PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

IVAR EKELAND

Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 47 (1977), p. 5-32

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1977__47__5_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DISCONTINUITÉS DE CHAMPS HAMILTONIENS ET EXISTENCE DE SOLUTIONS OPTIMALES EN CALCUL DES VARIATIONS

par IVAR EKELAND

AMS Classification : 49A10, 49B10, 58C25, 58F05.

SOMMAIRE

On s'intéresse au problème de Calcul des Variations dans $\mathbf{R}^n$:

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^T f(x, \dot{x})dt \mid x(0)=x_0,\ x(T)=x_1\right\}$$

où le critère f est une fonction régulière mais non convexe. Les conditions nécessaires d'optimalité donnent lieu à un champ hamiltonien dans l'espace des (x, p). Ce champ présente des discontinuités, liées à la non-convexité de f, qui se traduisent par le fait que les extrémales de $(\mathscr{P})$ sont brisées. On étudie la réfraction des bitrajectoires sur ces discontinuités, et dans le cas $n=1$ on classe complètement les singularités possibles en général. On en déduit une condition nécessaire et suffisante sur f pour que le problème $(\mathscr{P})$ admette une solution quelles que soient les conditions aux limites (x_0, x_1, T).

0. Préliminaires.

On se fixe pour toute la suite une fonction $h : [0, +\infty] \to \mathbf{R}$, bornée inférieurement et admettant une branche parabolique :

$$\mathbf{(0.0)} \qquad h(t)/t \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

On appellera $C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions f indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui vérifient l'estimation :

$$\mathbf{(0.1)} \qquad f(x, v) \geqslant h(\|v\|) \quad \forall (x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

et on le munira de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout compact, qui en fait un espace métrique complet, donc un espace de Baire.

Fixons f dans $C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ et associons-lui l'intégrale :

$$\mathbf{(0.2)} \qquad I(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t))dt$$

que nous chercherons à minimiser parmi tous les chemins absolument continus $x(\cdot)$ joignant x_0 à x_1 en temps T. On obtient un problème de calcul des variations, dépendant des paramètres x_0, x_1, et T, que nous notons :

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\{I(x) \mid \dot{x}\in L^1,\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_1\}.$$

Il est bien connu ([6], chap. 8, par exemple) que si $f(x, \cdot)$ est convexe en v pour tout $x\in\mathbf{R}^n$ fixé, le problème $(\mathscr{P})$ admet une solution quelle que soit la donnée (x_0, x_1, T). C'est le cas dans la plupart des phénomènes physiques relevant de principes variationnels, le lagrangien représentant en général une énergie. On rencontre même fréquemment le cas où $f(x, \cdot)$ est une forme quadratique; elle définit alors une métrique riemannienne, et le problème $(\mathscr{P})$ consiste alors à chercher les géodésiques minimales joignant x_0 à x_1.

Comme le montre ce dernier exemple, il n'y a pas unicité de la solution en général. Elle n'est assurée que sous l'hypothèse beaucoup plus forte que f soit strictement convexe en (x, v).

Dans la suite de cet article, nous ne ferons aucune hypothèse de convexité, et nous ne pourrons donc appliquer les résultats que nous venons de rappeler. Il faut donc s'attendre à ce que, pour certaines données (x_0, x_1, T), le problème $(\mathscr{P})$ n'ait pas de solutions. Mais on peut toujours trouver une suite de trajectoires (x_n) telle que :

$$\textbf{(0.3)} \qquad I(x_n) \to \inf I(x),$$

même si cette borne inférieure n'est pas atteinte : on dit que les (x_n) constituent une suite minimisante pour le problème. D'après l'estimation (0.1), pour toute suite minimisante, x_n converge uniformément et $\dot{x}_n$ converge faiblement; la trajectoire $(x, \dot{x})$ ainsi obtenue n'est pas solution du problème $(\mathscr{P})$, mais d'un autre problème $(\mathscr{P}^{**})$, appelé le problème relaxé, que nous allons construire maintenant. Pour les détails et les démonstrations, on renvoie à [5] ou [6].

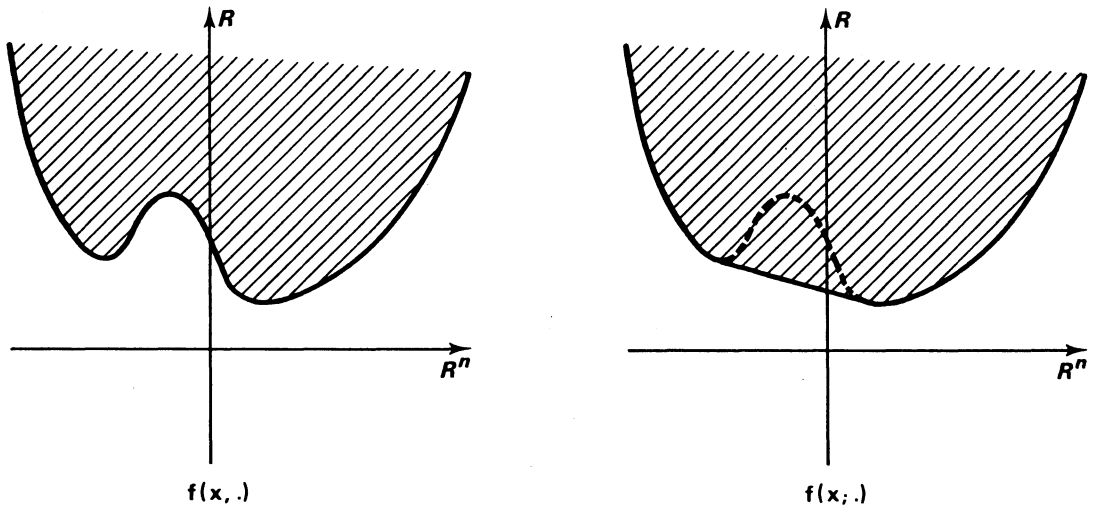

FIG. 1

Pour tout x fixé, nous associons à $f(x, \cdot)$ sa régularisée convexe s.c.i., c'est-à-dire la plus grande fonction convexe semi-continue inférieurement la minorant, ou encore l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues; conformément aux usages de l'analyse convexe, elle sera notée $f^{**}(x; \cdot)$. Grâce à l'estimation (0.1), $f^{**}(x; \cdot)$ est continue, et son épigraphe est l'enveloppe convexe de l'épigraphe de $f(x, \cdot)$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

Considérons l'intégrale :

$$\mathbf{(0.4)} \qquad J(x) = \int_0^T f^{**}(x(t); \dot{x}(t))dt$$

que nous chercherons à minimiser parmi tous les chemins absolument continus joignant x_0 à x_1 en temps T. On obtient ainsi le *problème relaxé* :

$$(\mathscr{P}^{**}) \qquad \min\{J(x) \mid \dot{x} \in L^1,\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_1\}.$$

Théorème de relaxation. — Le problème relaxé a une solution au moins, et a même valeur que le problème originel :

$$\inf I(x) = \min J(x), \quad \textit{pour} \quad x(0) = x_0 \quad \textit{et} \quad x(T) = x_1.$$

En outre, pour toute suite minimisante de $(\mathscr{P})$, *il existe une sous-suite* (x_n) *et une solution* x *de* $(\mathscr{P}^{**})$ *telles que* :

$$x_n \to x \textit{ uniformément sur } [0, T]$$
$$\dot{x}_n \to \dot{x} \textit{ faiblement dans } L^1(0, T).$$

Réciproquement, toute solution x *de* $(\mathscr{P}^{**})$ *est limite, au sens ci-dessus, d'une suite minimisante de* $(\mathscr{P})$.

Corollaire. — L'ensemble (non vide) des solutions du problème relaxé contient l'ensemble (éventuellement vide) des solutions du problème originel.

Ce théorème se démontre par les méthodes usuelles de l'analyse fonctionnelle, linéaire ou convexe. Le but du présent article est d'analyser les diverses situations géométriques qu'il recouvre, d'ébaucher leur classification, et de reconnaître parmi elles celles qui conduisent à l'absence de solutions pour le problème $(\mathscr{P})$.

1. Le formalisme hamiltonien.

Nous allons écrire les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme, familière aux spécialistes de contrôle optimal, que leur a données L. S. Pontryagin [10]. On introduit la variable adjointe $p \in \mathbf{R}^n$ et la fonction :

$$\mathbf{(1.1)} \qquad \mathscr{H}(x, p; u) = \langle p, u \rangle + f(x, u).$$

Pour que $x(\cdot)$, vérifiant $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$, soit une solution du problème $(\mathscr{P})$, il faut que l'on puisse lui associer $p(\cdot)$ de telle sorte que, en presque tout instant t :

$$\mathbf{(1.2)} \qquad \mathscr{H}(x(t), p(t); \dot{x}(t)) = \min_u \mathscr{H}(x(t), p(t); u)$$

$$\mathbf{(1.3)} \qquad \dot{p}(t) = -f'_x(x(t), \dot{x}(t)).$$

L'équation (1.2) relie p à $(x, \dot{x})$. Elle est plus précise que l'habituelle transformation de Legendre; en effet, comme $\dot{x}$ est un minimum absolu de $\mathscr{H}(x, p; \cdot)$, c'en est un point critique, et (1.2) implique donc :

$$p + f'_u(x, \dot{x}) = 0. \tag{1.4}$$

En dérivant (1.4) par rapport au temps, on obtient $\dot{p} = -\frac{d}{dt} f'_u$. En comparant cette valeur à celle qui provient de (1.3), on obtient $\frac{d}{dt} f'_u - f'_x = 0$, qui n'est autre que l'équation d'Euler usuelle.

On peut mettre le système (1.2), (1.3) sous la forme canonique, en introduisant le hamiltonien :

$$\mathrm{H}(x, p) = \min_u \mathscr{H}(x, p; u). \tag{1.5}$$

Soit Ω l'ensemble des (x, p) tels que la fonction $\mathscr{H}(x, p; \cdot)$ atteigne son minimum absolu en un unique point $\hat{u}(x, p)$ et que la forme quadratique f''_{uu} soit non dégénérée en $\hat{u}(x, p)$. Alors Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sur lequel la fonction H et l'application $\hat{u}$ sont bien définies et indéfiniment différentiables; on obtient $\hat{u}$ en résolvant l'équation (1.4) par le théorème des fonctions implicites, et on obtient H en reportant $\hat{u}$ dans $\mathscr{H}$. On en déduit que :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}(x, p) = \left\langle p + f'_u(x, \hat{u}), \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, p) \right\rangle + f'_x(x, \hat{u}) = f'_x(x, \hat{u}) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}(x, p) = \left\langle p + f'_u(x, \hat{u}), \frac{\partial \hat{u}}{\partial p}(x, p) \right\rangle + \hat{u} = \hat{u} \tag{1.7}$$

Dans l'ouvert Ω, on peut donc écrire le système (1.2), (1.3) sous la forme :

$$\dot{x} = \mathrm{H}'_p(x, p) \tag{1.8}$$

$$\dot{p} = -\mathrm{H}'_x(x, p). \tag{1.9}$$

Le théorème d'existence locale et d'unicité des solutions d'une équation différentielle s'applique au système (1.8), (1.9) pour toute condition initiale dans Ω, et les courbes intégrales constituent donc un feuilletage de Ω.

Hors de Ω, on peut prolonger ce système différentiel par un système différentiel multivoque, et écrire ainsi les conditions nécessaires d'optimalité sous une forme très générale; ce point de vue ne sera pas le nôtre ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de F. Clarke, [3], [4].

Dans toute la suite, nous conviendrons d'appeler *bisolution* toute application $(x(\cdot), p(\cdot))$ vérifiant le système (1.2), (1.3) sur [0, T], et *bitrajectoire* l'image dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ d'une bisolution. En d'autres termes, les deux notions diffèrent par le paramétrage en temps : la donnée de la bisolution précise, non seulement la trajectoire, mais la façon dont elle est parcourue.

La condition nécessaire d'optimalité peut donc se formuler géométriquement en disant que toute solution x du problème $(\mathscr{P})$ doit se relever en une bisolution (x, p).

2. Bitrajectoires génériques.

A tout point (x, p) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ est associée une fonction $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ sur $\mathbf{R}^n$. Elle atteint son minimum en K points distincts u_k, $1 \leqslant k \leqslant K$; on peut avoir $K = \infty$, mais non $K = 0$. Chacun d'eux est un point critique de la fonction, qui y présente donc une singularité de codimension c_k; on remarquera que sont exclues toutes les singularités qui ne sont pas associées à un minimum local. On définit alors la codimension de $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ comme :

$$\operatorname{codim} \mathscr{H}(x, p, \cdot) = K - 1 + \sum_{k=1}^{K} c_k. \tag{2.1}$$

On en déduit une partition de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ en ensembles Σ_i, $0 \leqslant i \leqslant \infty$:

$$\Sigma_i = \{(x, p) \mid \operatorname{codim} \mathscr{H}(x, p, \cdot) = i\}. \tag{2.2}$$

A titre d'exemple, précisons les premiers d'entre eux. Tout d'abord Σ_0. De $i = 0$ on déduit $K = 1$ et $c_1 = 0$. Donc Σ_0 est l'ensemble des (x, p) tels que $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ présente un unique minimum non dégénéré; ce n'est autre que Ω :

$$\Sigma_0 = \Omega. \tag{2.3}$$

Pour $i = 1$ deux cas se présentent : ou bien $K = 1$ et $c_1 = 1$, ou bien $K = 2$ et $c_1 = c_2 = 0$. Le premier est exclu, car la singularité de codimension 1 (point d'inflexion généralisé) ne correspond pas à un minimum local. Reste le second. Ainsi Σ_1 est l'ensemble des (x, p) tels que la fonction $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ atteint son minimum en deux points critiques non dégénérés :

$$\Sigma_1 = \left\{ (x, p) \;\middle|\; \begin{array}{l} pu_1 + f(x, u_1) = pu_2 + f(x, u_2) = \min\limits_u \\ \operatorname{rang} f''_{uu}(x, u_1) = \operatorname{rang} f''_{uu}(x, u_2) = n \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

Pour $i = 2$ on exclut comme ci-dessus la singularité de codimension 1, et il reste deux cas : ou bien $K = 1$ et $c_1 = 2$, ou bien $K = 3$ et $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dans la terminologie de René Thom, on a une catastrophe de bifurcation et une catastrophe de conflit. Ainsi $\Sigma_2 = \Sigma_2^b \cup \Sigma_2^c$, avec :

$$\Sigma_2^b = \left\{ (x, p) \;\middle|\; \begin{array}{l} pu + f(x, u) = pu_1 + f(x, u_1) + v^4, \text{ où } v \text{ est une} \\ \qquad\qquad \text{coordonnée locale de } \mathbf{R}^n \text{ au voisinage de } u_1 \end{array} \right\}$$

$$\Sigma_2^c = \{(x, p) \mid pu_1 + f(x, u_1) = pu_2 + f(x, u_2) = pu_3 + f(x, u_3) = \min_u\}$$

D'une manière générale, les singularités de codimension $\leqslant 4$ ont été classées par René Thom, qui leur a donné le nom de catastrophes élémentaires. Dans sa terminologie, Σ_1 est la strate de Maxwell, les singularités de Σ_2^b sont des fronces et celles de Σ_4^b des papillons. Par contre, on ne rencontrera ni la queue d'aronde, ni les ombilics, qui ne correspondent pas à des minima locaux.

Dans l'énoncé suivant, comme dans la suite de l'article, nous dirons qu'une pro-

priété est vraie « pour presque toutes les fonctions $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ » pour exprimer que l'ensemble des f qui la satisfont contient un G_δ dense de $C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. Cette terminologie est cohérente, dans la mesure où $C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ est un espace de Baire : si les P_n, $n \in \mathbf{N}$, sont des propriétés vraies presque partout, alors la propriété $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} P_n$ est vraie presque partout.

Proposition (**2.5**). — *Soit* $n \leqslant 3$. *Pour presque tout* $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, *les* Σ_i, $0 \leqslant i \leqslant 6$, *constituent une stratification de Whitney de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

En d'autres termes, les Σ_i sont des sous-variétés de codimension i qui constituent une partition de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et vérifient les conditions de contact :

a) $\overline{\Sigma}_i \supset \Sigma_{i+1}$;

b) soient $0 \leqslant i < j \leqslant 6$, $x_n \in \Sigma_i$ et $y_n \in \Sigma_j$ deux suites convergeant vers $y \in \Sigma_j$; on suppose que les droites $x_n y_n$ convergent vers D dans le projectif, et que les plans tangents $T_{x_n}(\Sigma_i)$ convergent vers Π dans la grassmanienne; alors $D \subset \Pi$.

Démonstration. — Notons J l'espace des polynômes en n variables de degré $\leqslant 8$. C'est aussi l'espace des $jg(u)$, développements de Taylor à l'ordre 8 de fonctions $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ aux points $u \in \mathbf{R}^n$. Les polynômes sans termes d'ordre 1, c'est-à-dire les $jg(u)$ quand u est un point critique de g, constituent l'espace S des singularités, qui est muni d'une stratification naturelle par la codimension [11].

De même, le produit J^7 contient l'espace S^7 des multisingularités, qui est également muni d'une stratification naturelle, dont la i-ème strate T_i n'est autre que l'ensemble des multisingularités de codimension i (au sens de la formule (2.1)). Pour $i \leqslant 7$, notons S_i le fermé de T_i constitué de multisingularités associées à des minima locaux; les S_i sont alors des sous-variétés de codimension i dans S^7, et vérifient les conditions de contact *a)* et *b)* de Whitney (ce n'est pas vrai pour les T_i, qui contiennent des familles à un paramètre de singularités non équivalentes de même codimension; mais la classification des singularités de codimension $\leqslant 9$ montre que ce phénomène ne se produit pas pour les minima locaux avant la singularité $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+ax_2^2)$, qui est de codimension 8; voir [12]). Par ailleurs, la réunion de toutes les singularités de codimension $\geqslant 8$ est un sous-ensemble algébrique R de codimension $\geqslant 7$ dans S^7. La proposition (2.5) exprime que l'application :

$$j^7\mathscr{H}_{x,p} : (u_1, \ldots, u_7) \mapsto (j\mathscr{H}_{x,p}(u_1), \ldots, j\mathscr{H}_{x,p}(u_7)) \tag{2.6}$$

est transversale aux S_i et à R, pourvu que les u_i soient distincts deux à deux.

Remarquons que si l'on change $f(x, u)$ en $f(x, u)+g(u)$, l'image $j^7\mathscr{H}_{x,p}(u_1, \ldots, u_7)$ devient $j^7\mathscr{H}_{x,p}(u_1, \ldots, u_7)+j^7 g(u_1, \ldots, u_7)$. L'application :

$$(f, x, p, u_1, \ldots, u_7) \mapsto j^7\mathscr{H}_{x,p}(u_1, \ldots, u_7) \tag{2.7}$$

est donc une submersion tant que les u_i sont distincts deux à deux. D'après les théorèmes de transversalité de Thom [1], il existe dans $C_h^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ un G_δ dense $\mathscr{U}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{U}$, l'application (2.6) satisfait aux conditions proposées. ■

Eclairons les choses, pour $n=1$, par une figure :

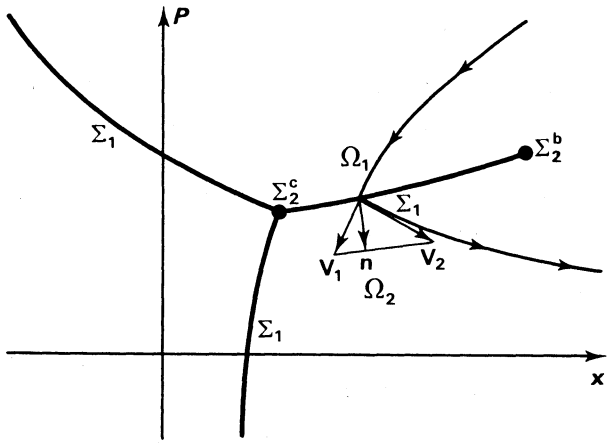

FIG. 2

Une bitrajectoire est une courbe de $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$. On peut donc s'attendre à ce qu'elle évite les strates de codimension $\geqslant 2$. Par contre, l'intersection avec Σ_1 est un phénomène stable, qu'il importe donc d'analyser. Pour ce faire, introduisons les notations suivantes. En un point $(x,p)\in\Sigma_1$, on désignera par :

u_1 et u_2 les points où $\mathscr{H}(x,p,\cdot)$ atteint son minimum;
$\vec{v}_i=(u_i,f'_x(x,u_i))$, $i=1,2$, les deux vecteurs-vitesses associés;
$\vec{n}$ le vecteur $(f'_x(x,u_2)-f'_x(x,u_1),u_2-u_1)$.

Interprétons ceci. Il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de (x,p) tel que, pour tout $(y,q)\in\mathcal{O}$, la fonction $\mathscr{H}(y,q,\cdot)$ présente deux minima locaux $\hat{u}_1(y,q)$ et $\hat{u}_2(y,q)$, coïncidant respectivement avec u_1 et u_2 au point (x,p). L'hypersurface Σ_1 sépare $\mathcal{O}$ en deux régions Ω_1 et Ω_2, caractérisées par le fait que, si $(y,q)\in\Omega_i$, le minimum absolu de $\mathscr{H}(y,q,\cdot)$ est atteint en $\hat{u}_i(y,q)$. Si donc nous définissons dans $\mathcal{O}$ deux fonctions régulières H_1 et H_2 par $H_i(y,q)=\mathscr{H}(y,q,\hat{u}_i(y,q))$, on a $H=\min(H_1,H_2)$, et l'équation de Σ_1 n'est autre que $H_1(y,q)=H_2(y,q)$. D'où aussitôt :

Lemme **(2.2)**. *$\vec{n}$ est un vecteur normal à Σ_1 au point (x,p).*

Démonstration. — Il suffit de dériver l'équation $H_2-H_1=0$, en tenant compte des identités (1.6) et (1.7) :

(2.8) $\qquad \operatorname{grad} H_i(x,p)=(f'_x(x,u_i),u_i)$. ■

Supposons, pour fixer les idées, qu'une bisolution passe de Ω_1 à Ω_2 en traversant Σ_1 au point (x,p) ; la vitesse sautera de $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$, et la bitrajectoire présentera donc une brisure. Il suffit de se reporter à la figure 2 pour constater l'analogie avec la traversée d'un dioptre en optique géométrique. Notons σ la matrice symplectique :

(2.9) $$\sigma=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n).$$

On peut alors énoncer la :

Loi de la réfraction : $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \sigma(\vec{n})$.

Démonstration. — Par définition, $\vec{n} = \text{grad } H_2 - \text{grad } H_1$. En appliquant σ aux deux membres de cette équation, et en tenant compte du fait que $\sigma(\text{grad } H_i) = \vec{v}_i$, on obtient le résultat désiré. ■

En faisant le produit scalaire des deux membres par $\vec{n}$, et en tenant compte de la relation $\vec{n}.\sigma(\vec{n}) = 0$, on obtient le corollaire :

Conservation de la vitesse normale : $\vec{n}.\vec{v}_1 = \vec{n}.\vec{v}_2$.

En particulier, les deux membres de cette dernière équation sont nuls simultanément. Ceci montre que deux cas seulement peuvent se produire à la traversée de Σ_1 :

arrivée transversale - départ transversal : $\vec{n}.\vec{v} \neq 0$

arrivée tangentielle - départ tangentiel : $\vec{n}.\vec{v} = 0$

le cas mêlé transversal/tangentiel étant exclu, ce qui est particulièrement important du point de vue de la classification.

Nous dirons qu'une bitrajectoire est *générique* si elle est contenue dans $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$, ses intersections avec Σ_1 vérifiant la condition $\vec{n}.\vec{v} \neq 0$. Dans le cas contraire elle sera dite *singulière*. Une bitrajectoire sera donc singulière :

— soit parce qu'elle ne vérifie pas la condition $\vec{n}.\vec{v} \neq 0$ aux points de contact avec Σ_1 (type I);
— soit parce qu'elle rencontre des strates de codimension $\geqslant 2$ (type II).

Nous allons étudier successivement ces deux types de singularités dans le cas où $n = 1$. Il sera commode de remarquer que la condition $\vec{n}.\vec{v}_i = 0$ s'écrit aussi $\vec{n}.\sigma(\text{grad } H_i) = 0$, ou encore $\sigma(\vec{n}).\text{grad } H_i = 0$. Comme $n = 1$, Σ_1 est une courbe admettant $\sigma(\vec{n})$ comme vecteur tangent, et la condition s'écrit finalement $\text{grad } H \mid \Sigma_1 = 0$ (sur Σ_1, $H_1 = H_2 = H$).

Les singularités de type I sont donc les points où la restriction de H à Σ_1 présente un point critique. Les singularités de type II*b* sont les points de Σ_2^b, les singularités de type II*c* les points de Σ_2^c.

3. Singularités de type I.

Dans ce paragraphe, nous allons classer les singularités de type I, tout au moins celles qui sont essentielles. Nous commençons par nous ramener à une situation aussi simple que possible :

Proposition (**3.1**). — *Pour presque toutes les fonctions* $f \in C_h^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, *les points critiques de* $H \mid \Sigma_1$ *sont non dégénérés, et les* u_i *associés à chacun d'eux sont non nuls.*

Démonstration. — Les points critiques de la restriction $H \mid \Sigma_1$ sont définis par l'équation $F(f, x, p, u_1, u_2) = 0$, où F est l'application de $C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\mathbf{R}-D)$ (avec D diagonale de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$) dans $\mathbf{R}^4$ de composantes :

$$p + f'_u(x, u_1)$$
$$p + f'_u(x, u_2)$$
$$pu_1 + f(x, u_1) - pu_2 - f(x, u_2)$$
$$u_1 f'_x(x, u_2) - u_2 f'_x(x, u_1).$$

On notera F_f l'application partielle $(x, p, u_1, u_2) \mapsto F(f, x, p, u_1, u_2)$ à f constant. Nous allons montrer que, pour presque tout $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, l'application F_f est transversale à l'origine; la proposition en résulte.

D'après les théorèmes de transversalité de Thom [1], il suffira de montrer que l'application F elle-même est transversale à l'origine, c'est-à-dire qu'en tout point (f, x, p, u_1, u_2) vérifiant $F(f, x, p, u_1, u_2) = 0$, l'application tangente TF est surjective. C'est une application linéaire que l'on peut écrire comme somme des « dérivées partielles » :

$$TF = T_f F + T_{x,p,u_1,u_2} F.$$

Le dernier terme est un opérateur linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans lui-même dont on peut écrire la matrice; la notation ${}_i g$ indique qu'il faut prendre la valeur de la fonction g au point (x, u_i) :

$$A = \begin{pmatrix} {}_1f''_{ux} & 1 & {}_1f''_{uu} & 0 \\ {}_2f''_{ux} & 1 & 0 & {}_2f''_{uu} \\ {}_1f'_x - {}_2f'_x & u_1 - u_2 & p + {}_1f'_u & -p - {}_2f'_u \\ {}_2f''_{xx}u_1 - {}_1f''_{xx}u_2 & 0 & {}_2f'_x - {}_1f''_{xu}u_2 & {}_2f''_{xu}u_1 - {}_1f'_x \end{pmatrix} = T_{x,p,u_1,u_2} F$$

Reste le premier terme, à (x, p, u_1, u_2) fixés. On remarque alors que f n'intervient que par son développement de Taylor à l'ordre 1 aux points (x, u_1) et (x, u_2). En d'autres termes, on peut écrire $F_{x,p,u_1,u_2} = \varphi \circ e$, où e est l'application qui à $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ associe :

$$a_1 = f(x, u_1), \quad b_1 = f'_x(x, u_1), \quad c_1 = f'_u(x, u)$$
$$a_2 = f(x, u_2), \quad b_2 = f'_x(x, u_2), \quad c_2 = f'_u(x, u_2)$$

et φ est l'application qui à $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbf{R}^6$ associe :

$$p + c_1$$
$$p + c_2$$
$$pu_1 + a_1 - pu_2 - a_2$$
$$u_1 b_2 - u_2 b_1.$$

On sait que e est une submersion, c'est-à-dire que l'application linéaire tangente Te est surjective. On en déduit en particulier que l'image de $T_f F$ n'est autre que l'image de $T\varphi$. Or $T\varphi$ est un opérateur de $\mathbf{R}^6$ dans $\mathbf{R}^4$ dont la matrice s'écrit :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est de rang 4 pourvu que $u_1 \neq u_2$. Il en sera donc de même pour la matrice (A, B), ce qui prouve que TF est bien surjective. ■

Une *singularité générique de type* I sera la donnée de $S=(H, \bar{x}, \bar{p})$, où H est le hamiltonien associé à une fonction f satisfaisant à la proposition (2.5), donnant donc lieu à une strate $\Sigma_1(H)$ régulière, et $(\bar{x}, \bar{p})$ est un point critique de la restriction de H à $\Sigma_1(H)$, supposé non dégénéré, et associé à des $\bar{u}_i$ non nuls $(i=1, 2)$. Soit $s=(h, 0, 0)$ une singularité générique de type I telle que $\Sigma_1(h)$ soit l'axe des x. Nous dirons que *s est un modèle local de* S s'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $(\bar{x}, \bar{p})$, partagé en deux régions Ω_1 et Ω_2 par $\Sigma_1(H)$, et deux difféomorphismes φ_1 et φ_2 de $\mathcal{O}$ sur $\mathbf{R}^2$, de classe C^∞, tels que :

$\varphi_1(x, p)=\varphi_2(x, p)=(0, 0)$

φ_1 et φ_2 coïncident sur $\Sigma_1(H)$

$\varphi_1(\Sigma_1)=\varphi_2(\Sigma_1)=\{$axe des ξ, $\pi=0\}$

$\varphi_1(\Omega_1)=\{$demi-plan inférieur, $\pi<0\}$

$\varphi_2(\Omega_1)=\{$demi-plan supérieur, $\pi>0\}$

$\varphi_i^{-1}\{$axe des π, $\xi=0\}$ est normal à $\Sigma_1(H)$

$H=h\circ\varphi_i$ sur Ω_i.

En d'autres termes, un modèle local est la donnée de deux cartes locales, valables de part et d'autre de $\Sigma_1(H)$, et se raccordant normalement sur cette courbe. Ou encore, deux systèmes de coordonnées locales au voisinage de (x, p), les axes curvilignes étant Σ_1 d'une part, deux courbes normales à Σ_1 d'autre part.

Théorème (3.2). — *Il y a trois classes de singularités* $S=(H, \bar{x}, \bar{p})$ *de type* I :

(I*a*) $0 \notin]u_1, u_2[$

(I*b*) $0 \in]u_1, u_2[$ *et* $H|\Sigma_1$ *admet un maximum en* $(\bar{x}, \bar{p})$

(I*c*) $0 \in]u_1, u_2[$ *et* $H|\Sigma_1$ *admet un minimum en* $(\bar{x}, \bar{p})$

Pour chacune d'elles on dispose d'un modèle local $s=(h, 0, 0)$, *où* :

(I*a*) $h(\xi, \pi)=\pi-\xi^2+c$, *c constante*

(I*b*) $h(\xi, \pi)=-|\pi|-\xi^2+c$

(I*c*) $h(\xi, \pi)=-|\pi|+\xi^2+c$.

Démonstration. — Nous travaillerons dans un voisinage de (x, p) assez petit pour que $\Sigma_1(H)$ le partage en deux régions Ω_1 et Ω_2. Rappelons que, au point (x, p), grad $H \mid \Omega_1$ et grad $H \mid \Omega_2$ sont non nuls et colinéaires, puisqu'ils sont tous deux normaux à $\Sigma_1(H)$. On peut donc écrire grad $H \mid \Omega_i = a_i \vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal et a_i une constante non nulle.

Tout point (x, p) assez voisin de (x, p) s'écrit de manière unique $(y, q) + r\vec{n}$, avec $(y, q) \in \Sigma_1(H)$; si donc l'on choisit une coordonnée locale s de Σ_1 le couple (s, r) constitue un système de coordonnées locales de $\mathbf{R}^2$ au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$. On aura $H'_s(0, 0) = 0$ et $H''_{ss}(0, 0) = b \neq 0$, d'où :

$$H(s, r) = H(0, 0) + rP_i(s, r) + s^2 Q_i(s, r) \text{ dans } \Omega_i$$

avec $P_i(0, 0) = a_i$ et $Q_i(0, 0) = b$. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut prendre comme nouvelles coordonnées locales dans Ω_i :

$$r'_i = rP_i(r, s)$$
$$s'_i = s \mid Q_i(r, s) \mid^{1/2}.$$

Les difféomorphismes $\varphi_i : (s, r) \mapsto (s'_i, r'_i)$ répondent aux conditions voulues. En particulier, $r'_i = 0$ signifie que $r = 0$ et donc caractérise Σ_1 ; en outre, $Q_1(s, 0) = Q_2(s, 0)$, donc $s_1 = s_2$ sur Σ_1. La fonction H s'écrit alors :

$$\textbf{(3.1)} \qquad H(s', r') = c + r'_i + s'^2_i \operatorname{signe}(b).$$

Il ne reste plus qu'à raccorder ces deux systèmes de coordonnées locales. Pour cela, il faut faire une distinction, suivant que grad $H \mid \Sigma_1$ et grad $H \mid \Sigma_2$ sont de même sens ou de sens opposé, c'est-à-dire suivant que u_1 et u_2 sont de même signe ou de signe contraire. Dans le premier cas, Ω_1 et Ω_2 sont respectivement décrits par $r'_1 < 0$ et $r'_2 > 0$, dans le second cas ils sont décrits par $r'_1 > 0$ et $r'_2 > 0$; changer l'orientation de $\vec{n}$ aboutit à changer simultanément les deux signes. On pourra donc décrire simultanément r'_1 et r'_2 par une seule variable π pouvant prendre les deux signes, à condition de poser :

$$\text{si} \quad 0 \notin]u_1, u_2[, \qquad r'_1 = \pi < 0 \quad \text{et} \quad r'_2 = \pi > 0$$
$$\text{si} \quad 0 \in]u_1, u_2[, \qquad -r'_1 = \pi < 0 \quad \text{et} \quad r'_2 = \pi > 0.$$

On reporte dans l'équation (3.1), en remarquant que :

$$b > 0 \Leftrightarrow H(s, 0) \text{ a un minimum pour } s = 0$$
$$b < 0 \Leftrightarrow H(s, 0) \text{ a un maximum pour } s = 0.$$

En posant $s' = \xi$, on obtient la classification annoncée, au changement près de $|\pi|$ en $-|\pi|$. On lève cette ambiguïté en remarquant que h est l'enveloppe inférieure de deux fonctions se coupant transversalement suivant l'axe des ξ. Ceci autorise que l'on ait $h(0, \pi) = \pi$, ou $h(0, \pi) = -|\pi|$, mais exclut que l'on ait $h(0, \pi) = |\pi|$. ■

Dessinons pour chaque cas une figure où nous représenterons les bitrajectoires h=constante. Ce sont des arcs de parabole qui se raccordent le long de l'axe des ξ.

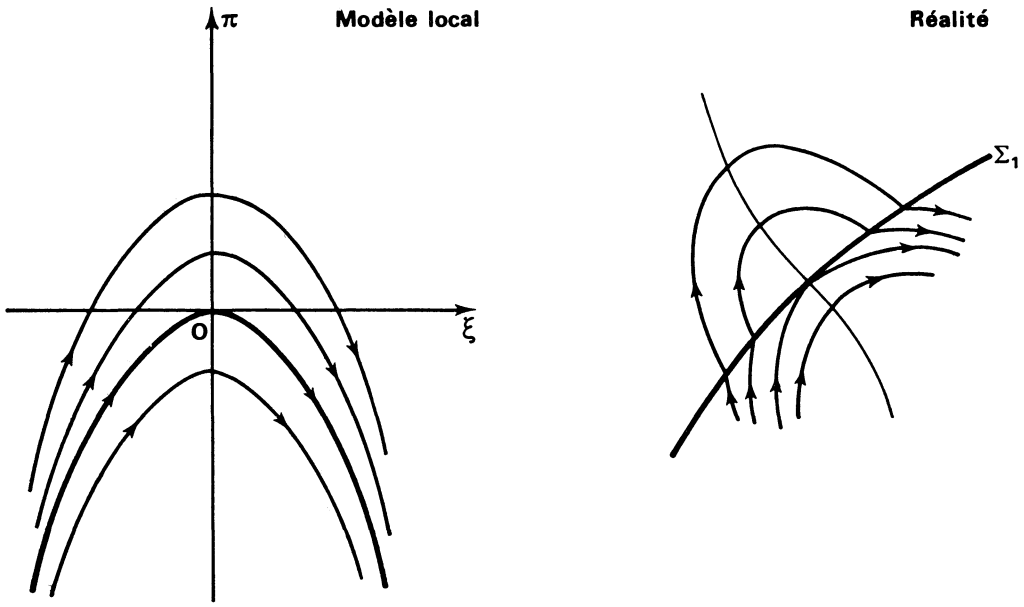

FIG. 3. — Singularité de type I*a*

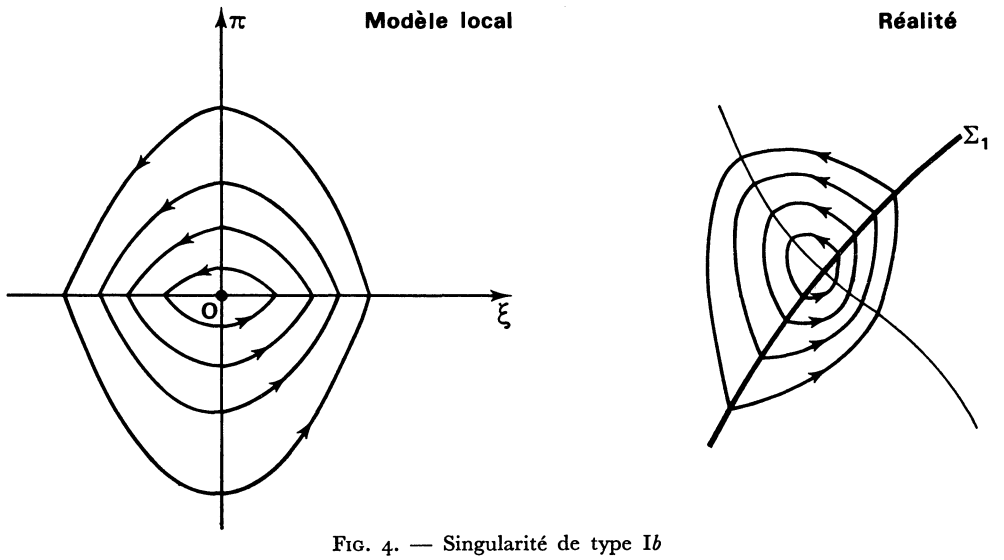

FIG. 4. — Singularité de type I*b*

Il est important de remarquer que lorsque (ξ, π) tend vers o en restant dans un des demi-plans supérieur ou inférieur, le vecteur-vitesse en ce point tend vers une limite non nulle, à savoir $(\pm 1, 0)$. En particulier, les orbites périodiques du cas I*b* sont parcourues en temps qui tend vers zéro à mesure que l'on prend des orbites plus voisines de l'origine. L'analogie avec l'oscillateur harmonique, où toutes les orbites ont même période, est donc tout à fait trompeuse.

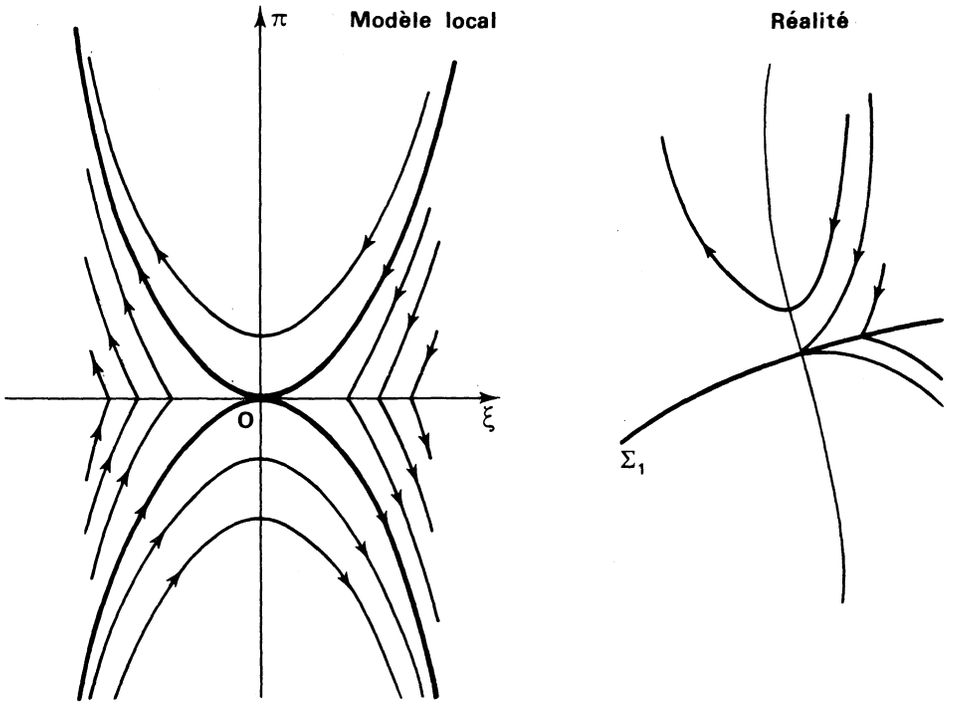

FIG. 5. — Singularité de type I*c*

Remarquons enfin qu'une singularité de type I*b* correspond à un maximum local strict du hamiltonien, et une singularité de type I*c* à un col.

4. Singularités de type II.

1° *Singularités de type IIb.* — Ce sont des points isolés, adhérents à Σ_1. Le hamiltonien $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{p}, \cdot)$ en un tel point possède un unique minimum dégénéré $\bar{u}$, ce qui fait que la vitesse $\vec{v}=(\bar{u}, -f'_x(\bar{x}, \bar{u}))$ y est bien définie. Le champ hamiltonien est même continu en ce point, mais non au voisinage. Nous allons étudier l'allure de ce champ.

Pour cela, nous appellerons modèle local d'une singularité de type II*b*, soit $(\bar{x}, \bar{p}) \in \Sigma_2^b$, la donnée d'un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ sur $\mathbf{R}^2$, transformant $(\bar{x}, \bar{p})$ en (o, o), et d'une fonction h sur $\mathbf{R}^2$ telle que $H = h \circ \varphi$.

Proposition (**4.1**). — *Pour presque toutes les fonctions* $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, *toute singularité de type* II*b admet un modèle local du type* :

$$h(\xi, \pi) = \min_u \{u^4 - u^2\xi - \pi u\} + g(\xi, \pi) \tag{4.1}$$

où g *est une fonction* C^∞ *telle que* $\operatorname{grad} g(o, o) \neq o$.

Démonstration. — Par un argument de transversalité similaire à ceux qui ont été développés ci-dessus, on montre que pour tout f dans un certain G_δ dense de $C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$,

$\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ constitue un déploiement versel de la singularité que présente $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{p}, \cdot)$ au point $\bar{u} \neq 0$ où elle atteint son minimum. Cette singularité est de codimension 2, et d'après la théorie générale [2] cela implique qu'il existe une carte locale (x', p', u') de $\mathbf{R}^3$ au voisinage de (x, p, u) telle que $\mathscr{H}$ s'écrive :

$$\mathscr{H}(x', p', u') = u'^4 - u'^2 x' - p' u' + g(x', p'), \quad \text{avec} \quad g \in C^\infty$$

d'où la formule (4.1). On remarquera que grad $H(\bar{x}, \bar{p}) = (f'_x(\bar{x}, \bar{u}), \bar{u}) \neq 0$, on doit donc avoir grad $h(0, 0) \neq 0$, ce qui se traduit justement par grad $g(0, 0) \neq 0$, la fonction $(\xi, \pi) \mapsto \min_u \{u^4 - u^2\xi - \pi u\}$ (dont le graphe est une demi-« queue d'aronde ») étant de gradient nul à l'origine. ■

Dans le nouveau repère, les bitrajectoires sont données par :

$$\min_u \{u^4 - u^2\xi - u\pi\} = c - g(\xi, \pi).$$

On constate en particulier l'existence d'une unique trajectoire passant par l'origine ($c = -g(0, 0)$). Elle est de classe C^1 et sépare localement les trajectoires brisées qui rencontrent Σ_1 des trajectoires lisses qui restent dans Σ_0.

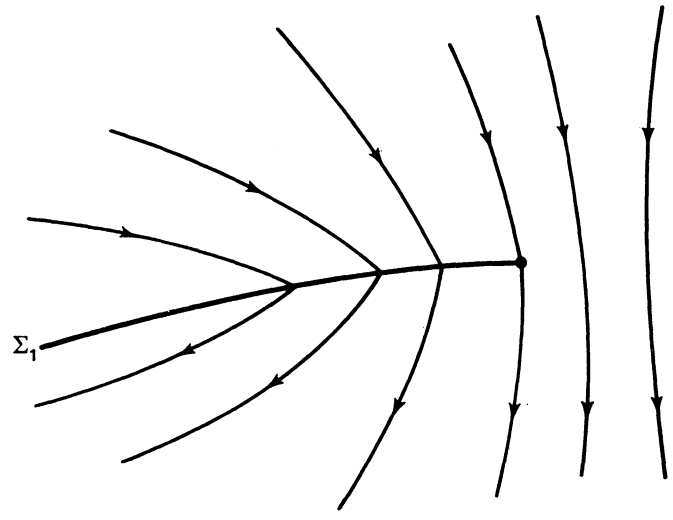

FIG. 6. — Singularité de type II*b*

2° *Singularités de type IIc.* — Ce sont des points isolés, adhérents à trois branches de Σ_1. Le hamiltonien $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{p}, \cdot)$ en un tel point possède trois minima distincts non dégénérés $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, ce qui donne pour la vitesse trois déterminations possibles, $(\bar{u}_i, -f'_x(\bar{x}, \bar{u}_i))$, $i = 1, 2, 3$. Nous avons vu que, pour presque toutes les fonctions f de $C^\infty_h(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, les trois déterminations correspondantes de grad H, à savoir $(f'_x(\bar{x}, \bar{u}_i), \bar{u}_i)$, $i = 1, 2, 3$, sont en position générale, et on peut même supposer que les $\bar{u}_i$ sont non nuls. On dira alors que l'on a affaire à une singularité générique de type II*c*.

Soient $S = (H, \bar{x}, \bar{p})$ et $s = (h, 0, 0)$ deux singularités génériques de type II*c*.

Alors $\Sigma_1(H)$ (resp. $\Sigma_1(h)$) comporte trois branches B_{12}, B_{13}, B_{23} (resp. β_{12}, β_{13}, β_{23}) séparant un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ (resp. (o, o)) en trois régions Ω_1, Ω_2, Ω_3 (resp. ω_1, ω_2, ω_3). On dira que s est un *modèle local* de S s'il existe trois cartes locales φ_i d'un voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$ telles que :

$$\varphi_i(x, p) = (0, 0)$$
$$\varphi_i(\Omega_i) = \omega_i$$
$$\varphi_i \mid B_{ij} = \varphi_j \mid B_{ij}$$
$$H = h \circ \varphi_i \text{ dans } \Omega_i$$

Voici maintenant un modèle local simple pour les singularités génériques de type II*c* :

Proposition **(4.2).** — *Pour presque toutes les fonctions* $f \in C^\infty_h(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, *toute singularité de type* II*c admet un modèle local du type* :

$$h = \min(h_1, h_2, h_3) + c, \tag{4.2}$$

où les h_i *sont des formes linéaires sur* $\mathbf{R}^2$.

Démonstration. — Nous avons vu au § 3 que l'on peut écrire $H = \min(H_1, H_2, H_3)$, où H_i est une fonction C^∞ définie au voisinage de (x, p), de telle sorte que $H = H_i$ sur Ω_i. Si la singularité considérée est générique, ce qui est le cas pour presque toutes les fonctions $f \in C^\infty_h(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, les grad $H_i(0, 0)$ sont indépendants deux à deux.

Pour i donné, j et k désignant les deux indices distincts de i, le couple $(x' = H_j - H_i, p' = H_k - H_i)$ constitue un système de coordonnées locales de $\mathbf{R}^2$ au voisinage de $(\bar{x}, \bar{p})$; on constate que Ω_i est représenté par le quadrant positif $(x' > 0, p' > 0)$ et B_{ij} et B_{ik} par les demi-axes positifs. Le gradient de $H_i(x', p')$ à l'origine n'est pas porté par un des axes, si bien que l'on peut écrire :

$$H_i(x', p') = H_i(0, 0) + x' P_i(x', p') + p' Q_i(x', p')$$

avec $P_i(0, 0) \neq 0$ et $Q_i(0, 0) \neq 0$. Le changement de variable $x'' = x' P_i$ et $p'' = p' Q_i$ conserve globalement les axes et rend H_i affine :

$$H_i(x'', p'') = H_i(0, 0) + x'' + p''.$$

La relation $\partial H_i / \partial x''(x'', 0) = 1$ caractérise la coordonnée x'' adoptée sur β_{ij}.

De la même façon, on repérera Ω_j par des coordonnées locales (y'', q''), de telle sorte que l'équation de β_{ij} soit $q'' = 0$, et que la coordonnée y'' vérifie l'identité $\partial H_j / \partial y''(y'', 0) = 1$. Mais $H_i = H_j$ sur B_{ij}, si bien que x'' et y'' coïncident sur β_{ij}. On peut donc recoller le long de leur bord les trois quadrants représentant Ω_1, Ω_2 et Ω_3 pour obtenir la représentation annoncée. ■

Là encore, l'étude des bitrajectoires se fait sur le modèle local par le biais des courbes de niveau h=constante. On est conduit à distinguer deux cas suivant que o appartient ou non à l'enveloppe convexe des grad h_i.

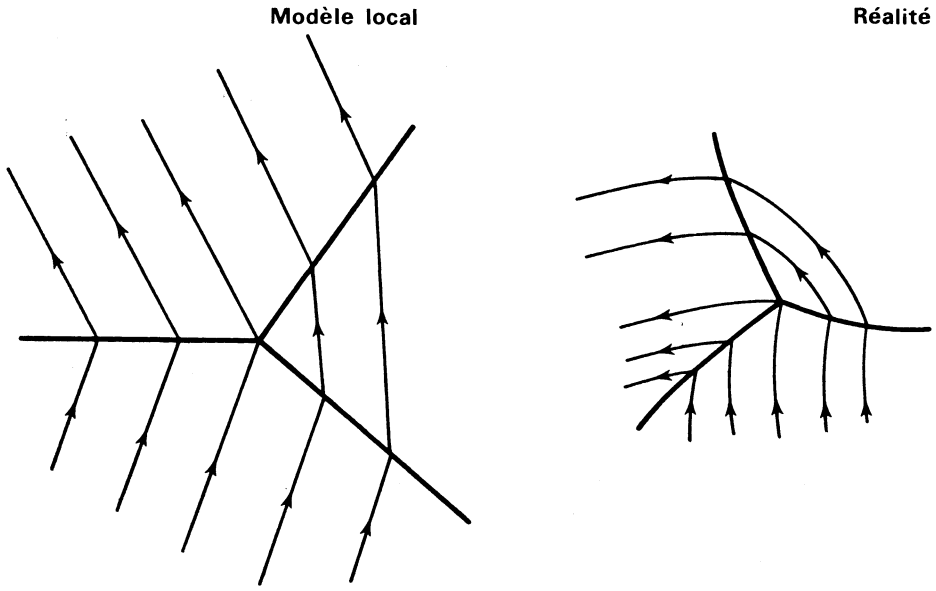

FIG. 7. — Singularité de type IIc1
$(0, 0) \notin \operatorname{co}\{(f'_x(x, u_i), u_i)\}_{i=1,2,3}$

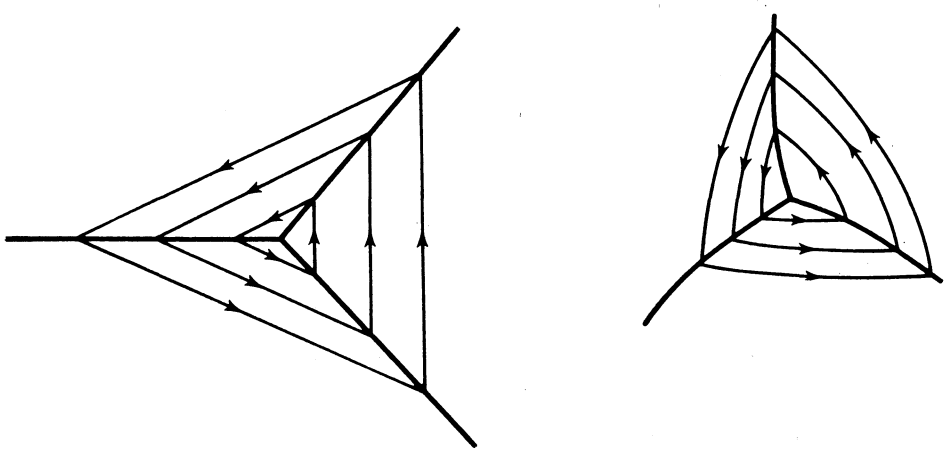

FIG. 8. — Singularité de type IIc2
$(0, 0) \in \operatorname{co}\{(f'_x(x, u_i), u_i)\}_{i=1,2,3}$

5. Lien avec les problèmes d'existence.

Le moment est maintenant venu de revenir au problème de calcul des variations dont nous étions partis :

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^T f(x, \dot{x})dt \mid \dot{x} \in L^1,\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_1\right\}.$$

Notre idée directrice sera la suivante. Lorsque $f(x, \cdot)$ est strictement convexe, toutes les strates de codimension $\geqslant 1$ s'évanouissent, et le problème $(\mathscr{P})$ admet des solutions pour toutes les conditions aux limites (x_0, x_1, T). Lorsque $f(x, \cdot)$ n'est plus convexe, on voit apparaître les singularités que nous avons analysées, et on perd l'existence dans le problème $(\mathscr{P})$. On peut donc penser que la non-existence est spécifiquement liée à l'apparition de certaines singularités; en d'autres termes, la non-existence de solutions au problème $(\mathscr{P})$ pour certaines conditions aux limites doit se traduire dans la géométrie du champ hamiltonien.

C'est ce programme que nous allons remplir, en dimension $n=1$ tout au moins. Pour cela, nous allons examiner l'une après l'autre les singularités que nous avons rencontrées, en nous appuyant sur les résultats rappelés au § 0. Nous allons donc former les bitrajectoires du problème relaxé :

$$(\mathscr{P}^{**}) \qquad \min\left\{\int_0^T E^{**}(x, \dot{x})dt \mid \dot{x}\in L^1,\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_1\right\}.$$

Le hamiltonien associé est $pu+f^{**}(x, u)$. On remarquera que l'ensemble des u où il atteint son minimum pour (x, p) fixés n'est autre que l'enveloppe convexe de l'ensemble des u où $pu+f(x, u)$ atteint son minimum. En d'autres termes, si l'on note $M(x, p)$ l'ensemble compact non vide :

$$\textbf{(5.1)} \qquad M(x, p)=\{u \mid pu+f(x, u)=H(x, u)\}$$

on a la relation :

$$\textbf{(5.2)} \qquad pu+f^{**}(x, u)=\min_u \Leftrightarrow u\in \operatorname{co} M(x, p).$$

Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent alors ([3], [4]) :

$$\textbf{(5.3)} \qquad \dot{x}\in \operatorname{co} M(x, p)$$

$$\textbf{(5.4)} \qquad \dot{p}\in \operatorname{co} f'_x(x, M(x, p)).$$

Il est clair que toute bisolution de (1.8)-(1.9) est une bisolution de (5.3)-(5.4). Nous allons examiner s'il y en a d'autres.

Si $(\bar{x}, \bar{p})$ est un point de Σ_0, ou un point de Σ_1 non critique pour H, ou une singularité générique de type I*a*, ou une singularité générique de type II*b*, ou une singularité générique de type II*c*1, il passe par $(\bar{x}, \bar{p})$ une unique solution locale de (5.3)-(5.4) et c'est aussi une solution locale de (1.8)-(1.9). L'unicité s'entend modulo le déplacement de l'origine des temps. Pour Σ_0 cela résulte du fait que $M(\bar{x}, \bar{p})$ est réduit à un point, et coïncide donc avec son enveloppe convexe. Dans les autres cas, cela résulte de l'examen du modèle local; notons que ces singularités sont simplement traversées, sans que les bisolutions puissent séjourner dessus.

Si $(\bar{x}, \bar{p})$ est une singularité générique de type I*b*, ou une singularité générique de type II*c*2, il ne passe par $(\bar{x}, \bar{p})$ aucune bisolution de (1.2)-(1.3), mais il passe une unique bisolution de (5.3)-(5.4), la constante $x(t)=\bar{x}$, $p(t)=\bar{p}$. Ceci résulte encore de l'examen des modèles locaux.

Enfin, si $(\bar{x}, \bar{p})$ est une singularité générique de type I*c*, on distinguera sur chacune des paraboles $\pi = \xi^2$ (resp. $\pi = -\xi^2$) du modèle local correspondant un arc AO (resp. A' O) arrivant à l'origine et un arc OD (resp. OD') en repartant. En les mettant bout à bout, on obtient quatre bisolutions locales AOD, AOD', A'OD, A'OD', du système originel (1.2)-(1.3). Le système relaxé, outre ces quatre combinaisons, offre la possibilité de séjourner en O pendant une durée arbitraire, puisque $x(t) = \bar{x}$, $p(t) = \bar{p}$ est une bisolution de (5.3)-(5.4). Le système relaxé (5.3)-(5.4) admet donc une quadruple infinité de bisolutions passant par $(\bar{x}, \bar{p})$; elles ont toutes la structure suivante :

$t \leqslant t_a$: $(\xi(t), \pi(t))$ décrit un des arcs AO ou A'O

$t_a \leqslant t \leqslant t_d$: $(\xi(t), \pi(t))$ reste en O

$t_d \leqslant t$: $(\xi(t), \pi(t))$ décrit un des arcs OD ou OD'

la durée $t_d - t_a$ étant arbitraire; son choix caractérise la bisolution considérée.

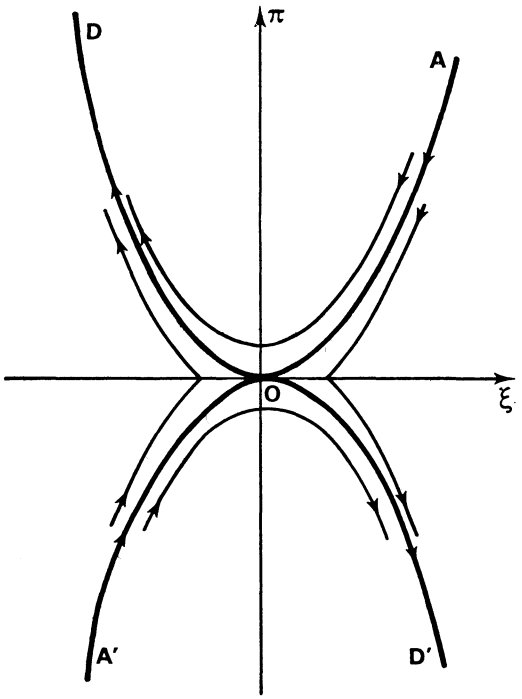

FIG. 9

Il résulte de cet examen que les bisolutions du système relaxé (5.3)-(5.4) se répartissent en deux classes : celles qui ne passent pas par une singularité générique de type I*b*, I*c*, ou II*c*2, et celles qui comportent un arc constant, $x(t) = \bar{x}$, $p(t) = \bar{p}$, où $(\bar{x}, \bar{p})$ est une de ces singularités. Les premières restent dans Σ_0, sauf en un nombre fini d'instants où elles traversent Σ_1 ou Σ_2^c, et sont donc également des bisolutions du système originel (1.2)-(1.3). Les secondes séjournent sur Σ_1 ou Σ_2^c, et ne sont plus des bisolutions

du système originel. En raffinant quelque peu cette analyse, nous allons montrer que la singularité I*c* contient toute l'obstruction à l'existence dans le problème $(\mathscr{P})$:

Théorème **(5.1)**. — *Pour presque toutes les fonctions* $f \in C_h^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, *une condition nécessaire et suffisante pour que le problème* $(\mathscr{P})$ *admette au moins une solution quelles que soient les conditions aux limites* (x_0, x_1, T), *est que le champ hamiltonien associé dans* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *ne présente pas de singularité générique de type* I*c*.

Pour simplifier un peu la démonstration, isolons deux résultats auxiliaires :

Lemme **(5.2)**. — *Soit* $(\bar{x}, \bar{p})$ *une singularité générique de type* I*b ou* II*c*2. *Il existe un* $\varepsilon>0$ *tel que, pour tout* $T\in]0, \varepsilon[$, *il existe une bisolution* $(x_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot))$ *du système* (1.8)-(1.9) *telle que* :

$$\textbf{(5.5)} \qquad \int_0^T f^{**}(x_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t))\, dt < \int_0^T f^{**}(\bar{x}, \bar{p})\, dt.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que $x(t)=\bar{x}$, $p(t)=\bar{p}$, est une bisolution de (5.3)-(5.4), si bien que, pour tout T, la solution constante $x(t)=\bar{x}$ est une extrémale du problème relaxé. Nous allons donc montrer que cette extrémale ne correspond pas à un minimum.

La démonstration repose sur le fait qu'une singularité générique de type I*b* ou II*c*2 est un maximum local strict du hamiltonien, et sur l'utilisation des modèles locaux fournis aux §§ 3 et 4. Nous la ferons dans le cas I*b*, le cas II*c*2 étant laissé au soin du lecteur.

Au § 2 nous avons calculé une normale $\vec{n}$ à Σ_1, et nous avons montré que sa composante en p était u_2-u_1, toujours non nul sur Σ_1. Ceci signifie que Σ_1 est transversale à la droite $x=\bar{x}$. Le modèle local transformera donc la droite $x=\bar{x}$ en une courbe OC issue de O dans le demi-plan supérieur, et une demi-courbe OB issue de O dans le demi-

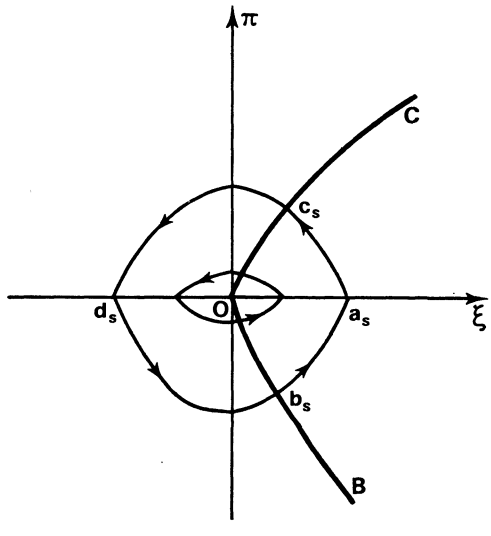

FIG. 10

plan inférieur, toutes deux transversales à l'axe des ξ. On remarquera que les orbites du modèle local représentent indifféremment des bitrajectoires de (1.8)-(1.9) ou de (5.3)-(5.4), à l'exception de l'orbite constante $\xi=0$, $\pi=0$, représentant le point $(\bar{x}, \bar{p})$, fixe pour le système relaxé mais non pour le système originel.

Le modèle local nous présente une famille d'orbites que nous choisissons de paramétrer par l'abscisse s du point d'intersection avec le demi-axe des $\xi>0$. Nous noterons respectivement $a_s=(s, 0)$ et $d_s=(-s, 0)$ les points d'intersection de l'orbite de paramètre s avec les demi-axes $\xi>0$ et $\xi<0$. D'après la transversalité des courbes OC et OB à l'axe des ξ, on peut choisir $\eta>0$ assez petit pour que les orbites associées aux $s\in]0, \eta[$ aient un unique point d'intersection b_s (resp. c_s) avec OB (resp. OC).

Notons $T_1(s)$ et $T_2(s)$ les temps de parcours des arcs $b_s a_s c_s$ et $c_s d_s b_s$. On a $T_1(s)+T_2(s)=T(s)$, où $T(s)$ est la période de l'orbite de paramètre s, si bien que :

$$\frac{dT}{ds}(0)=\frac{dT_1}{ds}(0)+\frac{dT_2}{ds}(0).$$

Un calcul explicite montre que $T(0)=0$ et que $\frac{dT}{ds}(0)>0$. On a donc nécessairement $T_1(0)=T_2(0)=0$ et $\frac{dT_1}{ds}(0)$ ou $\frac{dT_2}{ds}(0)$ positif (en fait, une analyse plus détaillée montrerait qu'ils le sont tous deux). Soit par exemple $\frac{dT_1}{ds}(0)>0$; d'après le théorème des fonctions implicites, on peut trouver $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $T\in[0, \varepsilon]$, il existe une solution $s(T)$ de l'équation $T_1(s)=T$, fonction croissante et régulière de T, nulle pour $T=0$.

L'arc $b_{s(T)}\, a_{s(T)}\, c_{s(T)}$ est l'image dans le modèle local d'une bisolution $(x_T(\cdot), p_T(\cdot))$, $0\leqslant t\leqslant T$, du système (5.3)-(5.4). Sa projection horizontale $x_T(\cdot)$ est donc une courbe vérifiant les conditions aux limites $x_T(0)=x_T(T)=\bar{x}$, ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité. Il ne reste plus qu'à la comparer à la solution constante $x_0(t)=\bar{x}$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Pour cela, nous appliquerons une formule classique du calcul des variations ([8], chap. 3, formule (12), en tenant compte d'une définition différente de hamiltonien) :

$$\delta\int_0^T f(x, \dot{x})dt=p_1.\delta x_1-p_0.\delta x_0+H.\delta T.$$

Ceci donne, en remarquant que les extrémités x_0 et x_1 sont fixées en $\bar{x}$, et en notant H(T) la valeur (constante) du hamiltonien sur la bisolution $(x_T(\cdot), p_T(\cdot))$:

$$\int_0^T f^{**}(x_T, \dot{x}_T)dt=\int_0^T H(t)dt$$

alors que :

$$\int_0^T f^{**}(x_0, \dot{x}_0)dt=\int_0^T H(0)dt.$$

Mais on a $H(t)<H(0)$ pour t appartenant à un intervalle $]0, \varepsilon[$ assez petit. D'où le résultat. ■

Lemme (5.3). — *Soit* $\bar{x}\in\mathbf{R}$. *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\eta>0$ *tel que toute solution du problème* :

$$\inf\left\{\int_0^T f(x,\dot{x})dt \mid x(0)=x(T)=\bar{x}\right\} \tag{5.6}$$

avec $T\leqslant\eta$ *satisfasse* $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|\leqslant\varepsilon$.

Démonstration. — Soit $x(t)$ une solution du problème (5.6). En la comparant à la constante $x(t)=\bar{x}$ pour $0\leqslant t\leqslant T$, nous obtenons d'après l'optimalité :

$$\int_0^T f(x(t),\dot{x}(t))dt\leqslant\int_0^T f(\bar{x},0)dt=T.f(\bar{x},0). \tag{5.7}$$

En se servant de l'estimation (0.0), ceci donne :

$$\int_0^T h(|\dot{x}|)dt\leqslant T.f(\bar{x},0). \tag{5.8}$$

Soit m un nombre tel que $h(M)\geqslant M$ pour tout $M\geqslant m$. On a donc $M\leqslant\max\{h(M),m\}$ pour tout $M\in\mathbf{R}$, d'où enfin :

$$\int_0^T|\dot{x}|dt\leqslant T(m+f(\bar{x},0)). \tag{5.9}$$

Ceci implique que $|x(t)|\leqslant T(m+f(\bar{x},0))$ pour $0\leqslant t\leqslant T$, d'où le résultat. ■

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème (5.1).

Démonstration. — *Suffisance.* Donnons-nous $x_0\in\mathbf{R}$, $x_1\in\mathbf{R}$, $T>0$. D'après les préliminaires du § 0, le problème relaxé :

$$(\mathscr{P}^{**}) \qquad \min\left\{\int_0^T f^{**}(x(t);\dot{x}(t))dt \mid x(0)=x_0,\ x(T)=x_1\right\}$$

admet une solution $x(\cdot)$ au moins. Celle-ci doit vérifier les conditions nécessaires d'optimalité, c'est-à-dire qu'on peut lui associer $p(\cdot)$ de telle sorte que le couple $(x(t),p(t))$ vérifie le système (5.3)-(5.4) sur [0, T]. L'analyse cas par cas que nous venons de mener, et l'absence de singularités de type I*c* dans le champ hamiltonien, nous amènent à l'alternative suivante :

— ou bien $(x(\cdot),p(\cdot))$ est une bisolution de (1.8)-(1.9) sur [0, T] et ne rencontre Σ_1 ou Σ_2 qu'en un nombre fini d'instants;

— ou bien $(x(t),p(t))=(\bar{x},\bar{p})$ sur [0, T], où $(\bar{x},\bar{p})$ est une singularité générique de type I*b* ou II*c*2; en particulier $x_0=x_1=\bar{x}$.

Eliminons ce dernier cas. D'après le lemme (5.2), on peut trouver $\varepsilon\in]0,T[$ et une courbe $x_\varepsilon(\cdot)$ définie sur $[0,\varepsilon]$ vérifiant $x_\varepsilon(0)=x_\varepsilon(\varepsilon)=\bar{x}$ et :

$$\int_0^\varepsilon f^{**}(x_\varepsilon(t),\dot{x}_\varepsilon(t))dt<\int_0^\varepsilon f^{**}(\bar{x},0)dt. \tag{5.10}$$

Si nous prolongeons $x_\varepsilon(\cdot)$ par la constante $\bar{x}$ sur $[\varepsilon,T]$, nous obtenons :

$$\int_0^T f^{**}(x_\varepsilon(t),\dot{x}_\varepsilon(t))dt<\int_0^T f^{**}(\bar{x},0)dt, \tag{5.11}$$

ce qui prouve que $x(\cdot)$ ne saurait être une solution du problème $(\mathscr{P}^{**})$, contrairement à l'hypothèse.

Seul subsiste le premier terme de l'alternative. Nous avons donc $(x(t), p(t)) \in \Sigma_0$, sauf en un nombre fini d'instants $t_1, \ldots, t_r$ de rencontre avec Σ_1 ou Σ_2. En presque tout instant t, la tangente au point $\dot{x}(t)$ à la fonction $f(x(t), \cdot)$ se trouve donc entièrement située au-dessous de celle-ci, ce qui implique :

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = f^{**}(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{p.p.} \tag{5.12}$$

$$\int_0^T f(x(t), \dot{x}(t))dt = \int_0^T f^{**}(x(t), \dot{x}(t))dt. \tag{5.13}$$

Par hypothèse, le dernier terme n'est autre que $\min J(x)$, qui, d'après le § o dont on reprend les notations, n'est autre que $\inf I(x)$. Ainsi, la courbe $x(\cdot)$ est également une solution du problème $(\mathscr{P})$.

Nécessité. — Soit (x, p) une singularité de type I*c*. Je dis que, pour T suffisamment petit, le problème :

$$\inf\left\{\int_0^T f(x, \dot{x})dt \,|\, x(0) = x(T) = \bar{x}\right\} \tag{5.14}$$

n'a pas de solution.

Au lemme (5.2), nous avons remarqué que les droites verticales sont transversales à Σ_1, c'est-à-dire que la projection horizontale n'a pas de point critique sur Σ_1. On peut donc trouver un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'intersection de la branche de Σ_1 contenant $(\bar{x}, \bar{p})$ et de la bande $\mathscr{B} = \{(x, p) \,|\, ||x - \bar{x}|| \leqslant \varepsilon\}$ soit modelée sur la figure suivante :

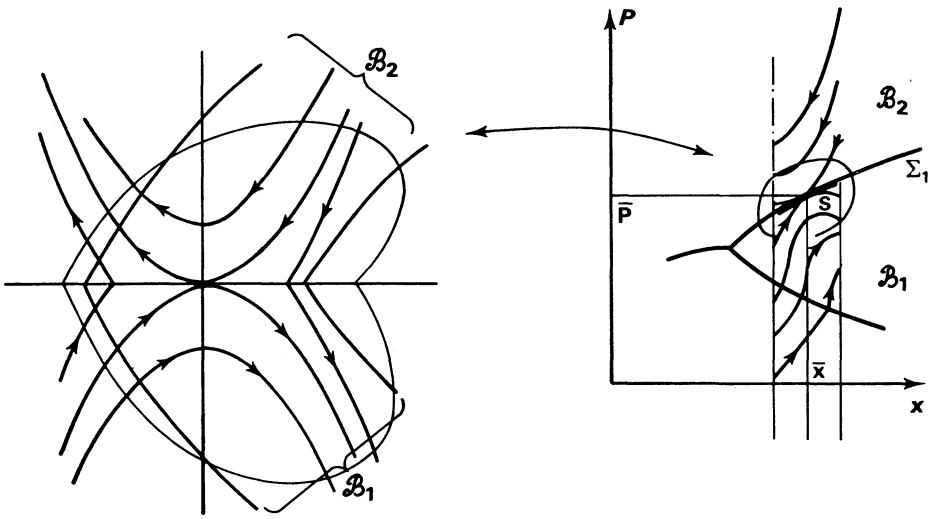

FIG. 11

Soit S la composante connexe de $(\bar{x}, \bar{p})$ dans $\Sigma_1 \cap \mathscr{B}$. Elle partage $\mathscr{B}$ en deux demi-bandes ouvertes, supérieure $\mathscr{B}_2$ et inférieure $\mathscr{B}_1$. Sur S la fonction $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ atteint

son minimum en deux points distincts $u_1(x, p)$ et $u_2(x, p)$, en dépendance régulière de (x, p). Mais $o \in]u_1(\bar{x}, \bar{p}), u_2(\bar{x}, \bar{p})[$, par définition d'une singularité générique de type Ic. Quitte à choisir un ε plus petit, on peut donc supposer que $o \in]u_1(\bar{x}, \bar{p}), u_2(\bar{x}, \bar{p})[$ pour tout $(x, p) \in S$. Si maintenant (x, p) est un point quelconque de $\mathscr{B}_1$, et si $\bar{u}$ est un point où la fonction $\mathscr{H}(x, p, u) = pu + f(x, u)$ atteint son minimum, il existe un unique $q \in \mathbf{R}$ tel que $(x, q) \in S$; en outre $q > p$, si bien que $\bar{u} < u_1(x, q) < o$:

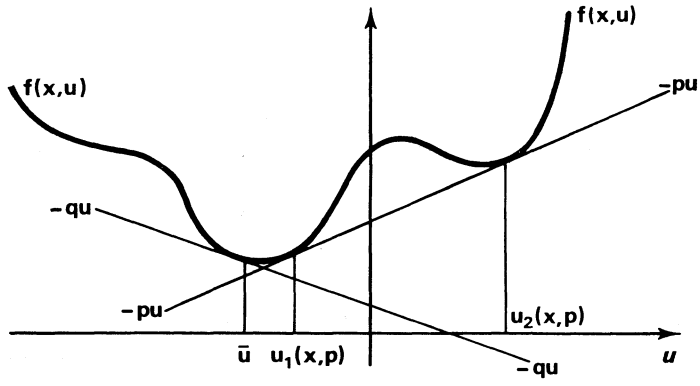

FIG. 12

La figure est basée sur le fait que le point où $\mathscr{H}(x, p, u)$ atteint son minimum est également le point de contact de la tangente à $f(x, u)$ la plus basse de pente $-p$. On a donc montré que la composante horizontale de la vitesse, donnée par $\frac{dx}{dt} = \bar{u}$, est constamment négative dans $\mathscr{B}_1$ et positive dans $\mathscr{B}_2$.

D'après le lemme (5.3), il est possible de choisir $T > o$ assez petit pour que toute solution $x(\cdot)$ du problème (5.14) soit contenue dans la boule ouverte de rayon ε autour de x. D'après les conditions nécessaires d'optimalité, on peut lui associer $p(\cdot)$, de telle sorte que $(x(\cdot), p(\cdot))$ soit une bisolution de (1.2)-(1.3) sur [o, T], entièrement contenue dans $\mathscr{B}$ et vérifiant $x(o) = x(T) = \bar{x}$. Une telle bisolution rencontre nécessairement S, sans quoi elle serait entièrement contenue dans $\mathscr{B}_1$ ou $\mathscr{B}_2$, et $\dot{x}(t)$ aurait un signe constant non nul, ce qui empêcherait d'avoir $x(o) = x(T)$. Mais l'examen du modèle local montre que les seules bisolutions traversant S et vérifiant $x(o) = \bar{x}$ sont les deux bisolutions issues de $(\bar{x}, \bar{p})$, aucune desquelles ne repasse au-dessus de $\bar{x}$. Le problème (5.14) n'a donc pas de solution. ■

Un raisonnement analogue au précédent montre même que, si f présente en (x, p) une singularité générique de type Ic, il existe $\varepsilon > o$ et $\eta > o$ tels que le problème :

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^T f(x, \dot{x})dt \mid x(o) = x_0, x(T) = x_1\right\}$$

pour $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$, $|x - x_1| \leqslant \varepsilon$ et $T \geqslant \eta$, n'ait pas de solution. Or les singularités génériques de type Ic sont définies par des conditions de transversalité, et sont donc stables : si f engendre un hamiltonien qui présente une singularité générique de type Ic, il en sera

de même pour toute fonction g suffisamment voisine dans $C^\infty_h(\mathbf{R})$. On aboutit donc au corollaire suivant :

Corollaire **(5.4)**. — *Il existe dans* $C^\infty_h(\mathbf{R})\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$ *un ouvert non vide constitué d'éléments* (f, x_0, x_1, T) *pour lesquels le problème* $(\mathscr{P})$ *n'a pas de solution.*

Illustrons ceci par un exemple. Donnons-nous un nombre $A>0$, et définissons la fonction f par :

$$f(x, \dot{x}) = k(x) + (1 - \dot{x}^2)^2,$$

où $k \in C^\infty(\mathbf{R})$ est bornée inférieurement et coïncide avec $x \mapsto x^2$ sur $[-A, A]$. L'estimation (0.0) est alors satisfaite sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, et on se pose le problème :

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^T (k(x) + (1 - \dot{x}^2)^2)\,dt \,|\, x(0) = x_0,\ x(T) = x_1\right\}$$

avec $|x_0| < A$ et $|x_1| < A$.

On a $\mathscr{H}(x, p, u) = pu + k(x) + (1 - \dot{x}^2)^2$, si bien que l'abscisse x n'intervient pas dans la minimisation en u. La strate Σ_1 se réduit donc à $p = 0$, alors que la strate Σ_2 est vide. Seules donc sont présentes les singularités de type I. On remarque d'abord que pour $p = 0$, la fonction $\mathscr{H}(x, 0, u)$ atteint son minimum en u aux points -1 et $+1$, la valeur de celui-ci étant égale à $k(x)$. La restriction du hamiltonien à Σ_1 est donc $H(x, 0) = k(x)$, qui coïncide avec x^2 dans un voisinage de l'origine, laquelle est donc un minimum local non dégénéré. Ainsi le point (0, 0) est une singularité générique de type Ic, et c'est la seule singularité présente dans la bande $-A \leqslant x \leqslant A$. L'allure globale du champ hamiltonien dans cette bande est celle du modèle local (fig. 9). Notons en particulier l'existence de quatre bisolutions limites passant par l'origine, AOD, AOD', A'OD, A'OD', partageant la bande en quatre régions.

Une seule de ces bisolutions limites passe successivement au-dessus de x_0, de O, et de x_1. Soit donc $T(x_0, x_1)$ le temps écoulé entre le moment où cette bisolution limite traverse la droite $x = x_0$ et le moment où elle traverse la droite $x = x_1$. Nous représentons cela sur deux diagrammes, l'un dans l'espace des (t, x) et l'autre dans l'espace des (x, p) ; chacun d'eux illustre simultanément deux cas correspondant à deux valeurs opposées de x_1. On remarquera qu'à l'instant ω où $x = 0$ on a $\dfrac{dx}{dt} = \pm 1$, avec raccordement dans un des cas et non dans l'autre, les arcs parcourus depuis cet instant étant symétriques.

Cette valeur $T(x_0, x_1)$ sépare deux cas. Dans le cas $T < T(x_0, x_1)$ le problème $(\mathscr{P})$ a une solution $x(\cdot)$ unique. Ici encore, on représente sur les mêmes diagrammes deux solutions correspondant à deux valeurs opposées de x_1. On remarquera que l'une est C^∞ et que l'autre présente un point anguleux où elle admet -1 comme dérivée à gauche et $+1$ comme dérivée à droite.

Enfin, dans le cas $T > T(x_0, x_1)$, le problème $(\mathscr{P})$ n'a pas de solution. Par contre,

le problème relaxé ($\mathscr{P}^{**}$) en a une, qui consiste à agrémenter la bisolution limite de la figure 13 d'un séjour à l'origine dont la durée sera exactement $T-T(x_0, x_1)$.

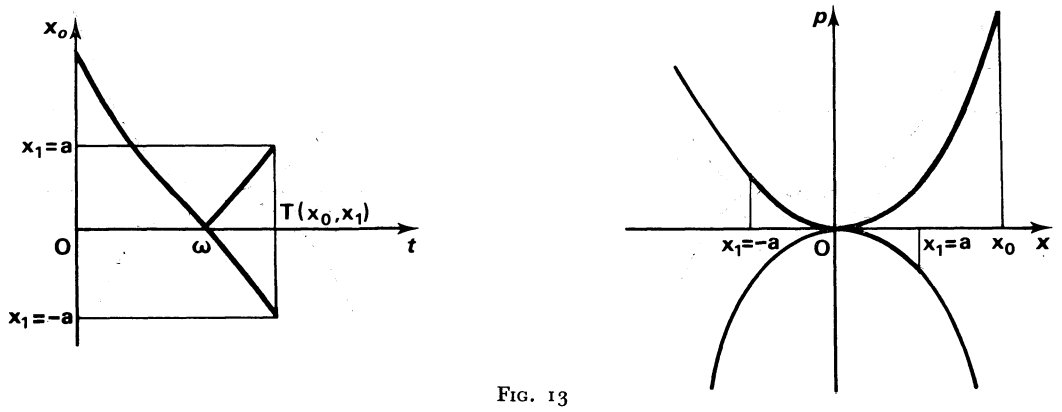

FIG. 13

Pour mieux comprendre ce qui se passe, remarquons que le critère choisi est constamment positif ou nul, et n'est nul que si $x^2=(1-\dot{x}^2)^2=0$. On réaliserait donc certainement le minimum de l'intégrale $I(x)$ en prenant une courbe $x(\cdot)$ telle que $x(t)=0$ et $\dot{x}(t)=\pm 1$ sur $[0, T]$. Malheureusement, ces deux exigences sont contradictoires. On

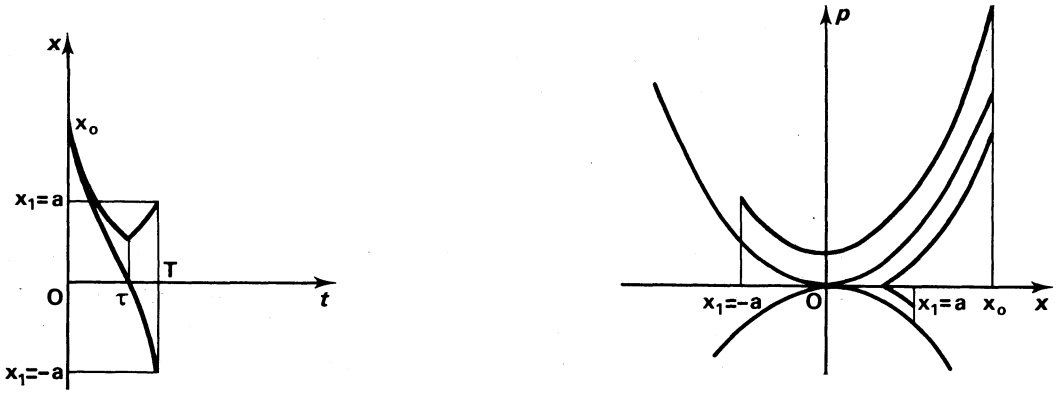

FIG. 14. — τ est un point anguleux pour une des solutions et un point d'inflexion pour l'autre

ne peut les réaliser que de manière approchée, par des fonctions affines par morceaux mais continues, de dérivée ± 1, convergeant uniformément vers la fonction nulle. D'où le comportement d'une solution approchée de ($\mathscr{P}$) :

— passer de x_0 à 0 de manière optimale, c'est-à-dire emprunter sur l'intervalle de temps $[0, \omega]$ la solution de la figure 13;
— sur l'intervalle de temps $[\omega, \omega+T-T(x_0, x_1)]$, osciller autour de l'origine, c'est-à-dire maintenir simultanément x voisin de 0 et $\dot{x}$ voisin de ± 1;
— passer de 0 à x_1 de manière optimale, c'est-à-dire emprunter sur l'intervalle de temps $[\omega+T-T(x_0, x_1), T]$ la dernière partie de la figure 13.

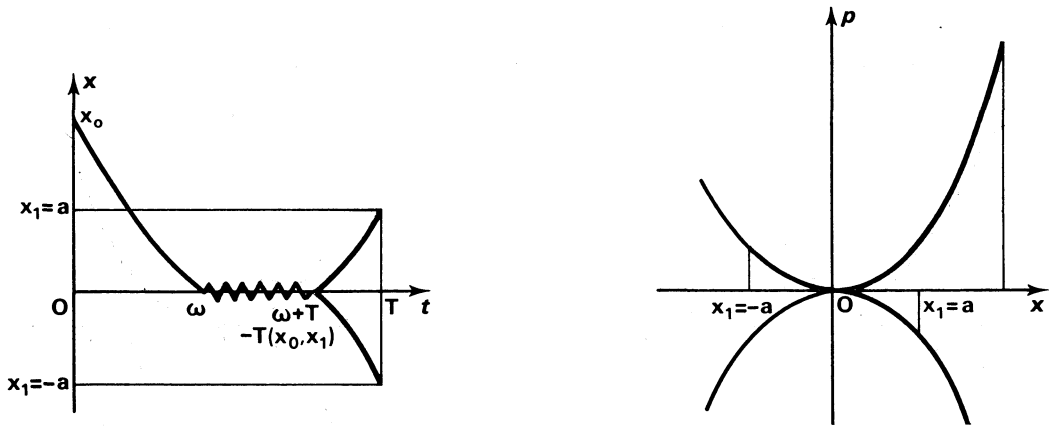

FIG. 15

6. Remarques diverses.

1. Tous les résultats précédents dépendent essentiellement du fait que les critères $f(x, \dot{x})$ considérés, et donc les hamiltoniens $H(x, p)$ associés, sont indépendants du temps T. La situation associée à des critères $f(t, x, \dot{x})$ et des hamiltoniens $H(t, x, p)$ est extrêmement différente. Supposons par exemple que $h(s) \geqslant cs^2 + d$, avec $c > 0$, c'est-à-dire que la croissance soit au moins quadratique en $\dot{x}$; on montre alors (cf. [7]) que pour tous $(f, x_0, x_1, T) \in C_h^\infty \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$, il existe une fonction $g \in L^2(0, T; \mathbf{R}^n)$ de norme arbitrairement petite telle que le problème :

$$\min \int_0^T (f(x(t), \dot{x}(t)) + g(t) \cdot \dot{x}(t))dt, \qquad x(0) = x_0, \; x(T) = x_1$$

ait une solution unique.

2. L'analyse de Σ_1, et en particulier la loi de la réfraction et la description des singularités génériques de type I, fait simplement intervenir le fait que le hamiltonien $H(x, p)$ s'écrit localement comme l'enveloppe inférieure de deux fonctions régulières. Elle restera donc valide pour les problèmes de contrôle optimal :

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u)$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1$$

$$u(t) \in K$$

$$\min \int_0^T f(x, \dot{x})dt$$

dont le hamiltonien $H(x, p) = p \cdot g(x, u) + f(\dot{x}, u)$ possède la même propriété.

3. L'extension des résultats des §§ 3, 4 et 5 au cas $n > 1$ présente deux difficultés majeures. Tout d'abord, l'équation $H = \text{cste}$ ne suffit plus à caractériser les bitrajectoires; elle décrit simplement une hypersurface sur laquelle tournent les bisolutions. En outre,

on doit s'attendre à trouver des bisolutions relaxées qui ne sont ni originelles ni réduites à des points ni un mélange des précédentes.

En effet, soit Σ_k^c, $k \leqslant 2n$, le lieu des (x, p) tels que la fonction $\mathscr{H}(x, p, \cdot)$ atteigne son minimum en $k+1$ points distincts $u_0, \ldots, u_k$. C'est en général une sous-variété de codimension k dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, et en chacun de ses points le deuxième membre des formules (5.3)-(5.4) s'écrit :

$$\Gamma(x, p) = \mathrm{co}\{(u_0, f'_x(x, u_0)), \ldots, (u_k, f'_x(x, u_k))\}.$$

Notons $\mathrm{T}(x, p)$ l'espace tangent à Σ_k^c en (x, p). Dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ on a donc un polyèdre $\Gamma(x, p)$ de dimension k, et un espace vectoriel $\mathrm{T}(x, p)$ de codimension k. S'ils sont en position générale, ils se coupent en 0 ou 1 point. Il faut donc s'attendre à trouver dans Σ_k^c un ouvert sur lequel $\Gamma(x, p) \cap \mathrm{T}(x, p)$ définit un champ tangent à Σ_k^c et satisfaisant (5.3)-(5.4). Les courbes intégrales de ce champ sont des arcs de bisolutions du problème relaxé tracées sur Σ_k^c.

4. Enfin, on pourrait songer à étendre ces résultats à des problèmes variationnels du type :

$$\inf \int_\Omega f(x(\omega), \Delta x(\omega))\, d\omega$$

ou :

$$\inf \int_\Omega f(x(\omega), \operatorname{grad} x(\omega))\, d\omega$$

avec des conditions aux limites convenables (cf. [6]), ce qui paraît hors de portée pour l'instant.

5. Indépendamment, M. Chaperon [13] et F. Takens [14] ont analysé les singularités d'équations différentielles implicites. Leur étude porte sur des catastrophes de bifurcation alors que la nôtre porte sur des catastrophes de conflit. On a donc maintenant l'embryon d'une théorie qualitative des équations différentielles multivoques.

N. Hoffman [9] a poussé plus à fond l'analyse de la singularité de type II*b*, dans un cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abraham et Robbin, *Transversal mappings and flows*, Benjamin, 1967.

[2] Bröcker, *Differenzierbare Abbildungen*, Universität Regensburg, 1973. Traduction anglaise " Differentiable germs and catastrophes ", *London Math. Soc. Lecture Notes*, n° 17, Cambridge Univ. Press, 1975.

[3] Clarke, Extremal arcs and extended hamiltonian systems, in *Calculus of variations and control theory*, ed. Russel, Academic Press, 1976.

[4] Clarke, La condition hamiltonienne d'optimalité, *C.R.A.S. Paris*, **281** (1975), p. 281.

[5] Ekeland, Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations elliptiques, *Journal of functional Analysis*, vol. **29** (1972), pp. 1-62.

[6] Ekeland-Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, 1973.

[7] Ekeland-Lebourg, Generic Fréchet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, *Transactions of the A.M.S.*, vol. **224** (1976), pp. 193-216.

[8] Gelfand-Fomin, *Calculus of variations*, Prentice-Hall, 1963.

[9] HOFFMAN, Catastrophes de type fronce et contrôle optimal, *Cahiers de Mathématiques de la Décision*, Université Paris IX Dauphine.

[10] PALLU DE LA BARRIÈRE, *Cours d'automatique théorique*, Dunod, 1966.

[11] SERGERAERT, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. **5** (1972), pp. 599-660.

[12] SIERSMA, *Classification and deformation of singularities*, Vinkeveen, Academic Surveys, 1974.

[13] M. CHAPERON, Sur certains difféomorphismes normalement hyperboliques, I et II, Notes à paraître aux *C. R. Ac. Sci.*, Paris.

[14] F. TAKENS, *Constrained equations, a study of implicit differential equations and their solutions*, preprint, Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Groningen, 1975.

Manuscrit reçu le **5** *juillet* **1976.**