que G_j est de type fini sur S ,

on peut montrer que G_j s'obtient par recollement, suivant leur fermé intersection, de $\bar{G} \cap G_j$ et de $(G_j)_m$, pour m assez grand, donc G_j est représentable (pour plus de détails, cf. [2]).

3) Il est clair que $b) \Rightarrow a)$; d'autre part, si G^0 est séparé, G^{00} est isomorphe à H^{00} , donc est représentable, d'où $a) \Rightarrow b)$.

4) Notons d'abord que G^τ est un sous-groupe ouvert de G (cf. [6], VI, Th. (1.1)). Si G^τ est séparé sur S , G^τ est donc représentable (3.3.1). Compte tenu de 1), il reste à voir, que si de plus E_s est constant, alors G est représentable. Pour cela, on va montrer que si $(G_j)_s$ est une composante irréductible de G_s , alors $h_s|(G_j)_s$ est un monomorphisme. Le morphisme $h: G \rightarrow H$ sera alors un isomorphisme local (pour Zariski) donc G sera représentable. Après passage au quotient par $G_s^0 \simeq H_s^0$, on est ramené à prouver que le tore G_s/G_s^0 , sous le groupe étale E_s de base le schéma discret H_s/H_s^0 , est trivial. Or, par hypothèse, E_s est un groupe constant, et il est sans torsion puisque G^τ est séparé. Il en résulte que pour toute extension L de $\kappa(s)$, la cohomologie galoisienne $H_{\text{ét}}^1(\text{Spec}(L), E_s)$ est nulle, d'où le résultat.

4. Plus grand quotient séparé de P .

(4.0) *Jusqu'à la fin de l'article*, $f: X \rightarrow S$ désigne, sauf mention du contraire, un morphisme propre et plat. On pose $P = \text{Pic}_{X/S}$.

(4.1) Représentabilité du plus grand quotient séparé de P .

Soit (R, i) un rigidificateur de P (2.2.3, c)), de sorte que (P, R) est un S -espace algébrique en groupes, localement de type fini sur S (2.3.1); notons $r: (P, R) \rightarrow P$ l'épimorphisme canonique. Soit $N_i = \text{Ker}(r_i)$, qui est un sous-schéma en groupes de $(P, R)_i$ et soit N l'adhérence schématique dans (P, R) de N_i , qui est donc un sous-espace algébrique en groupes de (P, R) , fermé dans (P, R) et plat sur S (3.3.4). Soit Q le faisceau fppf quotient $(P, R)/H$. Comme (P, R) est un S -espace algébrique, Q est aussi le quotient d'un S -schéma Y , localement de type fini, par une relation d'équivalence, dont le graphe est un sous-schéma fermé de $Y \times_S Y$, plat sur Y . Il résulte alors de ([3], Th. (7.1)) que Q est un S -espace algébrique, localement de type fini et séparé sur S . D'après (3.3.1), Q est donc représentable.

Considérons l'épimorphisme canonique (2.4.1) $u: \Gamma_R^* \rightarrow \text{Ker}(r)$. Comme Γ_R^* est lisse sur S , donc plat, et que u_i se factorise à travers $H_i = \text{Ker}(r)_i$, u se factorise à travers l'adhérence schématique H de H_i dans (P, R) . Par suite, l'épimorphisme canonique $(P, R) \rightarrow Q$ se factorise en $q \circ r$, où $q: P \rightarrow R$ est un épimorphisme fppf, de noyau égal à $r(H)$. Montrons que $r(H)$ est égal à l'adhérence schématique E de la section unité de P (3.2, c)), ce qui entraînera que le couple (Q, q) ne dépend pas du choix du rigidificateur (R, i) . Comme H est un S -espace algébrique plat sur S , il est immédiat que $r(H)$ est contenu dans E . Comme Q est séparé sur S , il est clair également que E est contenu dans $\text{Ker}(q)$, d'où le fait que $E = \text{Ker}(q)$. Soit alors G un S -faisceau fppf en groupes,

tel que l'adhérence de la section unité de G_i dans G soit la section unité de G . Alors tout S -morphisme de groupes $P \rightarrow G$ se factorise de manière unique à travers Q . Notons encore que la formation du sous-espace algébrique H de (P, R) commute à toute extension de traits $S' \rightarrow S$ et par suite il en est de même de Q . Résumons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

Théorème (4.1.1). — Soit E l'adhérence schématique de la section unité de P . Alors E est un sous-faisceau en groupes de P et le faisceau fppf quotient $Q_{X/S} = Q = P/E$ est un schéma en groupes localement de type fini sur S et séparé sur S . Si $q : P \rightarrow Q$ désigne l'épimorphisme canonique, tout S -morphisme de P dans un S -espace algébrique en groupes G , séparé sur S , se factorise à travers Q . De plus, la formation de Q commute à toute extension de traits $S' \rightarrow S$.

Corollaire (4.1.2). — Le morphisme $q_i : P_i \rightarrow Q_i$ est un isomorphisme et $q_s : P_s \rightarrow Q_s$ est un morphisme fidèlement plat; son noyau E_s est un sous-schéma en groupes (fermé) de P_s .

Remarque (4.1.3). — On obtient une description partielle de E_s à l'aide des valeurs de E dans les traits au-dessus de S , de la manière suivante. Soit $\bar{a}$ un point fermé de E_s . Comme $r|H : H \rightarrow E$ est couvrant, on peut trouver un point fermé $\bar{b}$ de H_s au-dessus de $\bar{a}$. Comme H est un S -espace algébrique plat sur S , il existe une quasi-section de H , passant par $\bar{b}$; plus précisément, on peut trouver un S -schéma Y , de type fini, quasi-fini et plat sur S , et un morphisme $j : Y \rightarrow H$, dont l'image contient $\bar{b}$. On en déduit qu'il existe un S -trait S' , de point fermé s' , dont le corps des fractions est fini sur le corps des fractions de S , tel qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}'$ sur $X' = X \times_S S'$, dont la fibre générique est triviale et dont la fibre spéciale définit un point rationnel de $P_{s'}$ qui est au-dessus de $\bar{a}$.

Proposition (4.1.4). — Soient X et Y deux S -schémas propres et plats et soit $h : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Alors le morphisme $\text{Pic}(h) : \text{Pic}_{Y/S} \rightarrow \text{Pic}_{X/S}$ définit par passage au quotient un morphisme $Q(h) : Q_{Y/S} \rightarrow Q_{X/S}$ sur les plus grands quotients séparés.

(4.2) Relations entre P , Q , (P, R) .

Dans ce paragraphe, on suppose donné un rigidificateur (R, i) de P et on conserve les notations du numéro précédent.

Proposition (4.2.1). — 1) On a $r^{-1}(P^0) = (P, R)^0$ et $q(P^0) = Q^0$. On a $r^{-1}(P^\tau) = (P, R)^\tau$ et $q(P^\tau) = Q^\tau$. De plus, P^τ est un ouvert de P .

2) Si P^0 est formellement lisse sur S (EGA, IV, (17.1.1)), $(P, R)^0$ et Q^0 sont lisses sur S et dans ce cas P^0 est un ouvert de P .

3) P^0 (resp. P^τ , resp. P) est universellement générissant (3.2, b)) si et seulement si il en est de même de Q^0 (resp. Q^τ , resp. Q).

4) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) P^0 est l'adhérence schématique de P_i^0 dans P^0 .
- (ii) Q^0 est l'adhérence schématique de Q_i^0 dans Q^0 .

De plus, si ces conditions sont réalisées, P^0 est un ouvert de P et Q^0 est un ouvert de Q .

La démonstration de cette proposition est facile. Prouvons par exemple l'asser-

tion 2). Supposons donc P^0 formellement lisse sur S ; alors P_s est lisse sur s ; donc Q_s est lisse sur S et comme $\text{Ker}(r_s)$ est lisse (2.4.3), $(P, R)_s$ est aussi lisse. Soit $\bar{Q}$ l'adhérence schématique de Q_t dans Q . Montrons que $(\bar{Q})_s^0 = Q_s^0$. Sinon, comme Q_s^0 est lisse, donc réduit, on aurait $\dim(\bar{Q})_s^0 < \dim Q_s^0$ et on pourrait trouver un point fermé $\bar{b}$ dans $(\bar{Q})_s^0 - Q_s^0$. Quitte à faire une extension finie de traits, on peut supposer que $\bar{b}$ est rationnel et se relève en un point rationnel $\bar{a}$ de P_s^0 . Comme P^0 est formellement lisse sur S , $\bar{a}$ se relève en un point de $P^0(S_m)$ pour tout entier $m \geq 0$, donc $\bar{b}$ se relève en un point de $Q^0(S_m)$ pour tout m , ce qui contredit visiblement le choix de $\bar{b}$. On a donc $(\bar{Q})_s^0 = Q_s^0$, d'où on déduit que $Q^0 = \bar{Q}^0$ (3.3.4), donc est plat sur S et par suite est lisse sur S (EGA, IV, (17.5.1)). Mais alors Q^0 est un sous-groupe ouvert de Q^0 (SGA 3, VI_B, (3.10)). Comme P^0 est l'image réciproque de Q^0 dans l'ouvert P^0 de P , P^0 est un ouvert de P . Enfin, comme (P, R) est plat sur Q , l'image réciproque $(P, R)^0$ de P^0 est un ouvert de (P, R) plat sur S ; comme $(P, R)_s$ est lisse sur s , $(P, R)^0$ est lisse sur S .

5. Représentabilité de P .

Proposition (5.1). — On a $\dim E_s = h^0(X_s) - h^0(X_t)$ (notations de (2.4.2)).

En effet, reprenons la construction donnée dans (4.1) de sorte que l'on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(r) \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Comme H est un S -espace algébrique en groupes, plat sur S , on a $\dim H_s = \dim H_t$ (cf. SGA 3, VI_B, (4.3)). Par ailleurs $H_t = \text{Ker}(r_t)$, donc $\dim(H_t) = h^0(R_t) - h^0(X_t)$ (2.4.3) et on déduit de la suite exacte ci-dessus que :

$$\dim(H_s) = \dim E_s + \dim \text{Ker}(r_s) = \dim E_s + h^0(R_s) - h^0(X_s).$$

La proposition résulte alors du fait que $h^0(R_s) = h^0(R_t)$ puisque R est fini et plat sur S .

Proposition (5.2). — Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est cohomologiquement plat sur S (1.4).
- (ii) P est un S -espace algébrique.
- (iii) E est un S -espace algébrique.
- (iv) E est un S -espace algébrique étale sur S .
- (v) E_s est étale sur s .
- (vi) E_s est de dimension 0.
- (vii) $E^0 = 0$ (3.2, d)).
- (viii) E^0 est séparé sur S (3.2, a)).

Pour que E soit représentable il faut et il suffit que E_s soit un groupe constant.

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii) par (2.2.4); (ii) $\Rightarrow$ (iii) est clair. Si E est un S -espace algébrique, c'est nécessairement un espace algébrique localement de présentation finie sur S , donc (iii) $\Rightarrow$ (iv) (3.3.5). Les implications (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) sont claires et (vi) $\Rightarrow$ (i)

d'après (5.1). On a évidemment (iv) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii). Montrons que (viii) $\Rightarrow$ (vi). Soit $\bar{a}$ un point fermé du groupe algébrique E_s^0 . Quitte à faire une extension de traits, on peut supposer que $\bar{a}$ est rationnel et provient d'un point $a \in E(S)$ (4.1.3). Nécessairement, $a \in E^0(S)$, donc $a = 0$ puisque E est séparé sur S et $E_t = 0$, d'où le fait que $\dim E_s^0 = 0$. Enfin la dernière assertion de (5.2) résulte de (3.3.6.1).

Dans la proposition suivante, on utilise les notations introduites dans (3.3.4).

Proposition (5.3). — *Les conditions suivantes sont équivalentes et impliquent celles de (5.2).*

- (i) $\bar{P}^{00}$ est un schéma en groupes séparé sur S .
- (ii) Il existe un sous-groupe ouvert de $\bar{P}$ qui est représentable.
- (iii) $\bar{P}^0$ est séparé sur S (3.2, a)).

Si de plus $\kappa(s)$ est séparablement clos, les conditions précédentes entraînent que P est représentable.

Il est clair que ces conditions entraînent celles de (5.2), de sorte que P est un S -espace algébrique en groupes. La proposition résulte alors de (3.3.6, 2)).

Lorsque $\kappa(s)$ est séparablement clos, la proposition (5.3) fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour que P soit représentable. Comme cette condition est assez peu « parlante », nous allons la renforcer légèrement dans les deux énoncés suivants, de façon à faire intervenir les foncteurs P^0 et P^τ .

Proposition (5.4). — 1) *Les conditions suivantes sont équivalentes et impliquent celles de (5.3) :*

- (i) P^0 est séparé sur S .
- (ii) Il existe un sous-groupe ouvert de P qui est représentable et séparé sur S .

2) *La condition « P^0 est séparé » est équivalente à « $\bar{P}^0$ est séparé » dans chacun des deux cas suivants :*

a) P^0 est universellement générissant sur S (3.2, b)) (condition équivalente à « Q^0 est universellement générissant » (4.2.1, 3)) et vérifiée en particulier si $\dim P_s = \dim P_t$).

b) $P^0(\bar{s}) \cap E(\bar{s})$ (qui est un groupe fini d'après (5.1)) est d'ordre premier à la caractéristique de s (par exemple ce sera le cas si $\kappa(s)$ est de caractéristique nulle).

L'assertion 1) n'est autre que (3.3.6, 3)). Prouvons l'assertion 2). Dans le cas a) $(\bar{P} \cap P^0)_s$ a même espace sous-jacent que P_s^0 et par suite $\bar{P} \cap P^0 = \bar{P}^0$, donc P^0 est séparé sur S si et seulement si $\bar{P}^0$ est séparé sur S . Dans le cas b), on note que $P_s^0/(\bar{P})_s^0$ est un groupe algébrique unipotent (cf. (6.3.1) ci-après); par suite, si $P^0(\bar{s}) \cap E(\bar{s})$ est d'ordre premier à la caractéristique de $\kappa(s)$, $E_s \cap P_s^0$ est contenu dans $\bar{P}_s^0$ et la séparation de P^0 équivaut à celle de $\bar{P}^0$.

Proposition (5.5). — *Si P^τ est séparé sur S , P^τ est représentable. De plus, dans ce cas, P est représentable si et seulement si E_s est constant.*

Il suffit d'appliquer (3.3.6, 4)).

6. Étude de E.

(6.1) *Multiplicités et propriété (N).*

(6.1.1) Soient Y un S -schéma de type fini, Y_i une composante irréductible de Y_s , y_i son point générique. On note d_{y_i} ou d_i la multiplicité (apparente) de Y_i dans Y_s , égale à la longueur de $\mathcal{O}_{Y_s, y_i}$. On note δ_{y_i} ou δ_i la multiplicité totale de Y_i dans Y_s . Si $\bar{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$ et si $\bar{y}_i$ est un point de $Y_{\bar{s}}$ au-dessus de y_i , δ_{y_i} est donc égale à la longueur de $\mathcal{O}_{Y_{\bar{s}}, \bar{y}_i}$. On a $\delta_{y_i} = d_{y_i} p^{n(y_i)}$ pour un certain entier $n(y_i) \geq 0$. On note $d_{Y/S}$ (resp. $\delta_{Y/S}$) le pgcd des entiers d_{y_i} (resp. δ_{y_i}) lorsque y_i parcourt les points maximaux de Y_s . Lorsque $Y = X$, on note $d = d_{X/S}$ et $\delta = \delta_{X/S}$. Il est clair que $\delta_{Y/S}$ est invariant par toute extension de traits $S' \rightarrow S$. Le nombre $d_{Y/S}$ est invariant par passage à l'hensélisé strict et par passage au complété de S .

(6.1.2) Supposons de nouveau $f: X \rightarrow S$ propre et plat. On note D le groupe des diviseurs sur X (au sens de EGA, IV, 21), dont le support est contenu dans X_s et on note D_0 le sous-groupe de D formé des diviseurs principaux. Si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, D_0 est donc le groupe libre engendré par $\text{Div}(\pi)$, où π est une uniformisante de $\Gamma(S)$.

Proposition (6.1.3). — L'application canonique $D/D_0 \rightarrow E(S)$ est bijective.

L'injectivité résulte de (1.3). Pour établir la surjectivité, considérons la factorisation de Stein de f :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & \searrow g & \\ S & & Y \end{array}$$

de sorte que $g_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et que Y est fini et plat sur S . Soit $a \in E(S)$. L'obstruction à relever a en un élément de $\text{Pic}(X)$ est dans $H_{\text{ét}}^2(Y, \mathbf{G}_m)$. Comme a est nul sur la fibre générique, l'obstruction à représenter a par un faisceau inversible sur X est un élément de $\text{Ker}(H_{\text{ét}}^2(Y, \mathbf{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Y_t, \mathbf{G}_m))$, donc est nulle ([7], Cor. (1.5) et Cor. (1.8)). Soit donc $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X qui représente a . Alors $\mathcal{L}_t$ est trivial, donc $\mathcal{L}$ possède une section méromorphe et par suite $\mathcal{L}$ est de la forme $\mathcal{O}_X(\Delta)$ où Δ est un diviseur sur X (EGA, IV, (21.3.3)) que l'on peut prendre dans D puisque Δ_t est principal.

Définition (6.1.4). — Nous dirons que $f: X \rightarrow S$ satisfait à la propriété (N) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- a) X_s n'a pas de composantes immergées.
- b) Pour tout point maximal x de X_s , l'anneau local $\mathcal{O}_{X, x}$ est normal (donc est un anneau de valuation discrète).

Nous dirons que f satisfait à la propriété (N) s'il satisfait à la propriété (N) et si de plus $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$.*

Remarque (6.1.5). — Il résulte de (EGA, IV, (6.3.1)) que la condition a) ci-dessus est équivalente à la condition suivante :

a') Pour tout point x de X_s , qui n'est pas maximal, on a :

$$\text{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq 2.$$

Exemples (6.1.6). — Le morphisme f satisfait à la condition (N) si X est normal ou bien si X_s est réduit.

(6.1.7) Si S' est l'hensélisé strict de S (resp. le complété de S), $X' = X \times_S S'$ satisfait à (N) si et seulement si X satisfait à (N) (cf. (3.3.3)). Plus généralement, la propriété (N) est invariante par tout changement de traits $S' \rightarrow S$, d'indice de ramification égal à 1 (i.e. l'image réciproque d'une uniformisante de $\Gamma(S)$ est une uniformisante de $\Gamma(S')$) et tel que $(X_s)_{\text{red}} \times_{\kappa(s)} \kappa(s')$ soit réduit (condition certainement réalisée si $\kappa(s')$ est une extension séparable de $\kappa(s)$).

Proposition (6.1.8). — Supposons que f satisfasse à la propriété (N).

(i) Si Z est l'ensemble des points de X_s , distincts des points maximaux, X est Z -clos (EGA, IV, (5.9.9)).

(ii) X est réduit.

(iii) Si $X \xrightarrow{g} Y \rightarrow S$ est la factorisation de Stein de f , Y est semi-local normal de dimension ≤ 1 et g satisfait à la propriété (N)*.

L'assertion (i) résulte de (6.1.5) et de (EGA, IV, (5.10.5)). Prouvons (ii). Soit $x \in \text{Ass}(X)$; alors $x \in X_i$; notons $\bar{x}$ l'adhérence schématique de x dans X . Comme X est propre sur S , $\bar{x}_s$ n'est pas vide. Alors, un point maximal z de $\bar{x}_s$ appartient à $\text{Ass}(X_s)$ (EGA, IV, (3.4.3)), donc est un point maximal de X_s . Mais alors X est normal en z , donc est réduit en x , d'où (ii). Considérons $f_*(\mathcal{O}_X)$, qui est une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre finie, réduite d'après (ii). En fait $f_*(\mathcal{O}_X)$ est même normal; en effet, si a est un élément du normalisé de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ dans son anneau total de fractions, a est une fonction rationnelle sur X , dont le domaine de définition U contient X_i . Mais X est normal aux points maximaux de X_s , donc U contient ces points et l'on a $X - U \subset Z$. Comme X est Z -clos d'après (i), a est partout définie. L'assertion (iii) est alors immédiate, compte tenu de (6.1.5).

(6.1.9) Sous les conditions de (6.1.8), comme on a $\text{Pic}_{X/S} \simeq \prod_{Y/S} \text{Pic}_{X/Y}$ ([6], V, § 6), il sera souvent loisible dans la suite de se ramener au cas où f satisfait à la propriété (N)*.

(6.1.10). — Supposons que f satisfasse à la propriété (N) et notons $X_1, \dots, X_r$ les sous-schémas fermés réduits sous-jacents aux composantes irréductibles de X_s . Soit $C \simeq \mathbb{Z}^r$ le groupe libre de cycles divisoriels de X , ayant pour base $X_1, \dots, X_r$. Alors, avec les notations de (6.1.1) et (6.1.2), on a la proposition suivante.

Proposition (6.1.11). — 1) L'application canonique $D \rightarrow C$ (EGA, IV, (21.6.5)) est injective; elle est bijective si les anneaux locaux de X sont factoriels.

2) Le groupe D est libre de type fini; le groupe D/D_0 est de type fini, son sous-groupe de torsion est fini et invariant par passage à l'hensélisé strict et par passage au complété de S .

3) Supposons que f satisfasse à la propriété $(N)^*$, et soit d' le plus grand entier divisant d (6.1.1), tel que le cycle divisoriel :

$$(1/d')(X_s) = \sum_{i=1}^r (d_i/d')(X_i)$$

soit un diviseur. Alors le sous-groupe de torsion de D/D_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}/d'\mathbf{Z}$ et est engendré par l'image de $(1/d')(X_s)$.

Démonstration. — Soit Δ un diviseur sur X , de support contenu dans X_s . Comme X est normal aux points maximaux de X_s , si l'image de Δ dans C est nulle, le support de Δ est en fait contenu dans Z (notations de (6.1.8)), donc Δ est nul (EGA, IV, (21.1.8)). La fin de 1) et l'assertion 3) sont immédiates et l'assertion 2) résulte de 1) et 3) par réduction au cas où f satisfait à $(N)^*$.

(6.2) Foncteur de Picard et dualité de Cartier.

Faute de référence satisfaisante, nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition (6.2.1). — Soient T un schéma, $f: X \rightarrow T$ un morphisme propre, plat, de présentation finie, M un T -schéma en groupes fini, plat et de présentation finie, $M' = \underline{\text{Hom}}(M, \mathbf{G}_m)$ son dual de Cartier. Alors on a un homomorphisme canonique :

$$R^1_{\text{fppf}} f_*(M'_X) \xrightarrow{\Phi} \underline{\text{Hom}}(M, \underline{\text{Pic}}_{X/S})$$

qui est bijectif dans chacun des deux cas suivants :

- 1) $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_T$.
- 2) M est de type multiplicatif (SGA 3, IX).

Démonstration. — Nous allons travailler avec le site fppf des faisceaux en groupes commutatifs sur T . Nous notons simplement R^*f_* le foncteur dérivé du foncteur image directe par f . Soit F un faisceau sur T et considérons le foncteur H :

$$G \mapsto H(G) = f_* \underline{\text{Hom}}(f^*F, G) \simeq \underline{\text{Hom}}(F, f_*G)$$

où G est un faisceau sur X . Le foncteur dérivé R^*H est l'aboutissement de deux suites spectrales :

$$\begin{aligned} R^{p+q}H(G) &\Rightarrow E_2^{p,q} = R^q f_* \underline{\text{Ext}}^p(f^*F, G) \\ R^{p+q}H(G) &\Rightarrow E_2'^{p,q} = \underline{\text{Ext}}^q(F, R^p f_* G). \end{aligned}$$

Prenons alors pour F le faisceau M et pour G le faisceau $(\mathbf{G}_m)_X$. On obtient un diagramme commutatif à lignes exactes, du type suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R^1 f_*(M') & \rightarrow & R^1 H(\mathbf{G}_m) & \rightarrow & f_* \underline{\text{Ext}}^1(M_X, \mathbf{G}_m) \\ (*) & & & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \underline{\text{Ext}}^1(M, f_* \mathbf{G}_m) & \rightarrow & R^1 H(\mathbf{G}_m) & \rightarrow & \underline{\text{Hom}}(M, R^1 f_* \mathbf{G}_m) \rightarrow \underline{\text{Ext}}^2(M, f_* \mathbf{G}_m) \rightarrow R^2 H(\mathbf{G}_m). \end{array}$$

Par composition, on en déduit l'existence de la flèche Φ . Dans le cas 1), on a $f_*(\mathbf{G}_m) = (\mathbf{G}_m)_s$. D'autre part, on a le lemme suivant :

Lemme (6.2.2). — *Pour tout schéma T et tout T -schéma en groupes M fini, plat et localement de présentation finie, on a $\text{Ext}^1(M, \mathbf{G}_m) = 0$.*

Il faut voir qu'un élément de $\text{Ext}^1(M, \mathbf{G}_m)$ est localement trivial pour la topologie fppf. Supposons M annulé par n ; alors il provient d'une extension P de M par μ_n . Quitte à augmenter n , on peut supposer que P est annulé par n . Par dualité de Cartier, on obtient une suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow P' \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0$. Pour trivialisier cette extension, il suffit alors de relever la section 1 de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en une section de P' , ce qui est possible localement pour la topologie fppf.

On déduit alors de (*) que Φ est injectif, et qu'il est surjectif si l'application $\text{Ext}^2(M, f_* \mathbf{G}_m) \rightarrow R^2 H(\mathbf{G}_m)$ est injective. Or c'est là une assertion locale pour la topologie fppf, de sorte que, pour montrer qu'elle est vérifiée, on peut supposer que f possède une section s . On a alors un morphisme fonctoriel en $G : f_*(G) \rightarrow s^*(G)$, d'où l'on déduit un morphisme $R^2 H(G) \rightarrow \text{Ext}^2(F, s^* G)$, tel que le morphisme composé $\text{Ext}^2(F, f_* G) \rightarrow R^2 H(G) \rightarrow \text{Ext}^2(F, s^* G)$ provienne de la flèche $f_*(G) \rightarrow s^* G$. Or, si $G = (\mathbf{G}_m)_X = f^*(\mathbf{G}_m)_S$, cette flèche est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration de (6.2.1) dans le cas 1).

Dans le cas 2), nous allons établir le résultat plus précis suivant :

Proposition (6.2.3). — *Soient T un schéma local, de point fermé s , et $f : X \rightarrow T$ un morphisme propre, plat, de présentation finie. Soient M un T -schéma en groupes fini, de type multiplicatif, et M' son dual de Cartier.*

1) *Si T est strictement hensélien, on a un diagramme commutatif d'isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, M') & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(M, \text{Pic}_{X/T}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X_s, M'_s) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(M_s, \text{Pic}_{X_s/s}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches de changement de base et où les flèches horizontales sont déduites de l'application Φ (6.2.1).

2) *Si T est hensélien, tout morphisme $u_s : M_s \rightarrow \text{Pic}_{X_s/s}$ se relève de manière unique en un morphisme $u : M \rightarrow \text{Pic}_{X/T}$.*

Compte tenu de l'unicité, 2) résulte de 1) par descente galoisienne. Notons que M étant de type multiplicatif, M' est étale. Il en résulte que le morphisme canonique $R^1_{\text{ét}} f_*(M') \rightarrow R^1_{\text{fppf}} f_*(M')$ est un isomorphisme. Compte tenu de (1.2), on voit que l'on peut travailler avec la topologie étale au lieu de la topologie fppf; (6.2.1, 2)) résulte alors de (6.2.3) par passage aux fibres étales des faisceaux. Le même argument de passage à la limite montre qu'il suffit d'établir (6.2.3) dans le cas où T est noethérien.

a) Supposons que T soit le spectre d'un corps k et montrons que le morphisme Φ (6.2.1) est bijectif, ce qui entraînera (6.2.3) dans ce cas. Quitte à faire une extension radicielle de k , on peut supposer que X_{red} est séparable sur k . Pour tout groupe commutatif G et tout entier n , notons ${}_n G$ le noyau de l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G . Il résulte de la comparaison des foncteurs de Picard de X et de X_{red} (SGA 6, XII, (3.1))

que le morphisme canonique de groupes affines ${}_n\text{Pic}_{X/k} \rightarrow {}_n\text{Pic}_{X_{\text{red}}/k}$ a un noyau et un conoyau unipotents. Par suite ces deux groupes ont des plus grands sous-groupes de type multiplicatif isomorphes (SGA 3, XVII, (7.2.1)). Il en résulte que le morphisme canonique $\underline{\text{Hom}}(M, \text{Pic}_{X/k}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(M, \text{Pic}_{X_{\text{red}}/k})$ est un isomorphisme. D'autre part, on a $R_{\text{ét}}^1 f_*(M') \simeq R_{\text{ét}}^1 (f_{\text{red}})_*(M')$. Quitte alors à raisonner séparément sur chaque composante connexe de X_{red} , on est ramené au cas où $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_T$, c'est-à-dire au cas 1).

b) Il résulte du théorème de changement de base pour les morphismes propres, en cohomologie étale (SGA 5, XII, (5.1)), que le morphisme $H^1(X, M') \rightarrow H^1(X_s, M'_s)$ est bijectif. On déduit alors de a) que l'application $H^1(X, M') \rightarrow \text{Hom}(M, \text{Pic}_{X/T})$ est injective. Pour voir qu'elle est surjective, il nous suffit de montrer que si $u : M \rightarrow \text{Pic}_{X/T}$ est un morphisme tel que $u_s : M_s \rightarrow \text{Pic}_{X_s/s}$ soit nul, alors u est nul. On peut alors supposer $\mathcal{O}_T$, T artinien, puis par passage à la limite, T artinien.

c) Supposons T artinien et soit $\bar{T}$ un fermé de T défini par un idéal $\mathcal{I}$ annulé par l'idéal maximal de $\mathcal{O}_T$. Supposons avoir montré que la restriction de u , soit $\bar{u} : M_{\bar{T}} \rightarrow \text{Pic}_{X_{\bar{T}}/\bar{T}}$, est nulle, et montrons que u est nulle. Pour cela appliquons les résultats de (SGA 3, III, (1.2.4)). On doit considérer le foncteur $N = \text{Ker}(\text{Pic}_{X/T} \rightarrow \text{Pic}_{X_{\bar{T}}/\bar{T}})$ et montrer que $H^1(M, N) = 0$ (M opérant trivialement sur N puisque Pic est commutatif). Or, sur le petit site plat sur T (ce qui suffit pour calculer $H^1(M, N)$ (SGA 3, III, (1.1))), l'étude infinitésimale habituelle du foncteur de Picard, montre que N est le foncteur associé au k -module $N(T)$ (où $N(T)$ est un quotient convenable de $H^1(T, \mathcal{I}\mathcal{O}_X)$). Comme M est de type multiplicatif, on a bien $H^1(M, N) = 0$ (SGA 3, I, (5.3.3)).

(6.3) Application à l'étude des sous-groupes de type multiplicatif de E_s .

On considère de nouveau un morphisme $f : X \rightarrow S$ propre et plat.

Proposition (6.3.1). — Soit $\bar{P}$ l'adhérence schématique dans P de P_i (3.2, c)). Alors $P_s^\tau/\bar{P}_s^\tau$ (3.2, d)) est un groupe algébrique unipotent.

Notons qu'il résulte du § 4 que $\bar{P}_s$ est un sous-schéma en groupes de P_s . Comme P_s^τ est de type fini (3.2.1), $P_s^\tau/\bar{P}_s^\tau$ est un groupe algébrique de type fini. Pour voir qu'il est unipotent, on peut supposer S strictement hensélien, et il suffit de montrer que ce groupe ne contient pas de sous-groupe de type multiplicatif fini M_s , non nul (SGA 3, XVII, (4.6.1)). Or on voit facilement que M_s est l'image d'un sous-groupe de type multiplicatif fini M_s^1 de P_s^τ . Soit M^1 le S -groupe diagonalisable qui relève M_s^1 . D'après (6.2.3), il existe un S -morphisme $u : M^1 \rightarrow P$ qui relève l'immersion $M_s^1 \rightarrow P_s$. Comme M^1 est plat sur S , u se factorise à travers $\bar{P}$, donc $M_s = 0$.

Proposition (6.3.2). — Supposons S hensélien et soient M un S -schéma en groupes de type multiplicatif fini, M' son dual de Cartier.

1) Tout morphisme $a_s : M_s \rightarrow E_s$ se relève de manière unique en un homomorphisme $a : M \rightarrow E$.

2) Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement galoisien étale de groupe M' et soit $a : M \rightarrow P$ le morphisme associé (6.2.3). Alors a se factorise à travers E si et seulement si $Y_{\bar{T}} \rightarrow X_{\bar{T}}$ est un revêtement trivial

(où $\bar{t}$ désigne le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(t)$). Si $Z = \text{Spec } f_*(\mathcal{O}_X)$, cette dernière condition signifie aussi que $Y_t \rightarrow X_t$ est l'image réciproque d'un revêtement de Z_t par le morphisme canonique $f: X \rightarrow S$.

Pour établir 1), il suffit, compte tenu de (6.2.3), de montrer que tout morphisme $b: M \rightarrow Q = P/E$, tel que b_s soit nul, est nul. Mais cela résulte de (SGA 3, IX, (5.2)). L'assertion 2) résulte de (6.2.1) en prenant pour T le point générique t de S .

Proposition (6.3.4). — Supposons S strictement hensélien et supposons que f satisfasse à la propriété (N)* (6.1.4). Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement étale connexe, de degré r , tel que $Y_{\bar{t}} \rightarrow X_{\bar{t}}$ soit un revêtement trivial, où $\bar{t}$ désigne le spectre d'une clôture séparable de $\kappa(t)$. Soit $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow S$ la factorisation de Stein de Y au-dessus de S et posons $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ et $B = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. Alors :

(i) B est un anneau de valuation discrète, libre de rang r sur A . On note e l'indice de ramification de B sur A et p^m le degré de l'extension résiduelle, de sorte que $r = ep^m$. Soit z le point fermé de Z .

(ii) Soient y un point maximal de Y_s , x son image dans X_s . On a, avec les notations de (6.1.1) : $d_{X_s, x} = ed_{Y_z, y}$; $\delta_{X_s, x} = r\delta_{Y_z, y}$; $d_{X/S} = ed_{Y/Z}$ et $\delta_{X/S} = r\delta_{Y/Z}$.

(iii) L'entier e divise d' (6.1.11, 3)).

(iv) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\kappa(s) = \kappa(z)$.

b) $e = r$.

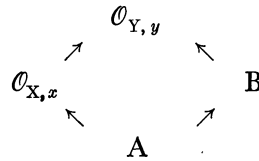
c) Il existe un point maximal x de X_s tel que $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(z)$ soit réduit.

d) $(X_s)_{\text{red}} \otimes_{\kappa(s)} \kappa(z)$ est réduit.

Ces conditions sont en particulier réalisées si l'une des composantes irréductibles réduite de X_s est séparable sur $\kappa(s)$.

Démonstration. — (i) Comme $Y \rightarrow S$ vérifie (N), Z est normal (6.1.8, (iii)). D'autre part, Z est connexe, puisque Y est connexe. Comme S est strictement hensélien, B est un anneau de valuation discrète, totalement ramifié sur A . Par hypothèse, $Y_{\bar{t}} \rightarrow X_{\bar{t}}$ est un revêtement trivial de degré r et $\Gamma(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ est le corps des fractions K de A . Il en résulte que B est libre de rang r sur A .

(ii) La relation $d_{X_s, x} = ed_{Y_z, y}$ résulte immédiatement de l'étude des indices de ramification dans le diagramme ci-dessous d'anneaux de valuation discrète :



Pour étudier le comportement des multiplicités totales, considérons un trait S' fini sur S , de point fermé s' , tel que $(X_{s'})_{\text{red}}$ soit séparable sur $\kappa(s')$. Notons $X', Y', \dots$ les images réciproques de $X, Y, \dots$ par le morphisme $S' \rightarrow S$. On a alors $\delta_{X_s, x} = \text{long}(\mathcal{O}_{X_{s'}, x'})$ et $\delta_{Y_z, y} = \text{long}(\mathcal{O}_{Y_{z'}, y'})$. Comme Y est étale sur X , Y' est étale sur X' et par suite

$\delta_{X_{s'}, x'} = \delta_{Y_{s'}, y'} = \text{long}(\mathcal{O}_{Y_{s'}, y'})$. D'autre part, Y est plat sur Z , donc Y' est plat sur Z' , d'où la relation :

$$\text{long}_{\kappa(y')}(\mathcal{O}_{Y_{s'}, y'}) = \text{long}_{\kappa(y')}(\mathcal{O}_{Y_{s'}, y'}) \times \text{long}_{\kappa(s')}(\mathcal{O}_{Z_{s'}}).$$

On en déduit que $\delta_{X_s, x} = r\delta_{Y_s, y}$. Les relations $d_{X/S} = ed_{Y/Z}$ et $\delta_{X/S} = r\delta_{Y/Z}$ sont alors évidentes.

(iii) Nous devons montrer que le cycle divisoriel Δ sur X , tel que $e\Delta = (\pi)$, est en fait un diviseur. Or il résulte de l'étude précédente que l'image réciproque de Δ sur Y est le diviseur principal défini par l'uniformisante de B . Par descente fidèlement plate de Y à X , on conclut que Δ est un diviseur.

(iv) Les implications $b) \Leftrightarrow a) \Rightarrow d) \Rightarrow c)$ sont claires. Montrons que $c) \Rightarrow a)$. Comme Y est étale sur X , $\kappa(y) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(z)$ est aussi réduit. Or $\kappa(z)$ est un sous-corps de $\kappa(y)$, radiciel sur $\kappa(s)$, donc $\kappa(z) = \kappa(s)$.

Proposition (6.3.5). — *Supposons que S est strictement hensélien et que f satisfasse à la propriété (N)* (6.1.4). Posons $d' = d''p^h$ où d' est le nombre défini dans (6.1.11), p est l'exposant caractéristique de $\kappa(s)$, et $(d'', p) = 1$.*

(i) Soient a (resp. b) un point géométrique de X_s (resp. X_t) et considérons le morphisme de spécialisation du groupe fondamental (SGA I, X) :

$$u : \Pi_1(X_{\bar{t}}, b) \rightarrow \Pi_1(X_s, a).$$

Alors, l'image de u est un sous-groupe invariant de $\Pi_1(X_s, a)$ et $\text{Coker}(u) = G$ est un groupe fini.

Soit $Y \rightarrow X$ le revêtement galoisien de groupe G et appliquons-lui les résultats de (6.3.4) de sorte que $\text{card}(G) = r = ep^m$.

(ii) On a les relations suivantes :

a) $r = \text{card}(G)$ divise $\delta = \delta_{X/S}$.

b) e divise d' et d'' divise e de sorte que $d' | e$ divise p^h .

c) Si l'une des composantes irréductibles réduites de X_s est géométriquement réduite, on a $r = e$.

(iii) Le groupe G est résoluble et est extension de $\mu_{d''}(k) \simeq \mathbf{Z}/d''\mathbf{Z}$ par un p -groupe.

(iv) Soit G'' le plus grand quotient commutatif de G . Alors E_s contient un plus grand sous-groupe de type multiplicatif M ; M est fini et isomorphe au dual de Cartier du groupe constant G'' .

Montrons que l'image de u est un sous-groupe invariant. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Pi_1(X_{\bar{t}}, b) & \longrightarrow & \Pi_1(X_t, b) & \longrightarrow & \Pi_1(t, b) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \wr & & & & \\
 & & \Pi_1(X, b) & & & & \\
 & & \downarrow \wr & & & & \\
 & & \Pi_1(X, a) & & & & \\
 & & \downarrow \wr & & & & \\
 & & \Pi_1(X_s, a) & & & & \\
 & \nearrow u & & & & &
 \end{array}$$

(*)

dans lequel la première ligne est exacte d'après (SGA 1, IX, (6.1)). Pour voir que l'image de u est un sous-groupe invariant, il nous suffit donc de montrer que $\Pi_1(X_t, b) \rightarrow \Pi_1(X, b)$ est surjectif, c'est-à-dire que si $Y \rightarrow X$ est un revêtement étale fini connexe, alors Y_t est connexe. Or si $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow S$ est la factorisation de Stein de Y au-dessus de S , Z est normal (6.1.8) et connexe, donc Z_t est connexe et par suite Y_t est connexe. A tout revêtement fini de X , correspondant à un quotient fini de $G = \text{Coker}(u)$, on peut appliquer les résultats de (6.3.4). Il en résulte que G est fini et a un ordre r qui divise δ . En particulier il existe un revêtement $Y \rightarrow X$ d'ordre r , galoisien, de groupe G . Le fait que $e \mid d'$ et que $r = e$ sous les conditions de c) résulte de (6.3.4). Les relations de divisibilité précédentes entraînent que la partie de r première à p divise d'' . Mais par ailleurs, la théorie de Kummer montre qu'il existe un revêtement étale de X , de groupe $\mu_{d''}(X) \simeq \mu_{d''}(k) \simeq \mathbf{Z}/d''\mathbf{Z}$, qui trivialisait le diviseur $(1/d'')(X_s)$, d'où résulte le fait que $d'' \mid e$ et l'assertion (iii). Il résulte alors de (6.3.2) qu'il existe un plus grand sous-groupe fini de type multiplicatif M dans E_s et que M est le dual de Cartier de G'' . Nécessairement alors, E_s ne contient pas de tore non trivial et M est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif de E_s .

Corollaire (6.3.6). — *Sous les hypothèses de (6.3.5), la composante de M première à p est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}/d''\mathbf{Z}$ et est engendrée par l'image dans P du diviseur $(1/d'')(X_s)$. Soit M_p la partie p -primaire de M et soit p^l l'ordre du dual de M_p . Alors, sous les conditions de (6.3.5, (ii), c)), le groupe $E(S)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z}$.*

La première assertion est bien claire, la seconde résulte du fait que p^l divise alors d' .

Remarques (6.3.7). — *a)* Si $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow S$ est la factorisation de Stein du schéma Y introduit dans (6.3.5, (i)), le morphisme de spécialisation des groupes fondamentaux des fibres géométriques de g est surjectif.

b) Le groupe G est aussi le groupe de Galois du revêtement Z_t de t .

c) Nous verrons dans (9.5) que G n'est pas nécessairement commutatif et que si G est commutatif, G n'est pas nécessairement cyclique.

Corollaire (6.3.8). — *Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat.*

(i) E_s^0 est un groupe algébrique affine.

(ii) Si f satisfait à la propriété (N), $(E_s)_{\text{red}}^0$ est un groupe algébrique unipotent.

Démonstration. — L'assertion (ii), dans le cas où f satisfait à la propriété (N)*, résulte immédiatement de (6.3.5, (iv)), compte tenu des théorèmes de structure des groupes algébriques commutatifs. En utilisant la factorisation de Stein de f , on en déduit facilement l'assertion (ii) dans le cas général (6.1.9).

Pour établir (i), on peut supposer S complet, donc excellent. Soit alors X' le normalisé de X_{red} , qui est fini sur X . Posons $P' = \text{Pic}_{X'/S'}$ et soit E' l'adhérence schématique dans P' de la section unité. On sait que le morphisme canonique $P_s \rightarrow P'_s$ est affine (SGA 6, XII, (1.5)). Comme X' satisfait à la propriété (N), $(E'_s)^0$ est affine; donc l'image réciproque de $(E'_s)^0$ dans P_s est affine, *a fortiori* E_s^0 est affine (cf. (4.1.4)).

Remarque (6.3.9). — Pour démontrer (6.3.8, (i)), on peut éviter d'avoir recours aux résultats délicats de (SGA 6, XII) en procédant de la façon suivante. Soit (R, i) un rigidificateur de P et considérons P comme quotient de l'espace algébrique (P, R) par le sous-groupe H (cf. (4.1)). L'espace algébrique H est plat sur S et H_i est un groupe algébrique affine puisque $H_i = \text{Ker}(r_i)$ (2.4.3). On peut alors montrer que H_s^0 est affine. Comme E_s^0 est un quotient de H_s^0 , E_s^0 est également affine.

(6.4) Etude de $E(S)$.

Théorème (6.4.1). — Soit toujours $f: X \rightarrow S$ propre et plat.

1) Si f est cohomologiquement plat (1.4) ou si f satisfait à la propriété (N) (6.1.4), le groupe $E(S)$ est de type fini et $E(S) \cap P^\tau(S)$ est un groupe fini, égal au sous-groupe de torsion de $E(S)$. En particulier, un élément de D (6.1.2) définit un élément de $P^\tau(S)$ si et seulement si un multiple de D est un diviseur principal.

2) Si X est cohomologiquement plat sur S , l'application $E(S) \rightarrow E(s)$ est bijective.

3) Si X satisfait à la propriété $(N)^*$, le groupe $E(S) \cap P^\tau(S)$ est cyclique d'ordre d' (6.1.11) et est engendré par $(1/d')(X_s)$; ce groupe est invariant par passage à l'hensélisé strict de S et par passage au complété.

Etudions d'abord le cas où f est cohomologiquement plat. Comme E est un espace algébrique étale sur S (5.2), l'application $E(S) \rightarrow E(s)$ est injective. En fait, comme $E_i = 0$, on voit immédiatement par descente à partir du cas hensélien, que cette application est aussi surjective. Or P_s^τ est un schéma en groupes de type fini et le groupe « abstrait » $(P_s/P_s^\tau)(s)$ est de type fini (3.2.1). Comme E_s est un sous-groupe algébrique fermé de P_s , il est clair dans ces conditions que $E_s \cap P_s^\tau$ est un schéma en groupes fini et que $E(s)$ est un groupe abstrait de type fini, d'où le théorème dans ce cas.

Dans le cas où f satisfait à la propriété (N), on sait déjà que $E(S)$ est de type fini ((6.1.3) et (6.1.11)) et si f satisfait à la propriété $(N)^*$ le sous-groupe de torsion de $E(S)$ est cyclique d'ordre d' et est invariant par passage à l'hensélisé strict et au complété (*loc. cit.*). D'autre part, il est clair que $E(S) \cap P^\tau(S)$ contient le sous-groupe de torsion de $E(S)$. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit donc de montrer que tout élément de $E(S) \cap P^\tau(S)$ est d'ordre fini. Pour établir ce point nous aurons besoin de quelques lemmes et nous établirons en même temps le résultat suivant.

Proposition (6.4.2). — Si f satisfait à la propriété (N) et si E_s est lisse (par exemple si $\kappa(s)$ est de caractéristique nulle), alors f est cohomologiquement plat.

Lemme (6.4.3). — Supposons S strictement hensélien. Si P^0 est formellement lisse sur S , l'application $P^0(S) \rightarrow P^0(s)$ est surjective. Si E_s est lisse, l'application $E(S) \rightarrow E(s)$ est surjective.

Pour établir le lemme, choisissons un rigidificateur (R, i) de P et reprenons les constructions et notations de (4.1). Soit $\bar{a}$ un point de $P^0(s)$. Comme $\kappa(s)$ est séparablement clos et $r_s: (P, R)_s \rightarrow P_s$ lisse surjectif (2.4.3), on peut trouver un point rationnel $\bar{b}$ de $(P, R)^0(s)$ au-dessus de $\bar{a}$. Par hypothèse P^0 est formellement lisse sur S , donc l'espace algébrique $(P, R)^0$ est lisse sur S (4.2.1, 2)). Par suite, $\bar{b}$ se relève en b dans $(P, R)^0(s)$ et *a fortiori* $\bar{a}$ se relève en a dans $P^0(S)$. Supposons maintenant que E_s soit lisse sur s ; alors

$H_s = r_s^{-1}(E_s)$ est lisse, puisque r_s est lisse. Le S -espace algébrique H , qui est plat sur S , est donc lisse sur S et on termine comme plus haut.

Ceci étant, prouvons (6.4.2). On peut supposer S strictement hensélien. Comme f satisfait à la propriété (N), on sait que $E(S)$ est de type fini; il résulte alors de (6.4.3) que $E(s)$ est de type fini et *a fortiori* il en est de même de $E_s^0(s)$. Or il est immédiat qu'un groupe algébrique lisse et connexe, sur un corps séparablement clos, ne peut avoir un groupe de points rationnels de type fini que s'il est nul. On conclut alors grâce à (5.2).

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme (6.4.4). — *Posons $S = \text{Spec}(A)$. Soit M le A -module de type fini tel que le fibré vectoriel $\mathbf{V}(M)$ représente le foncteur des sections globales de $\mathcal{O}_X$ (1.4), et soit (π^n) l'annulateur du sous-module de torsion T de M . Posons $S_n = \text{Spec}(A/\pi^{n+1}A)$. Alors, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X tel que $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}|_{S_n}$ soient triviaux, $\mathcal{L}$ est trivial.*

Soit M' le A -module de type fini tel que $\mathbf{V}(M')$ représente le foncteur des sections globales de $\mathcal{L}$ et soit T' le sous-module de torsion de M' . Comme $\mathcal{L}_i$ est trivial, M/T et M'/T' sont des A -modules libres de même rang r . Alors $M_n = M/\pi^{n+1}M$ est somme directe de $(A/\pi^{n+1})^r$ et de T . Le choix d'un isomorphisme de $\mathcal{L}_n$ avec $\mathcal{O}_{X_n}$ définit un isomorphisme $u_n : M_n \xrightarrow{\sim} M'_n$. Il est clair dans ces conditions que T' est nécessairement le sous-module de M' annulé par π^n . La section unité de $\mathcal{O}_{X_n}$ correspond à un épimorphisme $M \rightarrow A/\pi^{n+1}A = A_n$. Grâce à u_n , on en déduit qu'il existe une section génératrice a_n de $\mathcal{L}_n$ qui correspond à un épimorphisme $\alpha_n : M' \rightarrow A_n$. Nécessairement $\alpha_n(T')$ est contenu dans πA_n , de sorte que le morphisme composé $M' \xrightarrow{\alpha_n} A_n \rightarrow k$ s'annule sur T' , donc se relève en un morphisme $M' \rightarrow A$. Celui-ci correspond à une section b de $\mathcal{L}$ qui, par construction, a même image que a_n dans $\Gamma(X_s, \mathcal{L}_s)$; donc b engendre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est trivial.

Nous pouvons alors achever la démonstration de (6.4.1).

(i) Si $\kappa(s)$ est de caractéristique 0, f est cohomologiquement plat (6.4.2) et l'on est dans un cas déjà traité.

(ii) Supposons $\kappa(s)$ de caractéristique $p > 0$. Soit $a \in P^\tau(S) \cap E(S)$ et montrons que a est d'ordre fini. Quitte à remplacer a par un multiple, on peut supposer que $a_s \in P_s^0(s)$. Comme $(P_s^0)_{\text{red}}$ est unipotent (6.3.8), P_s^0 est annulé par une puissance convenable de p . On peut donc se ramener au cas où a_s est nul. Une étude infinitésimale classique montre alors que pour tout entier $n > 0$, $p^n a$ a une image nulle dans $P(S_n)$ et on conclut à l'aide de (6.4.4) que a est d'ordre fini.

Corollaire (6.4.5). — *Supposons que f satisfasse à la propriété (N)* et soit cohomologiquement plat. Alors, pour que P^τ soit un schéma en groupes séparé, il faut et il suffit que $d' = 1$. Supposons cette condition réalisée; alors, pour que P soit représentable, il suffit que les composantes irréductibles de X_s soient géométriquement irréductibles, et cette condition est également nécessaire si les anneaux locaux de $X_{S'}$ (où S' est un hensélisé strict de S) sont factoriels.*

Pour voir que P^τ est représentable et séparé, il nous suffit de montrer que P^τ est séparé (5.5). Pour établir ce point, on peut supposer S strictement hensélien, ce qui ne

modifie pas d' (6.1.11). Comme f est cohomologiquement plat, P^τ est un S -espace algébrique et pour voir que l'espace algébrique étale $E \cap P^\tau$ (3.3.5) est le groupe unité, il suffit de montrer que $E(S) \cap P^\tau(S) = 0$, ce qui résulte de (6.4.1, 3)). Ceci étant, pour que P soit représentable, il faut et il suffit que E_s soit un groupe constant (5.5), ou encore que l'application $E(S) \rightarrow E(S')$ soit bijective, ou encore que le groupe D des diviseurs sur X , à support dans X_s soit invariant par passage à l'hensélisé strict, d'où les autres assertions contenues dans (6.4.5).

Remarque (6.4.6). — On notera l'analogie entre le critère de représentabilité de P donné dans (6.4.5) et le théorème de Mumford (1.5.1, 3)).

7. Critère de platitude cohomologique.

(7.1) Multiplicités des fibres et quasi-sections.

Lemme (7.1.1). — Soient k un corps séparablement clos, X un k -schéma de type fini, irréductible, de dimension r , de multiplicité totale δ . Alors, pour tout point fermé x de X et pour tout système de paramètres $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)$ de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, on a $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(\mathbf{f}) \geq \delta$. Si $\mathbf{f}$ est une suite régulière, $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(\mathbf{f})$ est un multiple de δ . On peut choisir le point x et le système $\mathbf{f}$ de façon que l'on ait $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(\mathbf{f}) = \delta$; dans ce cas, $\mathbf{f}$ est nécessairement une suite régulière.

Quitte à restreindre X à un ouvert contenant x , on peut supposer que $\mathbf{f}$ définit un morphisme quasi-fini $u : X \rightarrow Y = \text{Spec } k[T_1, \dots, T_r]$. Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $\bar{u} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ le morphisme déduit de u par extension de k à $\bar{k}$. Notons $\bar{x}$ l'unique point de $\bar{X}$ au-dessus de x et Y' l'hensélisé de $\bar{Y}$ à l'origine. Soit X' le composant local au-dessus de x de $\bar{X} \times_{\bar{Y}} Y'$. Alors le morphisme $u' : X' \rightarrow Y'$ est fini, et est plat si et seulement si $\mathbf{f}$ est une suite régulière. De plus, tous les points maximaux de X' ont des anneaux locaux artiniens, de longueur δ , et sont au-dessus du point générique de Y' . Il en résulte que X' a un rang sur Y' égal à un multiple non nul de δ . *A fortiori*, la fibre fermée de u' a un rang supérieur à δ ; or ce rang est égal à $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(\mathbf{f})$. Si $(\mathbf{f})$ est régulière, ce rang est égal au rang de X' sur Y' , donc est un multiple de δ ; s'il y a égalité, le rang de la fibre spéciale est nécessairement égal au rang de X' sur Y' , donc X' est plat sur Y' , et par suite $(\mathbf{f})$ est régulière.

Montrons maintenant que la valeur δ est atteinte. Quitte à restreindre X , on peut supposer que $\bar{X}_{\text{red}}$ est lisse sur $\bar{k}$. Alors, $\Omega_{\bar{X}_{\text{red}}/\bar{k}}$ (faisceau des différentielles relatives), est un faisceau localement libre, de rang r ; d'autre part, c'est un quotient de $\Omega_{\bar{X}/\bar{k}}$. Quitte alors à restreindre X , on peut supposer qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_r$ de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tels que les images des différentielles $da_1, \dots, da_r$ dans $\Omega_{\bar{X}_{\text{red}}/\bar{k}}$, forment une base de ce module. Le morphisme $u : X \rightarrow Y = \text{Spec } k[T_1, \dots, T_r]$ défini par les a_i est alors tel que la restriction de $\bar{u} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ à $\bar{X}_{\text{red}}$ soit étale. Quitte encore à restreindre X et Y , on peut supposer u fini et plat. Soit x un point de X , tel que $u(x) = y$ soit un point rationnel de Y (ouvert de l'espace affine). Il est alors immédiat, par hensélisation, que

l'image réciproque dans $\mathcal{O}_{X,x}$ d'un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un système de paramètres $\mathbf{f}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, qui répond à la question.

Corollaire (7.1.2). — Soient T un schéma local strictement hensélien, s son point fermé, X un T -schéma plat et localement de présentation finie, X_i une composante irréductible de X_s , δ sa multiplicité totale. Alors il existe une T -immersion régulière $u: Z \rightarrow X$, avec Z fini, plat sur T , de rang δ , tel que $u_s(Z_s)$ soit un point de X_i .

Soit U un ouvert affine de X tel que U_s soit un ouvert non vide de X_i , et soit x un point fermé de U_s tel que $\mathcal{O}_{U_s,x}$ possède un système de paramètres $\bar{\mathbf{f}}$ tel que $\dim_{\kappa(s)} \mathcal{O}_{U_s,x}/(\bar{\mathbf{f}}) = \delta$ (7.1.1). Quitte à restreindre U , on peut relever $\bar{\mathbf{f}}$ en une suite $\mathbf{f}$ d'éléments de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, transversalement régulière (EGA, IV, 19). Il suffit alors de prendre pour Z la composante locale de $V(\mathbf{f})$, finie sur S , qui contient x .

Proposition (7.1.3). — Soit $f: X \rightarrow T$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé tel que $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_T$ et soit $R_i \rightarrow X$ une famille de T -morphisms avec R_i fini et de présentation finie sur T , plat sur T de degré r_i ; soit r le pgcd des r_i . Alors, pour tout T -schéma T' , plat sur T , tout élément a de $\text{Pic}_{X/T}(T')$ est tel que ra soit défini par un faisceau inversible sur $X \times_T T'$.

Comme r est combinaison linéaire à coefficients entiers des r_i , il nous suffit de montrer que $r_i a$ est défini par un faisceau inversible, ce qui nous permet dans la suite d'omettre l'indice i . Comme l'hypothèse $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_T$ se conserve par changement de base plat (EGA, IV, (1.7.21)), on peut se borner au cas où $T' = T$. Le T -morphisme $R \rightarrow X$ définit une section de $X \times_T R$ au-dessus de R , donc l'image réciproque a_r de a dans $\text{Pic}_{X/T}(R)$ est définie par un faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur $X \times_T R$ (1.3). Il est clair alors que ra est défini par la norme $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ relative au morphisme fini localement libre $X \times_T R \rightarrow X$.

Corollaire (7.1.4). — Soient T un schéma local strictement hensélien, de point fermé s et $f: X \rightarrow T$ un morphisme plat de présentation finie, tel que $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_T$. Notons δ le pgcd des multiplicités totales des composantes irréductibles de X_s . Alors, pour tout schéma T' plat sur T et tout élément a de $\text{Pic}_{X/T}(T')$, δa peut être défini par un faisceau inversible sur $X \times_T T'$.

Cela résulte de (7.1.2) et (7.1.3).

Supposons de nouveau que $f: X \rightarrow S$ soit un morphisme propre et plat sur le trait S .

Définition (7.1.5). — Soient S' un hensélisé strict de S , t' son point générique. On note δ' le pgcd des degrés des 0-cycles de $X_{t'}$, égal donc au pgcd des longueurs sur $\kappa(t')$ des sous-schémas finis de $X_{t'}$, égal encore au pgcd des degrés sur $\kappa(t')$ des corps résiduels des points fermés de $X_{t'}$.

Proposition (7.1.6). — 1) On a $\delta' \mid \delta$ (6.1.1) et il y a égalité si X est de dimension 1 sur S et si les anneaux locaux de X_s sont factoriels (S' désigne un hensélisé strict de S).

2) Si f satisfait à la propriété $(N)^*$, on a $\delta' \mid \delta$ (6.1.11).

3) Si dans le corollaire (7.1.4), T est un trait strictement hensélien, on peut dans la conclusion remplacer δ par δ' .

Le fait que $\delta' \mid \delta$ résulte immédiatement de (7.1.2). Soient z un point fermé de $X_{t'}$ et Z l'adhérence schématique de z dans $X_{s'}$. Alors Z est fini, plat sur S' , de rang égal au degré de $\kappa(z)$ sur $\kappa(t')$. L'assertion 3) résulte donc de (7.1.3). Si X est de dimension 1

sur S et si X_s a ses anneaux locaux factoriels, Z est un diviseur défini localement par une équation S' -régulière. Le degré de Z au-dessus de S est égal à la multiplicité d'intersection $Z \cdot X_s$. Or si X_i , pour $i \in I$, est la famille des sous-schémas fermés de X_s qui sont l'adhérence schématique d'un localisé en un point maximal de X_s , on a $Z \cdot X_s = \sum_{i \in I} Z \cdot X_i$. Or d'après (7.1.1) $Z \cdot X_i$ est un multiple de la multiplicité totale de X_i , donc $\delta | \delta'$. Enfin dans le cas 2) on a $Z \cdot X_s = d'(Z \cdot (1/d') X_s)$, donc $d' | \delta'$.

(7.2) Critère de platitude cohomologique.

Théorème (7.2.1). — Supposons que $f: X \rightarrow S$ satisfasse à la propriété $(N)^*$ (6.1.4) et que l'adhérence schématique $\bar{P}$ de P_i dans P ((3.2, c)) soit formellement lisse sur S (EGA, IV, (17.1.1)) (ce qui sera le cas si l'exposant caractéristique p de $\kappa(s)$ est égal à 1, ou si P^0 est formellement lisse sur S , donc en particulier si $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$ (2.3.2)). Soit de même $\bar{Q}$ l'adhérence schématique de Q_i dans Q , qui est alors lisse sur S . Notons x le point générique de $\bar{Q}_s^0$, T un hensélisé strict de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q}, x})$ et τ le point générique de T . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est cohomologiquement plat.
- (ii) Le morphisme canonique $\tau \rightarrow P_i$ est défini par un faisceau inversible sur X_τ .

De plus, ces conditions sont réalisées si $(\delta', p) = 1$ (7.1.5) et a fortiori si $(\delta, p) = 1$ (7.1.6) ou si $X \rightarrow S$ possède une quasi-section étale (i.e. si $X(S') \neq \emptyset$, où S' est un hensélisé strict de S).

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii). Si f est cohomologiquement plat, $P \rightarrow Q$ est un morphisme étale surjectif d'espaces algébriques (5.2) et il en est de même du morphisme $\bar{P} \rightarrow \bar{Q}$. Par suite, le morphisme canonique $T \rightarrow \bar{Q}$ se relève en un morphisme $h: T \rightarrow \bar{P}$. Comme T est strictement hensélien, il résulte de (1.2) que h est défini par un faisceau inversible sur X_T , d'où la condition (ii).

Pour établir (ii) $\Rightarrow$ (i), nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme (7.2.2). — Gardons les hypothèses de (7.2.1) (f satisfait à la propriété $(N)^*$ et $\bar{P}$ est formellement lisse sur S) et supposons de plus S strictement hensélien. Soient $g: T \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q}, x})$ un morphisme étale de traits et τ le point générique de T . Supposons que le morphisme $\tau \rightarrow P_i$ soit défini par un faisceau inversible $\mathcal{L}_\tau$ sur X_τ . Alors il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X_T , qui prolonge $\mathcal{L}_\tau$ et qui définit un morphisme h rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{h} & \bar{P}^0 \\ & \searrow g & \swarrow \\ & Q^0 & \end{array}$$

Choisissons un rigidificateur (R, i) de P et considérons P comme quotient de (P, R) . Alors $\bar{P}$ est le quotient de $(\bar{P}, R)$, adhérence schématique dans (P, R) de la fibre générique $(P, R)_i$. Comme $\bar{P}$ est formellement lisse sur S , on montre comme dans (4.2.1) que $(\bar{P}, R)$ est un S -espace algébrique lisse. Considérons alors l'espace algébrique $(\bar{P}, R)^0$ comme quotient, par une relation d'équivalence étale, d'un S -schéma Y , nécessairement

lisse sur S , et soit T' le localisé de $Y \times_{\bar{Q}} T$ en un point maximal de sa fibre au-dessus de s . Comme T est étale sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q},x})$, T' est aussi un trait. On a un diagramme commutatif :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\quad} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{P}, \bar{R})^0 & \longrightarrow & \bar{P}^0 \longrightarrow \bar{Q}^0 \end{array}$$

Notons τ' le point générique de T' . Comme $(\bar{P}, \bar{R})$ et $\bar{Q}$ sont lisses sur S et que T est étale sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q},x})$, T et T' sont essentiellement lisses sur S (i.e. sont des localisés de schémas lisses sur S). Il en résulte que les morphismes $f_T : X_T \rightarrow T$ et $f_{T'} : X_{T'} \rightarrow T'$ satisfont encore à la propriété (N)* (6.1.7). De plus, comme S est strictement hensélien, il est clair que le groupe C des cycles divisoriels, de support contenu dans la fibre fermée, est invariant par passage de X à X_T (resp. $X_{T'}$), donc est invariant par passage de X_T à $X_{T'}$.

Ceci étant, comme $X_{\tau'}$ est réduit (6.1.8), il existe un diviseur $\Delta_{\tau'}$ sur $X_{\tau'}$ tel que $\mathcal{L}_{\tau'} \simeq \mathcal{O}_{X_{\tau'}}(\Delta_{\tau'})$ (EGA, IV, (21.3.4)). Soit $\Delta'_{\tau'}$ l'image réciproque de $\Delta_{\tau'}$ sur $X_{\tau'}$. Par ailleurs, le morphisme $T' \rightarrow (P, R)$ correspond à un couple $(\mathcal{L}', \alpha')$, où $\mathcal{L}'$ est un faisceau inversible sur $X_{T'}$ et α' une rigidification convenable de $\mathcal{L}'$. Comme $X_{T'}$ est réduit, $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{X_{T'}}(\bar{\Delta}')$, où $\bar{\Delta}'$ est un diviseur sur $X_{T'}$. Il résulte alors de la commutativité du diagramme (*) que $(\bar{\Delta}')_{\tau'}$ est linéairement équivalent à $\Delta'_{\tau'}$. Quitte à modifier $\bar{\Delta}'$, on peut donc supposer que $\bar{\Delta}'$ prolonge $\Delta'_{\tau'}$ et on note désormais ce diviseur Δ' . Il est clair que l'on aura prouvé le lemme si l'on montre que Δ' se descend en un diviseur Δ sur X_T , et d'après (EGA, IV, (21.4.9), Err_{IV} 53), il suffit de vérifier qu'il en est ainsi aux points de X_T de profondeur ≤ 1 . Or, sur la fibre générique, $\Delta'_{\tau'}$ provient par construction du diviseur $\Delta_{\tau'}$, tandis qu'aux points maximaux de la fibre fermée de X_T , Δ' se descend en vertu des remarques faites plus haut sur l'invariance du groupe C quand on passe de X_T à $X_{T'}$.

Démonstration de (7.2.1). — (ii) $\Rightarrow$ (i). On peut supposer S strictement hensélien. Considérant l'hensélisé strict T de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q},x})$ comme limite projective filtrante de $\bar{Q}$ -schémas étales, on déduit de (7.2.2) qu'il existe un schéma Y , étale de type fini sur $\bar{Q}^0$, dont l'image contient x , et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ h \swarrow & & \searrow g \\ \bar{P}^0 & \xrightarrow{q} & \bar{Q}^0 \end{array}$$

Notons n la dimension de $\bar{Q}_s$ et soit Z l'image fermée de Y_s par h_s . Alors Z est un sous-schéma fermé de $\bar{P}_s^0$, de dimension n . Soit V l'ouvert de $\bar{P}_s^0$ égal à $(q_s)^{-1}g(Y)$. Comme $\bar{P}^0$ est formellement lisse sur S , l'application $\bar{P}^0(S) \rightarrow \bar{P}^0(s)$ est surjective (6.4.3). Soient a_s

un point de $V(s)$ et a un relèvement de a_s dans $\bar{P}^0(S)$. Alors $q(a)$ se factorise à travers $g(Y)$ et comme g est étale et S strictement hensélien, $q(a)$ se relève en un élément b de $Y(S)$. Par construction, $a - h(b)$ va sur zéro dans $\bar{Q}(S)$, donc est contenu dans le groupe $\bar{P}^0(S) \cap E(S)$ et *a fortiori* dans le groupe fini $P^r(S) \cap E(S)$ (6.4.1). On a donc montré que $V(s)$ est contenu dans un nombre fini de translatés de $Z(s)$. Comme $\bar{P}_s^0$ est lisse sur s et que $\kappa(s)$ est séparablement clos, l'ensemble des points rationnels de V est dense dans V . Il en résulte immédiatement que Z contient V , donc $\dim \bar{P}_s = \dim V = n = \dim \bar{Q}_s$. Bref, on a $\dim E_s = 0$, et f est cohomologiquement plat (5.2).

Supposons maintenant que $(\delta', p) = 1$ et montrons que la condition (ii) ci-dessus est réalisée. En effet, l'obstruction à définir le morphisme $\tau \rightarrow P_t$ par un faisceau inversible sur X_τ est un certain élément ξ du groupe de Brauer $\text{Br}(\tau) = H_{\text{ét}}^2(\tau, \mathbf{G}_m)$. Compte tenu de (7.1.6, 3)), on voit que $\delta' \xi = 0$. D'autre part, comme T est strictement hensélien, $\text{Br}(\tau)$ est un groupe de p -torsion ([8], (1.4)), donc ξ est nul si $(\delta', p) = 1$.

Remarque (7.2.3). — En utilisant une technique de « lissification » des schémas en groupes sur un trait, due à Néron et énoncée dans [11], on montre que, dans la démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) ci-dessus, on peut remplacer l'hypothèse « $\bar{P}^0$ est formellement lisse sur S » par la condition plus faible suivante : « si S' est l'hensélisé strict de S , l'image de $\bar{P}^0(S')$ dans $\bar{P}_s^0$ est dense ».

Si G est un groupe commutatif et n un entier, on note n_G le morphisme d'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G .

Proposition (7.2.4). — *Supposons que f satisfasse à la propriété (N)* et que $\bar{P}^0$ soit formellement lisse sur S . Notons S' l'hensélisé strict de S et t' le point générique de S' . Soit n un entier tel que le morphisme $n_{P_t^0}$ puisse être défini par un faisceau inversible sur $X_{P_t^0}$. Alors il existe un diagramme commutatif, canonique, de morphismes de groupes :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q}^0 & \xrightarrow{h} & \bar{P}^0 \\ n_{\bar{Q}^0} \searrow & & \swarrow q \\ & \bar{Q}^0 & \end{array}$$

En particulier, si $n=1$, c'est-à-dire s'il existe un faisceau inversible « universel » sur $X_{t'} \times_{t'} P_{t'}^0$, $\bar{P}^0$ est représentable. De plus, on peut toujours prendre $n=\delta'$. Si $(n, p)=1$, h est un morphisme étale d'espaces algébriques.

Si l'on prouve l'unicité du morphisme h , par descente, il suffit de considérer le cas où S' est strictement hensélien. Procédons comme dans la démonstration de (7.2.2). Soit (R, i) un rigidificateur de P et considérons le morphisme fidèlement plat :

$$qr : (\bar{P}, \bar{R})^0 \rightarrow \bar{P}^0 \rightarrow \bar{Q}^0.$$

Soit $(\mathcal{M}, \alpha)$ le couple formé d'un faisceau inversible sur $X_{(\bar{P}, \bar{R})^0}$ et d'une rigidification convenable, qui est « universel » pour $(\bar{P}, \bar{R})^0$. Si $\mathcal{L}_t$ est le faisceau inversible sur $X_{P_t^0}$ correspondant au morphisme $n_{P_t^0}$, $(qr)^*(\mathcal{L}_t)$ et $\mathcal{M}_t^{\otimes n}$ définissent le même

morphisme dans $\bar{P}_i^0$, donc différent par l'image réciproque d'un faisceau inversible $\mathcal{N}_i$ sur $(\bar{P}, \bar{R})_i$ (1.3). Comme l'espace algébrique $(\bar{P}, \bar{R})$ est lisse sur S , $\mathcal{N}_i$ se prolonge en un faisceau inversible $\mathcal{N}$ sur $(\bar{P}, \bar{R})$. Quitte alors à modifier $\mathcal{M}^{\otimes n}$, on peut supposer que $\mathcal{M}^{\otimes n}$ prolonge $(qr)^* \mathcal{L}_i$. Procédant comme dans la démonstration de (7.2.2), on voit que $\mathcal{M}^{\otimes n}$ se descend au-dessus de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Q}^0, x})$ donc $\mathcal{M}^{\otimes n}$ se descend au-dessus d'un ouvert de $X_{\bar{Q}^0}$ contenant les points de profondeur ≤ 1 ; donc $\mathcal{M}^{\otimes n}$ se descend (EGA, IV, (21.4.9), Err_{IV} 53) en un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $X_{\bar{Q}^0}$ qui prolonge $\mathcal{L}_i$. Il est clair que le morphisme $h: \bar{Q}^0 \rightarrow \bar{P}^0$, associé à $\mathcal{L}$, est tel que $qh = n_{\bar{Q}^0}$. Quitte à translater par un élément de $E(S)$, on peut supposer que h envoie la section unité sur la section unité. Si G est un groupe, notons $\mu_G: G \times G \rightarrow G$ le morphisme de multiplication. Considérons le morphisme :

$$w = h\mu_{\bar{Q}^0} - \mu_{\bar{P}^0}(h \times h) : \bar{Q}^0 \times_S \bar{Q}^0 \rightarrow \bar{P}^0.$$

Alors w se factorise par la section unité sur la fibre générique et envoie la section unité sur la section unité. On en déduit facilement que w est nul, donc h est un morphisme de groupes. Un argument analogue montre l'unicité de h .

Le fait que l'on puisse prendre $n = \delta'$ résulte de (7.1.6, 3)). Si $(n, p) = 1$, $\bar{P}^0$ est un espace algébrique d'après (7.2.1) et $n_{\bar{Q}^0}$ est un morphisme étale, il en est donc de même de h et q .

8. Cas des courbes.

(8.0) Dans ce paragraphe, on suppose que le morphisme $f: X \rightarrow S$ a des fibres qui sont des courbes, c'est-à-dire ont toutes leurs composantes irréductibles de dimension 1. Si C est une courbe propre sur un corps k , par définition, le genre de C est égal à $\dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C)$.

Dans le cas des courbes, $P = \text{Pic}_{X/S}$ est formellement lisse sur S (2.3.2) et il est classique que l'on a $P^0 = P^\tau$. Des §§ 4 et 5 on déduit le résultat suivant :

Proposition (8.0.1). — L'adhérence schématique E dans P de la section unité est un faisceau en groupes, dont la fibre E_s est un schéma en groupes localement de type fini, de dimension $h_s^0 - h_s^1 = h_s^1 - h_i^1$ (2.4.2). Le faisceau quotient $Q = P/E$ est un schéma en groupes lisse et séparé sur S .

(8.1) Relation avec les modèles de Néron.

(8.1.1) Soient $x_1, \dots, x_r$ les points maximaux de X_s et soit X_i le sous-schéma fermé de X_s égal à l'adhérence schématique dans X_s de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X_s, x_i})$. Alors X_i est un schéma irréductible de multiplicité totale δ_i (6.1.1). Il résulte alors de (7.1.1) qu'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X_i a un degré (sur $\kappa(s)$) qui est un multiple de δ_i . On peut donc définir un morphisme canonique :

$$\rho : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbf{Z}^r$$

tel que si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X , la $i^{\text{ième}}$ composante de $\rho(\mathcal{L})$ dans $\mathbf{Z}^r$ soit égale à $(1/\delta_i)(\text{degré } \mathcal{L}|X_i)$.

Proposition (8.1.2). — Supposons S strictement hensélien et reprenons les notations de (6.1.2).

(i) On a un complexe canonique :

$$0 \rightarrow D_0 \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}^r \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

où i est l'injection canonique, où α est composé de l'application canonique $D \rightarrow \text{Pic}(X)$ et du morphisme $\rho : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbf{Z}^r$, et où $\beta(a_1, \dots, a_r) = \sum_i a_i \delta_i$.

(ii) $E(S) \cap P^0(S)$ est canoniquement isomorphe à $\text{Ker}(\alpha)/\text{Im}(i)$. Ce groupe est fini et $E(S)$ est de type fini, si f est cohomologiquement plat ou si X satisfait à la propriété (N) (6.1.4). Si f satisfait à la propriété (N)*, ce groupe est cyclique d'ordre d' (6.1.11).

(iii) Supposons que X_i soit géométriquement irréductible et notons Q' l'adhérence schématique dans Q de Q_i^0 . Alors, on a un morphisme surjectif canonique :

$$\gamma : \text{Ker}(\beta)/\text{Im}(\alpha) \rightarrow Q'(S)/Q^0(S) \simeq (Q'_s/Q_s^0)(s)$$

et $\text{Ker}(\gamma)$ est un groupe fini, nul si f est cohomologiquement plat.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Q' est de type fini sur S .
- b) Q^r est fermé dans Q .
- c) $\text{Im}(\alpha)$ est un sous-groupe de rang $r-1$ de $\mathbf{Z}^r$.

Si X satisfait à la propriété (N), ces conditions sont encore équivalentes à :

- d) Pour tout $i=1, \dots, r$, il existe un diviseur sur X dont le support est l'espace sous-jacent à X_i (8.1.1).

Démonstration. — (i) Il est clair que $\alpha \circ i = 0$. Par ailleurs, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X , $(\beta \circ \rho)(\mathcal{L})$ est simplement le degré total du faisceau $\mathcal{L}$ relativement à S , donc est nul si $\mathcal{L}_i$ est trivial, donc $\beta \circ \alpha = 0$.

(ii) On a $E(S) \simeq D/D_0$ (6.1.3). D'autre part, un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X définit un élément de $P^0(S) = P^r(S)$ si et seulement si $\rho(\mathcal{L}) = 0$, d'où le fait que $E(S) \cap P^0(S)$ soit isomorphe à $\text{Ker}(\alpha)/\text{Im}(i)$. Les autres assertions contenues dans (ii) résultent de (6.4.1).

(iii) Soit P' l'image réciproque de Q' dans P . Alors P' est l'adhérence schématique de P_i^0 dans P (3.2, c)). Comme X_i est géométriquement irréductible, P' est le sous-foncteur de P relatif aux faisceaux inversibles sur X de degré total nul. Comme $(\beta \circ \rho)(\mathcal{L})$ est précisément égal au degré total du faisceau inversible $\mathcal{L}$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow P'(S) \rightarrow P(S) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Par ailleurs, il résulte de (7.1.2) que le morphisme $\rho : P(S) \rightarrow \mathbf{Z}^r$ est surjectif; son noyau est $P^0(S)$. On a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow P^0(S) \rightarrow P'(S) \rightarrow \text{Ker}(\beta) \rightarrow 0.$$

D'autre part, $\text{Im}(\alpha)$ est l'image par ρ de $E(S)$ (qui est contenu dans $P'(S)$). On obtient donc un isomorphisme canonique :

$$P'(S)/(P^0(S) + E(S)) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\beta)/\text{Im}(\alpha).$$

Considérons l'application canonique $P'(S)/P^0(S) \rightarrow Q'(S)/Q^0(S)$. Comme P' et Q' sont formellement lisses, cette application s'identifie à l'application $(P'_s/P^0_s)(s) \rightarrow (Q'_s/Q^0_s)(s)$ (cf. (6.4.3)) donc est surjective. On obtient donc finalement un morphisme canonique surjectif :

$$\gamma : \text{Ker}(\beta)/\text{Im}(\alpha) \xrightarrow{\sim} P'(S)/(P^0(S) + E(S)) \rightarrow Q'(S)/Q^0(S).$$

Ce morphisme est évidemment injectif si $P^0(S) \rightarrow Q^0(S)$ est surjectif, ce qui sera le cas si $P^0 \rightarrow Q^0$ est un morphisme étale d'espaces algébriques, c'est-à-dire si f est cohomologiquement plat (5.2). Dans le cas général, considérant P comme quotient de l'espace algébrique lisse (P, R) , il est immédiat que si $q \in Q^0(S)$, il existe un trait S' fini et plat sur S et un élément p' de $P^0(S')$ qui relève q . La norme de p' relativement au morphisme $S' \rightarrow S$ fournit alors un élément p de $P^0(S)$ qui relève un multiple > 0 de q . On déduit de là que $\text{Ker}(\gamma)$ est un groupe de torsion, donc est fini puisqu'il est de toute façon un quotient du groupe de type fini $\text{Ker}(\beta)$. Les autres assertions contenues dans (iii) sont immédiates.

Définition (8.1.3). — Un S -schéma en groupes G est *néronien* (i.e. faiblement minimal dans la terminologie de [10]) si G est lisse sur S et si pour tout S -schéma lisse X et tout t -morphisme $u_t : X_t \rightarrow G_t$, il existe un unique S -morphisme $u : X \rightarrow G$ qui prolonge u .

Les propriétés élémentaires des groupes néroniens sont énoncées dans [11].

Théorème (8.1.4). — Soient S un trait, S' son hensélisé strict, $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat, à fibres équidimensionnelles, de dimension 1, tel que les anneaux locaux de $X' = X \times_S S'$ soient factoriels (par exemple ce sera le cas si X est régulier). Alors Q^τ est un S -schéma en groupes néronien, de type fini, dans chacun des deux cas suivants :

- a) $\kappa(s)$ est parfait.
- b) δ (6.1.1) est premier à l'exposant caractéristique p de $\kappa(s)$.

Pour montrer que Q^τ est néronien, on peut supposer S strictement hensélien ([11], (2.3)). Comme Q^τ est lisse sur S et de type fini (8.1.2, (iii)), il nous suffit de montrer que l'application canonique $Q^\tau(S) \rightarrow Q^\tau(t)$ est bijective ([11], (3.3)). Mais Q^τ est fermé dans Q (8.1.2, (iii)); il suffit donc de montrer que l'application $Q(S) \rightarrow Q(t)$ est bijective. Elle est injective, car Q est séparé sur S , et pour voir qu'elle est surjective il suffit de montrer que l'application $P(S) \rightarrow P(t)$ est surjective. Or, dans chacun des cas a) et b), tout point de $P(t)$ provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}_t$ sur X_t . En effet, l'obstruction à l'existence de $\mathcal{L}_t$ est un élément du groupe de Brauer $\text{Br}(t)$, annulé par δ (7.1.4). Or, on a déjà remarqué, dans la démonstration de (7.2.1), que $\text{Br}(t)$ est un groupe de p -torsion puisque S est strictement hensélien, et $\text{Br}(t)$ est nul si de plus $\kappa(s)$ est parfait (donc algébriquement clos) ([8], (1.1)), d'où l'existence de $\mathcal{L}_t$. Par

ailleurs, comme les anneaux locaux de X sont supposés factoriels, $\mathcal{L}_t$ se prolonge, d'au moins une façon, en un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X donc $P(S) \rightarrow P(t)$ est surjectif.

Remarques (8.1.5). — *a)* Soit X_t une courbe lisse et propre sur t et soit J_t sa jacobienne. Si S est excellent, à corps résiduel parfait, on déduit de (8.1.4) et de la désingularisation des courbes sur S , prouvée par Abhyankar [1], que J_t possède un modèle de Néron J sur S (i.e. J_t se prolonge en un S -schéma en groupes néronien J) qui est de type fini sur S . Cette démonstration est en fait bien moins élémentaire que la démonstration originale de Néron, et par ailleurs elle ne fournit pas un modèle de Néron pour les variétés abéliennes générales sur t . En fait, si l'on admet le théorème de réduction semi-stable pour les jacobiniennes, prouvé dans (SGA 7, IX, (3.6)), il n'est pas difficile d'en déduire que toute variété abélienne sur t possède un modèle de Néron sur S , qui est de type fini.

b) Dans la démonstration de (8.1.4), on n'a pas supposé que X_t était géométriquement normal (i.e. lisse puisque X_t est une courbe), de sorte que P_t^0 n'est pas nécessairement une variété abélienne. En utilisant la désingularisation des courbes sur S , on peut donc mettre en évidence des groupes lisses G_t sur t , tels que G_t possède un radical unipotent non nul, et qui ont un modèle de Néron sur S , de type fini.

c) Si X est régulier et $\kappa(s)$ non parfait, Q^τ n'est pas nécessairement néronien, même si X est cohomologiquement plat (cf. (9.2.3)).

(8.2) Critère de représentabilité de P^0 .

Théorème (8.2.1). — Soient S un trait, S' un hensélisé strict de S , t' le point générique de S' , $f: X \rightarrow S$ un morphisme propre, plat, à fibres de dimension 1, qui satisfait à (N)* (6.1.4), $X' = X \times_S S'$, et considérons les conditions suivantes :

- (i) Le pgcd δ des multiplicités totales des composantes irréductibles de X_s est égal à 1.
- (ii) La fibre générique $X'_{t'}$ possède un diviseur de degré 1 sur $\kappa(t')$.
- (iii) Il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}'$ sur $X'_{t'} \times_{t'} P_{t'}^0$, « universel » pour le foncteur $P_{t'}^0$.
- (iv) X est cohomologiquement plat sur S et d' (6.1.11) est égal à 1.
- (v) $P_{S'}$ est représentable.
- (vi) P^0 est représentable.
- (vii) P^0 est séparé sur S (3.2, a)).
- (viii) $d' = 1$.

Alors on a les implications suivantes :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii) \Rightarrow (viii).$$

Par suite, les huit conditions sont équivalentes si $\delta = d'$ (par exemple, si les anneaux locaux de X sont factoriels et si $\kappa(s)$ est parfait).

Démonstration. — Notons que les entiers δ et d' sont invariants par passage à l'hensélisé strict de S (6.1.11). De même, le fait que P^0 soit représentable équivaut au fait que le morphisme canonique $P^0 \rightarrow Q^0$ est un isomorphisme (comme il résulte de (5.3) et du

fait que P est formellement lisse sur S), donc est lui aussi invariant par passage à l'hensélisé strict. Pour démontrer le théorème, on peut donc supposer $S = S'$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) résultent de (7.1.6) (qui montre aussi que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) si les anneaux locaux de X_s sont factoriels). (iii) $\Rightarrow$ (vi) résulte de (7.2.4), compte tenu du fait que, P^0 étant formellement lisse sur S , on a $\bar{P}^0 = P^0$. Les équivalences (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (v) résultent de (5.3), et entraînent que X est cohomologiquement plat. Enfin, comme $P^0 = P^\tau$, (vii) $\Leftrightarrow$ (iv) résulte de (6.4.5). L'implication (iv) $\Rightarrow$ (viii) est évidente.

Remarque (8.2.2). — Supposons X régulier. Si $\kappa(s)$ n'est pas parfait, les huit conditions de (8.2.1) ne sont pas nécessairement équivalentes, comme nous le verrons dans (9.2) et (9.4.3), *b*).

Proposition (8.2.3). — *Supposons que X satisfasse à la propriété (N)* et que X_t soit une courbe lisse, de genre au moins égal à 2, dont la jacobienne J possède une réduction semi-stable sur S (SGA 7, IX, 2). Alors P^0 est représentable.*

On peut supposer S strictement hensélien. D'après le résultat fondamental prouvé dans [5], les hypothèses faites sur X_t entraînent que X_t possède un modèle minimal régulier X_1 sur S [9] dont la fibre spéciale $(X_1)_s$ est séparable sur $\kappa(s)$. Par suite $X_1(S)$ n'est pas vide, donc $X(S)$ n'est pas vide. La conclusion résulte alors de (7.2.4), compte tenu du fait que $\bar{P}^0 = P^0$.

9. Exemples et contre-exemples.

(9.1) Exemples de courbes X , propres et plates sur S , qui ne sont pas cohomologiquement plates.

(9.1.1) Courbes non réduites.

Soit X_0 une courbe elliptique sur un trait S strictement hensélien. On peut alors trouver un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X_0 , non trivial, tel que $\mathcal{L}_s$ soit trivial. Considérons le schéma X , ayant même espace sous-jacent que X_0 , dont le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est égal à $\mathcal{O}_{X_0} \oplus \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est considéré comme un idéal de carré nul. Alors X est propre et plat sur S , mais n'est évidemment pas cohomologiquement plat.

(9.1.2) Courbe réduite, normale aux points maximaux de X_s , mais qui n'est pas S_2 (ou, ce qui revient au même, telle que X_s possède des composantes immergées (6.1.5)).

Soit P_1 la droite projective sur S et soit X le S -schéma déduit de P_1 en identifiant deux points rationnels distincts de $(P_1)_s$. Alors X est un S -schéma réduit, propre et plat sur S , tel que X_t soit la droite projective, tandis que $(X_s)_{\text{red}}$ est une cubique à point double à tangentes distinctes, et X_s possède une composante immergée au point double en question. Par suite $H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est de dimension au moins égale à 2 sur $\kappa(s)$, donc X n'est pas cohomologiquement plat. (Les amateurs d'équations pourront remplacer S par le spectre de $k[T]$ et considérer l'ouvert affine $\text{Spec } k[T, Y]$ comme complémentaire dans P_1 de la section à l'infini. Identifier les points $T=0$, $Y=\pm 1$, revient alors à remplacer l'anneau $k[T, Y]$ par la sous- $k[T]$ -algèbre engendrée par TY , Y^2-1 , $Y(Y^2-1)$. On obtient ainsi un anneau isomorphe au quotient de l'anneau de polynômes

$k[T, U, V, W]$ par l'idéal engendré par les éléments $WT - VU$, $VT^2 + T^2 - U^2$ et $V^2(1 + V) - W^2$.)

(9.1.3) *Courbe réduite, ayant la propriété S_2 , à fibre générique lisse, qui n'est pas normale.*

Soit M le S -schéma projectif, d'équation homogène $UV = \pi W^2$. Alors M est un schéma régulier, M_t est isomorphe à la droite projective, tandis que M_s est réduit et possède deux composantes irréductibles D_1 et D_2 , isomorphes à la droite projective, qui ont un point commun A . Soit B (resp. C) un point rationnel de D_1 (resp. D_2) distinct de A et $u: D_1 \xrightarrow{\sim} D_2$ un $\kappa(s)$ -isomorphisme qui envoie B sur A et A sur C . Soit X le S -schéma obtenu à partir de M en identifiant D_1 et D_2 suivant l'isomorphisme u . Alors X est plat sur S , $X_t \simeq M_t$ est une droite projective; M est le normalisé de X et est fini sur X , X_s est irréductible. Notons x le point générique de X_s . Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas normal et même n'est pas unibranche. Soit $Z = X_s - x$ et montrons que X est Z -clos (EGA, IV, (5.9.9)), ce qui entraînera que X est S_2 (EGA, IV, (5.10.5)). Soient Y un ouvert affine de X , Y' un ouvert de Y contenant Y_t et x , et f un élément de $\Gamma(Y', \mathcal{O}_X)$. On doit montrer que f se prolonge en une fonction sur Y . Soient $\bar{Y}$ et $\bar{Y}'$ les images réciproques de Y et Y' dans M . Comme M est régulier, donc S_2 , f se prolonge en une fonction g sur $\bar{Y}$. Dire que g provient d'une fonction sur Y signifie que $u^*(g|(\bar{Y} \cap D_2)) = g|(\bar{Y} \cap D_1)$. Or cette égalité est vérifiée lorsque l'on remplace $\bar{Y}$ par $\bar{Y}'$. Comme $\bar{Y}' \cap D_2$ et $\bar{Y}' \cap D_1$ sont denses dans D_2 et D_1 respectivement, l'égalité se prolonge. Ceci étant, le morphisme canonique $M \rightarrow X$ induit un morphisme birationnel $D_1 \rightarrow (X_s)_{\text{red}}$, tel que A et B aient même image. Il en résulte que $(X_s)_{\text{red}}$ est de genre au moins égal à 1; *a fortiori*, il en est de même de X_s , ce qui prouve que X n'est pas cohomologiquement plat.

Remarques (9.1.4). — *a)* Dans les exemples (9.1.3) et (9.1.4), l'adhérence schématique de la section unité de P est égale à P^0 (car $P_t^0 = 0$ et P est formellement lisse sur S). Or P_s^0 contient un groupe multiplicatif G_m (car $(X_s)_{\text{red}}$ est une cubique à point double, à tangentes distinctes). Il en résulte que les énoncés (6.3.5, (i) et (iv)) et (6.3.8, (ii)) ne sont plus nécessairement vrais si $f: X \rightarrow S$ satisfait à une seule des conditions *a)* et *b)* dont la conjonction constitue la propriété (N) (6.1.4).

b) Nous donnerons plus loin (9.4.1) un exemple d'une courbe propre et régulière sur S , qui n'est pas cohomologiquement plate. Rappelons qu'un tel phénomène n'est pas possible si f satisfait à (N)* et si $\kappa(s)$ a un exposant caractéristique premier à δ (7.2.1).

(9.2) *Cas d'un corps résiduel $\kappa(s)$ non parfait, de caractéristique p .*

(9.2.1) Soit c un élément de l'anneau de valuation discrète $\Gamma(S)$ dont l'image dans $\kappa(s)$ n'est pas une puissance $p^{\text{ième}}$ et considérons le S -schéma projectif d'équation homogène $U^p + cV^p + \pi W^p = 0$. Alors X est régulier, a une fibre spéciale réduite, de multiplicité totale égale à p . Comme X est une intersection complète relative, dans le plan projectif, X est cohomologiquement plat sur S . Enfin, le genre de X relativement

à S est égal à $(p-1)(p-2)/2$. On voit donc que X satisfait à la condition (iv) de (8.2.1), mais ne satisfait pas aux conditions équivalentes (i) et (ii). En fait, P est représentable et séparé sur S bien que $\delta=p$.

(9.2.2) Prenons $p=2$ dans l'exemple précédent. Alors X_t est de genre 0, donc $P_t^0=0$ et la condition (iii) de (8.2.1) est vérifiée, d'où (iii) $\nRightarrow$ (ii).

(9.2.3) Prenons $p=3$, S strictement hensélien, d'inégales caractéristiques et admettant 3 pour uniformisante. Alors la courbe C d'équation $U^3 + cV^3 + 3W^3 = 0$ a une fibre générique de genre 1, qui est un torseur sous la courbe elliptique P_t^0 . Nous allons voir que $P^0=Q^0$ n'est pas la composante neutre du modèle de Néron sur S de P_t^0 . Si l'on reprend la démonstration de (8.1.4), cela signifie qu'il existe des points de $P_t^0(t)$ qui ne correspondent pas à des faisceaux inversibles sur C_t . *A fortiori*, la condition (iii) de (8.2.1) n'est pas vérifiée, donc (iv) $\nRightarrow$ (iii). Soit S' le trait fini sur S obtenu en extrayant une racine cubique de c ; alors l'indice de ramification de S' sur S est égal à 1. Supposons que P^0 soit la composante neutre du modèle de Néron de P_t^0 . Il résulte de l'étude faite dans ([10], III) que la formation du modèle de Néron est invariante par extension de traits, d'indice de ramification égal à 1. Il nous suffit donc de montrer que P_s^0 n'est pas la composante neutre du modèle de Néron de sa fibre générique. Quitte à remplacer S' par S , on peut donc prendre pour équation de C :

$$U^3 + V^3 + 3W^3 = 0.$$

Donc C est maintenant une courbe sur S , normale, mais non régulière. Le changement de variables sur la fibre générique, défini par les formules $U=Y$, $U+V=3^3Z$ et $W=-3X$ transforme l'équation de départ en l'équation $Y^2Z - 3^3Z^2Y = X^3 - 3^5Z^3$ qui, à son tour, définit sur S une courbe C' . L'équation précédente est du type « p -standard » (au sens de ([10], chap. III, 7, Prop. 4)), ce qui signifie que l'ouvert des points lisses sur S de C' est la composante neutre du modèle de Néron de la courbe elliptique C'_t (elle est du type c_8 dans la classification de *loc. cit.*). Soit alors C'' le sous-schéma fermé de $C \times_S C'$ égal à l'adhérence schématique du graphe de l'isomorphisme $C_t \xrightarrow{\sim} C'_t$ défini par les formules de changement de coordonnées ci-dessus. On vérifie aussitôt que l'image réciproque, par le morphisme de projection $h: C'' \rightarrow C$ du point $U=-1$, $V=1$, $W=0$ de C_s est une cubique ayant un point de rebroussement (isomorphe à C'_s par la projection $C'' \rightarrow C'$). La suite exacte de Leray :

$$0 \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C'', \mathcal{O}_{C''}) \rightarrow H^0(C, R^1f_*\mathcal{O}_{C''}) \rightarrow 0$$

montre alors que le morphisme $H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C'', \mathcal{O}_{C''})$ n'est pas surjectif. De là, on déduit immédiatement que le morphisme canonique :

$$P^0 = \text{Pic}_{C/S}^0 \rightarrow \text{Pic}_{C''/S}^0 \rightarrow \text{Pic}_{C'/S}^0$$

n'est pas une immersion ouverte, donc P^0 n'est pas la composante neutre du modèle de Néron de P_t^0 .

(9.3) Cas du genre 0.

Proposition (9.3.1). — Soit $f: X \rightarrow S$ propre, plat, à fibres de dimension 1 et satisfaisant à (N)*. Si X_t est de genre 0, X est cohomologiquement plat sur S , on a $d' = 1$ (6.1.11) et P^0 est le groupe unité.

Comme X_t est de genre 0, P_t^0 est nul. Mais P^0 est formellement lisse sur S , par suite l'adhérence schématique E de la section unité de P majore P^0 . Il en résulte que E_s est lisse sur $\kappa(s)$, donc X est cohomologiquement plat sur S (6.4.2). On a alors $P^0 = 0$, et comme $P^0 = P^r$, on a aussi $P^r = 0$, donc $d' = 1$ (6.4.1).

(9.4) Cas du genre 1.

Dans ce numéro, si A est un groupe algébrique commutatif sur un corps k , pour tout entier $n > 0$, on note A_{p^n} le noyau de l'élévation à la puissance p^n -ième dans A .

Théorème (9.4.1). — Supposons S complet à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soient A_t une courbe elliptique sur t , A son modèle minimal régulier sur S [10], X_t un torseur sous A_t , d'ordre p^n ($n > 0$), X un S -modèle minimal régulier de X_t [9].

(i) Le pgcd δ des multiplicités des composantes irréductibles de X_s est égal à p^n .

(ii) Si la composante neutre de la fibre spéciale du S -modèle de Néron de A_t est le groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)_s$ ou est une courbe elliptique d'invariant de Hasse nul, X n'est pas cohomologiquement plat. Dans le premier cas, le groupe $H_{\text{ét}}^1(t, A_t)$ est isomorphe (non canoniquement) à $\text{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où G est le groupe de Galois de $\kappa(t)$.

(iii) Supposons que A_t ait bonne réduction sur S et que A_s soit une courbe elliptique d'invariant de Hasse non nul. Alors on a une suite exacte canonique :

$$0 \rightarrow H_p^1(A_t)^{\text{rad}} \rightarrow H_p^1(A_t) \rightarrow H_p^1(A_t)^{\text{ét}} \rightarrow 0,$$

où $H_p^1(A_t)^{\text{rad}}$ est non canoniquement isomorphe à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et où $H_p^1(A_t)^{\text{ét}}$ est non canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(G, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$, G étant le groupe de Galois de $\kappa(t)$.

De plus le schéma X est cohomologiquement plat sur S si et seulement si l'image de X_t dans $H_p^1(A_t)$ est contenue dans $H_p^1(A_t)^{\text{rad}}$.

Démonstration. — (i) Soit toujours P le foncteur de Picard de X au-dessus de S . Pour tout entier $m \geq 0$, la composante connexe de P_t , relative aux faisceaux inversibles de degré m , est un torseur sous A_t , dont la classe dans $H^1(A_t)$ est m fois la classe du torseur X_t . Par suite, l'ordre du torseur X_t est le plus petit entier non nul m tel qu'il existe un élément de $P(t)$, de degré m . Comme le groupe de Brauer de $\kappa(t)$ est nul, m est aussi le pgcd δ' des degrés des diviseurs sur X_t . Or $\delta' = \delta$ puisque X est régulier (7.1.6, 1)).

Cherchons à évaluer, dans certains cas, la composante p -primaire $H_p^1(A_t)$ du groupe $H^1(A_t)$ des torseurs sous A_t . Nous ne chercherons pas à donner des isomorphismes canoniques, ce qui serait possible en introduisant la variété duale de A_t :

a) Cas où la composante neutre de la fibre spéciale du modèle de Néron de A_t est un groupe multiplicatif (cas de réduction semi-stable, de type multiplicatif). Tate a démontré que, dans ce cas, et du point de vue de la géométrie analytique rigide, A_t est

quotient du groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)_t$ par un sous-groupe discret, isomorphe à $\mathbf{Z}$ (cf. SGA 7, IX, (13.3), en attendant mieux). On en déduit que $H^1(A_t)$ est isomorphe à $H^2(G, \mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. (On peut retrouver ce résultat, sans utiliser la géométrie rigide, par une méthode analogue à celle que nous allons employer maintenant.)

b) Cas où A_t a bonne réduction et où A_s est une courbe elliptique ordinaire (i.e. d'invariant de Hasse non nul). Soit B le groupe p -divisible sur S défini par A [15]. Comme A_s est une courbe elliptique ordinaire, pour tout entier $n > 0$, on a une suite exacte canonique :

$$0 \rightarrow (A_{p^n})^{\text{rad}} \rightarrow A_{p^n} \rightarrow (A_{p^n})^{\text{et}} \rightarrow 0$$

où $(A_{p^n})^{\text{rad}}$ est isomorphe au groupe μ_{p^n} des racines p^n -ièmes de l'unité et $(A_{p^n})^{\text{et}}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. On en déduit une suite exacte de groupe p -divisibles :

$$0 \rightarrow B^{\text{rad}} \rightarrow B \rightarrow B^{\text{et}} \rightarrow 0$$

où B^{et} est isomorphe au groupe constant $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et où B^{rad} est isomorphe au groupe p -divisible C défini par le groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)_s$. Soient $\bar{K}$ une clôture séparable de $K = \kappa(t)$ et $\bar{S}$ le normalisé de S dans $\bar{K}$. Le groupe $B^{\text{rad}}(\bar{S})$ est égal au sous-groupe de $A(\bar{K}) \simeq A(\bar{S})$ formé des points qui se réduisent suivant l'élément neutre de $A(k)$. On a donc une suite exacte canonique, compatible avec l'action de $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$:

$$0 \rightarrow B^{\text{rad}}(\bar{S}) \rightarrow A(\bar{K}) \rightarrow A_s(k) \rightarrow 0$$

où G opère trivialement sur $A_s(k)$. Comme A est lisse sur S , l'application $A(K) \simeq A(S) \rightarrow A(k)$ est surjective. On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow H_p^1(B^{\text{rad}}(\bar{S})) \rightarrow H_p^1(A(\bar{K})) \rightarrow \text{Hom}_p(G, A(k)) \rightarrow H_p^2(B^{\text{rad}}(\bar{S}))$$

où $\text{Hom}_p(G, A(k))$ est la partie de p -torsion de $\text{Hom}(G, A(k))$, donc est isomorphe à $\text{Hom}(G, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. Pour calculer la cohomologie de $B^{\text{rad}}(\bar{S})$, on utilise le fait que B^{rad} est isomorphe au groupe p -divisible C associé au groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)_s$. Grâce aux suites exactes :

$$0 \rightarrow C(\bar{S}) \rightarrow G_m(\bar{S}) \rightarrow G_m(k) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow G_m(\bar{S}) \rightarrow G_m(\bar{K}) \xrightarrow{v} \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

(où v est donné par la valuation), on trouve immédiatement que l'on a $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p = H_p^1(G_m(\bar{S}))$, $H_p^2(G_m(\bar{S})) = 0$, $H_p^1(C(\bar{S})) = \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et $H_p^2(C(\bar{S})) = 0$. D'où la première assertion de (iii).

Fin de la démonstration de (ii) et (iii). — Notons qu'il résulte de (8.1.4) que $\mathbf{Q}^r$ est S -néronien, donc est canoniquement isomorphe à l'ouvert de A formé des points lisses sur S . Si X est cohomologiquement plat sur S , le morphisme canonique $P^0 \rightarrow Q^0$ est un morphisme étale d'espaces algébriques (5.2) et son noyau $E \cap P^0$ est un schéma étale sur S , connu par ses points à valeur dans S : $(E \cap P^0)(S) \simeq (E \cap P^0)(s) \simeq \mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (6.4.1). Dans (ii), P_s^0 , étant isogène à Q_s^0 , est un groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ ou une courbe elliptique d'invariant de Hasse nul, donc ne contient pas de points d'ordre p . D'où une contradiction.

Examinons maintenant le cas où A_t a bonne réduction, de sorte que $A \simeq Q^0$ est une courbe elliptique sur S . Dans ce cas, le modèle minimal régulier X est facile à construire ([15], Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, p. 83); l'action de A_t sur X_t se prolonge en une action de A sur X , telle que $(X_s)_{\text{red}}$ soit un espace homogène (non principal) sous A_s ; en particulier $(X_s)_{\text{red}}$ est une courbe elliptique. Soient $A \rightarrow A'$ une isogénie de courbes elliptiques sur S , X'_t le torseur sous A'_t déduit de X_t par extension du groupe structural, X' son modèle minimal régulier sur S . En utilisant l'action de A sur X , on voit immédiatement que le morphisme canonique $X_t \rightarrow X'_t$ se prolonge en un morphisme fini et plat $X \rightarrow X'$.

Supposons maintenant que A_s soit une courbe elliptique ordinaire. Comme X_t est d'ordre p^n , X_t provient d'un élément de $H^1_{\text{fppf}}(t, A_{p^n})$; dire que l'image de X_t dans $H^1_p(A_t)$ est contenue dans $H^1_p(A)^{\text{rad}}$ signifie que X_t provient d'un torseur sous $H^1_{\text{fppf}}(A_{p^n})^{\text{rad}}$. Posons $M = (A_{p^n})^{\text{rad}}$, qui est un groupe fini de type multiplicatif et soit $\bar{A} = A/M$. Le torseur sous $\bar{A}_t$ déduit de X_t est donc trivial et d'après les remarques faites plus haut, il existe un morphisme canonique $X \rightarrow \bar{A}$ fini et plat. Par passage au foncteur de Picard, on en déduit un morphisme $u: \bar{A} \rightarrow P^0$ qui, composé avec le morphisme $q: P^0 \rightarrow Q^0 = A$, donne l'isogénie duale $\bar{A} \rightarrow A$, de noyau le groupe étale M' , dual de Cartier de M . Soit A'_s l'image de $\bar{A}_s$ dans P^0_s . *A fortiori*, le noyau de l'isogénie $A'_s \rightarrow Q^0_s$ est étale et par suite $\text{Ker}(P^0_s \rightarrow Q^0_s)$, qui est extension du groupe lisse P^0_s/A'_s par le groupe étale $\text{Ker}(A'_s \rightarrow Q^0_s)$, est un groupe lisse. Donc X est cohomologiquement plat sur S (6.4.2).

Supposons maintenant que l'image de X_t dans $H^1_p(A_t)^{\text{ét}}$ ne soit pas nulle et montrons que X n'est pas cohomologiquement plat. Gardons les notations précédentes et soit $\bar{X}_t$ le torseur sous $\bar{A}_t$ déduit de X_t , et $\bar{X}$ son modèle minimal sur S ; on a donc un morphisme fini et plat $X \rightarrow \bar{X}$ et, d'après le lemme ci-après, il suffit de montrer que $\bar{X}$ n'est pas cohomologiquement plat sur S . Or, soit $\bar{N}$ le sous-groupe fini étale de $\bar{A}$ égal à $A_{p^n}/M \simeq (A_{p^n})^{\text{ét}}$. Il résulte de l'hypothèse faite sur X , que $\bar{X}_t$ est un torseur non trivial sous $\bar{A}_t$, qui provient d'un torseur sous $\bar{N}_t$. Changeant de notations, on suppose que X_t est un torseur non trivial sous A_t , et qu'il existe un sous-groupe fini étale N de A tel que X_t provienne d'un torseur sous N_t . On en déduit comme plus haut qu'il existe un morphisme fini et plat $X \rightarrow \bar{A} = A/N$, donc un morphisme $\bar{A} \rightarrow P^0$ qui, composé avec le morphisme $P^0 \rightarrow Q^0 \simeq A$, donne l'isogénie duale $\bar{A} \rightarrow A$, dont le noyau est le groupe de type multiplicatif N' , dual de Cartier de N . Or, si X était cohomologiquement plat sur S , $P^0_s \rightarrow Q^0_s$ serait une isogénie étale de noyau $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z}$. D'après ce qui précède ce noyau doit aussi être de type multiplicatif, donc radiciel, d'où une contradiction.

Lemme (9.4.2). — Soient S un trait, X un S -schéma propre et plat qui satisfait à la propriété (N) (6.1.4), X' un S -schéma propre et plat, $u: X' \rightarrow X$ un S -morphisme tel que $u_t: X'_t \rightarrow X_t$ soit schématiquement dominant (EGA, IV, (11.10)) et tel que u_t induise une bijection de $\Gamma(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ sur $\Gamma(X'_t, \mathcal{O}_{X'_t})$.

Alors, si X' est cohomologiquement plat sur S , X est cohomologiquement plat sur S .

L'hypothèse que u_i soit schématiquement dominant entraîne que le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \rightarrow u_*(\mathcal{O}_{X'})$ est injectif; soit $\mathcal{R}$ son conoyau. Comme X satisfait à la propriété (N), il est immédiat que $\mathcal{R}$ est sans torsion. Il en résulte que la flèche $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \rightarrow \Gamma(X'_s, \mathcal{O}_{X'_s})$ est injective. Donc $h^0(X_s) \leq h^0(X'_s)$ (notations de (2.4.2)). Mais X' est cohomologiquement plat sur S , donc $h^0(X'_s) = h^0(X'_t)$ et, par hypothèse, on a $h^0(X_t) = h^0(X'_t)$. On a donc $h^0(X_s) \leq h^0(X_t)$, et par suite X est cohomologiquement plat.

Remarques (9.4.3). — *a)* Il résulte de (9.4.1, (ii) et (iii)) que lorsque S a une caractéristique résiduelle > 0 , il peut exister des S -schémas en courbes, propres et plats, réguliers, à fibre générique lisse, qui ne sont pas cohomologiquement plats sur S .

b) Supposons S strictement hensélien, complet, à corps résiduel non parfait. Soit A une S -courbe elliptique canonique, c'est-à-dire telle que la suite exacte de groupes p -divisibles :

$$0 \rightarrow B^{\text{rad}} \rightarrow B \rightarrow B^{\text{ét}} \rightarrow 0$$

soit scindée. Dans le calcul du groupe $H_p^1(A_t)$, l'hypothèse que $\kappa(s)$ est algébriquement clos nous a servi à montrer que la flèche $H_p^1(A_t) \rightarrow H_p^1(B^{\text{ét}})$ était surjective (grâce à la nullité du groupe de Brauer de $\kappa(t)$). Mais si A est canonique, il est clair que cette flèche possède une section, donc $H_p^1(A_t)$ contient un sous-groupe $H^1(B)^{\text{ét}} \simeq \text{Hom}_p(G, A(k))$. Choisissons une extension galoisienne L de $\kappa(t)$, de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, telle que si S' est le normalisé de S dans L , l'extension résiduelle $\kappa(s')/\kappa(s)$ soit radicielle de degré p . Soit X_t un tore sous A_t trivialisé par L . Il est clair que le modèle minimal X de X_t a alors une fibre spéciale X_s régulière, de multiplicité totale p , et que $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ contient $\kappa(s')$. *A fortiori*, X n'est pas cohomologiquement plat sur S . Cet exemple montre que dans (8.2.1), la condition (viii) n'entraîne pas la condition (iv).

c) Soient S un trait, A une courbe elliptique sur S , X_t un tore sous A_t , X son modèle minimal régulier sur S , $Y \rightarrow X$ le revêtement galoisien considéré dans (6.3.5), $Y \rightarrow S' \rightarrow S$ la factorisation de Stein de Y au-dessus de S . Il est clair que Y est le modèle minimal régulier de $Y_{t'}$ sur S' et que $Y_{t'}$ est l'image réciproque de X_t par le morphisme $t' \rightarrow t$. Supposons que S soit complet, à corps résiduel algébriquement clos, et que A_s soit ordinaire. Alors il résulte facilement de la démonstration de la dernière assertion de (9.4.1, (iii)), donnée ci-dessus, que Y est cohomologiquement plat sur S' . Si de plus, il existe un sous-groupe fini étale M de A , tel que X_t provienne d'un tore sous M_t , alors Y est un tore trivial et l'on a obtenu, en quelque sorte, une construction inverse de celle décrite dans ([15], p. 83).

d) Il résulte de (9.4.1, (iii)) que d peut être égal à un multiple de p bien que X soit régulier et cohomologiquement plat sur S .

(9.5) Cas des courbes de genre $g \geq 2$.

Proposition (9.5.1). — Si $f: X \rightarrow S$ est une courbe relative, propre, plate, régulière, telle que $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, et si X_t est de genre g , alors le pgcd d' des multiplicités apparentes des

composantes irréductibles de X_s divise $g-1$. En particulier, si $\kappa(s)$ est parfait et si $g=2$, X est cohomologiquement plat sur S .

En effet, notons ω le faisceau inversible sur X qui est dualisant pour le morphisme $X \rightarrow S$. Alors $\omega \simeq \mathcal{O}_X(K)$, où K est un diviseur canonique relatif sur X . Soit C un diviseur positif sur X , de support contenu dans X_s , et notons encore C la courbe qu'il définit. Il résulte alors de la théorie des intersections sur une surface « arithmétique » [9] que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{O}_C)$ du faisceau structural de C (calculée relativement à $\kappa(s)$) est donnée par la formule :

$$-2\chi(\mathcal{O}_C) = C \cdot (C + K).$$

Si l'on se borne aux diviseurs C dont un multiple est trivial, on a $C \cdot C = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_C)$ dépend additivement de C . En particulier, si l'on prend pour C le diviseur $C_0 = (1/d')(\text{div } X_s)$, on trouve $1-g = \chi(\mathcal{O}_{X_s}) = d'\chi(\mathcal{O}_{C_0})$, d'où la première partie de la proposition; la seconde résulte alors de (8.2.1).

Remarque (9.5.2). — Nous allons construire, sur un trait convenable, une courbe relative, propre, régulière, à fibre générique lisse de genre 3, qui n'est pas cohomologiquement plate. Considérons un trait hensélien S , d'inégales caractéristiques, à corps résiduel algébriquement clos, de caractéristique 2. Et considérons sur S une courbe elliptique A qui satisfait aux deux conditions suivantes :

- a) A contient un sous-schéma en groupes étale M isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_S$.
- b) Si $\bar{A} = A/M$, $\bar{A}_t$ possède un revêtement galoisien de degré 2 $\bar{Y}_t \rightarrow \bar{A}_t$, ramifié en exactement deux points rationnels. (N.B. — Cette dernière condition est réalisable sur la clôture algébrique de t d'après l'étude du groupe fondamental « tame » exposée dans (SGA 1, XIII), donc quitte à faire une extension de traits, elle se réalise déjà sur t .)

Il résulte alors de la structure de $H_2^1(A_t)$ mise en évidence dans (9.4.1, (iii)), qu'il existe un torseur X_t sous A_t , d'ordre 2, qui devient trivial par extension du groupe structural de A_t à $\bar{A}_t$. Par suite, il existe un morphisme fini étale de degré 2, $v_t : X_t \rightarrow \bar{A}_t$. L'image réciproque par v_t du revêtement $\bar{Y}_t$ de $\bar{A}_t$ est une courbe Y_t lisse sur t , de genre 3. Soient alors X le modèle minimal régulier de X_t sur S , Y le normalisé de X dans Y_t et Y' une désingularisation de Y . Alors Y' n'est pas cohomologiquement plat sur S , comme il résulte de (9.4.2) et du fait que X n'est pas cohomologiquement plat sur S (9.4.1, (iii)).

(9.6) Complément sur le morphisme de spécialisation du groupe fondamental.

Reprenons les notations de (6.3.5). Nous allons construire une courbe relative $X \rightarrow S$, satisfaisant à la propriété (N)*, telle que le groupe G de *loc. cit.* soit un p -groupe non commutatif, ou bien un p -groupe commutatif non cyclique.

Soit S un trait complet, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit M une extension galoisienne de $K = \kappa(t)$, dont le groupe de Galois G est extension d'un groupe cyclique G'' par un groupe cyclique G' , et notons L le sous-corps

de M des invariants sous G' . Notons S' (resp. S'') le normalisé de S dans L (resp. M). Supposons que G soit un p -groupe et que G' et G'' soient annulés par p^n .

Soit A une S -courbe elliptique qui contient un sous-groupe étale isomorphe à $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})_S$. D'après (9.4.1, (iii)), on peut trouver un toreur X_K sous A_K trivialisé exactement par L et un toreur X'_L sous A_L trivialisé exactement par M . Notons X (resp. X') le modèle minimal régulier de X_K sur S (resp. de X'_L sur S'). D'après (9.4.3, c)), il existe un revêtement étale galoisien $u: Y \rightarrow X$, de groupe G'' , qui trivialisé X_K . Plus précisément, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{} & S' \end{array}$$

où Y' est S' -isomorphe à $A_{S'}$, donc est lisse sur S' .

Considérons alors $B = \prod_{Y'/X} A_{Y'}$, qui est un schéma abélien sur X , puisque u est étale. De même, par application du foncteur $\prod_{Y_L/X_K}$ à l'image réciproque de X'_L sur Y'_L , on obtient un toreur Z_{X_K} sous B_{X_K} . En procédant comme dans ([15], p. 83) et en utilisant l'action de A sur X , on peut construire un schéma Z propre et plat sur X , régulier, qui prolonge Z_{X_K} et sur lequel B opère transitivement (ensemblément) relativement à X .

Nous allons voir que le conoyau du morphisme de spécialisation du groupe fondamental des fibres géométriques de Z au-dessus de S est isomorphe à G . Notons $v: Y'' \rightarrow X'$ le revêtement galoisien de groupe G' qui trivialisé X' , de sorte que Y'' est S'' isomorphe à $A_{S''}$, et que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{v} & Y'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xleftarrow{} & S'' \end{array}$$

Soit Z' l'image réciproque de Z par le morphisme u . Alors, vu la définition de Z_{X_K} , $Z'_{Y'_L}$ est isomorphe au produit de $\text{Card}(G'')$ toreurs isomorphes à $X'_{Y'_L}$. Par suite, $Z'_{Y'_L}$ est trivialisé par l'extension $Y'_{S''} \rightarrow Y'$, donc se prolonge en un schéma Z'' lisse sur $Y'_{S''}$, et par suite lisse sur S'' . Enfin il est immédiat qu'il existe un morphisme fini étale $Z'' \rightarrow Z'$ de groupe G' . Le conoyau du morphisme de spécialisation des groupes fondamentaux des fibres géométriques de Z/S est isomorphe au groupe de Galois de M sur K (6.3.7, b)) donc est égal à G .

On peut se ramener au cas d'une courbe de la façon suivante. Soit C_t l'intersection de $\text{Card}(G'')$ sections hyperplanes assez générales d'un faisceau inversible très ample sur Z_t . Alors C_t est une courbe lisse et géométriquement intègre sur t . Soit C la normalisée (ou une désingularisée) de l'adhérence schématique de C_t dans Z . Enfin soit C'' le revêtement de C image réciproque du revêtement $Z'' \rightarrow Z$. Il résulte de la considération des

factorisations de Stein de C et C'' que le conoyau du morphisme de spécialisation des groupes fondamentaux des fibres géométriques de C/S a un quotient isomorphe à G .

Il suffit alors de remarquer qu'on peut choisir pour G un groupe non commutatif extension de $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou bien le groupe commutatif non cyclique $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

BIBLIOGRAPHIE

- EGA, *Eléments de géométrie algébrique* par A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Publ. I.H.E.S.*, **4**, ...
- SGA, *Séminaires de géométrie algébrique*, par GROTHENDIECK..., 1960, ...*Notes de l'I.H.E.S.*
- [1] S. S. ABHYANKAR, *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, Acad. Press, 1966.
- [2] S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes sur une base de dimension 1* (à paraître).
- [3] M. ARTIN, The implicit function theorem in algebraic geometry, *Algebraic geometry, Bombay, Colloquium 1968*, Oxford University Press.
- [4] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli I* (à paraître).
- [5] P. DELIGNE et D. MUMFORD, Irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. I.H.E.S.*, **36**.
- [6] A. GROTHENDIECK, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, Extraits du *Séminaire Bourbaki*, 1957-1962. Les schémas de Picard : V. Théorèmes d'existence, 1961-1962, n° 232; VI. Propriétés générales, 1961-1962, n° 236.
- [7] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer II, *Séminaire Bourbaki*, 1965-1966, n° 297.
- [8] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer III, *Notes de l'I.H.E.S.*, 1966.
- [9] S. LICHTENBAUM, Curves over valuation rings, *Amer. J. of Math.*, **85** (1968), 380-405.
- [10] A. NÉRON, Modèles minimaux des variétés abéliennes, *Publ. I.H.E.S.*, **21** (1964).
- [11] M. RAYNAUD, Modèles de Néron, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 262 (1966), 413-414.
- [12] M. RAYNAUD, Faisceaux amples sur les schémas en groupes, *Lectures notes in mathematics*, n° 119, Springer Verlag, 1970.
- [13] M. RAYNAUD, Spécialisation du foncteur de Picard, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 264 (1967), 941-943 et 1001-1004.
- [14] M. SCHLESSINGER, *Functors on Artin rings*, thèse, Harvard.
- [15] Local Fields, *Nuffic summer school held at Driebergen*, Springer Verlag, 1966.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1969.

Révisé le 12 février 1970.