PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS BRUHAT

Sur une classe de sous-groupes de Chevalley sur un corps p-adique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 23 (1964), p. 45-74

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1964__23__45_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE CLASSE DE SOUS-GROUPES COMPACTS MAXIMAUX DES GROUPES DE CHEVALLEY SUR UN CORPS $\mathfrak{p}$-ADIQUE

par FRANÇOIS BRUHAT

Le but de ce travail est d'étendre les résultats de [3] aux groupes semi-simples généraux. Nous n'y sommes encore parvenu que pour les groupes dits « du type Tohoku » ou « déployés » sur le corps de base. Nous définissons pour un tel groupe G une classe « naturelle » de sous-groupes K possédant de bonnes propriétés (th. 12.1 et prop. 15.1). Un tel sous-groupe K est défini comme l'ensemble des éléments de G laissant invariant un certain *réseau* stable par le crochet dans l'algèbre de Lie de G (« réseau de Chevalley »); on trouvera la définition et l'étude des réseaux de Chevalley au II. Cette étude a nécessité l'établissement de variantes du théorème de Jacobson-Morozov (dans le cas d'un anneau de base, ou d'un corps de caractéristique non nulle) qu'on trouvera en I.

Pour les conséquences importantes des propriétés des sous-groupes K, au point de vue des représentations unitaires de G et de la théorie des fonctions sphériques, nous renvoyons à [3] et [10].

Remarquons que le corps de base P utilisé ici n'est pas nécessairement *localement compact*, mais seulement valué complet pour une valuation discrète. Le sous-groupe K n'est plus alors compact maximal, mais « borné » maximal. Par ailleurs, nous devons nous restreindre à la caractéristique zéro, car nous utilisons des résultats de Borel-Tits (sur la conjugaison des tores décomposés maximaux par exemple) qui semblent n'avoir été établis que sur un corps de base *parfait*.

Signalons enfin que les résultats qui suivent ont été partiellement énoncés dans [4].

NOTATIONS

P : corps valué complet pour une valuation v discrète normée.
$\mathfrak{O}$: anneau des entiers de P.
$\mathfrak{p}$: idéal maximal de $\mathfrak{O}$.
π : générateur de $\mathfrak{p}$ (« uniformisante »).
p désigne la caractéristique du corps résiduel $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ si celle-ci est non nulle et le symbole $+\infty$ si la caractéristique de $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ est nulle.

I

LE THÉORÈME DE JACOBSON-MOROZOV

Dans ce paragraphe, la lettre A désigne un anneau commutatif intègre avec élément unité et la lettre M désigne un A-module unitaire sans torsion de type fini sur A. La lettre K désigne le corps des fractions de A. On suppose que les éléments 1, 2, ..., $p-1$ sont *inversibles* dans A : par suite K est de caractéristique o ou $q \geqslant p$.

1. L'algèbre de Lie standard de dimension 3 et ses représentations.

Nous désignerons par I et appellerons « Algèbre standard » sur A, une A-algèbre de Lie, qui est un module libre de dimension 3 sur A, possédant une base X, Y, H satisfaisant aux relations classiques :

$$[H, X] = 2X \qquad [H, Y] = -2Y \qquad [X, Y] = H. \tag{S}$$

Soit ρ une représentation linéaire de I dans M. Les relations suivantes sont bien connues et d'ailleurs triviales (pour r, s entiers naturels et $\lambda \in A$) :

$$(\rho(H)-\lambda)^r \rho(X)^s = \rho(X)^s (\rho(H)-\lambda+2s)^r \tag{1}$$

$$(\rho(H)-\lambda)^r \rho(Y)^s = \rho(Y)^s (\rho(H)-\lambda-2s)^r \tag{2}$$

Pour $U \in I$, nous désignerons par $N_{\lambda,k}(\rho, U)$ le noyau de $(\rho(U)-\lambda)^k$ et par $N_\lambda(\rho, U)$ la réunion des $N_{\lambda,k}$ pour k entier $\geqslant 1$. Il résulte aussitôt de (1) et (2) que :

$$\rho(X) N_{\lambda,k}(\rho, H) \subset N_{\lambda+2,k}(\rho, H) \tag{3}$$

$$\rho(H) N_{0,k}(\rho, X) \subset N_{0,k}(\rho, X) \tag{4}$$

$$\rho(Y) N_{\lambda,k}(\rho, H) \subset N_{\lambda-2,k}(\rho, H) \tag{5}$$

$$\rho(H) N_{0,k}(\rho, Y) \subset N_{0,k}(\rho, Y) \tag{6}$$

Si A est un corps de caractéristique o, ces relations entraînent immédiatement que $\rho(X)$ et $\rho(Y)$ sont *nilpotents*. Si A est un *corps* de caractéristique p, Jacobson a montré [9] que la théorie classique des représentations de I se généralisait bien, à condition de supposer *a priori* que $\rho(X)^m = \rho(Y)^m = 0$ avec $m \leqslant p-1$. Nous allons dans ce numéro généraliser ces résultats.

Lemme (**1.1**). — *Si* $\rho(X)^m = 0$, *avec* $m \leqslant p-1$, *on a pour* $0 \leqslant r \leqslant m$:

$$(7) \qquad \Big(\prod_{1 \leqslant j \leqslant 2r-1} (\rho(H) + m - j)\Big)\rho(X)^{m-r} = 0.$$

En particulier, on a :

$$(8) \qquad \prod_{1 \leqslant j \leqslant 2m-1} (\rho(H) + m - j) = 0.$$

La démonstration donnée par Jacobson dans le cas d'un corps est valable sans changement ([9], Lemme 1).

Introduisons maintenant les représentations « classiques » de I, obtenues par changement d'anneau de base à partir des représentations bien connues de l'algèbre standard sur $\mathbf{Z}$: pour tout entier $j \geqslant 1$, nous désignerons par ρ_j la représentation linéaire de I dans le A-module A^j défini par les formules suivantes (où $e_1, e_2, \ldots, e_j$ désigne la base canonique de A^j) :

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho_j(X)e_1 = 0, \quad \rho_j(X)e_{i+1} = i(j-i)e_i \quad \text{pour } 1 < i \leqslant j-1 \\ \rho_j(H)e_i = (j - 2i + 1)e_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j \\ \rho_j(Y)e_i = e_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant j-1, \quad \rho_j(Y)e_j = 0 \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que ces formules définissent bien une *représentation* de I.

Lemme (**1.2**). — *Soit* ρ *une représentation de* I *dans* M *telle que* $\rho(X)^m = \rho(Y)^m = 0$ *avec* $m \leqslant p-1$. *Le module* M *est somme directe de sous-modules* M_j *invariants (pour* $1 \leqslant j \leqslant m$*) tels que la restriction de* ρ *à* M_j *soit équivalente au produit tensoriel de la représentation* ρ_j *de* I *dans* A_j *par la représentation nulle de* I *dans un* A*-module* $M_{j,1}$.

Si A est un *corps*, ce résultat est classique en caractéristique 0 et est dû à Jacobson en caractéristique $q \geqslant p$ ([9], théorème 1). Dans le cas général, considérons M comme plongé dans le K-espace vectoriel de dimension finie $M_K = K \otimes_A M$ et I comme plongée dans la K-algèbre de Lie standard $I_K = K \otimes_A I$. La représentation ρ se prolonge en une représentation ρ_K de I_K dans M_K qui, d'après le résultat de Jacobson, est complètement réductible et somme directe de représentations du type ρ_j pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Soit W_j le sous-espace de M_K composant isotypique de type ρ_j, et soit $W_{j,i}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant j$) le sous-espace propre associé à la valeur propre $j - 2i + 1$ de la restriction de $\rho_K(H)$ à W_j.

Nous allons montrer par récurrence sur m que M est somme directe des sous-modules $M_{j,i} = W_{j,i} \cap M$: c'est évident si $m = 1$ puisque $W_{1,1} = M_K$. Soit alors

$$x = \sum_{i=1}^{m} y_i + z \in M, \qquad y_i \in W_{m,i}, \qquad z \in \sum_{j=1}^{m-1} W_j.$$

Comme $\rho(X)^{m-1} = \rho(Y)^{m-1} = 0$ sur $\sum_1^{m-1} W_j$, on déduit aussitôt des formules (9) :

$$(10) \qquad \rho(Y)^{s-1}\rho(X)^{m-1}\rho(Y)^{m-s}(x) = \Big(\prod_{1 \leqslant k \leqslant m-1} k(m-k)\Big) y_s \qquad (\text{pour } 1 \leqslant s \leqslant m).$$

Comme le coefficient de y_s au second membre de (10) est inversible dans A, on voit que les y_s et z appartiennent à M, ce qui montre que M est somme directe des $M_{m,s}$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$ et de $M \cap \sum_{1 \leqslant j \leqslant m-1} W_j$, d'où notre assertion.

De plus, les formules (9) montrent que, pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$, $\rho_K(Y)$ est un isomorphisme de $W_{j,i}$ sur $W_{j,i+1}$, l'isomorphisme réciproque étant la restriction de $i^{-1}(j-i-1)^{-1}\rho_K(X)$ à $W_{j,i+1}$. Comme $i^{-1}(j-i-1)^{-1} \in A$ pour $1 \leqslant i \leqslant j-1 < p$, il en résulte que $\rho(Y)$ définit un isomorphisme de $M_{j,i}$ sur $M_{j,i+1}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$), ce qui entraîne immédiatement que $M_j = \sum_i M_{j,i}$ est isomorphe au produit tensoriel $M_{j,1} \otimes_A A^j$, la restriction de ρ à M_j étant le produit tensoriel de la représentation nulle par la représentation ρ_j.

Remarque. — Il résulte des formules (9) que le noyau $N_{0,k}(\rho, X)$ de $\rho(X)^k$ est somme directe des sous-modules $M_{j,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \inf(j, k)$. D'autre part $\rho(X)$ est un isomorphisme de $M_{j,i}$ sur $M_{j,i-1}$ pour $1 < i \leqslant j$. Par suite, l'image $\rho(X)(N_{0,k})$ est la somme directe des $M_{j,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \inf(j, k) - 1$ et est *facteur direct* dans $N_{0,k-1}$, un supplémentaire étant la somme directe des $M_{j,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Nous allons maintenant faire une hypothèse de nilpotence sur $\rho(X)$ seul :

Lemme (**1.3**). — *Si* $\rho(X)^m = 0$ *avec* $2m \leqslant p+1$, *alors le module* M *est somme directe des sous-modules* $N_{k-m} = N_{k-m,1}(\rho, H)$ *noyaux des opérateurs* $\rho(H)+m-k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant 2m-1$.

Si $2m \leqslant p-1$, *on a de plus* $\rho(Y)^m = 0$ *et le Lemme 1.2 s'applique.*

La première assertion est une conséquence du lemme 1.1 et de la remarque suivante. Si u est un endomorphisme de M tel que $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} (u+m-j) = 0$ (avec $k \leqslant p$) alors M est somme directe des noyaux de $u+m-j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Ceci est évident pour $k=1$. Pour $k>1$, posons $v = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (u+m-j)$. Soit Q le polynôme à coefficients entiers quotient de la division euclidienne de $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (X+m-j)$ par $X+m-k$. On a $v(u+m-k) = 0$ et

$$v - Q(u)(u+m-k) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (k-j) \tag{11}$$

et le second membre de (11) est inversible puisque $1 \leqslant k-j \leqslant p-1$. Par suite M est somme directe du noyau de $u+m-k$ et du noyau de v, d'où notre assertion par récurrence sur k.

Si maintenant $2m \leqslant p-1$, les entiers $-m$ et $-m-1$ ne sont congrus modulo p à aucun des entiers $k-m$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-1$.

Par suite $N_{-m,1}(\rho, H) = N_{-1-m,1}(\rho, H) = \{0\}$.

Comme la formule (5) entraîne $\rho(Y)^h N_{2h-m} \subset N_{-m}$ et $\rho(Y)^h N_{2h-1-m} \subset N_{-1-m}$, on en conclut que $\rho(Y)^m = 0$.

Remarque. — Il est facile de voir que $m = (p-1)/2$ est la meilleure valeur possible pour la deuxième assertion du Lemme 1.3 : si l'on prend pour A un corps de caractéristique 11, et si l'on considère la représentation ρ_j avec $j = 16$, on trouve $\rho_j(X)^6 = 0$ et $\rho_j(Y)^{15} \neq 0$.

2. Réduction modulo un idéal premier.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Nous désignerons par $\overline{A}$ l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$, qui satisfait aux mêmes conditions que A. On posera de même $\overline{M}=M/\mathfrak{p}M$ et $\overline{\mathfrak{l}}=\mathfrak{l}/\mathfrak{p}\mathfrak{l}$; on désignera par $x\to\overline{x}$ l'application canonique de A sur $\overline{A}$, etc., et par $\overline{\rho}$ la représentation de la $\overline{A}$-algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{l}}$ dans $\overline{M}$ déduite de ρ par réduction modulo $\mathfrak{p}$. Si $\rho(X)^m=\rho(Y)^m=0$, avec $m\leqslant p-1$, il résulte du Lemme 1.3 que la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de ρ possède toutes les propriétés que l'on peut désirer : le module $\overline{M}$ est somme directe des modules $\overline{M}_j$ dans lesquels $\overline{\rho}$ induit une représentation équivalente à la représentation de $\overline{\mathfrak{l}}$ dans $\overline{M}_{j,1}\otimes_A A^j$ produit tensoriel de o et de la représentation $\overline{\rho}_j$ de $\overline{\mathfrak{l}}$ dans $\overline{A}_j$.

En particulier, l'application $x\to\overline{x}$ de M sur $\overline{M}$ induit un *isomorphisme* de $\overline{N_{0,k}(\rho, X)}=N_{0,k}(\rho, X)/\mathfrak{p}N_{0,k}(\rho, X)$ sur le noyau $N_{0,k}(\overline{\rho}, \overline{X})$ de $\overline{\rho}(\overline{X})^k$ dans $\overline{M}$. Si par exemple A est un anneau *principal* et $\mathfrak{p}$ un idéal maximal, alors tous les modules envisagés sont libres de type fini et on a :

$$\dim_A N_{0,k}(\rho, X)=\dim_{\overline{A}} N_{0,k}(\overline{\rho}, \overline{X}). \tag{12}$$

Nous allons maintenant faire une hypothèse de nilpotence sur $\overline{\rho}$ seulement :

Lemme (**2.1**). — *Supposons* M *libre (de type fini). Si* $\overline{\rho}(\overline{X})^m=0$ *avec* $2m\leqslant p-1$, *alors* $\rho(X)^m=\rho(Y)^m=0$.

On peut supposer $\mathfrak{p}$ *maximal.*

Soit $\widetilde{K}$ la clôture algébrique du corps des fractions K de A et soit $\widetilde{A}$ la clôture intégrale de A dans $\widetilde{K}$. Plongeons M dans $\widetilde{M}=\widetilde{K}\otimes_A M$ et $\mathfrak{l}$ dans la $\widetilde{K}$-algèbre de Lie standard $\widetilde{\mathfrak{l}}=\widetilde{K}\otimes_A\mathfrak{l}$, et prolongeons ρ en une représentation $\widetilde{\rho}$ de $\widetilde{\mathfrak{l}}$ dans $\widetilde{M}$. Soit $\widetilde{\mathfrak{p}}$ un idéal maximal de $\widetilde{A}$ tel que $\widetilde{\mathfrak{p}}\cap A=\mathfrak{p}$ (on sait qu'il existe de tels idéaux puisque $\widetilde{A}$ est entier sur A). Le corps $\widetilde{k}=\widetilde{A}/\widetilde{\mathfrak{p}}$ est alors une *clôture algébrique* du corps $k=A/\mathfrak{p}$.

Soit d'autre part $e_1, \ldots, e_s$ une base du A-module M, qui est aussi une base du $\widetilde{K}$-espace vectoriel $\widetilde{M}$. Puisque $\widetilde{\rho}(H)$ laisse stable M, la matrice de $\widetilde{\rho}(H)$ par rapport à cette base est à coefficients dans A, ce qui entraîne que les valeurs propres de $\widetilde{\rho}(H)$ appartiennent à $\widetilde{A}$.

Par ailleurs le $\widetilde{k}$-espace vectoriel $\overline{\widetilde{M}}=\widetilde{A}/\widetilde{\mathfrak{p}}\otimes_A M$ s'identifie d'une part à $\widetilde{k}\otimes_k\overline{M}$, d'autre part au module obtenu par réduction modulo $\widetilde{\mathfrak{p}}$ de $\widetilde{A}\otimes_A M$, ces identifications étant compatibles avec les représentations évidentes de $\overline{\widetilde{\mathfrak{l}}}=\widetilde{A}\otimes\mathfrak{l}/\widetilde{\mathfrak{p}}(\widetilde{A}\otimes\mathfrak{l})\simeq\widetilde{k}\otimes_k\overline{\mathfrak{l}}$, représentations notées $\overline{\widetilde{\rho}}$ ou $\widetilde{\overline{\rho}}$.

Par suite, les valeurs propres de $\overline{\widetilde{\rho}}(\overline{H})$ dans le $\widetilde{k}$-espace vectoriel $\overline{\widetilde{M}}$ sont les images dans $\widetilde{k}$ des valeurs propres de $\widetilde{\rho}(H)$.

Supposons alors que $\rho(X)^m\neq 0$. Il existe donc un $\lambda\in\widetilde{A}$, un entier $h\geqslant 1$ et un $x\in N_{\lambda,h}(\widetilde{\rho}, H)$ tel que $\widetilde{\rho}(X)^m(x)\neq 0$. Il résulte alors de (3) que les éléments λ, $\lambda+2, \ldots, \lambda+2m$ sont valeurs propres de $\widetilde{\rho}(H)$, donc que leurs images $\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+2, \ldots, \overline{\lambda}+2m$

dans $\widetilde{k}$ sont valeurs propres de $\widetilde{\overline{\rho}}(\overline{H})$. Mais puisque $\overline{\rho}(\overline{X})^m = 0$, les valeurs propres de $\widetilde{\overline{\rho}}(\overline{H})$ sont des entiers compris entre $1-m$ et $m-1$ (Lemme 1.3) et la différence de deux valeurs propres de $\widetilde{\overline{\rho}}(\overline{H})$ ne peut donc pas être égale à $2m$ (puisque $2m \leqslant p-1$).

3. Le théorème de Jacobson-Morozov (A quelconque).

Dans ce numéro, nous allons adapter la démonstration donnée par Jacobson du théorème de Jacobson-Morozov dans [8] de manière à obtenir un énoncé valable pour une A-algèbre de Lie sur un anneau A quelconque mais satisfaisant aux conditions indiquées au début du paragraphe.

Nous appelons matrice de Jordan une matrice carrée (a_{ij}) dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments $a_{i,i+1}$ qui sont égaux à 1.

Lemme (**3.1**). — *Soit* X *une matrice carrée d'ordre n à éléments dans* A. *Si* X *est un tableau diagonal de matrices de Jordan, il existe deux matrices carrées d'ordre n,* H *et* Y, *à coefficients dans* A, *et satisfaisant aux relations* (S).

On se ramène aussitôt au cas où X est une matrice de Jordan et on prend pour H la matrice diagonale (h_{ij}) définie par $h_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $h_{ii} = n+1-2i$ et pour Y la matrice (y_{ij}) définie par $y_{ij} = 0$ pour $i \neq j+1$ et $y_{j+1,j} = j(n-j)$ (pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$).

Lemme (**3.2**). — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* A*-algèbre de Lie et soient* $X, H \in \mathfrak{g}$, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $[H, X] = 2X$;

(ii) H *appartient à l'image de* $\mathfrak{g}$ *par l'endomorphisme* Ad X;

(iii) $(\mathrm{Ad}\, X)^{p-2} = 0$.

Alors, il existe $Y \in \mathfrak{g}$ *satisfaisant aux relations* (S).

Remarquons que si $X = 0$, on a $H = 0$ et on peut prendre $Y = 0$. Si $X \neq 0$, alors $H \neq 0$ et on a nécessairement $p \geqslant 5$. Soit $Z \in \mathfrak{g}$ avec $[X, Z] = H$.

On a $[[H, Z], X] = [H, [Z, X]] + [Z, [X, H]] = -2[Z, X]$, ce qui montre que $U = [H, Z] + 2Z$ appartient au noyau $N = (\mathrm{Ad}\, X)^{-1}(0)$ de Ad X. Or l'existence d'un Y satisfaisant à (S) est équivalente (en posant $Y = Z - V$) à l'existence d'un $V \in N$ tel que $U = [H, V] + 2V$. Il suffit donc de démontrer que la restriction de $\mathrm{Ad}\, H + 2$ à N est un automorphisme du A-module N (il est clair que N est stable par Ad H d'après (i)). Or les calculs de Jacobson dans [8] restent valables et montrent que

$$(\mathrm{Ad}\, H - i)(M_i) \subset M_{i+1} \tag{13}$$

en posant :

$$M_i = (\mathrm{Ad}\, X)^i(\mathfrak{g}) \cap (\mathrm{Ad}\, X)^{-1}(0).$$

Comme $(i+1)$ est inversible dans A pour $0 \leqslant i \leqslant p-3$, on a aussi

$$(\mathrm{Ad}\, H + 2 - (i+2))(M_i) \subset M_{i+1} \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant p-3.$$

Mais l'hypothèse (iii) entraîne que les sous-modules $M_0 = N, M_1, \ldots, M_{p-3}, M_{p-2} = \{0\}$ forment une suite de composition dans le A-module N (décroissante au sens large) et comme $i+2$ est inversible dans A pour $0 \leqslant i \leqslant p-3$, il en résulte que la restriction de $\mathrm{Ad}\, H + 2$ à N est inversible, d'où le Lemme.

Nous allons supposer maintenant que $\mathfrak{g}$ satisfait à la condition suivante :

(T) *Il existe une représentation linéaire* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *dans un* A*-module* M *libre de type fini telle que la forme bilinéaire symétrique* $\mathrm{Tr}_M(\rho(X)\rho(Y))$ *définisse un isomorphisme de* $\mathfrak{g}$ *sur le* A*-module dual* $\mathfrak{g}^*$. (Nous dirons que cette forme bilinéaire est *fortement non dégénérée.*)

Lemme (**3.3**). — *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *satisfait à* (T). *Soit* $X \in \mathfrak{g}$ *tel que* $(\mathrm{Ad}\, X)^{p-2} = 0$ *et qu'il existe une base de* M *par rapport à laquelle la matrice de* $\rho(X)$ *est un tableau diagonal de matrices de Jordan. Alors, il existe* $Y, H \in \mathfrak{g}$ *satisfaisant à* (S).

Il est clair que (T) entraîne que ρ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur son image $\rho(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{a}$ l'ensemble des endomorphismes u de M tels que $\mathrm{Tr}_M(u\rho(X)) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$: l'hypothèse (T) entraîne que l'algèbre E des endomorphismes de M est somme directe des sous-modules $\rho(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{a}$, et on a :

$$[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] \subset \rho(\mathfrak{g}) \qquad [\rho(\mathfrak{g}), \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}. \tag{14}$$

D'autre part, il existe d'après le Lemme 1 des éléments $H_0, Y_0 \in E$ satisfaisant aux relations (S) (où l'on remplace X par $X_0 = \rho(X)$) et il existe H, $Z \in \mathfrak{g}$ tels que $H_0 \equiv \rho(H)$ modulo $\mathfrak{a}$, $Y_0 \equiv \rho(Z)$ modulo $\mathfrak{a}$. On a alors :

$$\rho([H, X]) \equiv [H_0, \rho(H)] \equiv 2\rho(X) \quad \text{modulo } \mathfrak{a} \tag{15}$$

$$\rho([X, Z]) \equiv [\rho(X), Y_0] \equiv H_0 \equiv \rho(H) \quad \text{modulo } \mathfrak{a} \tag{16}$$

grâce à (14). On en déduit aussitôt $[H, X] = 2X$ et $H = [X, Z]$, ce qui permet d'appliquer le Lemme 2.

Remarque. — Si A est un *corps* de caractéristique 0 ou $q \geqslant p$, la condition imposée à $\rho(X)$ signifie simplement que $\rho(X)$ est *nilpotent.*

4. Le cas $A = \mathfrak{O}$.

Dans ce numéro, nous prenons comme anneau de base l'anneau $\mathfrak{O}$ des entiers du corps P et nous reprenons les notations du n° 2.

Lemme (**4.1**). — *Soit* $\mathfrak{g}$ *un* $\mathfrak{O}$*-algèbre de Lie satisfaisant à la condition* (T) (*avec* $A = \mathfrak{O}$). *Soit* $X_0 \in \mathfrak{g}$, *satisfaisant à* $(\mathrm{Ad}\, X_0)^m = 0$ (*avec* $2m \leqslant p-1$) *et tel que* $\rho(X_0)$ *soit nilpotent. Alors il existe trois éléments* X, Y, H *de* $\mathfrak{g}$ *satisfaisant aux relations* (S) *et tels que* $X \equiv X_0$ *modulo* $\mathfrak{p}\mathfrak{g}$.

Remarquons que (T) entraîne que ρ est une injection de $\mathfrak{g}$ dans le $\mathfrak{O}$-module libre de type fini des endomorphismes de M. Par suite $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{O}$-module libre de type fini, donc est *séparé et complet* pour la topologie p-adique.

Nous allons construire par récurrence sur l'entier $q \geqslant 0$ des éléments X_q, Y_q et $H_q \in \mathfrak{g}$ satisfaisant à :

(17-q) $\quad X_{q+1} \equiv X_q \quad \text{modulo } \mathfrak{p}^{q+1}\mathfrak{g}$

(18-q) $\quad Y_{q+1} \equiv Y_q \quad \text{modulo } \mathfrak{p}^{q+1}\mathfrak{g}$

(19-q) $\quad H_q = [X_q, Y_q]$

(20-q) $\quad [H_q, X_q] \equiv 2X_q \quad \text{modulo } \mathfrak{p}^{q+1}\mathfrak{g}$

(21-q) $\quad [H_q, Y_q] \equiv -2Y_q \quad \text{modulo } \mathfrak{p}^{q+1}\mathfrak{g}$

Il est clair que les éléments X_q (resp. Y_q, H_q) convergeront dans $\mathfrak{g}$ vers un X (resp. Y, H) satisfaisant aux relations cherchées. Pour $q = 0$, nous appliquerons le Lemme 3.3 à $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{p}\mathfrak{g}$ et à $\overline{X}_0$ que nous supposerons $\neq 0$, le cas $\overline{X}_0 = 0$ étant trivial. On trouve ainsi deux éléments $\overline{Y}_0$ et $\overline{H}_0 \in \bar{\mathfrak{g}}$ satisfaisant avec $\overline{X}_0$ aux relations (S).

On relève arbitrairement $\overline{Y}_0$ en un élément $Y_0 \in \mathfrak{g}$ et on pose $H_0 = [X_0, Y_0]$: il est clair que (19-0), (20-0) et (21-0) sont satisfaites.

Supposons donc X_q et Y_q déterminés et posons

(22) $\quad [H_q, X_q] = 2X_q + \pi^{q+1}U \qquad [H_q, Y_q] = -2Y_q + \pi^{q+1}V$

et calculons $[Y_q, [X_q, H_q]]$: on trouve d'une part

$$[Y_q, [X_q, H_q]] = [2X_q + \pi^{q+1}U, Y_q] = 2H_q + \pi^{q+1}[U, Y_q]$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}[Y_q, [X_q, H_q]] &= [[Y_q, X_q], H_q] + [X_q, [Y_q, H_q]] \\ &= [X_q, 2Y_q - \pi^{q+1}V] = 2H_q + \pi^{q+1}[V, X_q]\end{aligned}$$

D'où la relation :

(23) $\quad [X_q, V] = [Y_q, U].$

Posons maintenant $X_{q+1} = X_q + \pi^{q+1}A$ et $Y_{q+1} = Y_q + \pi^{q+1}B$, $H_{q+1} = [X_{q+1}, Y_{q+1}]$. Les conditions (17-($q+1$)) à (19-($q+1$)) sont satisfaites et on a modulo $\mathfrak{p}^{q+1}\mathfrak{g}$:

(24) $$\begin{aligned}[H_{q+1}, X_{q+1}] &\equiv [H_q + \pi^{q+1}[A, Y_q] + \pi^{q+1}[X_q, B], X_q + \pi^{q+1}A] \\ &\equiv 2X_q + \pi^{q+1}(U + [[A, Y_q], X_q] + [[X_q, B], X_q] + [H_q, A]) \\ &\equiv 2X_{q+1} + \pi^{q+1}(U - 2A + [X_q, [Y_q, A]] - [X_q, [X_q, B]] + [H_q, A])\end{aligned}$$

(25) $\quad [H_{q+1}, Y_{q+1}] \equiv -2Y_{q+1} + \pi^{q+1}(V + 2B + [Y_q, [Y_q, A]] - [Y_q, [X_q, B]] + [H_q, B])$

Par suite (20-($q+1$)) et (21-($q+1$)) sont équivalentes aux deux conditions :

(26) $\quad \overline{U} = (\operatorname{Ad} \overline{X}_0)^2(\overline{B}) + (2 - \operatorname{Ad} \overline{H}_0 - \operatorname{Ad} \overline{X}_0 \operatorname{Ad} \overline{Y}_0)(\overline{A})$

(27) $\quad \overline{V} = -(\operatorname{Ad} \overline{Y}_0)^2(\overline{A}) - (2 + \operatorname{Ad} \overline{H}_0 - \operatorname{Ad} \overline{Y}_0 \operatorname{Ad} \overline{X}_0)(\overline{B}).$

Mais d'après les Lemmes 1.2 et 1.3 et l'hypothèse $(\operatorname{Ad} \overline{X}_0)^m = 0$ avec $2m \leqslant p - 1$, la restriction à la sous-algèbre $\overline{\mathfrak{l}}$ engendrée par $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ et $\overline{H}_0$ de la représentation adjointe

de $\bar{\mathfrak{g}}$ est complètement réductible et somme directe de représentation du type ρ_j avec $1 \leqslant j \leqslant m$. Pour montrer l'existence de A et B satisfaisant à (26) et (27), il nous suffit donc de démontrer ceci : si $u = \sum_{r=1}^{r=j} u_r e_r$ et $v = \sum_{r=1}^{r=j} v_r e_r$ sont deux éléments de k^j satisfaisant à

$$\rho_j(\bar{X}_0)(v) = \rho_j(\bar{Y}_0)(u) \tag{23 bis}$$

alors il existe $a = \Sigma a_r e_r$ et $b = \Sigma b_r e_r$ dans k^j satisfaisant à des équations analogues à (26) et (27). En utilisant les formules (9), on trouve que les équations sont équivalentes au système d'équations $(1 \leqslant r \leqslant j)$:

$$u_r = (r+1)(r+1-j)(a_r + r(r-j)b_{r+2}) \tag{I_r}$$

$$v_r = -a_{r-2} - (r-2)(r-2-j)b_r \tag{II_r}$$

(en posant par convention $a_{-1} = a_0 = b_{j+1} = b_{j+2} = 0$), tandis que (23 *bis*) donne les conditions :

$$u_r = (r+1)(j-r-1)v_{r+2} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant r \leqslant j-2 \tag{C_r}$$

$$u_{j-1} = v_2 = 0. \tag{C'}$$

Mais (C_r) montre que I_r et II_{r+2} sont équivalentes pour $1 \leqslant r \leqslant j-2$ et on y satisfait en prenant par exemple $b_{r+2} = 0$ et $a_r = -v_{r+2}$. Les équations I_{j-1} et II_2 se réduisent à $u_{j-1} = 0$ et $v_2 = 0$ et sont donc conséquences de (C').

Enfin les équations I_j et II_1 donnent

$$u_j = (j+1)a_j \qquad v_1 = -(j+1)b_1$$

et déterminent a_j et b_1 puisque $j \leqslant m < p-1$ (a_{j-1} et b_2 sont arbitraires).

Remarquons que l'on peut appliquer à la sous-algèbre I engendrée par X, Y, H les résultats des n^{os} 1 et 2 : en particulier, la représentation adjointe de I dans $\mathfrak{g}$ est somme directe de représentations du type ρ_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et se réduit modulo $\mathfrak{p}$ sans aucune pathologie.

Nous allons maintenant montrer qu'en imposant à $X \in \mathfrak{g}$ des conditions de nilpotence encore plus fortes, on peut plonger X lui-même dans une sous-algèbre de Lie standard, ce qui sera fondamental dans la suite. Supposant toujours que $\mathfrak{g}$ satisfait à (T), nous désignerons par S(m) (pour un entier $m \leqslant \frac{1}{2}(p-1)$) l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$, tels que $X \notin \mathfrak{pg}$ et que $(\mathrm{Ad}\, X)^m = \rho(X)^m = 0$. Pour $X \in S(m)$, le noyau $N_{0,r}(\rho, X)$ de $\rho(X)^r$ est un sous-$\mathfrak{O}$-module facteur direct dans M (comme tout noyau d'endomorphisme d'un module libre de type fini sur un anneau principal). Nous poserons $n_r(X) =$ rang de $N_{0,r}(\rho, X)$ et $n(X) = (n_1(X), \ldots, n_{m-1}(X))$. Mettons sur S($m$) le *préordre* image réciproque par l'application $X \to n(X)$ de l'ordre *lexicographique* sur N^{m-1}. L'ensemble des $n(X)$ étant fini, il y a des éléments maximaux dans S(m), dès que S(m) n'est pas vide.

Lemme (**4.2**). — *Si* X *est un élément maximal de* S(m) *(avec* $2m \leqslant p-1$*) alors il existe* Y *et* H *dans* $\mathfrak{g}$ *satisfaisant aux relations* (S).

D'après le Lemme 4.1, il existe $X_0, Y_0, H_0 \in \mathfrak{g}$ satisfaisant aux relations (S) et à $X_0 \equiv X$ modulo $\mathfrak{pg}$. On a de plus $\rho(X_0)^m = 0$ et les Lemmes 2.1 et 1.2 montrent que M est somme directe de sous-modules $M_{j,i}$ $(1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant j)$ qui sont libres de type fini. On en déduit qu'il existe une base $(e_{j,i,s})$ (pour $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant j$ et $1 \leqslant s \leqslant d(j) =$ rang de $M_{j,i}$) telle que les opérateurs $\rho(X_0)$, $\rho(Y_0)$ et $\rho(H_0)$ soient donnés par des formules analogues à (9) (où l'on remplace e_i par $e_{j,i,s}$).

Soit alors r un entier compris entre 1 et m et soit L_r le sous-$\mathfrak{D}$-module de M sous-tendu par les $e_{j,i,s}$ pour $r < i \leqslant j$: le module M est *somme directe* de L_r et du noyau $N_{0,r}(\rho, X_0)$ de $\rho(X_0)^r$.

Montrons que $L_r \cap N_{0,r}(\rho, X) = \{0\}$: supposons en effet qu'il existe un $x \neq 0$ appartenant à $L_r \cap N_{0,r}(\rho, X)$. Comme L_r et $N_{0,r}$ sont facteurs directs dans M, on peut supposer que $x \notin \mathfrak{p}M$, ou encore $\bar{x} \neq 0$. Mais ceci est impossible, car $\bar{x} \in \bar{L}_r \cap N_{0,r}(\bar{\rho}, \bar{X}_0)$ qui est réduit à $\{0\}$.

Il en résulte que la somme $L_r + N_{0,r}(\rho, X)$ est directe et que :

$$n_r(X) = \text{rang } N_{0,r}(\rho, X) \leqslant \text{rang } M - \text{rang } L_r = \text{rang } N_{0,r}(\rho, X_0) = n_r(X_0).$$

Mais comme $X_0 \in S(m)$ et que X est maximal dans $S(m)$, on a nécessairement $n_r(X) = n_r(X_0) = \dim_k N_{0,r}(\bar{\rho}, \bar{X})$. Il en résulte que *l'image de* $N_{0,r}(\rho, X)$ *dans* $\bar{M}$ *coïncide avec* $N_{0,r}(\bar{\rho}, \bar{X})$.

Par suite chaque élément $\bar{e}_{j,i,s}$ (pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et $1 \leqslant s \leqslant d(j)$) est image d'un élément $f_{j,s} \in N_{0,j}(\rho, X)$. Comme les images $\bar{\rho}(\bar{X})^i \bar{e}_{j,i,s}$ des éléments $\rho(X)^i f_{j,s}$ forment (pour $1 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant i \leqslant j-1$ et $1 \leqslant s \leqslant d(j)$) une *base* de $\bar{M}$, il résulte de lemme de Nakayama que les éléments $\rho(X)^i f_{j,s}$ forment une base de M, et la matrice de $\rho(X)$ par rapport à cette base convenablement numérotée est un *tableau diagonal de matrices de Jordan* puisque $\rho(X)^j f_{j,s} = 0$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer le Lemme 3.3.

II

RÉSEAUX DE CHEVALLEY

Nous supposons désormais que P est de *caractéristique zéro* et que la caractéristique p du corps résiduel est différente de 2, 3, 5 et 7.

5. Rappels sur les algèbres de Lie anticompactes (voir [5]).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie *réductive* sur P. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dite *décomposée* si les opérateurs $\operatorname{Ad} H$ sont diagonalisables (sur P) pour $H \in \mathfrak{h}$. Nous dirons que $\mathfrak{g}$ est *anticompacte* [1] si elle possède une sous-algèbre de Cartan décomposée, ce que nous supposons désormais. On sait que deux sous-algèbres de Cartan décomposées sont conjuguées par un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et que tout élément $H \in \mathfrak{g}$ tel que l'opérateur $\operatorname{Ad} H$ soit diagonalisable sur P est contenu dans une sous-algèbre de Cartan décomposée.

Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre (semi-simple) *dérivée* de $\mathfrak{g}$ et posons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$: on obtient une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}'$. On sait que si ρ est une représentation linéaire de $\mathfrak{g}'$, la restriction de ρ à $\mathfrak{h}'$ est somme directe de représentations de dimension 1, ou encore de *formes linéaires* (définies sur P) qui sont les *poids* de ρ relatifs à $\mathfrak{h}'$. Les poids des différentes représentations de $\mathfrak{g}'$ forment un sous-groupe additif du dual de $\mathfrak{h}'$, appelé *groupe des poids*. C'est un groupe commutatif libre de rang égal au rang de $\mathfrak{g}'$, c'est-à-dire à la dimension de $\mathfrak{h}'$. Un élément $H \in \mathfrak{h}'$ est appelé un *copoids* si $\omega(H) \in \mathfrak{O}$ pour tout poids ω. Les copoids forment un sous-$\mathfrak{O}$-module de $\mathfrak{h}'$, libre de rang égal à la dimension de $\mathfrak{h}'$, c'est-à-dire un *réseau* de $\mathfrak{h}'$.

Par ailleurs, on appelle *racine* de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ les poids $\neq 0$ de la restriction de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}$. On notera $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (ou $\Sigma(\mathfrak{g})$) l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ et un élément $H \in \mathfrak{h}$ sera appelé dans ce travail une *coracine* si $\alpha(H) \in \mathfrak{O}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g})$.

Pour toute racine α, le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ des éléments *radiciels* attachés à α, c'est-à-dire des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[H, X] = \alpha(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, est de dimension 1 et $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{h}$ et des $\mathfrak{g}_\alpha$. Il existe dans $\mathfrak{h}$ un élément H_α unique appartenant à $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ et satisfaisant à $\alpha(H_\alpha) = 2$. Cet élément est un *copoids*. Plus précisément, soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ un système fondamental de racines (c'est-à-dire un système de r racines linéairement indépendantes tel que toute racine soit combinaison linéaire à coefficients entiers tous

(1) Ou encore « déployée ».

de même signe de ces racines) : alors les copoids H_{α_i} forment une base du module des copoids. Par ailleurs, il existe une base $u_1, \ldots, u_r$ du groupe des poids telle que $u_i(H_{\alpha_j})=0$ pour $i\neq j$ et 1 pour $i=j$: ce sont les *poids fondamentaux* de Cartan. Les *entiers de Cartan* sont les nombres entiers $a_{jk}=\alpha_j(H_{\alpha_k})$: on a $a_{jj}=2$ et $-3\leqslant a_{jk}\leqslant 0$ pour $j\neq k$. On a $\alpha_j=\sum_k a_{jk}u_k$. Pour qu'un élément $H=\sum_j x_j H_{\alpha_j}\in\mathfrak{h}'$ soit une *coracine*, il faut et il suffit que $\sum_j a_{kj}x_j\in\mathfrak{O}$ pour $k=1, 2, \ldots, n$. En particulier l'intersection avec $\mathfrak{h}'$ du module des coracines coïncide avec le module des copoids si et seulement si $\det(a_{jk})$ est un entier *inversible* dans $\mathfrak{O}$. Dans le cas où $\mathfrak{g}'$ est *simple* ceci est toujours vérifié sauf si $\mathfrak{g}'$ est du type (A_r) avec p divisant $r+1$. (Si les valeurs 2 et 3 de p n'étaient pas exclues, il faudrait également exclure ici le type (E_6) pour $p=3$ et les types (B_r), (C_r) et (E_7) pour $p=2$.)

6. Réseau de Chevalley.

Chevalley a montré [5] qu'on peut choisir dans chaque sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ un élément $X_\alpha\neq 0$ de telle sorte que les relations suivantes soient satisfaites :

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}]=H_\alpha \qquad \text{pour toute racine } \alpha \tag{28}$$

$$[X_\alpha, X_\beta]=0 \qquad \text{si } \alpha+\beta\neq 0 \text{ n'est pas racine} \tag{29}$$

$$[X_\alpha, X_\beta]=N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} \qquad \text{si } \alpha+\beta \text{ est racine} \tag{30}$$

avec $N_{\alpha,\beta}=\pm(q+1)$, où q est le plus grand entier tel que $\beta-q\alpha$ soit racine. Un tel système d'éléments radiciels sera appelé dans ce qui suit une *base de Chevalley* de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{h}$. Ce n'est en réalité qu'une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Si (X'_α) est une autre base de Chevalley associée à $\mathfrak{h}$, il existe un homomorphisme f du groupe additif engendré par les racines, dans le groupe multiplicatif P^*, tel que :

$$X'_\alpha=\pm f(\alpha)X_\alpha \qquad \text{pour toute racine } \alpha. \tag{31}$$

Nous appellerons *réseau de Chevalley* défini par la base de Chevalley (X_α) le sous-$\mathfrak{O}$-module R engendré par les X_α et les copoids. Il est immédiat que R est stable par le crochet et est donc une sous-$\mathfrak{O}$-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Comme on a $H_\alpha=[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ et $X_\alpha=\frac{1}{2}[H_\alpha, X_\alpha]$, on a $R=[R, R]$ (en désignant par $[R, R]$ le sous-$\mathfrak{O}$-module engendré par les crochets d'éléments de R) et R est un *réseau dans* $\mathfrak{g}'$.

Soit maintenant B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$:

$$B(X, Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\, X\, \mathrm{Ad}\, Y).$$

On sait que la restriction de B à $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{h}'$) est non dégénérée. Plus précisément, on a :

$$\begin{cases} B(X_\alpha, X_\beta)=0 & \text{si} \quad \beta\neq -\alpha \\ B(X_\alpha, X_{-\alpha})=B(H_\alpha, H_\alpha) & \\ B(X_\alpha, H)=0 & \text{pour} \quad H\in\mathfrak{h} \end{cases} \tag{32}$$

et $B(H_\alpha, H_\alpha)$ est un *entier rationnel* >0. Si $\mathfrak{g}'$ est simple et si l'on choisit une racine α telle que $B(H_\alpha, H_\alpha)$ soit minimum, alors les nombres $B(H_\beta, H_\beta)/B(H_\alpha, H_\alpha)$ sont égaux à 1, 2 ou 3 (l'entier 3 n'intervenant que si $\mathfrak{g}'$ est du type (G_2)). Par suite, l'idéal engendré dans $\mathfrak{O}$ par $B(H_\alpha, H_\alpha)$ est indépendant du choix de α. Cet idéal est l'*idéal unité* sauf dans les cas suivants : $\mathfrak{g}'$ est de type

$$(33)\qquad \begin{cases} (A) & \text{avec } p \text{ divisant } r+1 \\ (B_r) & \text{avec } p \text{ divisant } 2r-1 \\ (C_r) & \text{avec } p \text{ divisant } r+1 \\ (D_r) & \text{avec } p \text{ divisant } r-1 \end{cases}$$

(pour les groupes exceptionnels, les valeurs de p à exclure seraient uniquement 2, 3 et 5 (pour (E_8)) qui sont déjà exclues).

Par ailleurs, soit R le réseau de Chevalley de $\mathfrak{g}'$ défini par une base de Chevalley. Comme $(\mathrm{Ad}\, X)(R) \in R$ pour $X \in R$, les matrices des opérateurs $\mathrm{Ad}\, X$ pour $X \in R$ par rapport à une base de R sur $\mathfrak{O}$ (qui est aussi une base de $\mathfrak{g}'$ sur P) sont à coefficients dans $\mathfrak{O}$ et par suite la restriction de B à $R \times R$ est une forme $\mathfrak{O}$-bilinéaire *à valeurs dans* $\mathfrak{O}$.

Lemme (**6.1**). — *Si aucune des composantes simples de* $\mathfrak{g}'$ *n'est de l'un des types exclus en* (33), *la restriction à* R *de la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$ *est fortement non dégénérée.*

Soit en effet $X = H_0 + \Sigma \lambda_\alpha X_\alpha \in R - \mathfrak{p}R$. Si $\lambda_\alpha \notin \mathfrak{p}$, on a

$$B(X, X_{-\alpha}) = \lambda_\alpha B(H_\alpha, H_\alpha) \in \mathfrak{O}^*,$$

car H_α appartient à l'un des composants simples $\mathfrak{s}_i$ de $\mathfrak{g}'$ et la restriction à $\mathfrak{s}_i$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est égale à la forme de Killing de $\mathfrak{s}_i$. Si tous les coefficients λ_α appartiennent à l'idéal $\mathfrak{p}$, alors $H_0 \notin \mathfrak{p}(\mathfrak{h} \cap R)$ et il existe un poids ω tel que $\omega(H_0) \in \mathfrak{O}^*$. Comme la restriction de B à $\mathfrak{h}'$ est non dégénérée (sur P), il existe un $A \in \mathfrak{h}'$ tel que

$$\omega(H) = B(H, A) \qquad \text{pour} \quad H \in \mathfrak{h}'.$$

Pour toute racine α, on a alors :

$$\alpha(A) = 2\frac{B(A, H_\alpha)}{B(H_\alpha, H_\alpha)} = 2\frac{\omega(H_\alpha)}{B(H_\alpha, H_\alpha)} \in \mathfrak{O}$$

et A est une *coracine*, donc un *copoids* puisque aucun composant simple de $\mathfrak{g}'$ n'est du type (A_r) avec p divisant $r+1$. Donc $A \in R$ et on a

$$B(X, A) = B(H_0, A) = \omega(H_0) \in \mathfrak{O}^*.$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit *simple* et de l'un des types exclus en (33), soit (T_r) avec $T = A, B, C$ ou D. On peut alors plonger $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre simple anticompacte $\tilde{\mathfrak{g}}$ du type (T_{r+1}) de la manière évidente. Le centralisateur $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ est alors de dimension 1, et si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Une *racine* α de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$, prolongée par 0 sur $\mathfrak{a}$, devient une racine (notée encore α) de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$. Le copoids H_α est le même

dans $\mathfrak{g}$ ou dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, puisque c'est l'unique élément de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha)=2$. Une base de Chevalley (X_α) de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{h}$ est une partie d'une base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et le réseau de Chevalley R de $\mathfrak{g}$ correspondant est un sous-module du réseau de Chevalley $\tilde{R}$ défini par la base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Posons $\overline{R}=\tilde{R}\cap(\mathfrak{g}+\mathfrak{a})$. On obtient ainsi un *réseau* de $\mathfrak{g}+\mathfrak{a}=\mathfrak{g}+\tilde{\mathfrak{h}}$ et $\tilde{R}$ est *somme directe orthogonale* (pour la forme de Killing $\tilde{B}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$) de R et des sous-modules $\tilde{R}\cap\tilde{\mathfrak{g}}_\beta$, où β décrit l'ensemble des racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$ suivant $\tilde{\mathfrak{h}}$ qui ne proviennent pas de racines de $\mathfrak{g}$. Comme $\tilde{\mathfrak{g}}$ est simple d'un type non exclu, il en résulte que la *restriction de* $\tilde{B}$ *à* $\overline{R}$ *est fortement non dégénérée.*

Remarquons que $\overline{R}$ est engendré par les X_α et par les *copoids* de $\tilde{\mathfrak{g}}$, ou encore par les *coracines* de $\tilde{\mathfrak{g}}$ puisque $\tilde{\mathfrak{g}}$ est simple de type $\neq(A_r)$ avec p divisant $r+1$. Par suite $\overline{R}\cap\tilde{\mathfrak{h}}$ contient les copoids de $\mathfrak{g}$ et est formé de *coracines* de $\mathfrak{g}$. Il en résulte aussitôt que

$$[\overline{R}, \overline{R}]=R. \tag{34}$$

Finalement, nous avons démontré la

Proposition **(6.2).** — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple anticompacte sur* P, $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan décomposée,* R *le réseau de Chevalley défini par une base de Chevalley associée à* $\mathfrak{h}$. *Il existe une algèbre de Lie semi-simple anticompacte* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *contenant* $\mathfrak{g}$, *une sous-algèbre de Cartan décomposée* $\tilde{\mathfrak{h}}$ *de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *contenant* $\mathfrak{h}$, *un réseau* $\overline{R}$ *de* $\mathfrak{g}+\tilde{\mathfrak{h}}$ *et un réseau* $\tilde{R}$ *de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *tels que*

(35) $[\overline{R}, \tilde{R}]\subset\tilde{R}$

(36) *la restriction à* $\overline{R}$ *de la forme de Killing de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ (*qui est à valeurs dans* $\mathfrak{O}$ *d'après* (35)) *est fortement non dégénérée.*

(37) $[\overline{R}, \overline{R}]=R.$

7. Ordres d'une algèbre de Lie réductive anticompacte.

Nous allons dans ce numéro montrer que réciproquement les conditions (35), (36) et (37) *caractérisent* les réseaux de Chevalley. Changeant légèrement de notation, nous supposons que $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur P et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre *réductive* de $\tilde{\mathfrak{g}}$, de rang égal à celui de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soient $\mathfrak{a}$ le *centre* de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$: nous supposons que $\mathfrak{g}'$ est *anticompacte* et que les opérateurs $\mathrm{Ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}} H$ sont diagonalisables sur P pour tout $H\in\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}'$: alors $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et aussi de $\mathfrak{g}$. C'est en effet une sous-algèbre commutative de dimension égale au rang de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et composée d'éléments diagonalisables sur P.

Nous appellerons *ordre* de $\mathfrak{g}$ (associé au plongement donné de $\mathfrak{g}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$) un *réseau* R de $\mathfrak{g}$, *stable par le crochet* (donc une sous-$\mathfrak{O}$-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, de type fini comme $\mathfrak{O}$-module et engendrant $\mathfrak{g}$), tel qu'il existe un *réseau* $\tilde{R}$ *de* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *satisfaisant aux conditions* (35) *et* (36) (où l'on remplace $\overline{R}$ par R).

Théorème (7.1). — *Soient* R_1 *et* R_2 *deux ordres de* $\mathfrak{g}$. *Il existe une sous-algèbre de Cartan décomposée* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$, *une base de Chevalley* (X_α) *de* $\mathfrak{g}$ *associée à* $\mathfrak{h}$, *un système fondamental* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *de racines de* $\mathfrak{g}$ *suivant* $\mathfrak{h}$ *et des entiers naturels* $t_1, \ldots, t_r$ *positifs tels que :*

(i) R_k *est (pour* $k=1, 2$) *somme des sous-modules* $R_k \cap \mathfrak{h}$ *et* $[R_k, R_k]$;

(ii) $[R_1, R_1]$ *est le réseau de Chevalley de l'algèbre dérivée* $\mathfrak{g}'$ *de* $\mathfrak{g}$ *défini par la base de Chevalley* (X_α).

(iii) $[R_2, R_2]$ *est le réseau de Chevalley de* $\mathfrak{g}'$ *associée à la base de Chevalley* $(\pi^{t(\alpha)}X_\alpha)$, *où l'on a posé* $t(\alpha)=\sum_i n_i t_i$ *si* $\alpha=\sum_i n_i\alpha_i$.

Remarquons que (i) et (ii) par exemple entraînent que R_1 est somme directe des sous-modules $R_1\cap\mathfrak{h}$ et $R_1\cap\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ et que $R_1\cap\mathfrak{h}$ est composé de *coracines*.

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur la *dimension* de $\mathfrak{g}'$; il est trivial pour $\mathfrak{g}'=\{0\}$ puisque $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ est alors commutative.

Supposons donc $\mathfrak{g}'\neq\{0\}$ et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}$ (et de $\tilde{\mathfrak{g}}$).

Lemme (7.1). — *Si* $\mathfrak{g}'\neq\{0\}$, *il existe des éléments* $X\neq 0$ *tels que* $(\mathrm{Ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}} X)^4=0$.

Écrivons $\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{h}+\sum_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$: on a alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_\alpha(\mathfrak{g}\cap\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$, l'un au moins des sous-espaces $\mathfrak{g}\cap\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ étant $\neq\{0\}$. Il suffit alors de prendre un $X\neq 0$ dans un tel sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}\cap\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha=\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$: on sait en effet que si β est une racine, alors $\beta+4\alpha$ n'est jamais racine. Or $(\mathrm{Ad}\,X)^4(\mathfrak{g}_\beta)\subset\mathfrak{g}_{\beta+4\alpha}$ et $(\mathrm{Ad}\,X)^2(\mathfrak{h})=\{0\}$.

Désignons alors par S l'ensemble des $X\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ tels que $(\mathrm{Ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}X)^4=0$ et par M le sous-ensemble des éléments de S *maximaux* pour le préordre sur S image réciproque de l'ordre lexicographique par l'application $X\to(n_1(X), n_2(X), n_3(X))$ (où $n_i(X)=$dimension du noyau de $(\mathrm{Ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}X)^i$).

Puisque $M\neq\emptyset$ et que R_1 est un *réseau* de $\mathfrak{g}$, il existe un $X\in R_1\cap M$ avec $\pi^{-1}X\notin R_1$. Comme $n_i(X)$ est aussi le rang sur $\mathfrak{O}$ du sous-module noyau de $(\mathrm{Ad}\,X)^i$ dans le réseau $\tilde{R}_1$, on peut appliquer le Lemme 4.1 à la $\mathfrak{O}$-algèbre de Lie R_1. Par suite, il existe Y et $H\in R_1$ satisfaisant aux relations (S) et on a $\pi^{-1}Y\notin R_1$, $Y\in R_1\cap M$ et $\mathrm{Ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}H$ est diagonalisable de valeurs propres entières comprises entre -3 et $+3$.

D'autre part soit A un élément non nul de R_1 (resp. R_2) : nous désignerons par $t_1(A)$ (resp. $t_2(A)$) *le plus petit entier* tel que $\pi^{t_1(A)}A\in R_2$ (resp. $\pi^{t_2(A)}A\in R_1$). Il est clair qu'un tel entier existe et reste borné supérieurement par un entier t_1 (resp. t_2), lorsque A décrit $R_1-\{0\}$ (resp. $R_2-\{0\}$). De plus, soit $A\in R_1$, tel que $\pi^{-1}A\notin R_1$: alors $A'=\pi^{t_1(A)}A\in R_2$, $\pi^{-1}A'\notin R_2$ et on a :

$$t_2(A')=-t_1(A) \tag{38}$$

Par suite, on a $-t_2\leqslant t_1(A)\leqslant t_1$.

Reprenons alors nos éléments X, Y, H de R_1 trouvés plus haut et supposons que

nous soyons partis d'un élément $X \in R_1 \cap M$ et $X \notin \pi^{-1}R_1$ pour lequel l'entier $t_1(X)$ est *le plus petit possible*. On a $\pi^{t_1(X)}X \in R_2$ et $\pi^{t_1(Y)}Y \in R_2$, donc

$$\pi^{t_1(X)+t_1(Y)}H \in R_2$$

d'où :

$$t_1(X)+t_1(Y) \geqslant t_1(H). \tag{39}$$

Mais Ad H est diagonalisable de valeurs propres entières, l'une de ces valeurs propres étant l'entier 2 qui appartient à $\mathfrak{O}^*$. L'opérateur $\mathrm{Ad}(\pi^{t_1(H)}H)$ admet donc la valeur propre $2\pi^{t_1(H)}$. Mais comme cet opérateur laisse stable le *réseau* R_2, ses valeurs propres sont nécessairement des éléments de la clôture intégrale de $\mathfrak{O}$, ce qui nécessite :

$$t_1(H) \geqslant 0 \tag{40}$$

Le même raisonnement montre que $\pi^{-1}H \notin R_1$.

Refaisons alors les mêmes raisonnements en échangeant les rôles des ordres R_1 et R_2 et en remplaçant X par l'élément $Y' = \pi^{t_1(Y)}Y$, qui est un élément de $R_2 \cap M$ vérifiant $\pi^{-1}Y' \notin R_2$. On trouve ainsi deux éléments $X_1' \in R_2$ et $H_1' \in R_2$ satisfaisant avec Y' aux relations (S) et vérifiant comme plus haut :

$$t_2(X_1')+t_2(Y') \geqslant t_2(H_1') \geqslant 0 \tag{41}$$

Posons $X_1 = \pi^{t_2(X_1')}X_1'$: alors $X_1 \in R_1 \cap M$ et $\pi^{-1}X_1 \notin R_1$. De plus on a :

$$t_1(X_1)+t_1(Y) = -(t_2(X_1')+t_2(Y')) \leqslant 0 \leqslant t_1(X)+t_1(Y) \tag{42}$$

d'où $t_1(X_1) \leqslant t_1(X)$ et comme $t_1(X)$ a *la plus petite valeur possible*, on a nécessairement $t_1(X_1) = t_1(X)$, d'où l'on déduit aussitôt que les inégalités (39) à (42) sont en réalité des *égalités*. En particulier, on a :

$$t_1(X)+t_1(Y) = t_1(H) = 0 \tag{43}$$

et nous avons démontré le Lemme suivant :

Lemme (**7.2**). — *Il existe un élément* $H \in R_1 \cap R_2$, *tel que* $\pi^{-1}H \notin R_1 \cup R_2$ *et que l'opérateur* $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}H$ *soit diagonalisable de valeurs propres entiers naturels compris entre* -3 *et* $+3$.

Désignons alors par $\mathfrak{g}_i$ $(-3 \leqslant i \leqslant +3)$ le sous-espace propre de Ad H dans $\mathfrak{g}$ associé à la valeur propre i. En particulier $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et est réductive, car $\mathfrak{g}_0$ n'est autre que le *centralisateur* de l'élément semi-simple H. De plus, comme $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}H$ est diagonalisable, H est contenu dans une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}$, qui est aussi une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}_0$. Enfin $\mathfrak{g}_0$ ne contient pas $\mathfrak{g}'$ (puisque $X \notin \mathfrak{g}_0$) et par suite $\dim[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] < \dim \mathfrak{g}'$. Enfin on a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ et $\mathfrak{g}_i$ est orthogonal à $\mathfrak{g}_j$ (si $j \neq -i$) pour la forme de Killing $\widetilde{B}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

D'autre part soit $A \in R_k$ $(k = 1, 2)$, et posons $A = \sum_{i=-3}^{i=+3} A_i$ avec $A_i \in \mathfrak{g}_i$. On a :

$$(\mathrm{Ad}\ H)^j A = \sum_{i=-3}^{i=3} i^j A_i \in R_k \tag{44}$$

et comme les entiers de 1 à 6 sont inversibles dans $\mathfrak{O}$, le déterminant $\det_{\substack{-3\leqslant i\leqslant +3\\ 0\leqslant j\leqslant 6}}(i^j)$ est inversible dans $\mathfrak{O}$.

Il en résulte aussitôt que chaque $A_i\in R_k$, c'est-à-dire que R_k est *somme directe* des $R_k\cap\mathfrak{g}_i$, et $\widetilde{B}$ *met en dualité les* $\mathfrak{O}$*-modules* $R_k\cap\mathfrak{g}_i$ et $R_k\cap\mathfrak{g}_{-i}$. Par suite $R_k\cap\mathfrak{g}_0$ *est* (*pour* $k=1, 2$), *un* ordre *de l'algèbre réductive anticompacte* $\mathfrak{g}_0$ (relatif au plongement donné de $\mathfrak{g}_0$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$).

Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux ordres $R_k\cap\mathfrak{g}_0$. En particulier, il existe une sous-algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_0$ (et aussi de $\mathfrak{g}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$) telle que :

$$R_k\cap\mathfrak{g}_0=R_k\cap\mathfrak{h}+\sum_{\beta}R_k\cap\mathfrak{g}_{0,\beta} \tag{45}$$

(pour $k=1, 2$, la somme étant étendue aux racines β de $\mathfrak{g}_0$ suivant $\mathfrak{h}$).

Lemme (**7.3**). — $R_k\cap\mathfrak{h}$ *contient* (*pour* $k=1, 2$) *les copoids de* $\mathfrak{g}$ *associés à* $\mathfrak{h}$.

Soit $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{g})$ et prenons un élément $X_\alpha\in R_k\cap\mathfrak{g}_\alpha$ tel que $\pi^{-1}X_\alpha\notin R_k$. Il existe alors un élément et un seul, soit Y_α, de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ et l'élément $\widetilde{B}(X_\alpha, Y_\alpha)$ est un entier rationnel égal à $\widetilde{B}(H_\alpha, H_\alpha)$.

Supposons tout d'abord que α soit une racine de $\mathfrak{g}_0$ (autrement dit, on a $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_0$ ou encore $\alpha(H)=0$). Puisque la restriction de $\widetilde{B}$ à $R_k\cap\mathfrak{g}_0$ est fortement non dégénérée et que $\mathfrak{g}_\alpha$ est orthogonale pour $\widetilde{B}$ à $\mathfrak{h}$ et aux $\mathfrak{g}_\beta$ pour $\beta\neq-\alpha$, il doit exister d'après (45) un élément $Y\in R_k\cap\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $\widetilde{B}(X_\alpha, Y)=1$. On a alors $Y_\alpha=\widetilde{B}(X_\alpha, Y_\alpha)Y\in R_k$, donc $H_\alpha=[X_\alpha, Y_\alpha]\in R_k$.

Si maintenant α n'est pas une racine de $\mathfrak{g}_0$, on a $\alpha(H)=i\neq 0$, et $X_\alpha\in R_k\cap\mathfrak{g}_i$. Il existe donc un $Y\in R_k\cap\mathfrak{g}_{-i}$ tel que $B(X_\alpha, Y)=1$.

Décomposons Y suivant les sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$:

$$Y=\lambda Y_\alpha+\sum_{\beta(H)=-i,\ \beta\neq-\alpha}Y_\beta,\qquad Y_\beta\in\mathfrak{g}_\beta. \tag{46}$$

Comme $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont orthogonaux, on a $\widetilde{B}(X_\alpha, Y)=\lambda\widetilde{B}(X_\alpha, Y_\alpha)$ d'où $\lambda\notin\mathfrak{p}$ et $\lambda^{-1}\in\mathfrak{O}$. De plus, on a :

$$[X_\alpha, Y]=\lambda H_\alpha+\sum_{\beta(H)=-i,\ \beta\neq-\alpha}[X_\alpha, Y_\beta] \tag{47}$$

et $[X_\alpha, Y_\beta]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Comme $\alpha(H)+\beta(H)=0$, on a $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}\subset\mathfrak{g}_{0,\alpha+\beta}$ et comme $R_k\cap\mathfrak{g}_0=R_k\cap\mathfrak{h}+\sum_{\beta}R_k\cap\mathfrak{g}_{0,\beta}$, il résulte de (47) que $\lambda H_\alpha\in R_k$, donc $H_\alpha\in R_k$.

Nous allons montrer maintenant que

$$R_k=R_k\cap\mathfrak{h}+\sum_{\alpha}R_k\cap\mathfrak{g}_\alpha. \tag{48}$$

Cela résultera immédiatement du Lemme suivant :

Lemme (**7.4**). — *Soient* $\mathfrak{g}'$ *une algèbre de Lie semi-simple sur* P *et* $\mathfrak{h}'$ *une sous-algèbre de Cartan décomposée de* $\mathfrak{g}'$. *Soit* ρ *une représentation de* $\mathfrak{g}'$ *dans un espace vectoriel* V.

On suppose que les valeurs $\omega(H_{\alpha_j})$ *prises par les poids* ω *de* ρ *sur les copoids* H_{α_j} *correspondant à un système fondamental de racines sont des entiers rationnels compris entre* $-m$ *et* $+m$ *avec* $2m \leqslant p-1$. *Soit* S *un réseau de* V *stable par les* $\rho(H_{\alpha_j})$. *Alors* S *est somme directe des sous-modules* $S \cap V_\omega$ *(où* ω *décrit l'ensemble des poids de* ρ *et où* V_ω *désigne le sous-espace des vecteurs de* V *de poids* ω*).*

Soit $x \in S$ et posons $x = \sum_\omega x_\omega$, $x \in V_\omega$. On a :

$$\rho(H_{\alpha_1})^q x = \sum_{i=-m}^{i=m} i^q \sum_{\omega(H_{\alpha_1})=i} x_\omega \in S. \tag{49}$$

Comme $2m < p$, on a $\det_{\substack{-m \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant 2m}} (i^q) \in \mathfrak{O}^*$ et (49) entraîne pour tout entier i_1 :

$$x_{i_1} = \sum_{\omega(H_{\alpha_1})=i_1} x_\omega \in S. \tag{50}$$

Recommençons le même raisonnement en remplaçant x par x_{i_1} et α_1 par α_2 : on montre ainsi que

$$x_{i_1 i_2} = \sum_{\omega(H_{\alpha_2})=i_2,\ \omega(H_{\alpha_1})=i_1} x_\omega \in S \tag{51}$$

etc. Finalement, on trouve que, quels que soient les entiers $i_1, \ldots, i_r$, l'élément

$$\sum_{\omega(H_{\alpha_1})=i_1, \ldots, \omega(H_{\alpha_r})=i_r} x_\omega$$

appartient à S. Mais comme les copoids H_{α_j} engendrent $\mathfrak{h}$, il y a au plus un poids ω satisfaisant aux conditions $\omega(H_{\alpha_j}) = i_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Nous avons donc bien montré que chacun des x_ω appartient à S, d'où le Lemme et la formule (48).

Soit alors (X_ω) une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{h}$. Il existe des entiers rationnels $n(\alpha)$ tels que $\pi^{n(\alpha)} X_\alpha$ soit un générateur de $R_1 \cap \mathfrak{g}_\alpha$. On doit avoir $\widetilde{B}(\pi^{n(\alpha)} X_\alpha, \pi^{n(-\alpha)} X_{-\alpha}) \in \mathfrak{O}^*$ et $\widetilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \in \mathfrak{O}$. D'où :

$$n(\alpha) + n(-\alpha) \leqslant 0.$$

Par ailleurs, on a :

$$[\pi^{n(\alpha)} X_\alpha, [\pi^{n(\alpha)} X_\alpha, \pi^{n(-\alpha)} X_{-\alpha}]] = -2\pi^{2n(\alpha)+n(-\alpha)} X_\alpha \in R_1$$

d'où (puisque $2 \in \mathfrak{O}^*$)

$$2n(\alpha) + n(-\alpha) \geqslant n(\alpha)$$

et finalement $n(\alpha) + n(-\alpha) = 0$.

D'autre part, supposons que α, β et $\alpha+\beta$ soient racines : alors $N_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{O}^*$. Comme

$$[\pi^{n(\alpha)} X_\alpha, \pi^{n(\beta)} X_\beta] = \pi^{n(\alpha)+n(\beta)} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} \in R_1$$

on a

$$n(\alpha) + n(\beta) \geqslant n(\alpha+\beta).$$

Mais le même raisonnement appliqué aux racines $\alpha+\beta$, $-\alpha$ et β montre que $n(\alpha+\beta)-n(\alpha)\geqslant n(\beta)$, d'où finalement $n(\alpha+\beta)=n(\alpha)+n(\beta)$ lorsque α, β et $\alpha+\beta$ sont racines. Il en résulte aussitôt que les éléments $X'_\alpha=\pi^{n(\alpha)}X_\alpha$ forment une *base de Chevalley* de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{h}$ et R_1 est engendré par les X'_α et $R_1\cap\mathfrak{h}$. Changeant nos notations, on peut supposer $X'_\alpha=X_\alpha$. Si $A\in R_1\cap\mathfrak{h}$, on a $[A, X_\alpha]=\alpha(A)X_\alpha\in R_1$ et par conséquent $\alpha(A)\in\mathfrak{O}$, A est une *coracine*. Comme R_1 contient les *copoids*, nous voyons que R_1 contient le *réseau de Chevalley* R'_1 de $\mathfrak{g}$ associé à la base (X_α) et est contenu dans le sous-module R''_1 engendré par R'_1 et les *coracines*. Comme $[R''_1, R''_1]=[R'_1, R'_1]=R'_1$, il en résulte l'assertion (i) du théorème.

D'autre part, les mêmes raisonnements faits à partir de R_2 et de la base de Chevalley (X_α) montrent que R_2 est engendré par $R_2\cap\mathfrak{h}$ et la base de Chevalley $(\pi^{t(\alpha)}X_\alpha)$ avec $t(\alpha+\beta)=t(\alpha)+t(\beta)$, $t(\alpha)=-t(-\alpha)$. L'ensemble E des racines α telles que $t(\alpha)\geqslant 0$ est alors stable pour l'addition et toute racine est contenue, soit dans E, soit dans son opposé. Il en résulte qu'il existe un système fondamental $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de racines contenu dans E. Posons $t_i=t(\alpha_i)$. On sait que pour toute racine β, il existe une suite $\beta_1, \ldots, \beta_k$ de racines avec $\beta_k=\beta$ telle que β_1 et les $\beta_j-\beta_{j-1}$ pour $1<j\leqslant k$ soient l'une des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ou leurs opposées. On en conclut aussitôt que si $\beta=\sum_i n_i\alpha_i$, on a $t(\beta)=\sum_i n_i t(\beta_i)$, ce qui achève la démonstration du théorème, l'assertion (iii) étant conséquence de (48).

Corollaire. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple anticompacte sur* P *et soient* R_1 *et* R_2 *deux réseaux de Chevalley de* $\mathfrak{g}$ *(associés à des sous-algèbres de Cartan décomposées* $\mathfrak{h}_1$ *et* $\mathfrak{h}_2$*). Il existe une sous-algèbre de Cartan décomposée* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$*, un système fondamental* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *de racines de* $\mathfrak{g}$ *suivant* $\mathfrak{h}$*, une base de Chevalley* (X_α) *de* $\mathfrak{g}$ *associée à* $\mathfrak{h}$ *et des entiers rationnels* $t_1, \ldots, t_r$ *positifs tels que*

(i) R_1 *est le réseau engendré par les* X_α *et les copoids* H_α *de* $\mathfrak{g}$ *suivant* $\mathfrak{h}$.

(ii) R_2 *est le réseau engendré par les copoids* H_α *et les* $\pi^{t(\alpha)}X_\alpha$ *(avec* $t(\sum_i n_i\alpha_i)=\sum_i n_i t_i$*).*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.1 et du théorème.

8. Représentations des réseaux de Chevalley.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple anticompacte, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan décomposée et R le réseau de Chevalley défini par une base de Chevalley (X_α) associée à $\mathfrak{h}$. Soit de plus $H_1, \ldots, H_r$ une base du $\mathfrak{O}$-module des copoids et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ un système fondamental de racines. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les racines positives rangées en un ordre quelconque; posons $A_i=X_{\beta_i}$, $B_i=X_{-\beta_i}$. Il est bien connu que les éléments $B_n^{f_n}\ldots B_1^{f_1}H_r^{g_r}\ldots H_1^{g_1}A_n^{h_n}\ldots A_1^{h_1}$ forment une base de l'algèbre enveloppante U de $\mathfrak{g}$ (pour f_i, g_j, h_k entiers $\geqslant 0$) et il est clair (puisque R est une $\mathfrak{O}$-algèbre de Lie) que ces éléments engendrent un sous-$\mathfrak{O}$-module U_0 de U qui est un *sous-anneau*.

Soit ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ dans un vectoriel V, de plus haut poids v, et soit $x\in V_v$, $x\neq 0$. On a alors $\rho(A_j)x=0$, $\rho(H_i)x=v(H_i)x$ et le $\mathfrak{O}$-module $S=\rho(U_0)x$ est sous-tendu par les éléments $\rho(B_1^{f_1}, \ldots, B_n^{f_n})x$, qui sont de poids $v-\sum_j f_j\beta_j$. Ces éléments

sont donc nuls sauf un nombre fini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de poids et que chaque poids ne peut s'écrire que d'un nombre fini de manière sous la forme précédente. Il en résulte que S est un *réseau* de V, stable par $\rho(R)$ [1]. Réciproquement :

Lemme **(8.1)**. — *Supposons que tous les poids* ω *de* ρ *soient* simples *et que* $\omega(H_{\alpha_j})$ *soit un entier compris entre* $-m$ *et* $+m$ *(avec* $2m \leqslant p-1$*) pour* $j = 1, 2, \ldots, r$. *Soit* S *un réseau de* V, *stable par* $\rho(R)$: *alors* S *est somme directe des* $\mathfrak{O}$*-modules* $S \cap V_\omega$ *et si* x *est un générateur de* $S \cap V_\omega$, *alors* $\rho(X_{\pm\alpha_j})x$ *est un générateur du* $\mathfrak{O}$*-module* $S \cap V_{\omega \pm \alpha_j}$. *Deux réseaux de* V *stables par* $\rho(R)$ *sont homothétiques.*

Nous avons déjà vu que S est somme directe des $S \cap V_\omega$ (Lemme 7.4). Posons $\alpha = \alpha_j$, $X = X_{\alpha_j}$, $Y = X_{-\alpha_j}$ et $H = H_{\alpha_j}$. Soit $\mathfrak{h}'$ le noyau de α dans $\mathfrak{h}$ et ω' la restriction de ω à $\mathfrak{h}'$. Soit V' le sous-espace formé des $x \in V$ tels que $\rho(H')x = \omega'(H')x$ pour $H' \in \mathfrak{h}'$. Le sous-espace V' est stable par la restriction ρ' de ρ à la sous-algèbre simple à 3 paramètres engendrée par X, Y et H, et ρ' restreinte à V' est somme directe de représentations ρ_j avec $j \leqslant m+1$ (avec les notations de I). Mais comme les poids de ρ sont simples et que la différence de deux poids de ρ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, et ne peut donc être égale à $\frac{1}{2}\alpha$, on voit aussitôt que la restriction de ρ' à V' est *irréductible* et est équivalente à l'une des représentations ρ_j du I, avec $j \leqslant m+1 < p$. Il suffit alors de regarder les formules (9) pour constater que si $x \in V_\omega$ et si $\omega + \alpha$ par exemple est un poids de ρ, alors $\rho(X_{-\alpha})\rho(X_\alpha)x = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathfrak{O}^*$. Il en résulte que si x est un générateur de $S \cap V_\omega$, alors $\rho(X_\alpha)x \in S \cap V_{\omega+\alpha}$ et $\pi^{-1}\rho(X_\alpha)x \notin S$, ce qui montre bien que $\rho(X_\alpha)$ est un générateur de $S \cap V_{\omega+\alpha}$. La dernière assertion du lemme est alors évidente.

---

[1] Chevalley a même montré qu'il existe toujours un réseau de V stable par les opérateurs $\frac{1}{k!}\rho(X_\alpha)^k$ (k entier $\geqslant 0$) [7].

III

LE SOUS-GROUPE K_R

Nous conservons les hypothèses et notations du II : $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie semi-simple anticompacte sur le corps P (qui est supposé de caractéristique zéro, la caractéristique p du corps résiduel étant différente de 2, 3, 5 et 7).

9. Rappels sur les poids.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan décomposée de $\mathfrak{g}$ et soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, opérant dans le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$: rappelons que W est le groupe (fini) engendré par les symétries S_α, définies pour $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ par :

$$S_\alpha(\varphi) = \varphi - \varphi(H_\alpha)\alpha \qquad (\varphi \in \mathfrak{h}^*) \tag{52}$$

Soit Π le groupe des poids de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et Σ le sous-groupe de Π engendré par les racines. On sait que Π/Σ est un groupe *fini*. Soit Σ_+ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers $\geqslant 0$ des racines fondamentales; Σ_+ est l'ensemble des éléments positifs pour une relation d'ordre notée $\geqslant$ sur Π. Les poids $\omega \in \Pi$ tels que $w.\omega \geqslant \omega$ pour tout $w \in W$ sont les poids *dominants* : on sait que tout poids est conjugué par W d'un poids dominant unique et que les poids dominants sont caractérisés par les relations $\omega(H_{\alpha_i}) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$. Ce sont encore les combinaisons linéaires à coefficients entiers $\geqslant 0$ des poids fondamentaux $u_1, \ldots, u_r$, et ce sont des combinaisons linéaires à *coefficients rationnels* $\geqslant 0$ des racines fondamentales. Rappelons aussi que toute représentation irréductible ρ de $\mathfrak{g}$ possède un plus haut poids, qui est simple et est un poids dominant, et que réciproquement tout poids dominant ω est le plus haut poids d'une représentation irréductible ρ_ω de $\mathfrak{g}$, unique à une équivalence près.

Soit maintenant Γ un sous-groupe de Π contenant Σ. Il résulte de (52) que Γ est *invariant par* W. Par suite Γ est engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et des poids dominants $\omega_1, \ldots, \omega_s$. On peut même supposer que les $\omega_1, \ldots, \omega_s$ satisfont à la condition suivante :

(PM) $\omega \neq 0$ *et il n'existe pas d'élément* $\beta \neq 0$ *appartenant à* Σ_+ *tel que* $\omega - \beta$ *soit un poids dominant (éventuellement nul).*

En effet, si $\omega \in \Gamma$, $\beta \in \Sigma_+$ alors $\omega - \beta \in \Gamma$ et ω appartient au sous-groupe engendré par $\omega - \beta$ et Σ. Notre assertion en résulte immédiatement, compte tenu de ce qu'il n'y a qu'un nombre fini de poids dominants majorés par un poids dominant donné.

Lemme (**9.1**). — *Soit* ω *un poids dominant satisfaisant à* (PM). *Les poids de la représentation* ρ *de plus haut poids* ω *sont tous transformés de* ω *par un élément du groupe de Weyl et sont donc simples. Pour tout poids* ω' *de* ρ *et toute racine* α, *on a* $\omega'(H_\alpha) = 0, 1$ *ou* -1 [1].

On sait que les poids de ρ sont permutés par W et que la multiplicité de $w.\omega$ est égale à celle de ω, c'est-à-dire 1. Si ρ admettait un poids ω' distinct des $w.\omega$, le poids dominant conjugué de ω' serait lui aussi un poids de ρ et serait de la forme $\omega - \beta$ avec $\beta \in \Sigma_+$, $\beta \neq 0$, ce qui contredit (PM). Si $\omega'(H_\alpha) = k \geqslant 2$, alors ω', $\omega' - \alpha$, $\omega' - 2\alpha$, ..., $\omega' - k\alpha$ seraient des poids de ρ, donc seraient tous transformés les uns des autres par des éléments de W, ce qui est impossible, car les longueurs de ω', $\omega' - \alpha$ et $\omega' - 2\alpha$ (pour une forme quadratique définie positive sur Π, invariante par W) ne peuvent pas être toutes trois égales.

10. Les groupes algébriques d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit $\widetilde{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe défini sur P et dont l'algèbre de Lie (sur P) est isomorphe à $\mathfrak{g}$: autrement dit $\widetilde{G}$ est un groupe semi-simple défini sur P et « du type Tohoku » ou « déployé » sur P. Dans la suite, nous identifierons $\mathfrak{g}$ et l'algèbre de Lie de $\widetilde{G}$. On sait qu'à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ correspond un *tore maximal* $\widetilde{H}$ de $\widetilde{G}$, décomposé sur P. Le choix fait d'un système fondamental de racines (ou encore d'une chambre de Weyl) détermine un *sous-groupe de Borel* $\widetilde{B}$ de $\widetilde{G}$, défini sur P, et dont l'algèbre de Lie (sur P) est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{h}$ et les X_α pour α *positive*. Le groupe $\widetilde{B}$ est produit semi-direct de $\widetilde{H}$ et du sous-groupe *unipotent maximal* $\widetilde{N}$, dont l'algèbre de Lie est sous-tendue par les X_α pour $\alpha > 0$. Nous noterons $\widetilde{N}'$ le sous-groupe unipotent maximal correspondant aux racines négatives.

Nous désignerons par G (resp. H, B, N) le sous-groupe des éléments de $\widetilde{G}$ (resp. $\widetilde{H}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{N}$) *rationnels sur* P.

D'après les résultats de Chevalley [6], le groupe $\widetilde{G}$ est déterminé à isomorphisme près par la donnée de $\mathfrak{g}$ et d'un sous-groupe Γ du groupe des poids Π, contenant le sous-groupe Σ engendré par les racines. De manière précise, pour toute représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V dont les poids appartiennent à Γ, il existe une représentation rationnelle définie sur P et une seule de $\widetilde{G}$ dont la différentielle soit ρ : *nous noterons encore* ρ *cette représentation* de $\widetilde{G}$ (ou de G). Réciproquement, pour toute représentation

---

[1] Si $\mathfrak{g}$ est simple, tout poids satisfaisant à (PM) est l'un des poids fondamentaux de Cartan. Ceci peut se voir par vérification pour chaque type simple : les poids dominants satisfaisant à (PM) sont (avec les notations de [6], exposé 19, corrigé des erreurs d'impression pour le type D_n) : pour A_n tous les poids fondamentaux; pour B_n, le poids ϖ_n; pour C_n le poids ϖ_1; pour D_n, les poids ϖ_1, ϖ_{n-1} et ϖ_n; pour E_6, les poids ϖ_1 et ϖ_5; pour E_7, le poids ϖ_1; pour E_8, F_4 et G_2, aucun poids. Il se trouve que les poids satisfaisant à (PM) sont les « poids minimaux » au sens de [6] qui ne sont pas combinaisons linéaires à coefficients *entiers* des racines.

On peut aussi remarquer que si ω est un poids dominant $\neq 0$ et non fondamental, alors il est somme de deux poids dominants ω_1 et $\omega_2 \neq 0$ et est le plus haut poids de la représentation $\rho_{\omega_1} \otimes \rho_{\omega_2}$. Or celle-ci n'est pas irréductible, comme il résulte aisément des formules de H. Weyl donnant les dimensions des ρ_ω. Il en résulte que $\rho_{\omega_1} \otimes \rho_{\omega_2}$ admet un poids dominant ω' distinct de ω et $\omega' \in \omega - \Sigma_+$, ce qui montre que ω ne satisfait pas à (PM).

rationnelle de $\widetilde{G}$ définie sur P, les poids de sa différentielle appartiennent à Γ. Le groupe H s'identifie au groupe des homomorphismes de Γ dans P^* de la manière suivante : si $h\in H$ et si ρ est une représentation rationnelle de $\widetilde{G}$ définie sur P, il existe un élément $\chi_h\in\mathrm{Hom}(\Gamma, P^*)$ et un seul tel que

$$\rho(h)x=\chi_h(\omega)x \tag{53}$$

si x est un élément de l'espace V de ρ appartenant au poids ω (pour la restriction à $\mathfrak{h}$ de la différentielle de ρ). On a en particulier :

$$\mathrm{ad}\,h.X_\alpha=\chi_h(\alpha)X_\alpha. \tag{54}$$

Nous désignerons par H^0 (resp. H^b) le sous-groupe des $h\in H$ tels que $\chi_h(\Gamma)\subset\{\pi^n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$ (resp. $\chi_h(\Gamma)\subset\mathfrak{O}$). Il est clair que H est *produit direct* de H^0 et de H^b. De plus H^0 est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$, l'isomorphisme associant à $h\in H^0$ l'élément $t_h\in\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ défini par :

$$\chi_h(\omega)=\pi^{t_h(\omega)} \qquad \text{pour} \quad \omega\in\Gamma. \tag{55}$$

Comme le groupe de Weyl W opère sur Γ, il opère aussi sur H. On sait d'ailleurs que les opérations de W dans H sont exactement les restrictions à H des automorphismes intérieurs de G défini par les éléments du normalisateur $\hat{H}$ de H dans G. Il est clair que W conserve H^0 et H^b.

D'autre part, on sait que W est simplement transitif sur les chambres de Weyl, ou encore sur les systèmes fondamentaux (non ordonnés) de racines. Soit alors $h\in H^0$. L'ensemble A des racines α telles que $t_h(\alpha)\geqslant 0$ est stable par addition, et toute racine appartient, soit à A, soit à $-A$. On sait que ces conditions entraînent que A contient un système fondamental de racines. Par suite, il existe un $w\in W$ tel que $t_{w.h}(\alpha_j)\geqslant 0$ pour tout j. *Nous désignerons par* H^0_+ *l'ensemble des* $h\in H^0$ *tels que* $t_h(\alpha_j)\geqslant 0$ *pour* $j=1, 2, \ldots, r$.

Il résulte de ce qui précède que *tout élément de* H *est transformé par* W *d'un élément de* H^0_+ (qui est d'ailleurs unique comme nous le verrons plus loin (Th. 12.1)) [1].

11. Sous-groupes bornés de G. Le sous-groupe K_R.

Soit pour un instant $\widetilde{G}$ un groupe algébrique linéaire quelconque défini sur P, et soit K un sous-groupe de G :

Proposition (**11.1**). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une représentation matricielle* ρ *de* $\widetilde{G}$, *rationnelle sur* P, *de noyau fini, telle que les matrices* $\rho(g)$ *soient à coefficients dans* $\mathfrak{O}$ *pour tout* $g\in K$.

---

[1] Pour que $h\in H^0_+$, il faut et il suffit que t_h appartienne à l'adhérence dans $\mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbf{Q})=\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Q})$ de la *chambre de Weyl* définie par le système fondamental de racines donné (chambre qui est l'ensemble des $f\in\mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbf{Q})$ tels que $f(\alpha_j)>0$ pour $1\leqslant j\leqslant r$). Or il est bien connu que l'adhérence d'une chambre de Weyl est un *domaine fondamental* (au sens strict) pour W opérant dans $\mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbf{Q})$.

(ii) *Pour toute représentation linéaire définie sur* P *de* $\widetilde{G}$ *dans un* P*-espace vectoriel* V, *il existe un réseau* S *de* V *invariant par* K.

Il est clair que (ii) entraîne (i). Réciproquement, supposons (i) vérifié et supposons $\widetilde{G}$ réalisé (sur P) comme sous-groupe algébrique du groupe des matrices $g=(g_{ij})$ de déterminant 1, ce qui est loisible. Le corps des fonctions $P(\widetilde{G})$ est une extension de degré fini du corps des fonctions $P(\rho(\widetilde{G}))$ et l'algèbre des fonctions régulières sur $\widetilde{G}$ est entière sur l'algèbre des fonctions régulières sur $\rho(\widetilde{G})$. Il existe donc des polynômes

$$Q_{ij}=Y^d+\sum_{0\leqslant k\leqslant d-1} Q_{ijk}Y^k$$

aux $Q_{ijk}\in P[(X_{rs})_{1\leqslant r,\,s\leqslant d^\circ\rho}]$ tels que

$$Q_{ij}((\rho(g)_{rs}),\, g_{ij})=0$$

pour tout $g\in\widetilde{G}$. Soit λ la borne inférieure des valuations des coefficients des polynômes Q_{ijk} : on a $v(Q_{ijk}(\rho(g)_{rs}))\geqslant\lambda$ pour tout $g\in K$ puisque les $\rho(g)_{rs}$ appartiennent alors à $\mathfrak{O}$. Par suite, on a

$$dv(g_{ij})\geqslant \inf_{0\leqslant k\leqslant d-1}(kv(g_{ij})+v(Q_{ijk}(\rho(g))))$$

$$\geqslant\lambda+\inf_{0\leqslant k\leqslant d-1} kv(g_{ij})$$

pour tout $g\in K$. On en déduit que $v(g_{ij})\geqslant\inf(0,\lambda)$ pour tout $g\in K$.

Si maintenant ρ' est une représentation linéaire définie sur P de $\widetilde{G}$ dans un espace vectoriel V, les coefficients de la matrice de $\rho'(g)$ par rapport à une base (e) de V sont des polynômes par rapport aux g_{ij} et restent de valuation bornée inférieurement lorsque g décrit K. Il en résulte aussitôt que le $\mathfrak{O}$-module engendré par les transformés par K des éléments de la base (e) est un *réseau* de V invariant par K.

Définition (**11.1**). — *Un sous-groupe* K *de* G *satisfaisant aux conditions équivalentes de la prop. 11.1 sera dit borné.*

Si le corps résiduel de P est fini, c'est-à-dire si P est *localement compact*, alors G est un groupe topologique localement compact et un sous-groupe borné K de G n'est autre qu'un sous-groupe *relativement compact.*

Reprenons maintenant les notations des numéros précédents. Si R est un réseau de Chevalley de $\mathfrak{g}$, nous désignerons par K_R *le sous-groupe formé des* $k\in G$ *tels que*

$$\operatorname{ad} k.R=R$$

Comme la représentation adjointe de G a un noyau fini, K_R est un sous-groupe *borné* de G. Si P est localement compact, K_R est *compact*, car évidemment fermé dans G (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique).

Soit ρ une représentation irréductible définie sur P de $\widetilde{G}$ dans un P-espace vectoriel V : rappelons que nous notons également ρ la représentation de $\mathfrak{g}$ différentielle de ρ. Soit R un réseau de Chevalley associé à $\mathfrak{h}$.

Proposition (**11.3**). — *Supposons que le poids dominant de* ρ *satisfasse à* (PM). *Si* S *est un réseau de* V *stable par* $\rho(R)$, *alors* S *est stable par* $\rho(K_R)$.

Soit, en effet, S′ le plus petit réseau de V stable par $\rho(K_R)$ et contenant S : c'est évidemment le $\mathfrak{O}$-module engendré par les $\rho(k).x$ pour $k\in K_R$ et $x\in V$. Soient $X\in R$ et $k\in K_R$: on a $\rho(X)\rho(k)x=\rho(k)\rho(\mathrm{ad}\,k^{-1}.X)x$. Comme $\mathrm{ad}\,k^{-1}.X\in R$, on a $\rho(\mathrm{ad}\,k^{-1}.X)x\in S$ pour $x\in S$, ce qui montre que S′ est stable par $\rho(R)$, donc (prop. 8.1 et lemme 9.1) S′ est un homothétique de S, ce qui entraîne que S lui-même est invariant par $\rho(K_R)$.

12. La décomposition $G=K_RHK_R$.

Supposons tout d'abord que G soit le *groupe adjoint* de $\mathfrak{g}$ (autrement dit que $\Gamma=\Sigma$). Les résultats du n° 7 montrent que si R_1 et R_2 sont deux réseaux de Chevalley de $\mathfrak{g}$, il existe un $g\in G$ tel que $\mathrm{ad}\,g.R_1=R_2$: plus précisément, si R_1 et R_2 sont associés à la même sous-algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$, il existe $h\in H^0$ avec $\mathrm{ad}\,h.R_1=R_2$.

Si G n'est plus le groupe adjoint, il n'en est plus ainsi (cf. n° 13). Cependant :

Proposition (**12.1**). — *Soient* R_1 *et* R_2 *deux réseaux de Chevalley de* $\mathfrak{g}$, *associés tous deux à la même sous-algèbre de Cartan décomposée* $\mathfrak{h}$. *S'il existe un* $g\in G$ *tel que* $R_2=\mathrm{ad}\,g.R_1$, *alors il existe un* $h\in H^0$ *tel que* $\mathrm{ad}\,h.R_1=R_2$.

D'après les résultats du n° 7, il existe une base de Chevalley (X_α) de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{h}$, un système fondamental $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ de racines et des entiers positifs $t_1,\ldots,t_r$ tels que R_1 (resp. R_2) soit le réseau de Chevalley défini par la base de Chevalley (X_α) (resp. $\pi^{t(\alpha)}X_\alpha$ avec $t(\sum_j n_j\alpha_j)=\sum_j n_jt_j$).

Soient de plus $\omega_1,\ldots,\omega_s$ des poids dominants (pour l'ordre défini par $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$) satisfaisant à (PM) et tels que Γ soit engendré par Σ et les ω_i. Soit $S_{i,1}$ un réseau stable par $\rho_i(R_1)$ dans l'espace V_i de la représentation irréductible ρ_i de $\mathfrak{g}$ (et de G) de poids dominant ω_i. Il est clair que $S_{i,2}=\rho_i(g^{-1})S_{i,1}$ est un réseau stable par $\rho_i(R_2)$. D'après le Lemme 7.4, on a $S_{i,k}=\sum_\omega(S_{i,k}\cap V_{i,\omega})$ (pour $k=1,2$), la somme étant étendue aux poids ω (tous simples) de ρ_i suivant $\mathfrak{h}$. Comme $\dim V_{i,\omega}=1$, il existe des entiers rationnels $s_i(\omega)$ tels que

$$S_{i,2}\cap V_{i,\omega}=\pi^{s_i(\omega)}S_{i,1}\cap V_{i,\omega}.$$

Si x est un générateur du $\mathfrak{O}$-module $S_{i,1}\cap V_{i,\omega}$, alors $\pi^{s_i(\omega)}x$ est un générateur de $S_{i,2}\cap V_{i,\omega}$ et le lemme 8.1 entraîne que $\rho_i(X_{-\alpha_j})x$ (resp. $\pi^{s_i(\omega)-t_j}\rho_i(X_{-\alpha_j})x$) est un générateur de $S_{i,1}\cap V_{i,\omega-\alpha_j}$ (resp. $S_{i,2}\cap V_{i,\omega-\alpha_j}$). Il en résulte que si ω et $\omega-\alpha_j$ sont des poids de ρ_i, on a :

$$s_i(\omega-\alpha_j)=s_i(\omega)-t_j. \tag{56}$$

Mais pour tout poids ω de ρ_i, il existe une suite $\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_k}$ de racines fondamentales telle que $\omega_i-(\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_s})$ soit un poids de ρ_i pour $1\leqslant s\leqslant k$ et

que $\omega = \omega_i - (\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k})$. L'application répétée de (56) donne donc (en posant $s_i = s_i(\omega_i)$) :

$$s_i(\omega) = s_i - (t_{j_1} + \ldots + t_{j_k}).$$

Autrement dit, soit ω un poids de ρ_i. Écrivons

$$\omega = \omega_i - \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} n_j(\omega)\alpha_j \tag{57}$$

avec $n_j(\omega)$ entier $\geqslant 0$. On a alors :

$$s_i(\omega) = s_i - \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} n_j(\omega)t_j. \tag{58}$$

Posons alors

$$m_i = \sum_{\omega} s_i(\omega) = (\dim V_i)s_i - \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum_{\omega} n_j(\omega)\right)t_j$$

(où ω décrit les poids de ρ). La définition même des $s_i(\omega)$ entraîne qu'il existe un opérateur de déterminant π^{m_i} qui transforme $S_{i,1}$ en $S_{i,2}$. Mais $S_{i,2} = \rho_i(g^{-1})S_{i,1}$ et $\det \rho_i(g^{-1}) = 1$: il résulte alors du théorème des diviseurs élémentaires que $m_i = 0$. On a donc :

$$(\dim V_i)s_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum_{\omega} n_j(\omega)\right)t_j. \tag{59}$$

D'autre part, la somme des poids de ρ_i est nulle, puisque $\det \rho_i(h) = 1$ pour $h \in \widetilde{H}$. On a donc d'après (57) :

$$(\dim V_i)\omega_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum_{\omega} n_j(\omega)\right)\alpha_j. \tag{60}$$

Soit alors t l'homomorphisme du groupe des poids dans $\mathbf{Q}$ défini par $t(\alpha_j) = t_j$. D'après (59) et (60), on a :

$$t(\omega_i) = (\dim V_i)^{-1} t\left(\sum_j \left(\sum_{\omega} n_j(\omega)\right)\alpha_j\right) = (\dim V_i)^{-1}\left(\sum_j \sum_{\omega} n_j(\omega)t_j\right) = s_i$$

ce qui montre que $t(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$. Il existe donc un $h \in H^0$ tel que $t_h = t$ et il est immédiat que $\operatorname{ad} h . \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

Corollaire 1. — *Soit* R *un réseau de Chevalley associé à la sous-algèbre de Cartan décomposée* $\mathfrak{h}$. *Si* g *appartient au normalisateur* $\widetilde{H}$ *de* H *dans* G, *il existe* $h \in H$ *tel que* $hg \in K_R$.

En effet, R et $\operatorname{ad} g . R$ sont deux réseaux de Chevalley associés à $\mathfrak{h}$: il existe donc un $h \in H$ tel que $\operatorname{ad}(hg)R = R$.

Le corollaire 1 signifie encore que *toute opération du groupe de Weyl* W *dans* H *est induite par un automorphisme intérieur défini par un* $x \in \hat{H} \cap K_R$.

Corollaire 2. — *Soit* R *un réseau de Chevalley et soient* $\mathfrak{h}_1$ *et* $\mathfrak{h}_2$ *deux sous-algèbres de Cartan décomposées auxquelles* R *soit associé. Il existe un* $k \in K_R$ *tel que* $\operatorname{ad} k . \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

D'après un résultat de A. Borel [1], il existe un $g \in G$ tel que $\mathfrak{h}_2 = \operatorname{ad} g . \mathfrak{h}_1$. Les réseaux de Chevalley R et $\operatorname{ad} g . R$ sont alors associés à la même sous-algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}_2$ et, d'après la proposition, il existe un $g' \in G$ tel que $\operatorname{ad} g' . \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_2$ et $\operatorname{ad} g' . (\operatorname{ad} g) . R = R$: l'élément $k = g'g$ de G répond à notre attente.

Théorème (**12.2**). — *Soit* R *un réseau de Chevalley associé à la sous-algèbre de Cartan décomposée* $\mathfrak{h}$. *On a* $G = K_R H K_R$. *Plus précisément, toute double classe modulo* K_R *de* G *contient un élément et un seul appartenant à* H^0_+.

Soit en effet $g \in G$. Montrons tout d'abord que $g \in K_R H^0_+ K_R$. Posons $R' = \mathrm{ad}\, g . R$ et $\mathfrak{h}' = \mathrm{ad}\, g . \mathfrak{h}$. D'après le corollaire au Théorème 7.1, il existe une sous-algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}''$ à laquelle R et R′ sont associés. D'après le Corollaire 2 à la proposition 12.1, il existe $g_1 \in K_R$ et $g_2 \in K_{R'}$ tels que

$$\mathfrak{h} = \mathrm{ad}\, g_1 . \mathfrak{h}'' \qquad \mathfrak{h}'' = \mathrm{ad}\, g_2 . \mathfrak{h}'.$$

Posons $g'' = g_1 g_2 g$. Comme $g^{-1} g_2 g \in g^{-1} K_{R'} g = K_R$, on a $g'' \in K_R g K_R$. D'autre part, on a $\mathrm{ad}\, g'' . \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Les réseaux de Chevalley R et $R'' = \mathrm{ad}\, g'' . R$ sont donc tous deux associés à $\mathfrak{h}$ et la proposition 12.1 montre qu'il existe $h \in H^0$ tel que $\mathrm{ad}\, h . R = R''$, d'où $h^{-1} g'' \in K_R$ et $g \in K_R h K_R$.

De plus il existe $w \in W$ avec $h_+ = w . h \in H^0_+$ et nous avons vu (Corollaire 1 ci-dessus) qu'il existe $x \in \hat{H} \cap K_R$ avec $h_+ = x h x^{-1}$. On a donc $g \in K_R h_+ K_R \subset K_R H^0_+ K_R$.

Montrons maintenant l'*unicité* de h_+ : posons $g = khk'$ avec $k, k' \in K_R$ et $h \in H^0_+$. Soit ρ une représentation irréductible de G, de poids dominant ω_0. Puisque $\rho(k)$ et $\rho(k')$ conservent un réseau dans l'espace de ρ (proposition 11.1) les *facteurs invariants* de $\rho(g^{-1})$ sont les mêmes que ceux de $\rho(h^{-1})$. Or $\rho(h^{-1})$ est un opérateur diagonalisable de valeurs propres $\pi^{-t_h(\omega)}$, où ω décrit les poids de ρ. Comme $t_h(\alpha_j) \geqslant 0$, le plus grand facteur invariant de $\rho(g^{-1})$ est donc $\pi^{-t_h(\omega_0)}$.

Par suite, si h et $h' \in H^0_+$ et si $K_R h K_R \cap K_R h' K_R \neq \varnothing$, les éléments t_h et $t_{h'}$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ coïncident sur les poids dominants appartenant à Γ. Mais t_h et $t_{h'}$ se prolongent de manière unique en des homomorphismes (notés encore t_h et $t_{h'}$) de π dans $\mathbf{Q}$. Si μ_k est un poids dominant fondamental, il existe un entier $s \geqslant 0$ tel que $s\mu_k \in \Gamma$ et $s\mu_k$ est encore un poids dominant. On a donc $t_h(\mu_k) = s^{-1} t_h(s\mu_k) = s^{-1} t_{h'}(s\mu_k) = t_{h'}(\mu_k)$ d'où $t_h = t_{h'}$ puisque les μ_k forment une base de Π. On a donc $h = h'$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1. — K_R *est un sous-groupe borné maximal de* G. *Si* P *est localement compact,* K_R *est un sous-groupe compact maximal.*

En effet si A est un sous-groupe contenant strictement K_R, alors A contient un élément h non nul de H^0 et les valuations des coefficients de la matrice de $\mathrm{ad}\, h^n$ ne restent pas bornées quand n décrit $\mathbf{Z}$.

Corollaire 2. — *Supposons* $\mathfrak{g}$ simple *et soit* ω *un poids dominant appartenant à* Γ *et satisfaisant à* (PM). *Si* S *est un réseau dans l'espace de* ρ *invariant par* $\rho(R)$, *le sous-groupe* K_R *est aussi le sous-groupe formé des* $x \in G$ *tels que* $\rho(x) S = S$.

En effet, si $\mathfrak{g}$ est simple, le noyau de ρ dans G est fini. Le sous-groupe des $x \in G$ conservant S est alors un sous-groupe *borné* (prop. 11.1) contenant K_R (prop. 11.2).

Remarque. — Prenons pour $\tilde{G}$ le groupe *adjoint* et soit G′ le groupe des *automorphismes* de la P-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: on sait que G est un sous-groupe distingué d'indice fini dans G′. Soit K'_R le sous-groupe formé des $a \in G'$ laissant stable R. Si $a \in G'$, on a vu

qu'il existe $g \in G$ tel que $\operatorname{ad} g.R' = R$ avec $R' = a.R$. Autrement dit $ga \in K'_R$. Il en résulte aussitôt que $G' = K_R H^0_+ K'_R$, chaque double classe modulo (K_R, K'_R) contenant un élément unique de H^0_+. *A fortiori* on a $G' = K'_R H^0_+ K'_R$, mais cette fois-ci sans unicité.

Cependant, dans toute classe de G' modulo G, il y a un élément x laissant stable $\mathfrak{h}$ et permutant les racines fondamentales. Si σ est cette permutation des $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, on peut supposer que $x.X_{\pm\alpha_j} = X_{\pm\sigma(\alpha_j)}$. Les x ainsi déterminés forment un sous-groupe E de G' et G' est produit semi-direct de E et de G. Il est clair que $E \subset K'_R$. Soit alors $H^{0\prime}_+$ un domaine fondamental de E opérant par automorphismes intérieurs dans H^0_+ : on voit immédiatement que $H^{0\prime}_+$ est un système de représentants des doubles classes modulo K'_R dans G'.

13. Conjugaison des sous-groupes K_R.

Proposition (**13.1**). — *Soient* R *et* R' *deux réseaux de Chevalley de* $\mathfrak{g}$. *On a* $K_R = K_{R'}$ *si, et seulement si* $R = R'$.

Supposons tout d'abord que R et R' soient associés à $\mathfrak{h}$. Il existe donc une base de Chevalley (X_α) associée à $\mathfrak{h}$ et un $t \in \operatorname{Hom}(\Sigma, \mathbf{Z})$ tels que

$$R = \sum_\alpha \mathfrak{O} H_\alpha + \sum_\alpha \mathfrak{O} X_\alpha$$

$$R' = \sum_\alpha \mathfrak{O} H_\alpha + \sum_\alpha \pi^{t(\alpha)} \mathfrak{O} X_\alpha .$$

D'après le corollaire 1 à la proposition 12.1, il existe, pour toute racine α, un élément $x \in K_R \cap \hat{H}$ tel que $\operatorname{ad} x$ induise dans le dual de $\mathfrak{h}$ la symétrie S_α. L'opérateur $\operatorname{ad} x$ transforme alors le sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_\beta$ en $\mathfrak{g}_{S_\alpha.\beta}$ et on a $\operatorname{ad} x.X_\alpha = \lambda X_{-\alpha}$ avec $\lambda \in P$. Si $K_R = K_{R'}$, alors $\operatorname{ad} x$ laisse stable R et R' et on doit avoir d'une part $\lambda \in \mathfrak{O}^*$, d'autre part $\operatorname{ad} x(\pi^{t(\alpha)} X_\alpha) \in \mathfrak{O}^* \pi^{-t(\alpha)} X_{-\alpha}$, d'où $\lambda \in \pi^{-2t(\alpha)} \mathfrak{O}^*$ et $t(\alpha) = 0$, d'où $R = R'$.

Dans le cas général, R et R' sont associés à une même sous-algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}'$ et il existe $g \in G$ tel que $\operatorname{ad} g.\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Si $K_R = K_{R'}$ on a $gK_R g^{-1} = K_{\operatorname{ad} g.R} = K_{\operatorname{ad} g.R'}$, d'où le résultat

Corollaire. — *On a* $K_{R'} = gK_R g^{-1}$ *si et seulement si* $R' = \operatorname{ad} g.R$. *En particulier, le normalisateur de* K_R *dans* G *est* K_R *lui-même.*

On a en effet $gK_R g^{-1} = K_{\operatorname{ad} g.R}$. Par suite $gK_R g^{-1} = K_{R'}$ entraîne $\operatorname{ad} g.R = R'$.

Cherchons maintenant si deux sous-groupes K_R sont conjugués par automorphismes intérieurs : il en est bien ainsi si G est le groupe adjoint. Plus généralement :

Proposition (**13.2**). — *Les classes de conjugaison par automorphismes intérieurs de sous-groupes* K_R *sont en correspondance bijective avec les éléments du groupe fini* $\operatorname{Hom}(\Gamma/\Sigma, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *(dont l'ordre est égal à l'ordre de* Γ/Σ*).*

Comme $\operatorname{ad} G$ est transitif sur les sous-algèbres de Cartan décomposées, toute classe de conjugaison contient un sous-groupe K_R où R est un réseau de Chevalley associé à $\mathfrak{h}$. Si R et R' sont deux tels réseaux, il existe, comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois, un $t \in \operatorname{Hom}(\Sigma, \mathbf{Z})$ unique tel que $R' = h.R$, où h est l'élément du sous-

groupe H_a^0 du tore maximal $\widetilde{H}_a$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du groupe adjoint $\widetilde{G}_a$, tel que $t_h = t$. La proposition 12.1 montre alors que R′ et R sont conjugués par ad G si et seulement si $h \in \mathrm{ad}\, H^0$, c'est-à-dire si t se prolonge en un homomorphisme de Γ dans $\mathbf{Z}$. Les classes de conjugaison de sous-groupes K_R, ou les classes d'intransitivité de ad G opérant sur les réseaux de Chevalley, sont donc en correspondance bijective avec le conoyau de l'homomorphisme de restriction de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbf{Z})$, conoyau qui s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Gamma/\Sigma, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Remarque. — L'élément h de H^0 se remonte toujours en un élément $\overline{h}$ de $\widetilde{G}$ rationnel sur une extension finie de P. Il en résulte que deux sous-groupes K_R sont toujours conjugués par un automorphisme *extérieur* de G, qui est la restriction à G d'un automorphisme *intérieur* de $\widetilde{G}$.

14. La décomposition $G = K_R H^0 N$.

Proposition (**14.1**). — *On a* $G = K_R HN = K_R H^0 N$.

Comme $H = H^0 H^b$ et que $H^b \subset K_R$, il suffit de démontrer que $G = K_R HN$. Comme le noyau de la représentation adjointe de G est contenu dans K_R, il suffit de montrer que $\mathrm{ad}\, G = (\mathrm{ad}\, K_R)(\mathrm{ad}\, H)(\mathrm{ad}\, N)$. Or le groupe ad G est un sous-groupe du groupe G introduit par Chevalley dans [5] et est engendré par ad N (qui est le sous-groupe noté $\mathfrak{U}$ dans [5]), ad N′ (noté $\mathfrak{U}'$ dans [5]) et ad H (qui est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{H}$ contenant $\mathfrak{H}'$ avec les notations de [5]). Remarquons qu'on a $\mathrm{ad}\, H = \mathfrak{H}$ si G est le groupe adjoint et $\mathrm{ad}\, H = \mathfrak{H}'$ si G est le groupe simplement connexe. Ceci rappelé, la démonstration de la proposition 14.1 est exactement la même que celle donnée dans [3], proposition 15 pour le groupe G de Chevalley, en remplaçant $\mathfrak{H}$ par ad H.

15. Comparaison des doubles classes et classes à gauche modulo K_R.

Munissons le groupe $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ d'une structure de groupe ordonné de la manière suivante : un $t \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ sera $\geqslant 0$ si et seulement si $t(\omega) \geqslant 0$ pour tout *poids dominant* ω. Nous transporterons cette structure d'ordre à H^0 par l'isomorphisme $h \to t_h$ de H^0 sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$. Les éléments de H_+^0 sont alors positifs, mais il y a en général d'autres éléments positifs dans H^0.

Proposition (**15.1**). — *Soient* $h_+ \in H_+^0$ *et* $h \in H^0$. *Si* $KhN \cap K_R h_+ K_R \neq \emptyset$, *alors* $h \leqslant h_+$. *De plus* $K_R h_+ N \cap K_R h_+ K_R = K_R h_+$.

Soit $u \in N$ tel que $hu \in K_R h_+ K_R$ et soit ρ une représentation irréductible de G, de poids dominant ω. Comme on l'a vu au n° 12, le plus grand facteur invariant de $\rho(hu)^{-1}$ est $\pi^{-t(\omega)}$, en posant $t = t_{h_+}$. Soit x un vecteur $\neq 0$ de l'espace de ρ, appartenant au poids dominant ω. Comme x est annulé par les $\rho(X_\alpha)$ pour $\alpha > 0$, il est invariant par $\rho(N)$ et $\rho(hu)^{-1}x = \pi^{-t_h(\omega)}x$. Il en résulte que $\pi^{-t(\omega)}$ divise $\pi^{-t_h(\omega)}$, autrement dit on a $t(\omega) \geqslant t_h(\omega)$ et $h_+ \geqslant h$.

Soit maintenant $u \in N$ tel que $h_+ u \in K_R h_+ K_R$ et posons toujours $t = t_{h_+}$. La relation $t(\alpha) \geqslant t(\beta)$ est une relation de préordre sur l'ensemble des racines positives et si α et β sont deux racines positives, on a $t(\alpha+\beta) \geqslant t(\alpha)$. On en déduit qu'on peut ranger les racines positives en un ordre $\beta_1, \ldots, \beta_s$ tel que $t(\beta_j) \geqslant t(\beta_{j+1})$ et que si $\beta_j - \beta_k$ est une racine positive, alors $j<k$. Si on rapporte $\mathfrak{g}$ à la base $X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_s}, H_1, \ldots, H_r, X_{-\beta_s}, \ldots, X_{-\beta_1}$ (où $H_1, \ldots, H_r$ est une base de $R \cap \mathfrak{h}$ et (X_α) une base de Chevalley de R), la matrice de ad u est alors *triangulaire supérieure unipotente* et la matrice A de ad h_+ est diagonale, ses coefficients diagonaux étant des puissances de π dont les exposants vont en *croissant*. L'hypothèse $h_+ u \in K_R h_+ K_R$ entraîne que la matrice B de ad $h_+ u$ appartient à $\mathbf{SL}(n, \mathfrak{O}) A \mathbf{SL}(n, \mathfrak{O})$ (avec $n = \dim \mathfrak{g}$) et le lemme 3 de [3] entraîne alors que $BA^{-1} \in \mathbf{SL}(n, \mathfrak{O})$. Autrement dit $\mathrm{ad}(h_+ u h_+^{-1})$ laisse R invariant et $h_+ u \in K_R h_+$ d'où l'égalité $K_R h_+ N \cap K_R h_+ K_R = K_R h_+$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, *Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques*, Colloque sur la Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962.

[2] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{p}$-adiques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 89 (1961), pp. 43-75.

[3] F. Bruhat, Sur les représentations des groupes classiques $\mathfrak{p}$-adiques, I et II, *Amer. J. of Math.*, vol. 83 (1961), pp. 321-338 et 343-368.

[4] F. Bruhat, *Sur les sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples $\mathfrak{p}$-adiques*, Colloque sur la Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962.

[5] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. Journ.*, vol. 7 (1955), pp. 14-66.

[6] C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Séminaire E.N.S., Paris, 1956-58.

[7] C. Chevalley, *Certains schémas de groupes semi-simples*. Séminaire Bourbaki, vol. 13 (1960-61), exposé 219.

[8] N. Jacobson, Completely reducible Lie algebras of linear transformations, *Proc. A.M.S.*, vol. 2 (1951), pp. 105-113.

[9] N. Jacobson, A note on three dimensional simple Lie algebras, *J. of Math. and Mech.*, vol. 7 (1958), pp. 823-831.

[10] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° 18 (1963).

Reçu le 15 juin 1963.