PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

HANS GRAUERT

Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 25 (1965), p. 131-149

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1965__25__131_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MORDELLS VERMUTUNG ÜBER RATIONALE PUNKTE AUF ALGEBRAISCHEN KURVEN UND FUNKTIONENKÖRPER

von HANS GRAUERT

EINLEITUNG

Es seien $P^n = P^n(\mathbf{C})$ der n-dimensionale komplex-projektive Raum, $\mathfrak{X} \subset P^n$ eine singularitätenfreie, irreduzible Kurve über dem Körper der rationalen Zahlen. Das (homogene) Ideal von $\mathfrak{X}$ in P^n wird also von Polynomen aufgespannt, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind. Mordell hat vermutet : *Ist das Geschlecht von $\mathfrak{X}$ größer als* 1, *so enthält $\mathfrak{X}$ höchstens endlich viele Punkte mit rationalen Koordinaten.* Diese Vermutung ist bis jetzt nur in Spezialfällen bestätigt worden (1).

Vor kurzem ist nun von Manin (2) gezeigt worden, daß das Analogon für Funktionenkörper mit den komplexen Zahlen als Konstantenkörper richtig ist. Manin benutzt für seinen Beweis schwierige Methoden aus der Funktionentheorie. Seine Mittel sind also transzendenter Natur; sie lassen sich nicht auf Funktionenkörper einer von 0 verschiedenen Charakteristik übertragen. In der vorliegenden Arbeit soll jedoch ein algebraischer Beweis geliefert werden, der dann im Falle beliebiger Charakteristik gilt.

Es sei fortan k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{R}$ ein Funktionenkörper über k von endlichem Transzendenzgrad, $\hat{\mathfrak{R}}$ der algebraische Abschluß von $\mathfrak{R}$. Mit $\mathfrak{X} \subset P^n(\hat{\mathfrak{R}})$ werde eine singularitätenfreie (3), irreduzible (projektiv-algebraische) Kurve über $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Es sei $\mathrm{ch}(\mathfrak{X})$ die Chernsche Zahl des kanonischen Bündels von $\mathfrak{X}$. Unter dem Geschlecht $g = g(\mathfrak{X})$ versteht man sodann die ganze Zahl $\frac{1}{2a}\mathrm{ch}(\mathfrak{X}) + 1$, wobei a die $\mathfrak{R}$-Dimension des Vektorraumes der regulären Funktionen auf $\mathfrak{X}$ ist. $\mathfrak{X}$ heißt trivial, wenn $\mathfrak{X}$ bereits über k definiert werden kann (4), und ein rationaler Punkt auf $\mathfrak{X}$ ist ein Punkt mit Koordinaten in $\mathfrak{R}$. Wie man unmittelbar sieht, ist ein Punkt x

(1) Man vgl. etwa SIEGEL [4].
(2) MANIN, Moskau, ist ein Schüler von ŠAFAREVIC. Man vgl. [2].
(3) Unter « singularitätenfrei » wird stets « absolut singularitätenfrei » verstanden.
(4) Das heißt, daß $\mathfrak{X}$ zu einer Kurve über k $\mathfrak{R}$-isomorph ist.

genau dann rational, wenn jede (über $\mathfrak{R}$ definierte) rationale in x reguläre Funktion auf $\mathfrak{X}$ in x einen Wert in $\mathfrak{R}$ hat. Jedes triviale $\mathfrak{X}$ enthält natürlich unendlich viele rationale Punkte. Als Hauptresultat in der vorliegenden Arbeit wird gezeigt :

SATZ. — *Es sei die Charakteristik von k,* $\operatorname{char} k = 0$. *Es sei* $g(\mathfrak{X}) \geq 2$ *und* $\mathfrak{X}$ *nicht trivial. Dann gibt es höchstens endlich viele rationale Punkte auf* $\mathfrak{X}$.

Im Falle von $\operatorname{char} k = p \neq 0$ liefert der Beweis dieses Satzes ein *etwas schwächeres Resultat.* Wie ein Beispiel lehrt, kann es durchaus nichttriviale $\mathfrak{X}$ geben, die unendlich viele rationale Punkte besitzen. — Das Hauptergebnis der Arbeit dürfte übrigens im Falle beliebiger Charakteristik auch gelten, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Zum Beweise brauchte man nur die Methoden aus § 4 zu verallgemeinern. Die hierzu notwendigen Mittel scheinen jedoch in der Literatur (noch nicht) explizit vorhanden zu sein.

Die Aussage des Satzes kann geometrisch-anschaulich gedeutet werden. Es sei R eine irreduzible singularitätenfreie (nicht notwendig vollständige) algebraische Mannigfaltigkeit über k, die ein Modell von $\mathfrak{R}$ ist. $\mathfrak{X}$ kann dann als eine $(1 + \dim \mathrm{R})$-dimensionale algebraische Teilmenge X in $\mathrm{P}^n(k) \times \mathrm{R}$ gedeutet werden. Da $\mathfrak{X}$ über $\mathfrak{R}$ singularitätenfrei ist, kann man R so (klein) wählen, daß $\mathrm{X} \subset \mathrm{P}^n(k) \times \mathrm{R}$ singularitätenfrei ist und daß die Beschränkung π der Projektion $\mathrm{P}^n(k) \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ auf X in jedem Punkte einfach ist, daß also die Funktionalmatrix von π in jedem Punkt $x \in \mathrm{X}$ den Rang dim R hat.

Die Projektion π ist eine eigentliche, surjektive reguläre Abbildung. Die Fasern $\mathrm{X}_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathrm{R}$ liegen alle singularitätenfrei und sind Vereinigung a vollständiger Kurven vom Geschlecht $g = g(\mathfrak{X}) > 1$. Ein rationaler Punkt in $\mathfrak{X}$ ist eine rationale Schnittfläche in der Familie $(\mathrm{X}, \pi, \mathrm{R})$. Wir haben also zu zeigen, daß es nur endlich viele solcher Schnittflächen in $(\mathrm{X}, \pi, \mathrm{R})$ gibt.

Abschließend möchte ich besonders S. Lang danken, der mir in einem 1963 in Bonn gehaltenen Vortrag das Problem zugetragen hat. Ferner danke ich P. Samuel für verschiedene Hinweise.

§ 1. KURVEN ÜBER ALGEBRAISCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

1. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik, X und R seien (singularitätenfreie) irreduzible projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten über k, ferner sei $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ eine eigentliche, surjektive, reguläre und darüber hinaus einfache Abbildung : Die Funktionalmatrix von π habe also überall den Rang $n = \dim \mathrm{R}$. Die Mannigfaltigkeit X sei $(n+1)$-dimensional. Die Fasern $\mathrm{X}_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathrm{R}$ sind daher vollständige, singularitätenfreie algebraische Kurven, die in endlich viele irreduzible Komponenten $\mathrm{X}_{t\nu}$, $\nu = 1, \ldots, e$ zerfallen. Das Geschlecht der $\mathrm{X}_{t\nu}$ ist von t und ν unabhängig und sei mit g bezeichnet. Wir setzen fortan $g \geq 2$ voraus.

Es bezeichne $\mathrm{T}(\mathrm{X})$, $\mathrm{T}(\mathrm{R})$, $\mathrm{T}_t = \mathrm{T}(\mathrm{X}_t)$ das kontravariante Tangentialbündel

von X bzw. R oder X_t. Das Bündel [1] T_t ist offenbar ein Untervektorraumbündel von $T(X)|X_t$. Durch die Projektion π wird T(R) nach X geliftet. Das so über R erhaltene reguläre Vektorraumbündel sei mit $\widetilde{T}(R)$ bezeichnet. Da π auch eine Projektion von Vektoren definiert, hat man einen Epimorphismus $\alpha : T(X) \to \widetilde{T}(R)$. Wir bezeichnen mit F das affine Unterbündel derjenigen Homomorphismen $\eta \in \mathrm{Hom}(\widetilde{T}(R), T(X))$ mit $\alpha \circ \eta = \mathrm{id}$. F ist ein reguläres Faserbündel über X und damit eine algebraische Mannigfaltigkeit, die typische Faser von F ist der k^n, die Strukturgruppe i.a. die volle Gruppe der affinen Transformationen des k^n. Man kann F als das *Bündel der infinitesimalen Schnitte* in der Faserung X ansehen. — Wir wollen die Faserprojektion $F \to X$ mit p bezeichnen.

Indem man jede Faser $F_x = p^{-1}(x) \approx k^n$ zum projektiven Raum $P^n = P^n(k)$ abschließt, erhält man ein Bündel $\hat{F}$ über X mit projektiver Faser, jedoch gleicher Strukturgruppe und gleichen Übergangsfunktionen. Die Projektion $\hat{F} \to X$ sei ebenfalls mit p bezeichnet. $F_\infty = \hat{F} - F$ ist eine 1-codimensionale, singularitätenfreie Teilmenge der algebraischen Mannigfaltigkeit $\hat{F}$. Wir setzen $\hat{F}_t = \hat{F}|X_t$, $F_t = F|X_t$, $F_{\infty t} = F_\infty \cap \hat{F}_t$. Die Menge $F_{\infty t}$ ist ebenfalls singularitätenfrei und 1-codimensional.

2. Es seien $t_0 \in R$ und $(F_{\infty t_0})$ das zu dem Divisor $F_{\infty t_0}$ gehörende reguläre Geradenbündel über $\hat{F}_{t_0}$ und $N_{t_0} = (F_{\infty t_0})|F_{\infty t_0}$. Es sei $V = T_{t_0}(R)$ der Tangentialvektorraum im Punkte $t_0 \in R$. Wir dürfen schreiben $\widetilde{T}_x(R) = V$, $x \in X_{t_0}$ und $V = k^n$. S sei sodann das reguläre Vektorraumbündel $\mathrm{Hom}(\widetilde{T}(R)|X_{t_0}, T_{t_0})$. Wegen der genannten Identitäten gilt : $S = \mathrm{Hom}(k^n, T_{t_0}) = \bigoplus_1^n T_{t_0}$.

Es werde nun eine affine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}$ von X_{t_0} gewählt, derart, daß es über U_ι stets eine reguläre Schnittfläche β_ι in F_{t_0} gibt. Jedem Element $\eta \in F_x$, $x \in U_\iota$ kann man dann die Differenz $\eta - \beta_\iota(x) \in S_x$ zuordnen. Man erhält auf diese Weise einen Isomorphismus von affinen Bündeln $\Phi_\iota : F_{t_0}|U_\iota \to S|U_\iota$. Die Übergangsabbildungen $\Phi_{\iota_1\iota_2} = \Phi_{\iota_1} \circ \Phi_{\iota_2}^{-1} : S|U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2} \to S|U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}$ sind von der Gestalt $y \to y + a(x)$ mit $y \in S_x$ und $a(x) = \beta_2(x) - \beta_1(x)$. a ist also eine reguläre Schnittfläche in S über $U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}$.

Entsprechend der Konstruktion bei F schließen wir jede Faser von S projektiv ab und erhalten ein reguläres projektives Bündel $\hat{S}$ über X_{t_0}. Die Abbildungen Φ_ι setzen sich zu Isomorphismen $\hat{\Phi}_\iota : \hat{F}_{t_0}|U_\iota \to \hat{S}|U_\iota$ fort und die Übergangsabbildungen $\hat{\Phi}_{\iota_1\iota_2} = \hat{\Phi}_{\iota_1} \circ \hat{\Phi}_{\iota_2}^{-1}$ werden in der gleichen Gestalt wie $\Phi_{\iota_1\iota_2}$ mit dem gleichen $a(x)$ gegeben. Man kann F_{t_0} bzw. $\hat{F}_{t_0}$ erhalten, indem man die $S|U_\iota$ bzw. $\hat{S}|U_\iota$ mittels $\Phi_{\iota_1\iota_2}$ bzw. $\hat{\Phi}_{\iota_1\iota_2}$ verheftet.

Es sei $S_\infty = \hat{S} - S$. Es gilt dann $F_{\infty t_0} = S_\infty = X_{t_0} \times P^{n-1}$ und $(S_\infty)|(X_{t_0} \times P^{n-1}) = N_{t_0}$, da die Übergangsabbildungen $\hat{\Phi}_{\iota_1\iota_2}$ auf S_∞ von zweiter Ordnung konstant sind. Die

[1] Bündel werden stets als lokal-trivial vorausgesetzt.

Identifizierungen $S_\infty = X_{t_0} \times P^{n-1}$ und $(S_\infty)|(X_{t_0} \times P^{n-1}) = N_{t_0}$ werden dabei auf folgende Weise vorgenommen. Besteht über einer offenen Teilmenge $U \subset X_{t_0}$ ein Isomorphismus von Geradenbündeln $\gamma : T_{t_0}|U \xrightarrow{\sim} U \times k$, so wird wegen $S = \bigoplus_1^n T_{t_0}$ auch ein Isomorphismus $\hat{\gamma} : \hat{S}|U \to U \times P^n$ definiert. $\hat{\gamma}|(S_\infty \cap (\hat{S}|U))$ ist von der Wahl von γ unabhängig und bildet $S_\infty \cap (\hat{S}|U)$ biregulär auf $U \times P^{n-1}$ ab. Durch Zusammenheften erhält man den kanonischen Isomorphismus $S_\infty \xrightarrow{\sim} X_{t_0} \times P^{n-1}$. — Um $(S_\infty)|(X_{t_0} \times P^{n-1}) = N_{t_0}$ zu zeigen, braucht man nur die kanonische Isomorphie der Garben M_1 bzw. M_2 der Keime lokaler regulärer Schnittflächen in beiden Bündeln zu zeigen. Das ist aber klar, da M_1 bzw. M_2 der Quotient der Garbe der rationalen Funktionskeime zu dem Divisor S_∞ auf $\hat{S}$ bzw. zu dem Divisor $F_{\infty t_0}$ auf $\hat{F}_{t_0}$ nach den Garben der Keime lokaler regulärer Funktionen ist. Die Transformationen $\hat{\Phi}_{t_1 t_2}$ wirken nämlich auf der Quotienten-Garbe M_1 trivial.

Mit M werde das reguläre Geradenbündel $(P^{n-1})|P^{n-1}$ bezeichnet, wobei P^{n-1} als 1-codimensionale Ebene in P^n anzusehen ist. M ist ample. Durch die Produktprojektionen $X_{t_0} \times P^{n-1} \to X_{t_0}$ bzw. $\to P^{n-1}$ werde sodann $T^*_{t_0}$ bzw. M nach $X_{t_0} \times P^{n-1}$ geliftet. Man erhält reguläre Geradenbündel $\hat{T}^*_{t_0}$ bzw. $\hat{M}$ auf $X_{t_0} \times P^{n-1}$.

Satz 1. — *Das Geradenbündel* N_{t_0} *ist regulär-äquivalent mit* $\hat{T}^*_{t_0} \otimes \hat{M}$.

Beweis. — Wir brauchen nur zu zeigen, daß $(S_\infty)|(X_{t_0} \times P^{n-1})$ und $\hat{T}^*_{t_0} \otimes \hat{M}$ rationale, nicht identisch verschwindende Schnittflächen s_1 bzw. s_2 besitzen, die in jedem Punkte Null- und Polstellen gleicher Ordnung haben. Es sei s eine rationale, nicht identisch verschwindende Schnittfläche in $T^*(X_{t_0})$. s kann als eine auf der algebraischen Mannigfaltigkeit $T(X_{t_0})$ rationale, auf den Fasern von $T(X_{t_0})$ homogen-lineare Funktion gedeutet werden. Wir bezeichnen die Punkte von $\bigoplus_1^n T(X_{t_0})$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Man kann dann die rationale Funktion $\hat{f}(y) = s(y_1)$ als rationale Schnittfläche in (S_∞) auf $\hat{S}$ ansehen. $\hat{f}$ hat die Fläche $\{y_1 = 0\} \subset \hat{S}$ zur Nullstellenfläche 1. Ordnung, außerdem die Flächen $\bigoplus_1^n T_{t_0}|P$, $P \in X_{t_0}$ zu Pol- und Nullstellenflächen in der gleichen Ordnung wie s in P einen Pol bzw. eine Nullstelle hat.

Es sei $E \subset P^{n-1}$ eine Ebene, so daß $P \times E = \{y_1 = 0\} \cap S_\infty \cap (\hat{S}|P)$ für $P \in X_{t_0}$. Es gibt eine reguläre Schnittfläche g in M, die genau E zur Nullstellenfläche 1. Ordnung hat. Die nach $\hat{M}$ geliftete Schnittfläche g ist eine reguläre Schnittfläche $\hat{g}$ in $\hat{M}$ und verschwindet genau auf $S_\infty \cap \{y_1 = 0\}$ von 1. Ordnung. $\hat{s}$ sei die durch Liften von s nach $\hat{T}^*_{t_0}$ erhaltene reguläre Schnittfläche. $s_1 = \hat{f}|S_\infty$ und $s_2 = \hat{s} \otimes \hat{g}$ haben also überall auf S_∞ die gleichen Null- und Polstellen, q.e.d.

3. Ein Geradenbündel G über einem vollständigen algebraischen Raum Y heißt *ample*, wenn es eine positive Tensorpotenz G^r von G und reguläre Schnittflächen $s_0, \ldots, s_l \in \Gamma(Y, G^r)$ gibt, so daß durch die Gleichungen $z_0 = s_0(y), \ldots, z_l = s_l(y)$ mit $y \in Y$, $(z_0, \ldots, z_l) \in P^l$ (homogene Koordinaten), eine bireguläre Einbettung von Y in

den P^l definiert wird. Auf einer vollständigen Kurve ist ein Geradenbündel genau dann ample, wenn seine Chernsche Zahl größer als Null ist. Da wir $g(X)>1$ vorausgesetzt haben, ist also $T^*(X_{t_0})$ ample. Ebenso ist dann $\hat{T}^*_{t_0}\otimes\hat{M}=N_{t_0}$ ample.

Es sei $N=(F_\infty)|F_\infty$. Man hat dann $N|F_{\infty t_0}=N_{t_0}$. Da N_{t_0} ample ist, gilt für $l\geq l_0$ das « Vanishing theorem ». Es ist $H^\nu(F_{\infty t_0}, N^l_{t_0})=0$ für $\nu=1, 2, 3, \ldots$. Wir können deshalb folgenden Satz (1) aus der algebraischen Geometrie anwenden :

Es seien Y, R *algebraische Mannigfaltigkeiten,* W *ein algebraisches Vektorraumbündel über* Y. *Ferner sei* $\varphi : Y\to R$ *eine eigentliche, surjektive, einfache, reguläre Abbildung. Gilt dann für ein* $t_0\in R : H^1(Y_{t_0}, W_{t_0})=0$ *mit* $Y_{t_0}=\varphi^{-1}(t_0)$, $W_{t_0}=W|Y_{t_0}$, *so läßt sich jede Schnittfläche aus* $\Gamma(Y_{t_0}, W_{t_0})$ *in eine Umgebung von* Y_{t_0} *regulär fortsetzen. Ferner hat die* 1. *Bildgarbe* $\varphi_1(W)$ *in* t_0 *den Nullhalm.*

Fortan sei $l\geq l_0$ und so groß gewählt, daß es Schnittflächen $s'_1, \ldots, s'_r\in\Gamma(F_{\infty t_0}, N^l_{t_0})$ gibt, die eine bireguläre Einbettung in einen P^{r-1} vermitteln. Wir setzen $s'_1, \ldots, s'_r$ zu Schnittflächen $s_1, \ldots, s_r\in\Gamma(F_{\infty 1}, N^l)$ in eine Umgebung $F_{\infty 1}=p^{-1}\pi^{-1}(R_1)\cap F_\infty$ von $F_{\infty t_0}$ fort. Dabei ist $R_1=R_1(t_0)\subset R$ eine Umgebung von t_0. Sie sei so klein gewählt, daß $s_1|F_{\infty t}, \ldots, s_r|F_{\infty t}$ für jedes $t\in R_1$ noch eine bireguläre Einbettung von $F_{\infty t}$ definieren.

Als nächstes sollen $s_1, \ldots, s_r$ weiter fortgesetzt werden zu regulären Schnittflächen in dem Bündel $(F_\infty)^l=(l.F_\infty)$. Wir haben über $\hat{F}$ die exakten Sequenzen :

$$0\to((l-1).F_\infty)\to(l.F_\infty)\to N^l\to 0$$

und über t_0 die Bildsequenzen :

$$\ldots\to(\pi p)_0((lF_\infty))_{t_0}\to(\pi p)_0(N^l)_{t_0}\to(\pi p)_1(((l-1)F_\infty))_{t_0}\xrightarrow{\gamma}(\pi p)_1((lF_\infty))_{t_0}\to 0.$$

γ ist also surjektiv und der Halm $(\pi p)_1((lF_\infty))_{t_0}$ Quotientenmodul von $(\pi p)_1(((l-1)F_\infty))_{t_0}$. Da die untersuchten Moduln wegen der Kohärenz der Bildgarben noethersch sind, folgt für $l\geq l_1$, daß γ ein Isomorphismus ist. Dann ist aber

$$\ldots\to(\pi p)_0((lF_\infty))_{t_0}\to(\pi p)_0(N^l)_{t_0}\to 0$$

exakt und das bedeutet :

Es gibt eine Umgebung $R_2=R_2(t_0)\subset R_1$, so daß sich

$$s_1|(F_\infty\cap(\pi p)^{-1}(R_2)), \ldots, s_r|(F_\infty\cap(\pi p)^{-1}(R_2))$$

zu Schnittflächen $\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_r\in\Gamma((\pi p)^{-1}(R_2), (lF_\infty))$ fortsetzen lassen.

4. Wir fassen die konstante Funktion $f\equiv 1\in k$ auf $\hat{F}$ als reguläre Schnittfläche $\hat{s}_0$ in (lF_∞) auf. $\hat{s}_0$ hat dann F_∞ zur Nullstellenfläche l-ter Ordnung und verschwindet sonst nirgends. $\hat{s}_0, \ldots, \hat{s}_r$ ergeben deshalb eine reguläre Abbildung $\hat{\Phi} : \hat{F}|R_2\to P^r$.

(1) Der Satz ist ein Spezialfall eines viel allgemeiner von A. GROTHENDIECK gewonnenen Resultates. Man vgl. [1]. — Für die weiteren Mittel, die wir aus der algebraischen Geometrie übernehmen müssen, vgl. SERRE [3] und GROTHENDIECK [1].

Offenbar bildet $\hat{\Phi}$ die Menge $F_\infty | R_2$ in P^{r-1} ab und $F | R_2$ in $k^r = P^r - P^{r-1}$. Die reguläre Abbildung $\pi p \times \widetilde{\Phi}$ mit $\widetilde{\Phi} = \hat{\Phi} | (F | R_2)$ ist also eine eigentliche, reguläre, fasertreue Abbildung $(F | R_2) \to R_2 \times k^r$.

Sind Y, Z algebraische Räume, $\varphi : Y \to Z$ eine reguläre Abbildung, so heißt die Menge aller $y \in Y$, in denen $\dim_y \varphi^{-1}(\varphi(y)) > 0$ die Entartungsmenge $E = E(\varphi)$. Nach einem bekannten Satz (1) ist $E(\varphi)$ stets eine algebraische Teilmenge von Y. Nach Definition gilt in jedem Punkte $y \in E$ die Ungleichung $\dim_y E \geq 1$.

Fortan sei $E \subset (F | R_2)$ die Entartungsmenge von $\pi p \times \widetilde{\Phi}$. Die Durchschnitte $E_t = E \cap F_t$, $t \in R_2$ sind dann die Entartungsmengen von $\widetilde{\Phi}_t = \widetilde{\Phi} | F_t$. Man hat also $\dim_y E_t \geq 1$, wenn $y \in E_t$. Da E_t auch die Entartungsmenge von $\hat{\Phi} | \hat{F}_t$ ist, muß E_t vollständig sein. Die Projektion $p | E : E \to X$ ist eigentlich.

$\widetilde{\Phi}_t : F_t \to k^r$ ist stets eigentlich. Bei eigentlichen Abbildungen sind Bildmengen algebraischer Teilmengen wieder algebraisch. $D_t = \widetilde{\Phi}_t(E_t)$ ist also einerseits algebraische Teilmenge des k^r, andererseits vollständig und mithin endlich. Ist $A \subset F_t$ eine vollständige algebraische Teilmenge von F_t mit $\dim_y A > 0$ für $y \in A$, so gilt $A \subset E_t$, da $\widetilde{\Phi}_t(A)$ wieder endlich ist.

Bildgarben kohärenter Garben sind bei eigentlichen regulären Abbildungen wieder kohärent. Es bezeichne $\mathcal{O}$ die Garbe der lokalen Ringe auf $F | R_2$. Die Garbe $(\pi p \times \widetilde{\Phi})_0(\mathcal{O})$ wird also über $R_3 \times k^r$, mit $R_3 = R_3(t_0) \subset R_2$ eine Umgebung, durch endlich viele Schnitte $a_1, \ldots, a_s$ erzeugt. Es gibt reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_s \in \Gamma(F | R_3, \mathcal{O})$, so daß $(\pi p)_0(f_\nu) = a_\nu$. Es sei f die durch $f_1, \ldots, f_s$ vermittelte reguläre Abbildung $F_3 = F | R_3 \to k^s$ und $\Phi = \widetilde{\Phi} \times f : F_3 \to k^m$, $m = r + s$. Das kartesische Produkt $\pi p \times \Phi : F_3 \to R_3 \times k^m$ ist dann wiederum eigentlich. Die Entartungsmenge hat sich nicht geändert. Es gelten jetzt jedoch außerdem noch folgende Eigenschaften :

1) $(\pi p \times \Phi)(E) \cap (\pi p \times \Phi)(F_3 - E) = \emptyset$;

2) $(\pi p \times \Phi) | (F_3 - E)$ ist biregulär.

Beweis. — Wäre 1) falsch, so gäbe es Punkte $y_1 \in F_t - E_t$ und $y_2 \in E_t$ mit $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$, $t \in R_3$. Es sei $z = \widetilde{\Phi}(y_1) = \widetilde{\Phi}(y_2)$. Die konstanten Funktionen $g_1 \equiv 1$ bzw. $g_2 \equiv 0$ erzeugen formale Keime (2) g_1^*, g_2^* regulärer Funktionen entlang $\widetilde{\Phi}^{-1}(z) - E_t$ bzw. E_t. Man kann (g_1^*, g_2^*) nach einem bekannten Satz von Grothendieck als ein Element aus der formalen Abschließung von $(\pi p \times \hat{\Phi})_0(\mathcal{O})_{(t,z)}$ auffassen! (g_1^*, g_2^*) ist deshalb Linearkombination von $a_{1(t,z)}, \ldots, a_{s(t,z)}$ über dem Ring der formalen Keime von regulären Funktionen in (t, z). Die gleiche Linearkombination muß für die Keime g_1^*, g_2^*

(1) Das Resultat findet sich etwa bei O. Zariski [5].

(2) Es seien Y ein algebraischer Raum, $A \subset Y$ eine algebraische Teilmenge, S eine kohärente Garbe über Y. Wir bezeichnen mit m die Idealgarbe von A. Die formale Abschließung von $S | A$ ist dann der projektive Limes $S_{\infty A} = \lim_{\infty \leftarrow \nu} S/S.m^\nu$. Unter dem formalen Keim einer regulären Schnittfläche $s \in \Gamma(U, S)$, $U = U(A)$ eine Umgebung, versteht man dann das Blid von s in $\Gamma(A, S_{\infty A})$. — Nach Grothendieck gilt bei einer eigentlichen, regulären Abbildung $\varphi : Y \to Z$ stets für die direkten Bildgarben $\varphi_0(S_{\infty A}) = (\varphi_0(S))_{\infty t}$, wenn $A = Y_t = \varphi^{-1}(t)$.

in $\widetilde{\Phi}^{-1}(z)-E_t$ bzw. E_t gelten. Damit würde folgen : $g_1^*(y_1)=g_2^*(y_2)$ Widerspruch !

Die analoge Schlußfolgerung gilt, wenn $y_1 \neq y_2$ und $y_1, y_2 \in F_t - E_t$. Somit ist auch $(\pi p \times \Phi) \mid (F_3 - E)$ injektiv. Wie man sieht, vermittelt $(\pi p \times \Phi)_0$ eine bijektive Abbildung der Keime regulärer Funktionen auf $F_3 - E$ auf die entsprechenden Funktionskeime von $(\pi p \times \Phi)(F_3 - E)$. Also ist $(\pi p \times \Phi) \mid (F_3 - E)$ sogar biregulär (1).

In den folgenden Paragraphen dürfen wir voraussetzen, daß $R_3 = R$ ist. Wir werden dieses auch tun.

5. Es sei $s : R \to X$ eine rationale Abbildung mit $\pi \circ s = \mathrm{id} : R \to R$. Wir nennen s eine rationale Schnittfläche in X. Die Menge der Unbestimmtheitsstellen $K = K(s)$ ist eine wenigstens zwei-codimensionale algebraische Teilmenge von R und in $R - K$ ist s regulär (2).

Für jeden Punkt $t \in R - K$ definiert s einen Homomorphismus $\eta : T_t(R) \to T_x(X)$ mit $\alpha \circ \eta = \mathrm{id} : T_t(R) \to T_t(R)$ (für α siehe Abschnitt 1). Die Zuordnung $t \to \eta$ ist eine reguläre Abbildung $s' : R - K \to F \mid R - K$ mit $\pi s' = \mathrm{id}$, die sich zu einer rationalen Schnittfläche $\widetilde{s}$ in F über R fortsetzt. Es gilt $p \circ \widetilde{s} = s$ und $\widetilde{s}(R)$ ist eine irreduzible algebraische Teilmenge von F der Dimension n.

§ 2. MAXIMALE VOLLSTÄNDIGE ALGEBRAISCHE TEILMENGEN IN AFFINEN BÜNDELN

1. Es sei Y ein algebraischer Raum, $A \subset Y$ eine vollständige algebraische Teilmenge mit $\dim_y A > 0$ für $y \in A$. Enthält A jede weitere vollständige algebraische Teilmenge $B \subset Y$ mit $\dim_y B > 0$, $y \in B$, so heißt A maximale vollständige algebraische Teilmenge von Y. Wenn eine maximale vollständige algebraische Teilmenge in Y überhaupt existiert, so ist sie natürlich eindeutig bestimmt. Wie wir gezeigt haben, ist E_t in F_t die maximale vollständige algebraische Teilmenge.

Es sei Z ein vollständiger algebraischer Raum und V ein reguläres Vektorraumbündel über Z vom Range n. Man definiert : V heißt *negativ*, wenn es eine eigentliche, reguläre, birationale Transformation $\varphi : V \to V'$ von V auf einen affin-algebraischen Raum V' gibt, die die Nullschnittfläche $\mathfrak{O}$ auf einen Punkt $v_0 \in V'$ und $V - \mathfrak{O}$ biregulär auf $V' - v_0$ abbildet, so daß das direkte Bild der Strukturgarbe von V die Strukturgarbe von V' ist. $\mathfrak{O} \subset V$ ist dann also die Entartungsmenge von φ und damit auch maximale vollständige algebraische Teilmenge von V. Wie bekannt, ist ein Vektorraumbündel V genau dann negativ, wenn das zu V duale Vektorraumbündel V^* ample ist (3).

---

(1) Die Eigenschaften 1) und 2) sind direkte Folgerungen des « Main Theorem » von Zariski.

(2) Unter den Unbestimmtheitsstellen einer rationalen Funktion f verstehen wir die Stellen, wo f nicht regulär ist. Die Menge der Unbestimmtheitsstellen von Funktionen auf normalen algebraischen Räumen R ist stets eine mindestens 2-codimensionale algebraische Teilmenge (diese seien stets abgeschlossen !).

(3) Man vgl. A. Grothendieck [1], II, p. 182. Analog zu den Geradenbündeln heißt ein Vektorraumbündel W über Z ample, wenn es eine symmetrische Potenz W^l von W und Schnittflächen $s_1, \ldots, s_l \in \Gamma(Z, W^l)$ gibt, die eine bireguläre Einbettung von Z in eine Graßmannsche Mannigfaltigkeit definieren.

Im Falle $V=S$ und $Z=X_t$ gilt $V^*=\bigoplus_1^n T_t^*$. Da jedes T_t^* ample ist, ist auch V^* ample und $V=S$ ist negativ.

Es sei $\mathfrak{U}=\{U_\iota : \iota=1, \ldots, \iota_*\}$ eine offene Überdeckung von Z und $\xi=\{\xi_{\iota_1\iota_2}\}$ ein Kozyklus aus $Z^1(\mathfrak{U}, V)$. Über den Durchschnitten $U_{\iota_1\iota_2}=U_{\iota_1}\cap U_{\iota_2}$ haben wir dann die Übergangsabbildungen $\Phi_{\iota_1\iota_2} : y \to y+\xi_{\iota_1\iota_2}(z)$ mit $y\in V_z$, die $V|U_{\iota_1\iota_2}$ biregulär und fasertreu auf sich abbilden. Verheften wir $V|U_{\iota_2}$ stets mit $V|U_{\iota_1}$ mittels $\Phi_{\iota_1\iota_2}$, so erhalten wir ein affines Bündel $G=G(V)=G(V, \{\Phi_{\iota_1\iota_2}\})$ über Z. Man weiß : G ist genau dann (affin) isomorph zu V, wenn G eine reguläre Schnittfläche besitzt.

2. W werde fortan als negativ vorausgesetzt und G besitze die maximale vollständige algebraische Teilmenge A. Es sei ψ die Bündelprojektion $G\to Z$. Wir setzen weiter voraus, daß Z eine irreduzible, vollständige, singularitätenfreie Kurve ist. Gilt $A\neq\emptyset$, so folgt $\psi(A)=Z$.

Wir liften G vermöge ψ nach A und erhalten über A ein reguläres affines Bündel $\check{G}=G\circ\psi=\check{G}(V\circ\psi)$. Es sei $\check{\psi}$ die kanonische Projektion $\check{G}\to G$. Man hat das kommutative Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} \check{G} & \xrightarrow{\check{\psi}} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

Das durch Liften nach A erhaltene Vektorraumbündel $V\circ\psi$ ist negativ. Ferner hat $\check{G}$ die reguläre Schnittfläche $\check{\mathfrak{O}}$, die jedem Punkt $a\in A$ den Punkt $\check{G}_a\cap\check{\psi}^{-1}(a)$ zuordnet. Es gilt also $\check{G}\approx V\circ\psi$. Bei dieser Isomorphie geht $\check{\mathfrak{O}}$ in die Nullschnittfläche von $V\circ\psi$ über, $\check{\mathfrak{O}}$ ist also maximale vollständige algebraische Teilmenge von $\check{G}$ und daher gilt $\check{\psi}^{-1}(A)=\check{\mathfrak{O}}$. Das bedeutet aber : $G_a\cap A$ besteht stets aus genau einem Punkt.

Es sei $U\subset Z$ eine offene Teilmenge, derart, daß es einen (affinen) Bündelisomorphismus $\Psi : G|U\to U\times k^n$ gibt. Es seien $y_1, \ldots, y_n$ Koordinaten des k^n. Die Menge $\check{A}=\Psi(A\cap(G|U))$ wird durch die Produktprojektion $U\times k^n\to U$ eigentlich auf U abgebildet. Es gibt deshalb irreduzible Polynome über U von der Gestalt $\omega_\nu(y_\nu, z)=y_\nu^{b_\nu}+a_{\nu 1}y^{b_\nu-1}+\ldots+a_{\nu b_\nu}$ mit über U regulären Funktionen $a_{\nu\mu}$, $\nu=1, \ldots, n$, so daß $\check{A}=\{\omega_\nu(y_\nu, z)=0, \nu=1, \ldots, n\}$. Da die $\omega_\nu(y_\nu, z)$ über jedem Punkt z genau eine Nullstelle haben, sind sie vollständig insepariert. Im Falle, daß die Charakteristik von k gleich Null ist, folgt also $b_\nu=1$ für $\nu=1, \ldots, n$. Im Falle, daß die Charakteristik von k gleich $p\neq 0$, hat ω_ν stets die Gestalt $y_\nu^{p^{\alpha_\nu}}+b_\nu(z)$.

3. Wir untersuchen die Situation von § 1. Es sei also $Z=X_t$, $V=S$ und $G=F_t$, ferner $A=E_t$. Wir setzen voraus, daß $E_t\neq\emptyset$ für jedes $t\in R$. Über jedem Punkt von X liegt dann genau ein Punkt von E. Da $p : E\to X$ eigentlich ist, folgt wieder :

Ist $U\subset X$ eine irreduzible offene Teilmenge und $\Psi : F|U\to U\times k^n$ ein Bündel-

isomorphismus, so wird die Menge $\check{E} = \Psi(E \cap F | U) \subset U \times k^n$ durch irreduzible Gleichungen gegeben :

$$y_\nu + b_\nu(x) = 0 \qquad \text{im Falle, daß die Charakteristik von } k \text{ gleich } 0,$$

bzw.

$$y_\nu^{p^\alpha} + b_\nu(x) = 0 \qquad \text{im Falle, daß die Charakteristik von } k \text{ gleich } p \neq 0 \text{ ist.}$$

Im Falle der Charakteristik 0 ist also $p : E \to X$ biregulär. Wir behaupten, daß dieses auch im Falle der Charakteristik $\neq 0$ gilt, falls es unendlich viele rationale Schnittflächen s in X gibt mit $\tilde{s}(R) \subset E$. Wir zeigen $\alpha_\nu = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Es sei $x_0 \in U$ beliebig. Wir wählen eine Umgebung $W = W(t_0)$, $t_0 = \pi(x_0)$, so daß über W n reguläre, überall linear unabhängige Vektorfelder $\xi_1, \ldots, \xi_n$ existieren. Die auf U regulären Funktionen $b_1, \ldots, b_n$ definieren nun n^2 reguläre, in y inhomogen-lineare Funktionen auf $\hat{B} = B \times k^n$ mit $B = U \cap \pi^{-1}(W)$. Es sei etwa $y \in \hat{B}$ ein Punkt über x und t. Dann ist $\Psi^{-1}(y)$ ein Homomorphismus von $T_t(R)$ nach $T_x(X)$, den wir mit $\tilde{y}$ bezeichnen wollen. Es sei db_ν die totale Ableitung von b_ν. Wir setzen $f_{\nu\mu}(y) = (db_\nu) . (\tilde{y}(\xi_\mu(t)))$. Offenbar ist $f_{\nu\mu}$ regulär in $\hat{B}$.

Angenommen nun, nicht alle α_ν sind gleich 0. Es sei etwa $\alpha_1 \neq 0$. Wir bezeichnen dann mit A die algebraische Menge $\{f_{11} = f_{12} = \ldots = f_{1n} = 0\}$ in $\hat{B}$. Es ist $db_1 \not\equiv 0$ über U und damit auch über B. Anderenfalls wäre nämlich $a = b_1^{1/p}$ regulär und $y_1^{p^{\alpha_1}} + b_1 = (y_1^{p^{\alpha_1 - 1}} + a)^p$ nicht irreduzibel.

Es sei $T(X/R) = \bigcup_t T_t$ das Bündel der Vektoren auf X in Richtung der Fasern. Man hat also $T(X/R) | X_t = T_t$. Bezeichnet U′ die nicht leere offene Menge $\{db_1 \neq 0\} \cap B$ und U″ die Menge $U' \cap \{db_1 . T(X/R) \neq 0\}$, so hat A über jedem Punkt von U″ genau einen Punkt und die Abbildung $A'' \to U''$ ist biregulär (mit $A'' = A \cap (U'' \times k^n)$), wie man unter Benutzung der Linearität von $f_{11}, \ldots, f_{1n}$ auf den Fasern $x \times k^n$ von $\hat{B}$ sofort einsieht.

Es sei s eine Schnittfläche in X mit $\tilde{s}(R) \subset E$. Auf $\Psi(\tilde{s}(R))$ ist das Polynom $\omega = y_1^{p^{\alpha_1}} + b_1$ identisch Null. Also gilt $d(\omega \circ \Psi \tilde{s}) \equiv 0 \equiv d(b_1 \circ s)$ und deshalb

$$\Psi(\tilde{s}(R) \cap (F | U'')) \subset A''.$$

Es sei $K \subset R$ die Unbestimmtheitsmenge von s. Man hat dann $U' \cap s(R - K) \subset U''$. Daher muß $A = \Psi(E)$ sein über allen Punkten aus $U'' \cap s(R)$. Gibt es nun unendlich viele Schnittflächen über R mit $\tilde{s}(R)$ in E, so dringen auch unendlich viele $s(R)$ in U′ ein. $X - U'$ ist nämlich höchstens n-dimensional und kann daher höchstens endlich viele n-dimensionale algebraische Teilmengen enthalten. Es folgt : auch U″ ist nicht leer. Und wiederum dringen unendlich viele $s(R)$ in U″ ein. Die kleinste algebraische Teilmenge, die $U'' \cap \bigcup s(R)$ umfaßt, ist aber gleich U″. Also folgt $A = \Psi(E)$ über U″. Damit ist die Abbildung $\Psi(E \cap (F | U'')) \to U''$ biregulär. Also $\alpha_1 = 0$, weil auch $\omega | U''$ irreduzibel ist.

Wir haben also gezeigt :

SATZ. — *Es sei* $E_t \neq \emptyset$ *für jedes* $t \in R$ *und es gebe unendlich viele rationale Schnittflächen* s *in* X *mit* $\tilde{s}(R) \subset E$. *Dann ist* E *eine reguläre Schnittfläche in* F *über* X.

Wir nennen ein solches E ein reguläres Feld von infinitesimalen Schnitten in X.

§ 3. SCHNITTFLÄCHEN MIT $\tilde{s}(R) \not\subset E$

1. Zu jeder rationalen Schnittfläche $s : R \to X$ werde $\tilde{s} : R \to F$ wie in § 1, Abschnitt 5 definiert.

Wir setzen $s^* = \Phi \circ \tilde{s}$ und erhalten ein m-tupel von rationalen Funktionen auf R, die zunächst nur in $R - K$ regulär sind. Da aber K wenigstens 2-codimensional ist, folgt die Regularität von s^* auf ganz R (1).

Es werde der algebraische Grad von s^* untersucht. Wir vervollständigen dazu R auf irgendeine Weise zu einem normalen, irreduziblen, vollständigen (projektiv) algebraischen Raum $\overline{R}$. $\overline{R}_\infty = \overline{R} - R$ ist dann wenigstens 1-codimensional, die Menge der nichtgewöhnlichen (= nicht regulären) Punkte $M = M(\overline{R}) \subset \overline{R}_\infty$ mindestens 2-codimensional.

Zunächst werde zusätzlich vorausgesetzt, daß R eine Kurve ist. $\overline{R}$ ist dann singularitätenfrei. Da X projektiv, können wir X in $P^N \times R$ so singularitätenfrei einbetten, daß π die Beschränkung der Projektion $\hat{\pi} : P^N \times R \to R$ auf X ist. Jede rationale Schnittfläche s in X ist nun überall regulär. Man kann sie als reine reguläre Schnittfläche in $P^N \times R$ über R auffassen. Sie setzt sich zu einer regulären Schnittfläche $\bar{s}$ über $\overline{R}$ in $P^N \times \overline{R}$ fort.

Wie bei dem Paar (X, R) in § 1, Abschnitt 1 bilden wir bei $(P^N \times \overline{R}, \overline{R})$ das Bündel der Homomorphismen η. Es sei mit $\overline{G}$ bezeichnet. F ist ein affines Unterbündel von $G = \overline{G} | X$. Wir betrachten nun die abgeschlossene Hülle $\overline{F}$ von F in $\overline{G}$. Jede Schnittfläche $\tilde{s}$ setzt sich zu einer regulären Schnittfläche $\bar{\tilde{s}}$ in $\overline{G}$ fort. Es gilt aber $\bar{\tilde{s}}(\overline{R}) \subset \overline{F}$, $\bar{\tilde{s}}$ ist also eine reguläre Schnittfläche in $\overline{F}$. Ferner kann man $\Phi : F \to k^m$ zu einer rationalen Abbildung $\overline{\Phi} : \overline{F} \to k^m$ fortsetzen. Es gibt in einer Umgebung U von $\overline{R}_\infty$ eine nirgends identisch verschwindende reguläre Funktion h, so daß die Funktionen des m-tupels $h.\overline{\Phi}$ über $\overline{F} | U$ regulär sind.

Die Fortsetzung $\bar{s}^*$ von s^* nach $\overline{R}$ ist gleich $\overline{\Phi} \circ \bar{\tilde{s}}$. $h\bar{s}^* = (h.\Phi) \circ \bar{\tilde{s}}$ ist daher in U regulär. Bezeichnet l_1 die Anzahl der Punkte von $\overline{R}_\infty$ und l_2 die maximale Ordnung der Nullstellen von h in den Punkten von $\overline{R}_\infty$, so hat zunächst $\bar{s}^*$ in allen Punkten von $\overline{R}_\infty$ einen Pol, dessen Ordnung nicht größer als l_2 ist. Der Vektorraum der m-tupel von rationalen Funktionen auf $\overline{R}$, die in R regulär sind und in keinem Punkt von $\overline{R}_\infty$ einen

(1) Es gilt folgender Satz. Es sei Z ein normaler algebraischer Raum, $K \subset Z$ eine mindestens 2-codimensionale algebraische Teilmenge, f eine in $Z - K$ reguläre Funktion. Dann läßt sich f eindeutig zu einer regulären Funktion auf Z fortsetzen.

Pol einer größeren Ordnung als l_2 haben, ist dann höchstens $m.l_1.l_2$-dimensional. Er sei fortan mit $\mathfrak{V}$ bezeichnet. Es gilt also stets $s^* \in \mathfrak{V}$.

Es sei nun R höherdimensional. In diesem Falle kommen wir zum Ziele, indem wir analoge Betrachtungen für $\overline{R}-M$ anstellen. Für $U \subset \overline{R}-M$ wählen wir eine offene Teilmenge, die mit keiner irreduziblen Komponente von $\overline{R}_\infty$ einen leeren Durchschnitt hat. Ist U hinreichend klein gewählt, so gibt es eine in U reguläre Funktion h, so daß $h.\overline{\Phi}$ über $\overline{F}|U$ regulär ist. l_1 ist nun die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $\overline{R}_\infty$ und l_2 die maximale Ordnung der Nullstellen von h auf diesen irreduziblen Komponenten. $\widetilde{s}$ ist regulär über $\overline{R}-K_1$ mit $\operatorname{codim} K_1 \geq 2$, das Produkt $h.\overline{s}^*$ deshalb sicher regulär über U. Der Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist daher wieder endlich dimensional und es gilt stets $s^* \in \mathfrak{V}$.

2. Es sei Q ein (reduzierter) algebraischer Raum. Eine rationale Abbildung $\varphi : R \times Q \to X$ (oder $\to F$) heißt eine gut-rationale Abbildung, wenn 1) $\pi \circ \varphi$ (bzw. $\pi p \circ \varphi$) die Produkprojektion $R \times Q \to R$ ist, 2) die Menge der Unbestimmtheitsstellen von φ kein ganzes Produkt $R \times \tau$, $\tau \in Q$ enthält. Für festes $\tau \in Q$ ist φ also eine rationale Schnittfläche in X (oder F).

Es sei nun Q eine affine, irreduzible, singularitätenfreie algebraische Kurve. Wir vervollständigen Q zu einer vollständigen singularitätenfreien Kurve $\overline{Q}$. $s = s(t, \tau)$ sei eine gut-rationale Abbildung $R \times Q \to X$. Man kann s zu einer rationalen Abbildung $\overline{s} = \overline{s}(t, \tau) : R \times \overline{Q} \to X$ fortsetzen. $\overline{s}$ ist dann auch gut-rational. Für festes τ sind also $s_\tau = s(t, \tau)$ und $\overline{s}_\tau = \overline{s}(t, \tau)$ rationale Schnittflächen in X.

SATZ 1. — *s_τ^* ist konstant in τ.*

Beweis. — s_τ^* ist ein m-tupel regulärer Funktionen auf $R \times \overline{Q}$. Da $\overline{Q}$ vollständig ist, können diese nicht von τ abhängen.

3. Wir lassen s alle rationalen Schnittflächen in X durchlaufen und bezeichnen mit $\mathfrak{V}'$ die Menge $\{s^*\} \subset \mathfrak{V}$.

SATZ 2. — *$\mathfrak{V}'$ ist eine algebraische Teilmenge von $\mathfrak{V}$ oder gleich $A - \sigma_0$, wobei A eine algebraische Teilmenge von $\mathfrak{V}$ und $\sigma_0 \in \mathfrak{V}$ ein Punkt ist.*

Beweis. — Wir betrachten in $F \times \mathfrak{V}$ die algebraische Teilmenge

$$B = \{(y, \sigma) : y \in F,\ \sigma \in \mathfrak{V},\ \Phi(y) = \sigma(\pi p(y))\}.$$

Wir projizieren B durch die reguläre Abbildung $\pi p \times \mathrm{id} : F \times \mathfrak{V} \to R \times \mathfrak{V}$ nach $R \times \mathfrak{V}$. Da B auch gleich

$$\{(y, \sigma) : y \in \hat{F},\ \sigma \in \mathfrak{V},\ \hat{\Phi}(y) = \sigma \pi p(y)\},$$

ist $(\pi p \times \mathrm{id})|B$ eigentlich und mithin $\underline{B} = (\pi p \times \mathrm{id})(B)$ eine algebraische Teilmenge von $R \times \mathfrak{V}$. Wir setzen $\mathfrak{V}'' = \{\sigma \in \mathfrak{V} : R \times \sigma \subset \underline{B}\}$. $\mathfrak{V}''$ ist dann eine algebraische Teilmenge von $\mathfrak{V}$.

Da jedes E_i vollständig und irreduzibel ist, muß jede Beschränkung $\Phi|E_i$ konstant

und die Abbildung $t \to \Phi(E_t)$, wenn $\Phi(E) = R$, ein m-tupel von Funktionen über R sein. Eventuell ist es sogar aus $\mathfrak{V}$. In diesem Falle sei es mit σ_0 bezeichnet, im andern Falle sei σ_0 die leere Menge. Gibt es eine rationale Schnittfläche s in X mit $\tilde{s}(R) \subset E$, so gilt natürlich $s^* = \sigma_0$.

Wir betrachten die algebraische Menge $A_\sigma = \{y \in F : \Phi(y) = \sigma p \pi(y)\}$ für $\sigma \in V'' - \sigma_0$. Über den Punkten von $R' = \{t : \sigma(t) \neq \Phi(E_t)\}$ ist, da $(\pi p \times \Phi) | (F - E)$ biregulär ist, A_σ eine reguläre Schnittfläche in F. Sie setzt sich zu einer rationalen Schnittfläche $\tilde{\sigma}$ mit $\tilde{\sigma}(R) \subset A_\sigma$ auf R fort. Die Abbildung $\sigma \to \tilde{\sigma}$ ist eine gut-rationale Abbildung β mit $\beta(t, \sigma) = (\pi p \times \Phi)^{-1}(t, \sigma(t))$ für $\sigma(t) \neq \Phi(E_t)$ von $R \times (\mathfrak{V}'' - \sigma_0)$ in F.

Wir setzen $s = \pi \circ \tilde{\sigma}$ und erhalten eine gut-rationale Abbildung $\gamma : R \times (\mathfrak{V}'' - \sigma_0) \to X$. Die Gleichung $\tilde{s} = \tilde{\sigma}$ definiert sodann eine algebraische Teilmenge $D \subset \mathfrak{V}'' - \sigma_0$. Es gilt $\mathfrak{V}' = D$, wenn es keine rationale Schnittfläche s in X gibt mit $\tilde{s}(X) \subset E$ und anderenfalls $\mathfrak{V}' = D \cup \sigma_0$. Die Menge $D \cup \sigma_0$ ist dann eine algebraische Teilmenge von $\mathfrak{V}''$.

4. Satz 3. — *Die Menge* $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}$ *ist endlich.*

Beweis. — Wäre $\mathfrak{V}'$ nicht endlich, so gäbe es eine singularitätenfreie irreduzible affine Kurve R und eine reguläre Abbildung $\varphi : Q \to \mathfrak{V}'$, bei der die Fasern $\varphi^{-1}\varphi(\tau)$, $\tau \in Q$ stets endliche Mengen sind. $s = \gamma \circ \tau$ ist nun eine gut-rationale Abbildung $R \times Q \to X$ mit $\pi \circ s =$ Produktprojektion $R \times Q \to R$. Also ist $s^* = \varphi$ konstant in τ. Widerspruch !

Den Elementen $\sigma \in \mathfrak{V}' - \sigma_0$ sind also bijektiv zugeordnet die rationalen Schnittflächen s in X mit $\tilde{s}(R) \not\subset E$. Es folgt also :

Satz 4. — *Es gibt nur endlich viele rationale Schnittflächen* s *in* X *mit* $\tilde{s}(R) \not\subset E$.

§ 4. ALGEBRAISCHE KURVEN ÜBER R MIT REGULÄREN SCHNITTFELDERN

1. Wir werden in diesem Paragraphen das Hauptresultat der Arbeit herleiten. Ist $\operatorname{char} k = p \neq 0$, so verstehen wir unter der *Frobeniustransformierten* $R^{(\lambda)}$ von R für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, diejenige algebraische Mannigfaltigkeit über k, die wir erhalten, indem wir die lokalen Ringe L von R durch L^{p^λ} ersetzen. Es ist also $R^{(0)} = R$ und die Identität ist eine eigentliche reguläre Abbildung $R \to R^{(\lambda)}$. Die lokalen Ringe von $R^{(\lambda)}$ sind Unterringe der entsprechenden lokalen Ringe von $R^{(\lambda-1)}$. Mit wachsendem λ werden die lokalen Ringe von $R^{(\lambda)}$ immer dünner. Im Falle $\operatorname{char} k = 0$ verstehen wir deshalb unter $R^{(0)}$ die Mannigfaltigkeit R und unter $R^{(\lambda)}$, $\lambda > 0$ den Raum R versehen mit der Garbe der konstanten Funktionskeime mit Werten in k.

Definition. — *Die Faserung* (X, π, R) *heißt quasitrivial, wenn es eine biregulär abgeschlossene Einbettung* $(X, \psi, \mathbf{X})$ *von* X *in* $R \times P^N$ *gibt, derart, daß die Beschränkung der Produktprojektion* $R \times P^N \to R$ *auf* $\mathbf{X}$ *die Projektion* $\pi \circ \psi^{-1}$ *ist und weiter folgendes gilt :*

Zu jeder natürlichen Zahl λ *gibt es eine offene Teilmenge* $R^+ \subset R$ *und eine reguläre Abbildung* $C : R^+ \to PL(N, k)$, *so daß* $C \circ \mathbf{X} \subset R^+ \times P^N$ *über* $(R^+)^{(\lambda)}$ *definierbar ist.*

Dabei bezeichnet $C \circ \mathbf{X}$ die algebraische Mannigfaltigkeit $\bigcup_{t \in R^+} C(t) \circ (\mathbf{X}_t)$. Im Falle char $k = 0$ ist also die Faserung (X, π, R) über einer offenen Teilmenge von R genau dann quasitrivial, wenn sie über einer offenen Teilmenge $R^+ \subset R$ isomorph zu einem kartesischen Produkt ist.

Hauptsatz. — *Die Faserung* (X, π, R) *ist quasitrivial über einer Umgebung jedes Punktes von* R *oder es gibt nur endlich viele rationale Schnittflächen in* X.

Angenommen, es gibt unendlich viele rationale Schnittflächen in X. Dann gibt es nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen auch unendlich viele Schnittflächen s mit $\tilde{s}(R) \subset E$ und nach § 2 ist E eine reguläre Schnittfläche über X in F. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß dann X lokal quasitrivial sein muß. Das folgt durch mehrfache Anwendung des im nächsten Abschnitt angegebenen Satzes 1.

2. Es werde fortan vorausgesetzt, daß E ein reguläres infinitesimales Schnittfeld in X ist, und daß es unendlich viele rationale Schnittflächen s in X gibt mit $\tilde{s}(R) \subset E$.

Es sei $t_0 \in R$ ein beliebiger Punkt und $K_0 = T^*(X_{t_0})$. Da K_0 ample ist, gibt es eine Tensorpotenz K_0^l und eine Basis $\xi'_0, \ldots, \xi'_N$ von $\Gamma(X_t, K_0^l)$ so daß durch $z_0 = \xi'_0, \ldots, z_N = \xi'_N$ eine bireguläre Einbettung von X_{t_0} in den P^N definiert wird. Die natürliche Zahl l sei ferner so groß gewählt, daß $H^1(X_{t_0}, K_0^l) = 0$ ist. Man kann dann eine Umgebung $R' = R'(t_0)$ finden und $\xi'_0, \ldots, \xi'_N$ zu regulären Schnittflächen $\xi_0, \ldots, \xi_N \in \Gamma(X', K^l)$ fortsetzen (mit $X' = \pi^{-1}(R')$, $K = T^*(X/R)$). Ist R' hinreichend klein gewählt, so kann man sogar erreichen, daß $\xi_0, \ldots, \xi_N$ keine gemeinsamen Nullstellen auf X' haben und daß die durch $z_0 = \xi_0, \ldots, z_N = \xi_N$ vermittelte reguläre Abbildung $\psi' : X' \to P^N$ jede Faser X_t, $t \in R'$ biregulär in den P^N einbettet. Bei kleinem R' sind für $t \in R'$ die Beschränkungen $\xi_0 | X_t, \ldots, \xi_N | X_t$ noch linear unabhängig und bilden eine Basis von $\Gamma(X_t, K_t^l)$ mit $K_t = T_t^*$. Die Kurve $\psi'(X_t)$, $t \in R'$ liegt dann auf keiner niederdimensionalen Ebene des P^N ganz.

Wir wollen zeigen, daß (X', π, R') in bezug auf die Einbettung ψ' quasitrivial ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst :

Satz 1. — *Es gibt eine offene Teilmenge* $R^+ \subset R'$ *und eine reguläre Abbildung* $C : R^+ \to PL(N, k)$, *so daß* $C \circ X'$ *über* $(R^+)^{(1)}$ *definierbar ist. Für jede rationale Schnittfläche* s *in* X' *mit* $\tilde{s}(R') \subset E$ *ist* $C \circ s$ *eine rationale Schnittfläche in* $C \circ X'$ *über* $(R^+)^{(1)}$.

Beweis. — Es gibt sicher einen Punkt $t_1 \in R'$ und rationale Schnittflächen $s_0, \ldots, s_{N+1}$ in X mit $\tilde{s}_0(R) \subset E, \ldots, \tilde{s}_{N+1}(R) \subset E$, derart, daß $s_0, \ldots, s_{N+1}$ in t_1 regulär und je $N+1$ der Punkte $\psi' \circ s_0(t_1), \ldots, \psi' \circ s_{N+1}(t_1) \in P^N$ linear unabhängig sind. Anderenfalls gäbe es über einer offenen Teilmenge $U \subset R'$ eine algebraische Teilmenge $A \subset U \times P^N$, so daß $A \cap (t \times P^N)$, $t \in U$ stets eine niederdimensionale Ebene des P^N ist und daß stets $(\pi \times \psi') \circ s(U) \subset A$ für s mit $\tilde{s}(R) \subset E$. Dann wäre aber auch $(\pi \times \psi')(\pi^{-1}(U)) \subset A$. Widerspruch !

Wir können nun eine Umgebung $R^+ = R^+(t_1) \subset R'$ finden, so daß je $N+1$ der $s_0(t), \ldots, s_{N+1}(t)$ für alle $t \in R^+$ linear unabhängig sind. Wir bezeichnen dann mit $C(t)$ diejenige projektive lineare Transformation $P^N \to P^N$, die $\psi' s_0(t), \ldots, \psi' s_{N+1}(t)$ in die

Punkte $\mathfrak{n}_0 = \psi' s_0(t_1), \ldots, \mathfrak{n}_{N+1} = \psi' s_{N+1}(t_1) \in P^N$ abbildet und setzen $\psi = C \circ \psi'$. Das Produkt $\pi \times \psi$ ist dann eine reguläre, fasertreue Einbettung $X | R^+ \to R^+ \times \mathbf{P}^N$. Die Schnittflächen $s_0, \ldots, s_{N+1}$ gehen dabei in die konstanten Schnittflächen $R \times \psi s_0(t_1), \ldots, R \times \psi s_{N+1}(t_1)$ über.

Wir beweisen, daß $\mathbf{X} = (\pi \times \psi)(X | R^+)$ und alle rationalen Schnittflächen s mit $\tilde{s}(R) \subset E$ über $(R^+)^{(1)}$ definierbar sind. Es sei $\mathbf{E}$ das Bild des Schnittfeldes E in $\mathbf{X}$. Wir zeigen, daß $\mathbf{E}$ die Beschränkung des Produktschnittfeldes von $R^+ \times P^N$ auf $\mathbf{X}$ ist. Wir benötigen dazu « algebraische Räume mit nilpotenten Elementen ». Es sei $m(t)$ auf R^+ die Garbe der Keime regulärer Funktionen, die in t verschwinden, $\hat{m}(t)$ bezeichne auf $X | R^+$ die Garbe der Keime regulärer Funktionen, die auf X_t null sind und H bzw. $\hat{H}$ seien die Strukturgarben von R bzw. X. Wir versehen t bzw. X_t mit den Strukturgarben $H/m^2(t)$ bzw. $\hat{H}/\hat{m}^2(t)$. Die so erhaltenen algebraischen Räume seien mit R_t^* bzw. X_t^* bezeichnet. Die Projektion $\pi^* = \pi | X_t^*$ ist wieder eine reguläre Abbildung $\pi^* : X_t^* \to R_t^*$. Die Existenz des Schnittfeldes E_t bedeutet nun gerade, daß die Faserung (X_t^*, π^*, R_t^*) isomorph zum kartesischen Produkt $R_t^* \times X_t$ ist. Die Isomorphie wird gerade so definiert, daß E_t in das Produktschnittfeld übergeht. $(K^l | (R_t^* \times X_t))$ ist natürlich in t konstant. Wird die Abbildung ψ durch die Gleichungen $z_0 = \xi_0, \ldots, z_N = \xi_N$ mit $\xi_\nu \in \Gamma(X^+, K^l)$, $X^+ = X | R^+$ gegeben, so ist $\xi_\nu | R_t^* \times s_\mu(t)$ konstant und mithin $\xi_0 | R_t^* \times X_t, \ldots, \xi_N | R_t^* \times X_t$ und $\psi | R_t^* \times X_t$ von t unabhängig. Das Bild $(\pi \times \psi)(X_t^*)$ ist also gleich $R_t^* \times \mathbf{X}_t$, wobei $\mathbf{X}_t = \psi(X_t) \subset P^N$, und E_t geht durch $\pi \times \psi$ in das Produktschnittfeld über, q.e.d.

Es sei s eine rationale Schnittfläche in X mit $\tilde{s}(R) \subset E$. Für das Bild in $\mathbf{X}$ gilt dann $\psi \circ \tilde{s}(R^+) \subset \mathbf{E}$. Da $\mathbf{E}$ das Produktschnittfeld ist, verschwinden die Ableitungen von $\psi \circ s$ nach beliebigen Vektoren auf R^+. Wir sagen, daß $\psi \circ s$ über R^+ stationär ist. Das bedeutet aber, daß $\psi \circ s : R^+ \to P^N$ eine reguläre Abbildung bereits über $(R^+)^{(1)}$ sein muß.

Es sei $q : P^N \to P^2$ eine lineare Abbildung. Die algebraische Bildmenge $(\pi \times q)(\mathbf{X})$ ist dann das Nullstellengebilde eines Polynoms ω vom minimalen Grad über R^+. Bei geeigneter Normierung der Koeffizienten von ω folgt wieder, daß ω eindeutig bestimmt ist und daß daher die Koeffizienten von ω über R^+ stationär sind, d.h. ω ist sogar ein Polynom über $(R^+)^{(1)}$. Nun wird das Ideal von $\mathbf{X}$ von Funktionen $\omega \circ q$ aufgespannt. $\mathbf{X}$ ist also projektiv über $(R^+)^{(1)}$, q.e.d.

Im Falle $\operatorname{char} k = 0$ ist der Hauptsatz damit bewiesen : (X^+, π, R^+) ist trivial. Im Falle $\operatorname{char} k = p \neq 0$ enthält $(X^+, \pi, (R^+)^{(1)})$ wieder unendlich viele rationale Schnittflächen. Es gibt also wieder ein reguläres Schnittfeld E und man kann das ganze Verfahren unter Benutzung der gleichen Einbettung ψ' noch einmal anwenden und so fortfahren. Es folgt also wieder das Hauptresultat.

Gibt es eine rationale Schnittfläche s in X, so ist jede Faser X_t natürlich irreduzibel. Anderenfalls würde ja X_1, die Vereinigung der irreduziblen Komponenten $X_{1t} \subset X_t$ mit $s(t) \cap X_{1t} \neq 0$ eine von X verschiedene irreduzible Komponente von X bilden, und X wäre nicht irreduzibel.

3. Es sei $\operatorname{char} k = p \neq 0$. Es seien R und $X \subset R \times P^N$ irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten. X liege abgeschlossen in $R \times P^N$ und die Beschränkung π der Produktprojektion $R \times P^N \to R$ auf X sei eine einfache reguläre Abbildung. Zu jeder der Fasern $X_t = \pi^{-1}(t) \subset t \times P^N = P^N$, $t \in R$, die ebenfalls irreduzibel sein mögen, gebe es höchstens endlich viele projektive Transformationen, die X_t auf sich abbilden. Die Faserung (X, π, R) sei ferner quasitrivial in bezug auf $R' = R$ und die vorgegebene Einbettung. Zu jedem $\lambda > 0$ gibt es also eine offene Menge $R_\lambda \subset R$ und eine reguläre Abbildung $C_\lambda : R_\lambda \to L = PL(N, k)$, so daß $X_\lambda = C_\lambda \circ X \subset R_\lambda \times P^N$ über $R_\lambda^{(\lambda)}$ definierbar ist.

SATZ 2. — *Es gibt eine irreduzible, unverzweigte, eigentliche, Galoissche algebraische Überlagerung* $(\hat{R}, \tau, R)$, *so daß* $(\hat{X}, \hat{\pi}, \hat{R}) \approx \hat{R} \times X_0$. *Dabei bezeichnet* $\hat{X} \subset \hat{R} \times P^N$ *die vermöge* τ *nach* $\hat{R}$ *geliftete Faserung* X, $\hat{\pi}$ *die geliftete Abbildung* π *und* $X_0 \subset P^N$ *eine vollständige algebraische Mannigfaltigkeit* (1).

Eine Folgerung ist :

Der Isomorphismus $\hat{X} \approx \hat{R} \times X_0 \subset \hat{R} \times P^N$ *wird durch eine reguläre Abbildung* $C : \hat{R} \to L$ *gegeben.* $\hat{X}$ *und damit* $\hat{R} \times X_0$ *ist eine eigentliche, unverzweigte Überlagerung von* X. *Die Galoisgruppe von* $\hat{R} \times X_0$ *über* X *besteht naturgemäß aus regulären Abbildungen* $\hat{R} \to L$. *Diese sind jedoch auf* $\hat{R}$ *konstant.*

Beweis. — Es seien $r = (N+1)^2 - 1 = \dim L$, $t_0 \in R$ ein beliebiger Punkt und $X_0 = X_{t_0}$. Wir wählen r verschiedene Punkte $Q_1, \ldots, Q_r \in X_0$ und Ebenen $E_1, \ldots, E_r$ von der Dimension $N - \dim X_0 - 1$, derart, daß E_ν die Mannigfaltigkeit X_0 in Q_ν isoliert schneidet. Es sei h_ν die Idealgarbe von E_ν. Bekanntlich kann man Q_ν, E_ν so wählen, daß es nur endlich viele Transformationen $l \in L$ gibt mit $l(X_0) \cap E_\nu \neq \emptyset$ für $\nu = 1, \ldots, r$.

Das kartesische Produkt $L \times X \subset L \times R \times P^N$ ist vermöge der Projektion $\tilde{\pi} = \mathrm{id} \times \pi$ eine Faserung über $L \times R$. Es bezeichne $q : L \times X \to P^N$ diejenige reguläre Abbildung, die das Tripel (l, t, z) auf $l(z) \in P^N$ wirft. Wir bringen die Garben h_ν vermöge q nach $L \times X$ und setzen $\tilde{E}_\nu = \{h_\nu \circ q = 0\}$ und versehen $\tilde{E}_\nu$ mit der durch die Idealgarbe $h_\nu \circ q$ definierten Strukturgarbe. $\tilde{E}_\nu$ ist ein algebraischer Unterraum von $L \times X$. Es sei $\tilde{Q}_\nu = (1, t_0, Q_\nu)$; $\tilde{Q}_\nu$ liegt in $\tilde{E}_\nu$. Die Abbildung $\tilde{\pi} | \tilde{E}_\nu$ ist in $\tilde{Q}_\nu$ endlich. Man hat : $\dim \tilde{E}_\nu \geq \dim X + \dim L - \operatorname{codim} E_\nu = \dim L + \dim R - 1$.

Wir setzen (2) $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \oplus_{\tilde{\pi}} \ldots \oplus_{\tilde{\pi}} \tilde{E}_r$ und $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{Q}_r \in \tilde{E}$. In einer Umgebung von $\tilde{Q}$ ist, weil $\tilde{\pi} | \tilde{E}_\nu$ in $\tilde{Q}_\nu$ immer endlich ist, die Dimension von $\tilde{E}$ nicht kleiner als $\dim R = \dim L + \dim R - r$. Es sei $\tilde{\tilde{\pi}}$ die reguläre Abbildung $\tilde{E} \to L \times R \to R$, $\tilde{C}$ bezeichne

(1) Der Satz gilt mit seiner Folgerung (am Ende des Abschnitts) auch im Falle $\operatorname{char} k = 0$. Der Beweis überträgt sich *mutatis mutandis* und vereinfacht sich etwas, da jetzt $C : \hat{R} \to L$ wegen $X | R_1 = R_1 \times X_0$ rational ist. Man kann deshalb auch $\hat{\mathfrak{R}} = (R, \mathrm{id}, R) = R$ wählen.

(2) $\tilde{E}_1 \oplus \ldots \oplus_{\tilde{\pi}} \tilde{E}_r$ bezeichnet das kartesische Produkt über $L \times R$.

die Projektion $\widetilde{E} \to L \times R \to L$. Man hat $\widetilde{\widetilde{\pi}}(\widetilde{Q}) = t_0$ und $\widetilde{C}(\widetilde{Q}) = 1 \in L$. Offenbar verläuft $\widetilde{C}(y) \circ X_{\widetilde{\widetilde{\pi}}(y)}$ für $y \in \widetilde{E}$ stets durch $E_1, \ldots, E_r$. $\widetilde{E}$ hat also über $L \times t_0$ $\widetilde{Q}$ als isolierten Punkt; deshalb ist $\widetilde{\widetilde{\pi}}$ in $\widetilde{Q}$ endlich und in einer Umgebung von $\widetilde{Q}$ ist die Dimension gleich $\dim R$; weiter : $\widetilde{\widetilde{\pi}}$ ist in $\widetilde{Q}$ offen.

Es sei $\widetilde{E}' \subset \widetilde{E}$ die offene Teilmenge der Punkte, in denen $\widetilde{\widetilde{\pi}}$ endlich ist. $\widetilde{E}'$ ist also R (begrenzt) überlagert und hat deshalb einen algebraischen Grad $\operatorname{grd}_R \widetilde{E}' = \operatorname{grd} \widetilde{E}'$. Es gibt eine offene Teilmenge $U \subset R$, über der $\widetilde{E}'$ eigentlich liegt. Wir bezeichnen mit H die Strukturgarbe von $\widetilde{E}'$ und mit $m(t)$ die Idealgarbe des Punktes $t \in R$. Es gilt dann $\operatorname{grd} \widetilde{E}' = \min_{t \in U} \dim_k H/m(t) \circ \widetilde{\widetilde{\pi}}$. Das Minimum wird in jeder offenen Teilmenge von U angenommen.

Nach Voraussetzung gibt es zu jeder ganzen Zahl $\lambda \geq 0$ über einer offenen Teilmenge $R_\lambda \subset R \cap U$ eine reguläre Abbildung $C_\lambda : R_\lambda \to L$, so daß $X_\lambda = C_\lambda \circ X \subset R_\lambda \times P^N$ bereits über $R_\lambda^{(\lambda)}$ definiert ist. Es bezeichne C_λ^* die Abbildung $(l, t, z) \to (l \circ C_\lambda^{-1}(t), t, C_\lambda(t, z))$, die $L \times (X | R_\lambda)$ biregulär auf $L \times X_\lambda$ abbildet. Man hat analog zu q, $\widetilde{E}_\nu$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{E}'$, $\widetilde{\widetilde{\pi}}$, $\widetilde{C}$ Abbildungen bzw. Räume q_λ, $\widetilde{E}_{\nu\lambda}$, $\widetilde{E}_\lambda$, $\widetilde{E}'_\lambda$, $\widetilde{\widetilde{\pi}}_\lambda$, $\widetilde{C}_\lambda = (\widetilde{C} \circ C_\lambda^{-1})(C_\lambda^{**-1})$, die jedoch jetzt alle über $R_\lambda^{(\lambda)}$ definierbar sind. C_λ^* bildet $\widetilde{E}_\nu | R_\lambda$ stets bijektiv auf $\widetilde{E}_{\nu\lambda}$ ab. C_λ^{**} bezeichnet die induzierte, reguläre bijektive Abbildung $\widetilde{E} \to \widetilde{E}_\lambda$. Es seien $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}_\lambda$ die Strukturgarben von R bzw. $R_\lambda^{(\lambda)}$ und H_λ die Strukturgarben von $\widetilde{E}'_\lambda$ und $m_\lambda(t)$ die Idealgarben der Punkte $t \in R_\lambda^{(\lambda)}$ auf $R_\lambda^{(\lambda)}$. Die Überlagerungen $\widetilde{E}' | R_\lambda$ und $\overline{\widetilde{E}}'_\lambda$ sind über R_λ in kanonischer Weise zueinander isomorph, wenn $\overline{\widetilde{E}}'_\lambda$ die Überlagerung $\widetilde{E}'_\lambda$, versehen mit der Strukturgarbe $H_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \mathcal{O}$, bezeichnet. Es ist deshalb stets $\dim_k H/m(t) \circ \widetilde{\widetilde{\pi}} = \dim_k H_\lambda / m_\lambda(t) \circ \widetilde{\widetilde{\pi}}_\lambda$ und deshalb $\operatorname{grd}_R \widetilde{E}' = \operatorname{grd}_{R^{(\lambda)}} \widetilde{E}'_\lambda$.

Wir wählen eine irreduzible Komponente A der algebraischen Menge $\widetilde{E}'$ durch $\widetilde{Q}$ und bezeichnen mit $\hat{\mathfrak{R}} = (\hat{R}, \tau, R)$ das Regularitätsgebiet von $\widetilde{C} | A$. $\hat{\mathfrak{R}}$ ist also die maximale (begrenzte) minimalblättrige irreduzible, algebraische Überlagerung von R, auf der $\widetilde{C} | A$ noch definiert werden kann, d.h. es gibt eine reguläre Überlagerungsabbildung $\mu : A \to \hat{R}$ und eine reguläre Abbildung $C = \hat{R} \to L$, so daß $\widetilde{C} = C \circ \mu$. Es gilt $\operatorname{grd}_R \hat{R} = \operatorname{grd}_R C \leq \operatorname{grd} \widetilde{E}'$. Führen wir die Betrachtungen für X_λ über R_λ durch, so folgt $\operatorname{grd}_{R^{(\lambda)}} C \circ C_\lambda^{-1} \leq \operatorname{grd}_{R^{(\lambda)}} \widetilde{E}'_\lambda = \operatorname{grd} \widetilde{E}'$. Das Produkt $C \circ C_\lambda^{-1}$ ist also algebraisch über $R^{(\lambda)}$ von einem Grad, der in λ beschränkt ist. Das bedeutet zunächst einmal, daß $\hat{\mathfrak{R}}$ separabel ist. Die Abbildungen $C_1 \circ C_2^{-1}$, wobei C_1 und C_2 Konjugierte von C sind, aus der Galoisgruppe von C sind regulär auf der Galoischen Überlagerung $\hat{\hat{\mathfrak{R}}}$ zu $\hat{\mathfrak{R}}$ über jedem $R^{(\lambda)}$. Sie müssen deshalb konstant, also aus L sein. Das ergibt unmittelbar : $\hat{\mathfrak{R}}$ ist eine unverzweigte eigentliche Galoissche Überlagerung einer offenen Teilmenge $R^+ \subset R$ mit $t_0 \in R^+$, $\hat{t}_0 = \mu(\widetilde{Q}) \in \hat{R}$ und $C(\hat{t}_0) = 1 \in L$.

Wir liften die Faserung (X, π, R) vermöge τ nach $\hat{R}$ und erhalten eine Faserung $(\hat{X}, \hat{\pi}, \hat{R})$ über $\hat{R}$. Es sei $\dim X_t = \dim \hat{X}_{\hat{t}} = m$ und $\varphi : P^N \to P^{m+1}$ eine lineare, auf $\hat{X}_{\hat{t}_1}$ reguläre Abbildung, $\hat{t}_1 \in \hat{R}$. Es gibt ein Polynom ω minimalen Grades in P^{m+1} über einer Umgebung $U = U(\hat{t}_1) \subset \hat{R}$, so daß $(\hat{\pi} \times \varphi)(\bar{X} | U) = \{\omega = 0\}$ mit $\bar{X} = C \circ \hat{X}$. Durch Normierung eines Koeffizienten werde ω eindeutig bestimmt. Der Koeffizient sei über U konstant. Da $\bar{X} = (C \circ C_\lambda^{-1}) \circ (C_\lambda \hat{X})$ schon über $\hat{R}^{(\lambda)} | R_\lambda$ definierbar ist, folgt dann, daß auch ω über U konstant ist, d.h. wir haben zunächst $\bar{X} | W = W \times X_0$, wobei $W \subset U$ eine hinreichend kleine Umgebung von $\hat{t}_1$ ist. Das Ideal von $\bar{X} | W \subset U \times P^N$ wird nämlich von Polynomen $\omega \circ \varphi$ aufgespannt. Es folgt nun natürlich sofort $\bar{X} = \hat{R} \times X_0$.

Es ist $X_t = X_0$ in R^+ und da man unsere Überlegungen in jedem $t_0 \in R$ ausführen kann, muß schlechthin $X_t = X_0$ gelten. Zu $X_{t_1} \subset P^N$, $X_{t_2} \subset P^N$ gibt es weiter stets eine Transformation $C_{t_1 t_2}$ aus L, die X_{t_1} auf X_{t_2} abbildet. Ist $t_1 \in R$ beliebig, so führen wir unsere Überlegungen für das gleiche System E_ν, Q_ν aber in t_1 für die Familie $C_{t_1 t_0} \circ X = X_1$ aus. Man erhält über einer Umgebung R_1^+ von t_1 eine eigentliche, unverzweigte Überlagerung $\hat{\mathfrak{R}}_1$ mit $C_1 : \hat{R}_1 \to L$. C und $C_0 \circ C_1 \circ C_{t_1 t_0}$ (mit $C_0 \in L$ eine geeignete Transformation, für die $C_0 \circ X_0 = X_0$) lassen sich nun (auf einer geeigneten Überlagerung) zu einer einzigen regulären Abbildung $\hat{C}$ zusammenheften. Da C bereits maximal fortgesetzt ist, folgt $C = \hat{C}$, d.h. $t_1 \in R^+$ und $R^+ = R$, q.e.d.

In dem in Abschnitt 1 und 2 betrachteten Fall ist für $t \in R'$ jedes X_t so in P^N eingebettet, daß es in keiner niederdimensionalen Ebene liegt. Durch Anwendung von § 3 auf die Familie $X_t \times X_t \to X_t$ folgt ferner, daß X_t nur endlich viele bireguläre Selbstabbildungen besitzt. Also ist auch die Menge der $l \in L$ mit $l(X_t) = X_t$ endlich und Satz 2 auf unseren Fall anwendbar. Durch Zusammenheften von Abbildungen $\hat{X} \to \hat{R} \times X_0$ über verschiedenen R' kann man sogar erreichen, daß $\hat{\mathfrak{R}}$ nicht nur über R', sondern über ganz R definiert ist. Es gibt also eine unverzweigte eigentliche Galoissche Überlagerung $\hat{\mathfrak{R}}$ von R, so daß X nach Liften nach $\hat{R}$ trivial wird.

4. Es seien X_0 eine vollständige projektiv algebraische Mannigfaltigkeit, R eine algebraische Mannigfaltigkeit und $\hat{\mathfrak{R}} = (\hat{R}, \tau, R)$ eine eigentliche, irreduzible, unverzweigte Galoissche algebraische Überlagerung über R. Mit $\mathrm{Aut}(X_0)$ werde die Gruppe der biregulären Abbildungen $X_0 \to X_0$ bezeichnet. Die Galoisgruppe $G = G(\hat{\mathfrak{R}})$ sei treu in $\mathrm{Aut}(X_0)$ dargestellt, in Zeichen $G \subset \mathrm{Aut}(X_0)$.

SATZ 3. — *Die algebraische Mannigfaltigkeit* $(\hat{R} \times X_0)/G$ *ist eine (eigentliche, einfache, reguläre) Faserung über* R, *die quasitrivial über einer Umgebung jedes Punktes ist.*

Beweis. — Es sei F ein amples Geradenbündel über X_0. Wir setzen $K = \bigotimes_{g \in G} F \circ g$. K ist dann ebenfalls ample, darüber hinaus gegenüber G invariant. Wir wählen r so groß, daß die Schnittflächen aus $\Gamma(X_0, K^r)$ eine bireguläre Einbettung von X_0 in einen P^N vermitteln und daß $H^1(X_0, K^r) = 0$ gilt. Die (triviale) Faserung $\hat{R} \times X_0$ kann als Faserung $(\hat{X}, \hat{\pi}, R)$ über R gedacht werden. Es gilt $\hat{X}_t = X_{1t} \cup \ldots \cup X_{bt}$, wobei b

die Blätterzahl von $\hat{\mathfrak{R}}$ und die $X_{\nu t} = \hat{t}_\nu \times X_0 = X_0$ sind, $\nu = 1, \ldots, b$. Es sei $t_0 \in R$ beliebig und $\xi_0', \ldots, \xi_N' \in \Gamma(X_{1t}, K^r)$ eine Basis. Wir definieren

$$\xi_\nu'' = \begin{cases} \xi_\nu' & \text{auf} \quad X_{1t_0} \\ 0 & \text{auf} \quad X_{2t_0}, \ldots, X_{bt_0} \end{cases}$$

und wählen eine Umgebung $U = U(t_0)$, derart, daß wir $\xi_0'', \ldots, \xi_N''$ zu regulären Schnittflächen $\tilde{\xi}_0, \ldots, \tilde{\xi}_N$ in $\hat{\pi}^{-1}(U)$ fortsetzen können. Es sei dann $\xi_\nu = \sum_{g_\mu \in G} \tilde{\xi}_\nu \circ g_\mu$, $\nu = 0, \ldots, b$. Dabei bezeichnet $g_\mu \in G$ diejenige Transformation, die $\hat{t}_{01}$ auf $\hat{t}_{0\mu}$ abbildet, die wir uns deshalb als fasertreue Transformation $\hat{X} \to \hat{X}$ mit $X_{1t_0} \to X_{\mu t_0}$ denken. Es ist $\xi_\nu | X_{\mu t_0} = \xi_\nu' \circ g_\mu^{-1}$. Es gibt daher eine Umgebung $V = V(t_0) \subset U$, so daß $\xi_0, \ldots, \xi_N$ über $\hat{\pi}^{-1}(V)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, auf jeder Faser $X_{\mu t}$, $t \in \mathfrak{B}$ noch eine Basis bilden und die durch $\xi_0, \ldots, \xi_N$ vermittelte reguläre Abbildung $\psi : \hat{X}' = \hat{\pi}^{-1}(V) \to P^N$ jede Faser $X_{\mu t}$ biregulär in den P^N einbettet. Es gilt aber $\psi(X_{1t}) = \ldots = \psi(X_{bt})$. $\mathbf{X} = (\mathrm{id} \times \psi)(\hat{X}')$ ist eine abgeschlossene algebraische Untermannigfaltigkeit von $V \times \mathbf{P}^N$. Ändert man die Basis $\xi_0', \ldots, \xi_N'$ oder die Fortsetzungen $\tilde{\xi}_0, \ldots, \tilde{\xi}_N$, so erhält man natürlich eine andere Einbettung $\mathbf{X}_1$. Es gibt dann jedoch eine wohlbestimmte reguläre Abbildung $C : V \to PL(N, k)$, so daß $\mathbf{X}_1 = C \circ \mathbf{X}$.

Man kann nun die Konstruktion der $\tilde{\xi}_0, \ldots, \tilde{\xi}_N$ über jedem $R^{(\lambda)}$ durchführen, d.h. $\mathbf{X}$ ist in bezug auf seine Einbettung quasitrivial. Durch (wohlbestimmtes) Zusammenheften von $\mathbf{X}$, die zu verschiedenen Punkten $t_0 \in R$ konstruiert sind, vermöge Abbildungen C kann man schließlich die algebraische Faserung $(X, \pi, R) = (\hat{R} \times X_0)/G$ konstruieren.

Es werde jetzt ein Beispiel einer Faserung (X, π, R) von vollständigen singularitätenfreien Kurven X_t vom Geschlecht $g \geq 2$ angegeben, die über keiner offenen Teilmenge von R trivial ist und doch unendlich viele rationale Schnittflächen besitzt. Es sei k ein algebraisch-abgeschlossener Körper der Charakteristik 3 und X_0 die irreduzible singularitätenfreie Kurve $\{x^4 + y^4 = 1\} \subset P^2$. Es sei G die Gruppe der beiden Transformationen : id und $(x, y) \to (-x, -y)$. G bildet X_0 biregulär auf sich ab und X_0/G ist isomorph zu der singularitätenfreien algebraischen Kurve $\{x^2 + y^2 = 1, z^2 = xy\} \subset P^3$.

Wir setzen $R = X_0'/G$, $\hat{R} = X_0'$ und τ sei die Quotientenprojektion $\hat{R} \to R$ (mit $X_0' = X_0 \cap k^2$). $\hat{\mathfrak{R}} = (\hat{R}, \pi, R)$ ist eine unverzweigte Galoissche Überlagerung von R. Wir definieren $X = (\hat{R} \times X_0)/G$ und (X, π, R).

Die Abbildungen $\hat{s}_\nu : x^* = x^{3^\nu}, y^* = y^{3^\nu}$ sind reguläre Abbildungen $\hat{R} \to X_0$ mit $\hat{s}_\nu \circ l = l \circ \hat{s}_\nu$, $l \in G$. Wir fassen $\hat{s}_\nu$ als reguläre Schnittflächen in $\hat{R} \times X_0$ auf. Unter der Projektion $\hat{R} \times X_0 \to X$ werden dann die $\hat{s}_\nu$ zu regulären Schnittflächen s_ν in X. Die Faserung (X, π, R) besitzt also unendlich viele rationale Schnittflächen.

Es dürfte für einen Algebraiker nicht zu schwer sein, die nicht-trivialen, regulären Familien (X, π, R) von singularitätenfreien, vollständigen Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ weitgehend zu klassifizieren.

LITERATUR

[1] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique* (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné) :
I. Le langage des schémas, *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 4, Paris, 1960;
II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 8, Paris, 1961;
III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents (Première Partie), *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 11, Paris, 1961;
III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents (Seconde Partie), *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 17, 1963;
IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Première Partie), *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 20, 1964.

[2] I. Manin, Beweis eines Analogons der Mordellschen Vermutung für algebraische Kurven über Funktionenkörpern, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 152 (1963), 1061-1063, Engl. Übersetzung in *Soviet Mathematics*, 4 (1963), 1505-1507.

[3] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, 61 (1955), 197-278.

[4] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse*, 1929, 1-69.

[5] O. Zariski, The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, *Am. Journal Math.*, 80 (1958), 146-194, bes. p. 150.

Reçu le 15 novembre 1964.