PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

BERNARD MALGRANGE

Frobenius avec singularités. I. Codimension un

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 46 (1976), p. 163-173

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1976__46__163_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FROBENIUS AVEC SINGULARITÉS
1. CODIMENSION UN

par B. MALGRANGE

0. Introduction.

Soit $\omega = \sum_i a_i dx_i$ un germe en $0 \in \mathbf{C}^n$ de forme différentielle holomorphe, et soit X le germe en 0 du lieu singulier de ω, *i.e.* le germe défini par les équations $a_i(x) = 0$. Le but de cet article est la démonstration du résultat suivant :

Théorème (**0.1**). — *Supposons qu'on ait* $\operatorname{codim} X \geq 3$, *et* $\omega \wedge d\omega = 0$; *alors* ω *admet un facteur intégrant, c'est-à-dire qu'il existe* f *et* g, *fonctions holomorphes en* 0, *avec* $f(0) \neq 0$, *telles qu'on ait* $\omega = fdg$.

Ce théorème a été démontré dans des cas particuliers par Reeb [9] et Moussu [8]. Pour des séries formelles, il est démontré dans le cas général chez Moussu [8] par deux méthodes; on reprend ici la seconde méthode, due à J. Martinet, pour en établir la convergence. Simultanément on démontre aussi le résultat suivant :

Théorème (**0.2**). — *Supposons qu'on ait* $\operatorname{codim} X \geq 2$, *et que* ω *admette un facteur intégrant formel. Alors* ω *admet un facteur intégrant holomorphe.*

Dans un article ultérieur, ces résultats seront étendus à des systèmes de Pfaff de codimension supérieure. Les méthodes employées dans ces deux articles pourraient peut-être être employées dans d'autres problèmes; on en donne un exemple au § 4.

1. Une amélioration du théorème des voisinages privilégiés.

Divers « théorèmes des voisinages privilégiés » se trouvent dans la littérature — cf. Cartan [2], Grauert [4], Douady [3]. Ici, on va suivre la méthode de Grauert et préciser ses conclusions.

On notera $\mathcal{O}_n$ (ou $\mathcal{O}$, lorsque aucune confusion ne sera possible) l'anneau $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ des séries convergentes à n variables. Pour $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, avec $\rho_i > 0$, on désignera par $P(\rho)$ le polycylindre $|x_i| \leq \rho_i$; pour $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}$, $(\alpha \in \mathbf{N}^n)$, on pose $|f| = \sum_\alpha |a_\alpha| \rho^\alpha$; $|\cdot|_\rho$ est une « pseudonorme » sur $\mathcal{O}$, *i.e.* une norme pouvant prendre la valeur $+\infty$; le sous-espace sur lequel elle est finie sera noté $\mathcal{O}(\rho)$; enfin, pour $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{O}^p$, on posera $|f|_\rho = \sum_i |f_i|_\rho$.

Soit $u : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p$ une application $\mathcal{O}$-linéaire, qu'on peut identifier à une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}$; pour tout ρ assez petit, u induit une application continue $\mathcal{O}^q(\rho) \to \mathcal{O}^p(\rho)$, autrement dit, on a pour tout $\rho \in \mathcal{O}^q$: $|u(f)|_\rho \leq c|f|_\rho$, c indépendant de f (on peut même prendre c indépendant de ρ); ceci résulte immédiatement de l'inégalité suivante : pour $f, g \in \mathcal{O}$, on a $|fg|_\rho \leq |f|_\rho |g|_\rho$.

On dira qu'une application **C**-linéaire $\lambda : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$ est une *scission* de u si l'on a $u\lambda u = u$; $u\lambda$ est alors un projecteur sur $\mathrm{im}(u)$ et $\mathrm{id} - \lambda u$ un projecteur sur $\ker(u)$ (la vérification est laissée au lecteur). On dira d'autre part que « λ est adapté à $\mathrm{P}(\rho)$ », ou « à ρ » s'il existe $c > 0$ tel qu'on ait, pour $f \in \mathcal{O}^p$ et $1/2 \leq t \leq 1$, $|\lambda f|_{t\rho} \leq c|f|_{t\rho}$. Cela posé, on a le théorème suivant :

Théorème (**1.1**). — *Soient u_i ($i \in \mathrm{I}$, ensemble fini) des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$. On peut trouver des scissions λ_i des u_i possédant la propriété suivante :*

L'ensemble des $\mathrm{P}(\rho)$ tels que les λ_i leur soient simultanément adaptés est un système fondamental de voisinages de zéro.

Avant de passer à la démonstration proprement dite, faisons deux remarques :

(**1.2**) L'énoncé précédent « ne dépend que des $\mathcal{O}$-modules $\mathrm{coker}(u_i)$ » au sens suivant :

Soit $u : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p$, et soit $v : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^r$ une autre présentation de $\mathrm{coker}(u)$; alors, étant donné une scission λ de u, on peut en déduire une scission μ de v ayant la propriété suivante : pour tout ρ assez petit, si λ est adapté à ρ, alors μ est adapté à ρ.

Ceci résulte immédiatement de l'existence d'une homotopie entre deux présentations d'un même module; plus précisément, on peut fabriquer des diagrammes commutatifs de $\mathcal{O}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^q & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}^p \\ {\scriptstyle \ell_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell} \\ \mathcal{O}^s & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}^r \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}^q & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}^p \\ {\scriptstyle m_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{O}^s & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}^r \end{array}$$

et des $\mathcal{O}$-homomorphismes $k : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$, $k' : \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^s$ tels qu'on ait

$$uk + m\ell = \mathrm{id}, \qquad vk' + \ell m = \mathrm{id}.$$

Alors, si λ est une scission de u, $\mu = \ell_1 \lambda m + k'$ est une scission de v; en effet, on a :

$$v\mu v = v\ell_1\lambda mv + vk'v = \ell u\lambda u m_1 + v - \ell mv = \ell u m_1 + v - \ell mv = v.$$

Enfin, si λ est adapté à ρ, μ est évidemment adapté à ρ si ρ est assez petit.

(**1.3**) Posons $\mathrm{M}_i : \mathrm{coker}(u_i)$, et disons que le théorème est vrai pour (M_i) s'il est vrai pour un choix de présentations des M_i, donc d'après (1.2) pour tout choix de présentations des M_i. Supposons maintenant qu'on ait des suites exactes de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \to \mathrm{M}_i' \to \mathrm{M}_i \to \mathrm{M}_i'' \to 0.$$

Alors, si le théorème est vrai pour le système (M'_i, M''_i), il est vrai pour (M_i). Ceci résulte de la remarque suivante :

Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}$-modules de type fini, et soient u' et u'' des présentations de M' et M''; il existe alors $\ell : \mathcal{O}^{q''} \to \mathcal{O}^{p'}$ tel que la matrice $u = \begin{pmatrix} u' & \ell \\ 0 & u'' \end{pmatrix}$ soit une présentation de M et que ℓ vérifie la propriété suivante : si $u''(y) = 0$, alors $\ell(y) \in \mathrm{im}(u')$. Soient alors λ' et λ'' respectivement des scissions de u' et u''; il est facile de vérifier que

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda' & -\lambda'\ell\lambda'' \\ 0 & \lambda'' \end{pmatrix}$$

est une scission de u; d'autre part, si λ' et λ'' sont adaptés à ρ, λ sera aussi adapté à ρ.

La démonstration du théorème va maintenant se faire par récurrence sur n; suivant l'idée de Grauert, on prend pour M'_i le sous-module de x_n-torsion de M_i; alors $M''_i = M_i/M'_i$ est sans x_n-torsion; d'autre part, comme $\mathcal{O}_n$ est nœthérien, pour k assez grand, on a $x_n^k M'_i = 0$; en appliquant à nouveau la remarque précédente, on peut remplacer chaque M'_i par un nombre fini de modules N_j vérifiant $x_n N_j = 0$. En changeant un peu les notations, on voit qu'il suffit de traiter le cas d'un système (N_j, P_k), les N_j étant annulés par x_n, et les P_k sans x_n-torsion. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer le théorème établi pour $\mathcal{O}_{n-1}$ et le système $(N_j, P_k/x_n P_k)$. Le théorème résulte maintenant des considérations suivantes :

(1.4) Soit N un $\mathcal{O}_n$-module de type fini, avec $x_n N = 0$; soit $u_0 : \mathcal{O}_{n-1}^q \to \mathcal{O}_{n-1}^p$ une présentation de N en tant que $\mathcal{O}_{n-1}$-module, et soit λ_0 une scission de u_0; alors

a) $u = (u_0, x_n.\mathrm{id}) : \mathcal{O}_n^q \oplus \mathcal{O}_n^p \to \mathcal{O}_n^p$ est une $\mathcal{O}_n$-présentation de N.

b) Une scission λ de u s'obtient ainsi : pour $f \in \mathcal{O}_n^p$, on pose $f = f_0 + x_n \bar{f}$, $f_0 \in \mathcal{O}_{n-1}$ et on prend $\lambda(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0(f_0) \\ \bar{f} \end{pmatrix}$.

De plus, si λ_0 est adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$, pour tout $\rho_n > 0$, λ sera adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$.

(1.5) Soit P un $\mathcal{O}_n$-module de type fini, sans x_n-torsion. Soit $u : \mathcal{O}_n^q \to \mathcal{O}_n^p$ une présentation de P; posons $u = \sum_k u_k x_n^k$; u_0 est une présentation de $P^0 = P/x_n P$ sur $\mathcal{O}_{n-1}$; soit λ_0 une scission de x_0; posons $\widetilde{\mathcal{O}}_n = \mathcal{O}_{n-1}[[x_n]]$, et considérons l'application $\lambda : \widetilde{\mathcal{O}}_n^p \to \widetilde{\mathcal{O}}_n^q$ définie ainsi : si $f = \sum_k f_k x_n^k$, on pose $\lambda(f) = g = \sum_k g_k x_n^k$, les g_k étant définis par récurrence par la formule

$$\textbf{(1.6)} \qquad g_k = \lambda_0(f_k - u_1 g_{k-1} - \ldots - u_k g_0).$$

La formule précédente s'écrit encore

$$(\mathrm{id} + \sum_{k \geq 1} \lambda_0 u_k x_n^k) g = \lambda_0(f),$$

ou encore

$$\lambda = (\mathrm{id} + \sum_{k \geq 1} \lambda_0 u_k x_n^k)^{-1} \lambda_0.$$

Supposons que λ_0 soit adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$; on voit alors, par une majoration immédiate, que λ est adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, dès que ρ_n est assez petit. En particulier, si l'ensemble des $P(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$ auxquels λ_0 est adapté est un système fondamental de voisinages de o (ce qu'on peut supposer par l'hypothèse de récurrence), λ appliquera $\mathcal{O}_n^p$ dans $\mathcal{O}_n^q$.

Reste à démontrer que, dans ces conditions, λ est bien une scission de u. Il suffit d'établir ceci : si $f \in \mathrm{im}(u)$ et $g = \lambda(f)$, on a $ug = f$; montrons, par récurrence sur k, que

$$u(g_0 + \ldots + g_k x_n^k) - (f_0 + \ldots + f_k x_n^k)$$

est divisible par x_n^{k+1}. Ceci est vrai pour $k = 0$, car $g_0 = \lambda_0 f_0$; supposons donc le résultat établi pour $k-1$; alors, on peut écrire

$$u(g_0 + \ldots + g_{k-1} x_n^{k-1}) - f = x_n^k h, \qquad h = \sum_\ell h_\ell x_n^\ell;$$

par hypothèse, le premier membre, donc le second, appartient à $\mathrm{im}(u)$; comme $\mathrm{coker}(u)$ est sans x_n-torsion, on aura aussi $h \in \mathrm{im}(u)$, donc $h_0 \in \mathrm{im}(u_0)$, et par suite $u_0 \lambda_0 h_0 = h_0$.

D'autre part, on a $h_0 = u_1 g_{k-1} + \ldots + u_k g_0 - f_k$, donc, d'après (1.6), on a $\lambda_0 h_0 = -g_k$ et par suite $u_0 g_k = -h_0$; enfin, le terme de degré k en x_n dans $u(g_0 + \ldots + g_k x_n^k) - f$ vaut $u_0 g_k + h_0 = 0$; d'où le résultat et le théorème.

Remarque **(1.7)**. — Il est facile de voir que les scissions construites au cours de la démonstration se prolongent en des scissions des u_i, considérés comme applications $\hat{\mathcal{O}}_n^{q_i} \to \hat{\mathcal{O}}_n^{p_i}$, $\hat{\mathcal{O}}_n = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. D'autre part, le théorème reste vrai (encore, si l'on veut, avec les mêmes scissions), lorsqu'on remplace les pseudonormes $|\cdot|_\rho$ par les suivantes, et peut-être encore par d'autres...

a) $|f|_\rho = (\sum_\alpha (|a_\alpha| \rho^\alpha)^p)^{1/p}$, $1 \leq p$ (le cas $p = 1$ étant celui déjà traité).

b) $|f|_\rho = \sup_\alpha |a_\alpha| \rho^\alpha$.

c) $|f|_\rho = \sup_{x \in P(\rho)} |f(x)|$ si f est holomorphe dans $P^0(\rho)$ et continue dans $P(\rho)$
$= +\infty$ sinon.

(Dans ce dernier cas, on retombe sur les normes considérées par Douady [3].)

2. Intégration des formes holomorphes intégrables.

Soit Ω^p l'espace des germes de formes différentielles holomorphes de degré p en o dans $\mathbf{C}^n$; pour $\omega \in \Omega^1$, non identiquement nulle, on considère le complexe :

$$K(\omega) : \; 0 \to \mathcal{O} \to \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \Omega^n \to 0, \qquad \text{avec} \qquad \delta(\alpha) = \omega \wedge \alpha.$$

Posons $\omega = \sum_i a_i dx_i$, et soit X le « lieu singulier » de ω, *i.e.* le germe analytique défini par les équations $a_i = 0$. On a la proposition suivante :

Proposition **(2.1).** — *Pour* $1 \leq p \leq n$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

1) Codim $X \geq p$;
2) $H^i(K(\omega)) = 0$, $i = 0, \ldots, p-1$;
3) $H^{p-1}(K(\omega)) = 0$.

Voir une démonstration en appendice.

Démontrons maintenant le théorème (0.1); pour commencer, nous allons rappeler le raisonnement de Martinet et Moussu [8]; comme codim $X \geq 3$, on a $H^2(K(\omega)) = 0$; de l'hypothèse $\omega \wedge d\omega = 0$, on déduit alors l'existence de $\omega_1 \in \Omega^1$ vérifiant $d\omega = \omega \wedge \omega_1$; en différentiant, on trouve $\omega \wedge d\omega_1 = 0$, d'où l'existence d'un ω_2 vérifiant $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$; par récurrence, on trouve (Godbillon-Vey [5]) qu'il existe une suite ω_p de formes de Ω^1, avec $p \geq 0$, $\omega = \omega_0$, vérifiant

$$(2.2.p+1) \qquad d\omega_p = \omega_0 \wedge \omega_{p+1} + \sum_{1 \leq q \leq p} \binom{p}{q} \omega_q \wedge \omega_{p-q+1}.$$

On considère alors la forme à $(n+1)$ variables, à coefficients séries formelles :

$$\alpha = dt + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \omega_p;$$

on a, d'après (2.2)

$$d\alpha = \alpha \wedge \left(\sum_p \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \omega_p \right) \quad \text{et en particulier} \quad \alpha \wedge d\alpha = 0;$$

comme α est non singulière en 0, le théorème de Frobenius formel montre qu'il existe F et $G \in \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n, t]]$, avec $F(0) \neq 0$, tels qu'on ait $\alpha = F dG$; en faisant $t = 0$, on trouve un facteur intégrant formel pour ω_0.

Pour démontrer le théorème (0.1), il suffit donc manifestement de montrer que l'on peut choisir les ω_p de manière que la série $\sum_p \frac{t^p}{p!} \omega_p$ soit convergente; pour cela, identifions Ω^1 à $\mathcal{O}^n$ et Ω^2 à $\mathcal{O}^m$, où $m = \frac{n(n-1)}{2}$, en identifiant une forme à l'ensemble de ses coefficients; choisissons $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ tel que l'application $\omega_0 \wedge : \Omega^1 \to \Omega^2$ soit adaptée à ρ; on peut évidemment supposer $|\omega_0|_\rho < +\infty$; par récurrence, on pourra donc choisir les ω_p vérifiant, pour $1/2 \leq t \leq 1$, et $c > 0$ convenable,

$$\textbf{(2.3)} \qquad |\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq c\left(|d\omega_p|_{t\rho} + \sum_{1 \leq q \leq p} \binom{p}{q} |\omega_q|_{t\rho} \, |\omega_{p-q+1}|_{t\rho}\right).$$

Nous allons montrer que la suite ainsi choisie répond à la question; pour cela nous emploierons une variante de la méthode connue dans la théorie des équations elliptiques sous le nom de « méthode de Gevrey » ou « des contours successifs ».

Lemme **(2.4).** — *Il existe* $c_1 > 0$ *tel qu'on ait, pour* $\omega \in \Omega^1$ *et* $1/2 \leq t < s \leq 1$

$$|d\omega|_{t\rho} \leq \frac{c_1}{s-t} |\omega|_{s\rho}.$$

Il suffit de montrer qu'il existe c_2 vérifiant, pour $f\in\mathcal{O}$ et $1/2\leq t<s\leq 1$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho}\leq\frac{c_2}{s-t}|f|_{s\rho}.$$

Soit $f=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$; avec les notations usuelles, on a

$$|f|_{s\rho}=\sum_\alpha|a_\alpha|s^{|\alpha|}\rho^\alpha,\qquad\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho}=\sum_\alpha\alpha_i|a_\alpha|t^{|\alpha|-1}\rho^{\alpha-\varepsilon_i};$$

on a donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho}\leq K|f|_{s\rho}$, avec $K=\sup_{\alpha_i}\frac{2\alpha_i}{\rho_i}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i}$.

D'autre part, pour $x>0$, $0<a<1$, le maximum de la fonction $x\mapsto xa^x$ vaut $-\frac{1}{e\log a}$, d'où $K\leq\frac{2}{\rho_i e\log\frac{s}{t}}$ et le résultat suit immédiatement.

Il résulte donc de (2.3) et (2.4) que l'on aura, avec un $c'>0$ convenable, pour $p\geq 0$ et $1/2\leq t<s<1$, l'inégalité :

$$|\omega_{p+1}|_{t\rho}\leq\frac{c'}{s-t}|\omega_p|_{s\rho}+c\sum_{1\leq q\leq p}\binom{p}{q}|\omega_q|_{t\rho}\cdot|\omega_{p-q+1}|_{t\rho}. \tag{2.5}$$

Définissons une suite v_p de nombres >0 par les formules suivantes :

$$\begin{cases}v_0=|\omega_0|_\rho\\ v_{p+1}=c'ev_p+c\sum_{q=1}^{p}v_qv_{p-q+1}.\end{cases}$$

Pour établir le théorème, il suffit d'établir les deux assertions suivantes :

(2.6) on a $|\omega_p|_{t\rho}\leq\frac{p!\,v_p}{(1-t)^p}$ $(1/2\leq t\leq 1)$;

(2.7) la série $\sum_p v_pt^p$ est convergente.

Démonstration de (2.6). — Pour $p=0$ et 1 l'assertion est évidente. Supposons-la établie jusqu'à l'ordre $p\geq 1$; on aura alors, d'après (2.5), pour $1/2\leq t<s<1$

$$\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}|\omega_{p+1}|_{t\rho}\leq\frac{c'(1-t)^{p+1}v_p}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}+c\sum_{q=1}^{p}v_qv_{p-q+1}$$

on minimise le premier terme du second membre en choisissant $1-s=\frac{p}{p+1}(1-t)$, d'où

$$\frac{(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}=\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\leq e;$$

d'où le résultat.

Démonstration de (2.7). — On pose $F(t)=\sum_{p=1}^{+\infty} v_p t^p$; les relations de définition des v_p équivalent à l'équation

$$F(t)=c'ev_0t+c'etF(t)+cF(t)^2.$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites, à moins que l'on ne préfère résoudre une équation du second degré. Le théorème (0.1) est donc démontré.

En vue de la démonstration ultérieure du théorème (0.2), remarquons maintenant ceci : en fait, l'hypothèse $\operatorname{codim} X\geq 3$ (ou, ce qui revient au même, $H^2(K(\omega))=0$) n'a été utilisée que pour résoudre de proche en proche les équations (2.2.p); en fait, la démonstration donne le résultat suivant :

(2.8) *Etant donné* $\omega=\omega_0$, *non identiquement nul, supposons que pour n'importe quel choix de* $\omega_1, \ldots, \omega_p\in\Omega^1$, *vérifiant* (2.2.1), ..., (2.2.p), *on puisse trouver* $\omega_{p+1}\in\Omega^1$ *vérifiant* (2.2.$p+1$). *Alors* ω *admet un facteur intégrant.*

La démonstration du théorème (0.2) va maintenant consister à établir ceci : sous les hypothèses de (0.2), les hypothèses de (2.8) sont satisfaites. Cette démonstration va faire l'objet du § 3.

3. Comparaison des divers morphismes de Godbillon-Vey.

Soit $\omega=\omega_0$ une forme $\in\Omega^1$, avec $\omega\neq 0$. Supposons (ce qui ne sera évidemment pas toujours le cas) qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_p\in\Omega^1$ vérifiant (2.2.1), ..., (2.2.p). Pour écrire plus commodément ces dernières équations, considérons la forme à $n+1$ variables

$$\alpha=dt+\omega_0+\ldots+\omega_p\frac{t^p}{p!}$$

variante « tronquée à l'ordre p » de la forme considérée précédemment.

Lemme **(3.1)**. — *Pour que les équations* (2.2.1), ..., (2.2.p) *soient satisfaites, il faut et il suffit que le développement de* $\alpha\wedge d\alpha$ *suivant les puissances de t ne contienne pas de termes de degré* $\leq p-1$. (*On écrira alors* $\alpha\wedge d\alpha\equiv 0 \pmod{t^p}$.)

La démonstration est immédiate, et peut être laissée au lecteur. Soit alors F un automorphisme analytique de $\mathbf{C}^{n+1}$ au voisinage de 0, de la forme $x_i'=x_i$, $t'=t+f(x,t)$ avec $f(x,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=0$; on peut écrire au voisinage de 0

$$F^*(\alpha)=\left(1+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(dt+\sum_{k=0}^{+\infty}\omega_k'\frac{t^k}{k!}\right),$$

avec $\omega_0'=\omega_0$; en posant

$$\alpha_F=dt+\sum_{k=0}^{p}\omega_k'\frac{t^k}{k!}$$

on voit qu'on aura encore $F^*(\alpha)\wedge F^*(d\alpha)\equiv 0 \pmod{t^p}$, d'où facilement $\alpha_F\wedge d\alpha_F\equiv 0 \pmod{t^p}$ et par suite $\omega'_0=\omega_0$, $\omega'_1, \ldots, \omega'_p$ vérifieront encore (2.2.1), ..., (2.2.p).

Lemme (**3.2**). — *Supposons qu'on ait* $H^1(K(\omega))=0$ *(ou encore ce qui revient au même,* codim $X\geq 2$, X *le lieu singulier de* ω*). Alors, quels que soient* $\omega'_0=\omega_0, \omega'_1, \ldots, \omega'_p$ *vérifiant* (2.2.1), ..., (2.2.p), *il existe* F, *de la forme précédente, telle qu'on ait*

$$\alpha_F = dt + \omega'_0 + \ldots + \omega'_p \frac{t^p}{p!}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur p; comme on a manifestement $\alpha_{F\circ G}=(\alpha_F)_G$, on peut supposer déjà qu'on a

$$\omega'_1=\omega_1, \ldots, \omega'_{p-1}=\omega_{p-1};$$

du fait que ω_p et ω'_p vérifient (2.2.p), on déduit qu'on a

$$\omega_0\wedge\omega'_p=\omega_0\wedge\omega_p;$$

comme $H^1(K(\omega))=0$, ceci entraîne qu'il existe $g\in\mathcal{O}$ tel qu'on ait $\omega'_p=\omega_p+g\omega_0$; on vérifie alors immédiatement que l'automorphisme F défini par $x'_i=x_i$, $t'=t-g(x)\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}$ répond à la question.

(En fait, la même démonstration de proche en proche montre que F est unique modulo t^{p+2}; ce fait ne nous servira pas dans la suite.)

Pour démontrer maintenant le théorème (0.2), il suffit, compte tenu de la remarque (2.8), d'établir le résultat suivant :

Proposition (**3.3**). — *Supposons que* $\omega=\omega_0$ *admette un facteur intégrant formel et qu'on ait* $H^1(K(\omega))=0$. *Alors, pour toute suite* $\omega'_1, \ldots, \omega'_p\in\Omega^1$ *vérifiant* (2.2.1), ..., (2.2.p), *on peut trouver* $\omega'_{p+1}\in\Omega^1$ *vérifiant* (2.2.$p+1$).

Tout d'abord, on a $\omega=fdg$ avec $f, g\in\hat{\mathcal{O}}$, l'anneau des séries formelles en 0 et $f(0)\neq 0$; donc $d\omega=df\wedge dg=-\omega\wedge f^{-1}df$. ω admet donc une suite de Godbillon-Vey formelle, d'ordre infini, à savoir $\omega_1=-f^{-1}df$, $\omega_p=0$ pour $p\geq 1$; on posera donc ici $\alpha=dt+\omega_0+t\omega_1$.

Considérons d'autre part le complexe $\hat{K}(\omega)$ obtenu en remplaçant dans $K(\omega)$ « séries convergentes » par « séries formelles »; par platitude des séries formelles sur les séries convergentes, on a encore $H^1(\hat{K}(\omega))=0$; alors, le lemme (3.2) est encore vrai pour les formes à coefficients séries formelles, avec la même démonstration; d'où l'existence d'un automorphisme formel F de la forme $x'_i=x_i$, $t'=t+f(x,t)$, $f\in\hat{\mathcal{O}}$, $f(x,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=0$ tel qu'on ait

$$\left(1+\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha)\equiv dt+\omega_0+\omega'_1 t+\ldots+\omega'_p\frac{t^p}{p!} \pmod{t^{p+1}};$$

par suite, en prenant pour ω'_{p+1} le coefficient de $\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}$ dans $\left(1+\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha)$, on trouve un ω'_{p+1} à coefficient séries formelles qui vérifie

$$d\omega'_p = \omega_0 \wedge \omega'_{p+1} + \sum_1^p \binom{p}{q} \omega'_q \wedge \omega'_{p-q+1}.$$

Enfin, comme $\omega_0, \omega'_1, \ldots, \omega'_p$ sont convergentes, par fidèle platitude des séries convergentes sur les séries formelles, on peut trouver un autre ω'_{p+1} qui soit convergent et vérifie la même équation. D'où la proposition et le théorème (0.2).

4. Sur la cohomologie d'une fibration de Milnor.

Prenons $f \in \mathcal{O}$, avec $f(0)=0$. On pose

$$\Omega^p_{\text{rel}} = \Omega^p/(df \wedge \Omega^{p-1}),$$

et on note d_{rel} l'application $\Omega^p_{\text{rel}} \to \Omega^{p+1}_{\text{rel}}$ obtenue par passage au quotient à partir de la différentielle extérieure $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$. On note H^k_{rel} les groupes de cohomologie du complexe $(\Omega^p_{\text{rel}}, d_{\text{rel}})_{0 \leq p \leq n}$; on sait que H^k_{rel} est un $\mathbf{C}\{t\}$ module, lorsqu'on fait agir t par la multiplication par f et que $H^k_{\text{rel}} \underset{\mathbf{C}\{t\}}{\otimes} \mathbf{C}\{t\}[t^{-1}]$ représente la cohomologie de la fibration de Milnor associée à f au voisinage de 0 (Hamm [6]). On se propose ici de démontrer le résultat suivant :

Théorème (**4.1**). — *Supposons qu'on ait, pour un* $k \geq 1$, $H^{k+1}(K(df))=0$; *alors on a* $H^k_{\text{rel}}=0$.

Prenons en effet $\pi \in \Omega^k_{\text{rel}}$, avec $d_{\text{rel}}\pi=0$; on peut relever π en $\omega_0 \in \Omega^k$, avec $d\omega_0 \in df \wedge \Omega^k$; il existe alors $\omega_1 \in \Omega^k$ avec $d\omega_0 = df \wedge \omega_1$; en différentiant on trouve $df \wedge d\omega_1 = 0$, donc il existe $\omega_2 \in \Omega^k$ tel que $d\omega_1 = df \wedge \omega_2$; par récurrence, on trouve alors qu'il existe une suite ω_p d'éléments de Ω^k tels qu'on ait $d\omega_p = df \wedge \omega_{p+1}$.

En utilisant le théorème (1.1) et un calcul de majoration analogue (en plus simple) à celui fait au § 2, on voit qu'on peut choisir la série $\alpha = \sum_p \omega_p \frac{t^p}{p!}$ convergente.

On a $d\alpha = d(f+t) \wedge \sum_p \omega_p \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}$, par conséquent, la classe de α dans les formes relatives à $n+1$ variables, avec f remplacé par $f+t$, est un cocycle; puisque $f+t$ est non singulière en 0, on peut par un automorphisme analytique supposer que $f+t$ est l'une des coordonnées; le lemme de Poincaré avec paramètres montre alors que c'est un cobord, *i.e.* qu'il existe β et γ, $(p-1)$-formes holomorphes en (x, t) telles qu'on ait

$$\alpha = d\beta + d(f+t) \wedge \gamma;$$

en notant $\bar{\beta}$ (resp. $\bar{\gamma}$) la restriction de β (resp. γ) à $t=0$, on trouve $\omega_0 = d\bar{\beta} + df \wedge \bar{\gamma}$, ou encore, en notant $[\beta]$ la classe de $\bar{\beta}$ dans $\Omega^{p-1}_{\text{rel}}$: $\pi = d_{\text{rel}}[\beta]$. D'où le théorème.

Corollaire (**4.2**). — *Soit* X *le germe d'ensemble critique de* f *au voisinage de* 0; *si* $\operatorname{codim} X \geq p$, *alors on a, pour* $1 \leq k \leq p-2$: $H^k_{rel} = 0$.

Ceci résulte immédiatement de (4.1) et de (2.1) appliqué à $\omega = df$. Dans le cas d'une singularité isolée, *i.e.* lorsque $p = n$, ceci est un résultat bien connu; voir Brieskorn [1] (ou, par exemple, pour une présentation un peu différente, Malgrange [7]).

5. Appendice. Démonstration de la proposition (2.1).

On peut supposer que tous les a_i s'annulent à l'origine, sinon la proposition est évidente. Nous allons alors établir un résultat un peu plus général : soient $a = (a_1, \ldots, a_r)$ des éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$; si M est un $\mathcal{O}$-module, on notera comme d'habitude $K(a, M)$ le complexe de l'algèbre extérieure fabriqué avec a et M (voir Serre [10]), et par $H_k(a, M)$ ses groupes d'homologie; si $M = \mathcal{O}$, on écrira simplement $K(a)$ et $H_k(a)$; d'autre part, il sera commode d'écrire $H^k(a, M) = H_{r-k}(a, M)$. Pour $r = n$, $\omega = \sum_i a_i dx_i$, on a un isomorphisme évident $H^k(a) \simeq H^k(K(\omega))$.

L'équivalence de 2) et 3) dans la proposition (2.1) résulte alors du lemme plus général suivant, d'ailleurs encore vrai si $\mathcal{O}$ est remplacé par un anneau nœthérien A, avec $a_i \in \operatorname{rad}(A)$.

Lemme (**5.1**). — *Si* M *est fini sur* $\mathcal{O}$, *et si, pour un* $k \geq 0$, *on a* $H_k(a, M) = 0$, *alors, pour* $\ell \geq k$, *on a* $H_\ell(a, M) = 0$.

Pour $r = 1$, on a $H_\ell(a_1, M) = 0$, $\ell \geq 2$; il suffit donc d'examiner le cas $k = 0$; or, si $H_0(a_1, M) = M/a_1 M = 0$, on a $M = 0$ par Nakayama, d'où évidemment $H_1(a_1, M) = 0$.

Supposons alors le résultat établi pour $r-1$, et démontrons-le pour r. En isolant l'action de a_r, on a une suite exacte (Serre [10]) :

$$0 \to H_0(K(a_r) \otimes_{\mathcal{O}} H_\ell(a', M)) \to H_\ell(a, M) \to H_1(K(a_r) \otimes H_{\ell-1}(a', M)) \to 0$$

avec $a' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$.

Si $H_k(a, M) = 0$, on a donc

$$H_0(K(a_r) \otimes_{\mathcal{O}} H_k(a', M)) = H_k(a', M)/a_r H_k(a', M) = 0,$$

d'où $H_k(a', M) = 0$ par Nakayama; l'hypothèse de récurrence montre alors qu'on a $H_\ell(a', M) = 0$ pour $\ell \geq k$; en utilisant à nouveau la suite exacte précédente, on trouve qu'on a $H_\ell(a, M) = 0$ pour $\ell > k$. D'où le lemme [1].

Pour établir l'équivalence de 1) et 2) dans la proposition (2.1), on utilisera la proposition « bien connue » suivante, dont une référence est mise au concours.

---

[1] (Ajouté sur épreuves) Le lemme (5.1) se trouve dans :
M. Auslander and D. Buchsbaum, *Ann. of Math.*, **68** (1958), pp. 625-657, prop. 2.4.

Pour l'équivalence de 1) et 2) dans (2.1), voir aussi :
D. G. Northcott, *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968, p. 371, th. 6.

Proposition (5.2). — *Si* M *est fini sur* $\mathcal{O}$, *alors on a l'égalité* :

$$n-\dim(M)=\inf\{k \mid \mathrm{Ext}^k(M, \mathcal{O})\neq 0\}.$$

L'équivalence cherchée résulte maintenant de la proposition suivante :

Proposition (5.3). — *Pour* $M=\mathcal{O}/(a_1, \ldots, a_r)$, $(a_1, \ldots, a_r)$ *l'idéal engendré par* $a_1, \ldots, a_r$, *on a*

$$n-\dim M=\inf\{k \mid H^k(a)\neq 0\}.$$

Posons $\dim M=n-k$. Il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_p(a), \mathcal{O})\simeq K_{r-p}(a)$$

qui commute à la différentielle de $K(a)$; donc $H^p(a)=H_{r-p}(a)$ est le p-ième groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K(a), \mathcal{O})$; or, la cohomologie de ce complexe est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par

$$E_2^{pq}=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(H_q(a), \mathcal{O});$$

comme les $H_q(a)$ sont annulés par $a_1, \ldots, a_r$, on a $\dim H_q(a)\leq n-k$; d'après (5.2), on a donc $E_2^{pq}=0$ pour $p\leq k-1$; d'autre part, on a évidemment $E_2^{pq}=0$ pour $q<0$; donc on aura $H^\ell(a)=0$, pour $\ell\leq k-1$, et $H^k(a)=E_2^{k0}=\mathrm{Ext}^k(H_0(a), \mathcal{O})=\mathrm{Ext}^k(M, \mathcal{O})$; or, ce dernier groupe n'est pas nul d'après (5.2); ceci démontre la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Brieskorn, Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Math.*, **2** (1970), pp. 103-161.

[2] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, *Annales E.N.S.*, **61** (1944), pp. 149-197.

[3] A. Douady, Le problème des modules..., *Ann. Inst. Fourier*, **16-1** (1966), pp. 1-95.

[4] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie..., *Publ. Math. I.H.E.S.*, **5** (1960).

[5] C. Godbillon et J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **273** (1971), pp. 92-95.

[6] H. Hamm, *Zur analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie*, Habilitationsschrift (à paraître).

[7] B. Malgrange, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Annales E.N.S.*, **7** (1974), pp. 405-430.

[8] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, *Ann. Inst. Fourier*, **26-2** (1976), pp. 171-220.

[9] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Paris, Hermann, 1952.

[10] J.-P. Serre, Algèbre locale, Multiplicités, *Lectures Notes in Mathematics*, n° **11**, Springer Verlag, 1965.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1975.