PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN-PIERRE SERRE

Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 12 (1962), p. 69-85

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__12__69_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ENDOMORPHISMES COMPLÈTEMENT CONTINUS DES ESPACES DE BANACH p-ADIQUES

par JEAN-PIERRE SERRE

Dans le mémoire de Dwork [3] sur la rationalité des fonctions zêta, un rôle essentiel est joué par la fonction analytique p-adique $\det(1-tu)$, où u est une certaine matrice infinie. Cette fonction analytique est une *fonction entière*, exactement comme dans la théorie classique de Fredholm. Il était naturel de poursuivre cette analogie et d'étendre à u la théorie spectrale de F. Riesz; c'est ce que vient de faire Dwork ([4], § 2). Dans ce qui suit, je montre que ces résultats proviennent simplement du fait que u est la matrice d'un endomorphisme *complètement continu* d'un espace de Banach; il se trouve en effet que, en analyse p-adique, les théories de Riesz et de Fredholm ont le même domaine de validité : il n'y a pas à distinguer entre applications nucléaires (ou « à trace ») et applications complètement continues.

1. Espaces de Banach.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps valué complet, non archimédien; on note A l'anneau de valuation de K (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leqslant 1$), $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$, et G l'image de K^* dans $\mathbf{R}_+^*$ par l'application $x \to |x|$. On suppose en outre que K n'est pas discret, c'est-à-dire que $G \neq \{1\}$.

Nous appellerons *espace de Banach* sur K un espace vectoriel normé complet sur K dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique

$$|x+y| \leqslant \mathrm{Sup}\,(|x|, |y|).$$

Si E est un tel espace, et si E_0 désigne l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x| \leqslant 1$, il est clair que E_0 est un A-module, et que la topologie de E est définie par les sous-modules $c_n E_0$, où c_n est une suite d'éléments de A tendant vers 0.

Nous aurons à considérer la propriété suivante :

(N) — *Pour tout* $x \in E$, $|x|$ *appartient à l'adhérence* $\overline{G}$ *de* G.

On observera que cette propriété est automatiquement vérifiée lorsque G n'est pas discret, c'est-à-dire lorsque la valuation de K n'est pas une « valuation discrète ». De plus, toute norme est équivalente à une norme vérifiant (N). En effet, si $|x|$ est la norme donnée, on définit $|x|'$ comme la borne inférieure des éléments $r \in G$ qui sont $\geqslant |x|$, et l'on obtient ainsi une norme équivalente à l'ancienne et vérifiant (N).

Exemple. — Soit I un ensemble, et soit $c(I)$ l'ensemble des familles $x=(x_i)_{i\in I}$, $x_i\in K$, telles que x_i tende vers o suivant le filtre des complémentaires des parties finies (ce que nous écrirons $x_i\to 0$ pour $i\to\infty$). Posons $|x|=\operatorname{Sup}_{i\in I}|x_i|$. On définit ainsi sur $c(I)$ une structure d'espace de Banach vérifiant la condition (N). Le module E_0 correspondant est l'ensemble des $x=(x_i)$ tels que $x_i\in A$ pour tout $i\in I$, et $x_i\to 0$.

Proposition 1 (cf. Monna [8] et Fleischer [5]). — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Alors tout espace de Banach* E *sur* K *qui vérifie la condition* (N) *est isomorphe (avec sa norme) à un espace* $c(I)$.

Tout revient à trouver dans E une famille $(e_i)_{i\in I}$ jouissant de la propriété suivante :

(B) — *Tout* $x\in E$ *s'écrit de façon unique comme somme d'une série*

$$x=\sum_{i\in I}x_ie_i,\ \textit{avec}\ x_i\to 0\ \textit{et}\ |x|=\operatorname{Sup}_{i\in I}|x_i|.$$

Une telle famille sera appelée une *base orthonormale* de E. L'existence de bases orthonormales résulte du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit* E_0 *l'ensemble des* $x\in E$ *tels que* $|x|\leqslant 1$, *et soit* $\overline{E}=E_0/\mathfrak{m}E_0$. *Pour qu'une famille* $(e_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *soit une base orthonormale de* E, *il faut et il suffit que les* e_i *appartiennent à* E_0, *et que leurs images* $\overline{e}_i$ *dans* $\overline{E}$ *forment une base* (au sens algébrique) *du* k*-espace vectoriel* $\overline{E}$.

La nécessité est évidente (elle est vraie même si la valuation de K n'est pas discrète). Montrons la suffisance. Soit π une uniformisante de K (c'est-à-dire un générateur de $\mathfrak{m}$). Si $x\in E_0$, soit $\overline{x}$ l'image de x dans $\overline{E}$; on a $\overline{x}=\Sigma\xi_i\overline{e}_i$, $\xi_i\in k$, et en relevant les ξ_i dans A, on obtient des éléments $x_i^1\in A$, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que

$$x=\Sigma x_i^1e_i+\pi x^1,\quad\text{avec}\quad x^1\in E_0.$$

En recommençant la même opération sur x^1, et en itérant, on obtient

$$x=\Sigma x_ie_i,\quad\text{avec}\quad x_i\in A,\quad\text{et}\quad x_i\to 0,$$

cette décomposition étant unique. De plus, si $|x|=1$, on a nécessairement $|x|=\operatorname{Sup}|x_i|$, et par homothétie (ce qui est possible à cause de la condition (N)), on en déduit le même résultat pour tout $x\in E$, *cqfd.*

Corollaire. — *Si la valuation de* K *est discrète, tout espace de Banach sur* K *est isomorphe comme espace vectoriel topologique à un espace* $c(I)$.

En effet, on a vu que l'on peut remplacer toute norme par une norme équivalente vérifiant la propriété (N), ce qui permet d'appliquer la proposition 1.

Ainsi, lorsque la valuation de K est discrète, *on peut se borner à considérer les espaces du type* $c(I)$. C'est ce que nous ferons le plus souvent dans ce qui suit.

Proposition 2. — *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach* E *vérifiant la condition* (N). *Si la valuation de* K *est discrète, il existe un projecteur continu de* E *sur* F *de norme* $\leqslant 1$.

Soit $E' = E/F$. D'après la proposition 1, il existe une base orthonormale (e'_i) de E'; si l'on choisit dans E des représentants e_i des e'_i tels que $|e_i| \leqslant 1$, l'application $e'_i \to e_i$ se prolonge en une application linéaire continue $s : E' \to E$ de norme $\leqslant 1$ (cf. n° 2). L'espace de Banach E s'identifie alors, avec sa norme, au produit $F \times E'$, d'où la proposition.

Remarques. — 1) D'après Monna [8], la prop. 2 et le cor. à la prop. 1 sont encore vrais lorsque K est « maximalement complet » au sens de Kaplansky.

2) Soit $E = c(I)$, et soit F un sous-espace vectoriel fermé *de dimension finie* de E. Alors, même si la valuation de K n'est pas discrète, il existe un projecteur continu de E sur F de norme $\leqslant 1$, et l'espace E/F est isomorphe à un espace $c(J)$. Cela se voit par récurrence sur la dimension de F, en se ramenant au cas $\dim F = 1$, qui est immédiat.

2. Applications linéaires continues.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On munit $\mathscr{L}(E, F)$ de la norme habituelle

$$|u| = \operatorname{Sup}_{x \neq 0} \frac{|ux|}{|x|}.$$

Lorsque E vérifie la condition (N), on a $|u| = \operatorname{Sup}_{|x| \leqslant 1} |ux|$. On sait que $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace de Banach. Lorsque E et F vérifient la condition (N), il en est de même de $\mathscr{L}(E, F)$.

Supposons maintenant que $E = c(I)$, et soit $(e_i)_{i \in I}$ la base orthonormale canonique de E. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, posons $f_i = ue_i$. Les f_i forment une famille bornée d'éléments de F.

Proposition **3.** — *L'application qui associe à un élément* $u \in \mathscr{L}(E, F)$ *la famille* $(ue_i)_{i \in I}$ *est un isomorphisme de l'espace de Banach* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur l'espace des familles bornées* $(f_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* F, *muni de la norme* $\operatorname{Sup}_{i \in I} |f_i|$.

Soit $b_I(F)$ l'espace de Banach formé par ces familles bornées, et soit

$$\pi : \mathscr{L}(E, F) \to b_I(F)$$

l'application linéaire définie dans l'énoncé. Si $(f_i) \in b_I(F)$, on définit un élément $u \in \mathscr{L}(E, F)$ en posant

$$u(x) = \sum_{i \in I} x_i f_i \quad \text{si} \quad x = (x_i) \in E.$$

On obtient ainsi une application linéaire $\omega : b_I(F) \to \mathscr{L}(E, F)$. Il est immédiat que $\pi \circ \omega = 1$, $\omega \circ \pi = 1$, et que $|\pi| \leqslant 1$, $|\omega| \leqslant 1$, d'où la proposition.

Corollaire. — *Le dual* E' *de* E *est isomorphe à l'espace de Banach* $b(I)$ *des familles bornées d'éléments de* K.

On applique la proposition avec $F = K$.

Explicitons la proposition 3 lorsque F a une base orthonormale, autrement dit s'identifie à un espace $c(J)$. Les éléments $f_i \in F$ s'écrivent alors sous la forme $(n_{ij})_{j\in J}$, avec $n_{ij}\in K$, $|n_{ij}|$ borné, et $n_{ij}\to 0$ pour i fixé et $j\to\infty$. On a :

$$|u| = \operatorname*{Sup}_{(i,j)} |n_{ij}|.$$

Si $x=(x_i)$ est un élément de $c(I)$, on a $ux=(y_j)$, avec

$$y_j = \sum_{i\in I} n_{ij}x_i.$$

Nous dirons que (n_{ij}) est la *matrice* de u relativement aux bases orthonormales données de E et de F.

3. Applications linéaires complètement continues.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$. On dit que u est *complètement continu* s'il est adhérent dans $\mathscr{L}(E,F)$ au sous-espace des applications linéaires continues *de rang fini*; on notera $\mathscr{C}(E,F)$ le sous-espace de $\mathscr{L}(E,F)$ formé des éléments u complètement continus. Si E′ est un espace de Banach, et si $v\in\mathscr{L}(F,E')$, le composé $v\circ u$ est complètement continu si u ou v est complètement continu; en particulier, $\mathscr{C}(E,E)$ est un *idéal bilatère fermé* de l'algèbre $\mathscr{L}(E,E)$.

Supposons maintenant que $F=c(J)$. Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, on a, pour tout $x\in E$,

$$ux=(w_jx),$$

où les w_j sont des éléments du *dual* E′ de E. On posera :

$$r_j(u)=|w_j|.$$

On a $|u|=\operatorname*{Sup}_{j\in J} r_j(u)=\operatorname*{Sup}_{j\in J}|w_j|$.

Si $E=c(I)$ et si la matrice de u est (n_{ij}), on a :

$$w_j=(n_{ij})_{i\in I} \quad\text{et}\quad r_j(u)=\operatorname*{Sup}_{i\in I}|n_{ij}|.$$

Proposition **4**. — *Soit* $F=c(J)$. *L'application qui, à tout* $u\in\mathscr{C}(E,F)$, *associe la famille* $(w_j)_{j\in J}$ *définie comme ci-dessus, est un isomorphisme de l'espace de Banach* $\mathscr{C}(E,F)$ *sur l'espace* $c_{E'}(J)$ *des familles* $(w_j)_{j\in J}$ *d'éléments de* E′ *tendant vers* 0, *muni de la norme* $\operatorname{Sup}|w_j|$.

Montrons d'abord que, si u est de rang fini, les w_j tendent vers 0. Il suffit de le vérifier lorsque u est de rang 1, donc de la forme $x\to v(x)f$, avec $v\in E', f\in F$; dans ce cas, on a $w_j=x_jv$, où x_j est la j^e coordonnée de f, d'où $w_j\to 0$. Supposons maintenant que $u\in\mathscr{C}(E,F)$, et soit $u^{(n)}$ une suite d'applications de rang fini convergeant vers u. Si $u^{(n)}=(w_j^{(n)})$, les $w_j^{(n)}$ tendent uniformément vers les w_j, d'où le fait que $w_j\to 0$. Reste à montrer que, pour tout élément $(v_j)\in c_{E'}(J)$, il existe un $u\in\mathscr{C}(E,F)$ avec $w_j=v_j$. On définit u par la formule

$$ux=(v_jx), \quad x\in E.$$

Il est clair que u est linéaire et continue. Si $\varepsilon>0$, il existe une partie finie T de J telle que $|v_j|\leqslant\varepsilon$ pour $j\in J-T$. Soit $u'=(v_j')$, avec $v_j'=v_j$ si $j\in T$ et $v_j'=0$ si $j\in J-T$.

L'application u' est de rang fini, et l'on a $|u-u'| \leqslant \varepsilon$. Donc u est limite d'applications de rang fini, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Soit* $u=(w_j)$ *un élément de* $\mathscr{L}(E, F)$. *Pour que* u *soit complètement continu, il faut et il suffit que* $w_j \to 0$, *c'est-à-dire que* $r_j(u) \to 0$.

C'est clair.

Proposition 5. — *Supposons que* K *soit localement compact. Soient* E *et* F *deux espaces de Banach sur* K, *et soit* $u \in \mathscr{L}(E, F)$. *Pour que* u *soit complètement continu, il faut et il suffit que l'image par* u *de toute partie bornée de* E *soit relativement compacte dans* F.

La démonstration est la même que dans le cas classique. Si u est complètement continu, et si B est borné dans E, en utilisant le fait que u est limite d'applications de rang fini, on voit que $u(B)$ est précompact, donc relativement compact puisque F est complet. Inversement, si l'image par u de la boule unité B_1 de E est précompacte, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace V de F de dimension finie tel que la distance de $u(B_1)$ à V soit $\leqslant \varepsilon$. Supposons que E et F vérifient (N), ce qui est loisible, et soit $p : F \to V$ un projecteur de norme $\leqslant 1$ (cf. prop. 2); on a $|u-p \circ u| \leqslant \varepsilon$, et comme $p \circ u$ est de rang fini, cela montre bien que u est complètement continu.

4. Le point de vue des produits tensoriels topologiques.

Soient E, F, X trois espaces de Banach. Notons $\mathscr{B}(E, F; X)$ l'espace de Banach des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans X, muni de la norme usuelle. On appelle *produit tensoriel topologique* de E et de F un espace de Banach $E \hat{\otimes} F$, muni d'une application bilinéaire continue $E \times F \to E \hat{\otimes} F$, notée $(x, y) \to x \hat{\otimes} y$, qui vérifie la propriété suivante :

(PTT) — *Pour tout espace de Banach* X, *l'application naturelle de* $\mathscr{L}(E \hat{\otimes} F, X)$ *dans* $\mathscr{B}(E, F; X)$ *est un isomorphisme.*

[Cette application fait correspondre à $w \in \mathscr{L}(E \hat{\otimes} F, X)$ l'élément W de $\mathscr{B}(E, F; X)$ défini par la formule $W(x, y) = w(x \hat{\otimes} y)$.]

L'unicité, à isomorphisme unique près, de $E \hat{\otimes} F$ est claire : il « représente » le foncteur $X \to \mathscr{B}(E, F; X)$. L'existence se démontre en introduisant sur $E \otimes F$ la « semi-norme »

$$|z| = \mathrm{Inf}(\mathrm{Sup}(|x_i| . |y_i|)), \quad z \in E \otimes F,$$

la borne inférieure étant prise sur tous les systèmes finis (x_i, y_i), $x_i \in E$, $y_i \in F$, tels que $z = \Sigma x_i \otimes y_i$. En séparant $E \otimes F$ pour cette semi-norme, et en complétant l'espace normé ainsi obtenu, on obtient $E \hat{\otimes} F$. La vérification est analogue à celle du cas classique (cf. Grothendieck [6]) et ne présente aucune difficulté. On peut d'ailleurs montrer (mais c'est plus délicat) que $z \to |z|$ est en fait une *norme* : l'application canonique $E \otimes F \to E \hat{\otimes} F$ est donc une *injection*. Nous ne donnerons pas la démonstration, car ce résultat est évident dans les cas particuliers que nous aurons à considérer.

Proposition **6**. — *Pour tout espace de Banach* L, *le produit tensoriel complété* $L\hat{\otimes}c(J)$ *s'identifie à l'espace* $c_L(J)$ *des familles* $(z_j)_{j\in J}$ *d'éléments de* L *tendant vers* 0, *muni de la norme* $\mathrm{Sup}|z_j|$.

Soit (ε_j) la base orthonormale canonique de $c(J)$. Si $z=(z_j)$ est un élément de $c_L(J)$, posons

$$\pi(z)=\sum_{j\in J} z_j\hat{\otimes}\varepsilon_j,$$

la série étant convergente dans $L\hat{\otimes}c(J)$, puisque $|z_j\hat{\otimes}\varepsilon_j|\leqslant|z_j|$. On obtient ainsi une application linéaire

$$\pi : c_L(J)\to L\hat{\otimes}c(J),$$

et l'on a $|\pi|\leqslant 1$. D'autre part, l'application linéaire évidente $L\otimes c(J)\to c_L(J)$ se prolonge par continuité en une application linéaire

$$\omega : L\hat{\otimes}c(J)\to c_L(J).$$

Ici encore, on a $|\omega|\leqslant 1$. Comme on vérifie que $\omega\circ\pi=1$, $\pi\circ\omega=1$, cela achève la démonstration.

En appliquant la proposition précédente au dual E′ d'un espace de Banach E, et en comparant avec la proposition 4, on obtient :

Corollaire. — *Soit* $F=c(J)$. *Pour tout espace de Banach* E, *le produit tensoriel complété* $E'\hat{\otimes}F$ *s'identifie à l'espace* $\mathscr{C}(E, F)$ *des applications linéaires complètement continues de* E *dans* F.

Bien entendu, cette identification transforme $E'\otimes F$ en l'espace des applications linéaires continues de rang fini de E dans F.

Remarque. — Dans la terminologie de la thèse de Grothendieck [6], le corollaire ci-dessus revient à dire qu'il y a identité entre *applications nucléaires* et *applications complètement continues*, et que la norme nucléaire coïncide avec la norme usuelle.

5. Le déterminant de Fredholm.

Soit tout d'abord L un module libre sur un anneau commutatif R, et soit f un endomorphisme de L tel que $f(L)$ soit *contenu dans un sous-module de type fini* de L. Soit M un sous-module libre de type fini de L, contenant $f(L)$, et facteur direct dans L (on peut prendre, par exemple, le sous-module engendré par une partie d'une base de L). Soit $f_M : M\to M$ la restriction de f à M. Le polynôme $\det(1-tf_M)$ est bien défini, et l'on vérifie aisément qu'il ne dépend pas du choix de M; on le note $\det(1-tf)$. Le coefficient de $-t$ dans $\det(1-tf)$ coïncide avec la *trace* de f, définie directement en considérant f comme un élément de $L'\otimes L$. Plus généralement, on a :

$$\det(1-tf)=1+c_1t+\ldots+c_mt^m+\ldots,$$

avec $c_m=(-1)^m\,\mathrm{Tr}(\wedge^m f)$, $\wedge^m f$ désignant la *puissance extérieure* m^e *de* f. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de L, et soit (n_{ij}) la matrice de f par rapport à cette base. On peut expliciter c_m de

la manière suivante : si S est une partie finie de I, et si σ est une permutation de S, de signature ε_σ, on pose

$$n_{S,\sigma} = \prod_{i\in S} n_{i,\sigma i} \qquad \text{et} \qquad c_S = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma n_{S,\sigma},$$

la somme étant étendue à toutes les permutations σ de S. On a alors :

$$c_m = (-1)^m \sum_S c_S,$$

la somme étant cette fois étendue à toutes les parties S à m éléments de I.

Après ces préliminaires algébriques, revenons aux applications complètement continues. Soit E un espace de Banach, que nous supposerons *isomorphe à un espace* $c(I)$, et soit u un endomorphisme complètement continu de E. Nous nous proposons de définir le *déterminant de Fredholm* $\det(1-tu)$ de u. Supposons d'abord que $|u|\leqslant 1$. Soit E_0 l'ensemble des $x\in E$ tels que $|x|\leqslant 1$; on a $u(E_0)\subset E_0$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de A, contenu dans $\mathfrak{m}$. L'endomorphisme u définit par passage au quotient un endomorphisme $u_\mathfrak{a}$ de $E_\mathfrak{a} = E_0/\mathfrak{a}E_0$; si $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E, les images des e_i dans $E_\mathfrak{a}$ forment une base (au sens algébrique) de $E_\mathfrak{a}$ considéré comme $A/\mathfrak{a}$-module. Si (n_{ij}) désigne la matrice de u par rapport à (e_i), et si $r_j(u) = \operatorname{Sup}_{i\in I} |n_{ij}|$, on a $r_j(u)\to 0$, d'où l'existence d'une partie finie $T(\mathfrak{a})$ de I telle que $n_{ij}\in\mathfrak{a}$ si $j\in I-T(\mathfrak{a})$. Il s'ensuit que l'image de $u_\mathfrak{a}$ est contenue dans un sous-module de type fini de $E_\mathfrak{a}$, et le polynôme $\det(1-tu_\mathfrak{a})$ est bien défini; ses coefficients appartiennent à $A/\mathfrak{a}$. Lorsque $\mathfrak{a}$ varie, ces polynômes forment un système projectif, et leur limite est une série formelle, notée $\det(1-tu)$, dont les coefficients tendent vers 0; elle ne dépend que du produit tu. Si maintenant u est un endomorphisme complètement continu quelconque de E, on choisit un scalaire c non nul tel que $|cu|\leqslant 1$; alors $\det(1-tcu)$ est défini, d'où aussi $\det(1-tu)$.

Proposition **7**. — *a) Si la matrice de u par rapport à la base orthonormale* $(e_i)_{i\in I}$ *est égale à* (n_{ij}), *on a*

$$\det(1-tu) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m, \qquad \textit{avec} \quad c_m = (-1)^m \Sigma \varepsilon_\sigma n_{S,\sigma}$$

les notations étant les mêmes que ci-dessus.

b) La série $\det(1-tu)$ *est une fonction entière de t* (autrement dit, son rayon de convergence est infini).

c) Si $u_n\to u$, *avec* $u_n\in\mathscr{C}(E,E)$, *alors* $\det(1-tu_n)$ *tend vers* $\det(1-tu)$ *pour la topologie de la convergence simple des coefficients.*

d) Si u est de rang fini, $\det(1-tu)$ *coïncide avec le polynôme défini plus haut.*

Lorsque $|u|\leqslant 1$, la formule *a)* se déduit par passage à la limite de la formule écrite plus haut (dans le cas algébrique); le cas général en résulte par homothétie. Pour démontrer *b)*, notons $r_1, r_2, \ldots$, la famille des nombres réels positifs $r_j(u) = \operatorname{Sup}_{i\in I} |n_{ij}|$,

rangés par ordre décroissant. Si S est une partie à m éléments de I, chaque produit $n_{S,\sigma}$ fait intervenir m indices j distincts, d'où

$$|n_{S,\sigma}| \leqslant r_1 \dots r_m \quad \text{et} \quad |c_m| \leqslant r_1 \dots r_m.$$

Si M est un nombre positif quelconque, on a

$$|c_m| M^m \leqslant (r_1 M)(r_2 M) \dots (r_m M)$$

et comme les $r_i M$ tendent vers 0, on en déduit $|c_m| M^m \to 0$, ce qui démontre *b)*. L'assertion *c)* résulte trivialement de *a)*. Enfin, supposons que u soit de rang fini; quitte à remplacer u par un multiple, on peut supposer que $|u| \leqslant 1$. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E contenant $u(E)$, et soient

$$V_0 = E_0 \cap V, \quad V_\alpha = V_0/\alpha V_0.$$

Comme V_0 est facteur direct dans E_0, V_α est facteur direct dans E_α, et c'est un sous-module libre de E_α; le déterminant $\det(1 - tu_\alpha)$ peut donc se calculer dans V_α, et comme $\det(1-tu) = \lim . \det(1 - tu_\alpha)$, on voit que $\det(1-tu) = \det(1 - tu_V)$, où u_V désigne la restriction de u à V, d'où *d)*.

Le fait que $\det(1-tu)$ soit une fonction entière permet de substituer à t n'importe quelle valeur dans K (ou dans une extension complète de K). En particulier, $\det(1+u)$ est défini pour tout $u \in \mathscr{C}(E, E)$.

Corollaire 1. — *Si u et v appartiennent à $\mathscr{C}(E, E)$, on a*

$$\det(1 + u + v + uv) = \det(1+u) . \det(1+v).$$

On a plus généralement

$$\det((1-tu)(1-tv)) = \det(1-tu) . \det(1-tv),$$

comme on le voit en se ramenant au cas où $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, et en réduisant modulo α.

Corollaire 2. — *Soit* F *un espace de Banach isomorphe à un espace $c(J)$. Si $u \in \mathscr{C}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$, on a*

$$\det(1 - tu \circ v) = \det(1 - tv \circ u).$$

[Cette formule a un sens, puisque $u \circ v \in \mathscr{C}(F, F)$ et $v \circ u \in \mathscr{C}(E, E)$.]

Grâce à *c)* et *d)*, on peut supposer que u est de rang fini, et la formule est alors bien connue : elle résulte par exemple des égalités

$$\mathrm{Tr}(\wedge^m u \circ v) = \mathrm{Tr}(\wedge^m u \circ \wedge^m v) = \mathrm{Tr}(\wedge^m v \circ \wedge^m u) = \mathrm{Tr}(\wedge^m v \circ u).$$

La *trace* $\mathrm{Tr}(u)$ d'un élément u de $\mathscr{C}(E, E)$ est définie comme le coefficient de $-t$ dans $\det(1-tu)$, c'est-à-dire comme $\sum_{i \in I} n_{ii}$. On a $|\mathrm{Tr}(u)| \leqslant |u|$. L'isomorphisme $\mathscr{C}(E, E) \to E' \hat{\otimes} E$ transforme la trace en l'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans K.

Corollaire **3**. — *Soit* $u \in \mathscr{C}(E, E)$. *Si la caractéristique du corps* K *est nulle, on a*

$$\det(1-tu) = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(u^m)t^m/m\right).$$

Ici encore, cela se voit par passage à la limite à partir du cas des endomorphismes de rang fini.

Remarques. — 1) Les propriétés *c)* et *d)* montrent que $\det(1-tu)$ ne dépend pas de la *norme* de E, mais seulement de sa topologie.

2) On peut définir les *puissances extérieures complétées* de E, et associer à tout $u \in \mathscr{L}(E, E)$ des endomorphismes $\wedge^m u$ de ces puissances extérieures. Si u est complètement continu, il en est de même des $\wedge^m u$, et l'on a $c_m = (-1)^m \mathrm{Tr}(\wedge^m u)$; ce n'est qu'une autre façon d'exprimer *a)*.

3) La partie *c)* de la proposition 7 peut se préciser de la manière suivante :

Proposition **8**. — *Soit* (u_n) *une suite d'éléments de* $\mathscr{C}(E, E)$ *convergeant vers un élément* u. *Alors* $\det(1-tu_n) \to \det(1-tu)$ *pour la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de la clôture algébrique* $\overline{K}$ *de* K.

Soient (n_{ij}) et $(n_{ij}^{(n)})$ les matrices de u et de u_n; posons :

$$\det(1-tu) = \Sigma c_m t^m, \quad \det(1-tu_n) = \Sigma c_m^{(n)} t^m.$$

Soit ε un nombre réel tel que $0<\varepsilon<1$. Soient $r_1, \ldots, r_h$ ceux des $r_j(u)$ qui sont >1, et soit η un nombre >0 tel que

$$\eta r_1 \ldots r_h \leqslant \varepsilon.$$

Soit n un entier tel que $|u-u_n| \leqslant \eta$. On a $|n_{ij}-n_{ij}^{(n)}| \leqslant \eta$ pour tout couple (i, j); on en déduit que $r_j(u_n) = r_j(u)$ si $r_j(u) > \eta$ et que $r_j(u_n) \leqslant \eta$ sinon. Considérons alors un terme de la forme

$$n_{S,\sigma} - n_{S,\sigma}^{(n)} = \prod_{i \in S} n_{i,\sigma i} - \prod_{i \in S} n_{i,\sigma i}^{(n)}.$$

En l'écrivant comme somme de produits de différences, on obtient l'inégalité

$$|n_{S,\sigma} - n_{S,\sigma}^{(n)}| \leqslant \eta \cdot \operatorname*{Sup}_{i \in S} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \mathrm{Sup}\,(r_j(u), r_j(u_n)).$$

En tenant compte des inégalités écrites plus haut, et du fait que $\eta<1$, on voit que $|n_{S,\sigma} - n_{S,\sigma}^{(n)}|$ est majoré par $\eta r_1 \ldots r_h$, donc par ε. En sommant, on en déduit

$$|c_m - c_m^{(n)}| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } m.$$

Il résulte de ce qui précède que $\det(1-tu_n)$ tend uniformément vers $\det(1-tu)$ *sur le disque unité* de $\overline{K}$. Par homothétie, on en déduit le même résultat pour toute partie bornée de $\overline{K}$, *cqfd.*

Lemme **2**. — *Soit* $I = I' \cup I''$ *une partition de* I. *Soit* u *un endomorphisme complètement continu de* $E = c(I)$ *qui applique* $E' = c(I')$ *dans lui-même. Soit* u' *la restriction de* u *à* E' *et soit* u''

l'endomorphisme de $E'' = c(I'')$ *défini par passage au quotient par u. Alors u' et u'' sont complètement continus, et l'on a*

$$\det(1-tu) = \det(1-tu').\det(1-tu'').$$

Cela résulte immédiatement de la définition.

Proposition **9.** — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit*

$$0 \to E_0 \xrightarrow{d} E_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} E_n \to 0,$$

une suite exacte d'espaces de Banach, les applications d étant linéaires et continues. Pour tout i, soit u_i *un endomorphisme complètement continu de* E_i *; supposons que* $d \circ u_i = u_{i+1} \circ d$ *pour* $0 \leqslant i < n$. *On a alors*

$$\prod_{i=0}^{i=n} \det(1-tu_i)^{(-1)^i} = 1.$$

Soit $V_i = d(E_i)$; puisque V_i est le noyau de d : $E_{i+1} \to E_{i+2}$, c'est un sous-espace fermé de E_{i+1}, et en particulier c'est un espace de Banach. On a des suites exactes :

$$0 \to V_{i-1} \to E_i \to V_i \to 0.$$

D'après la proposition 2 (applicable puisque la valuation de K est discrète), V_{i-1} est facteur direct dans E_i, et chacun des espaces E_i, V_i est de la forme $c(I)$. On peut donc appliquer le lemme 2 à l'endomorphisme u_i de E_i et aux endomorphismes v_{i-1} et v_i définis par u_i sur V_{i-1} et sur V_i. On en déduit que $\det(1-tu_i) = \det(1-tv_i).\det(1-tv_{i-1})$ d'où aussitôt la formule à démontrer.

6. La résolvante de Fredholm.

Nous conservons les notations et hypothèses du numéro précédent : E désigne l'espace de Banach $c(I)$, u un élément de $\mathscr{C}(E, E)$, (n_{ij}) la matrice de u, et l'on pose

$$\det(1-tu) = 1 - \mathrm{Tr}(u)t + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m.$$

La *résolvante de Fredholm* de u est par définition la série formelle

$$P(t, u) = \frac{\det(1-tu)}{1-tu} = \sum_{m=0}^{\infty} v_m t^m.$$

Les v_m sont des éléments de $\mathscr{L}(E, E)$. On les calcule au moyen des formules de récurrence

$$v_0 = 1, \quad v_m = c_m + uv_{m-1}.$$

Ces formules montrent en particulier que les v_m sont des *polynômes en u.*

Proposition **10.** — *La résolvante de Fredholm* $P(t, u)$ *est une fonction entière de t à valeurs dans* $\mathscr{L}(E, E)$. *De façon plus précise, pour tout nombre réel* M, *on a* $\lim . |v_m| M^m = 0$.

Il s'agit de majorer $|v_m|$. Pour cela, soit $r_1, \dots, r_m, \dots$, la suite décroissante de nombres réels introduite dans la démonstration de la proposition 7. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 3. — *On a* $|v_m| \leqslant r_1 \dots r_m$.

Cette majoration suffit pour la démonstration de la proposition 10. En effet, les $r_i \mathrm{M}$ tendent vers 0, et il en est donc de même de leurs produits $(r_1 \mathrm{M}) \dots (r_m \mathrm{M})$.

Reste à démontrer le lemme 3, ce que nous ferons en trois étapes :

a) *L'espace* E *est de dimension finie.* — Soit $n = \dim \mathrm{E}$. Les formules de Cramer montrent que la résolvante de Fredholm $\mathrm{P}(t, u)$ a pour matrice la *matrice adjointe* de $1 - tu$: les coefficients de cette matrice sont égaux, au signe près, aux mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice

$$(\delta_{ij} - t n_{ij}).$$

Le coefficient de t^m dans un tel terme est une combinaison linéaire, à coefficients ± 1, de mineurs d'ordre m de la matrice (n_{ij}), donc aussi une combinaison linéaire, à coefficients ± 1, de produits

$$n_{i_1 j_1} \dots n_{i_m j_m},$$

où les indices $j_1, \dots, j_m$ sont *deux à deux distincts*. La valeur absolue d'un tel produit est donc $\leqslant r_1 \dots r_m$, d'où le même résultat pour tous les coefficients de la matrice de v_m, ce qui signifie bien que $|v_m| \leqslant r_1 \dots r_m$.

b) *Il existe une partie finie* J *de* I *telle que* $n_{ij} = 0$ *si* j *n'appartient pas à* J. — Soit E^{J} le sous-espace de E engendré par les $(e_i)_{i \in \mathrm{J}}$; l'hypothèse faite sur u signifie que $u(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}^{\mathrm{J}}$. Notons u^{J} la restriction de u à E^{J}; on a $\det(1 - tu^{\mathrm{J}}) = \det(1 - tu)$, ce qui montre que la résolvante de Fredholm $\Sigma v_m^{\mathrm{J}} t^m$ de u^{J} a pour coefficients les restrictions v_m^{J} des v_m à E^{J}. En appliquant a) à u^{J}, on obtient

$$|v_m^{\mathrm{J}}| \leqslant r_1(u^{\mathrm{J}}) \dots r_m(u^{\mathrm{J}}) \leqslant r_1 \dots r_m.$$

D'autre part, il est clair que $|v_m|$ est la borne supérieure des $|v_m^{\mathrm{J}}|$ quand J varie. D'où l'inégalité cherchée.

c) *Cas général.* — Soit J une partie finie de I, et soit $u(\mathrm{J})$ l'endomorphisme de E dont la matrice (n'_{ij}) est donnée par les formules :

$$n'_{ij} = n_{ij} \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{J}, \qquad n'_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{I} - \mathrm{J}.$$

L'endomorphisme $u(\mathrm{J})$ vérifie la condition b); si l'on note $\Sigma v_m(\mathrm{J}) t^m$ sa résolvante de Fredholm, on a donc :

$$|v_m(\mathrm{J})| \leqslant r_1(u(\mathrm{J})) \dots r_m(u(\mathrm{J})) \leqslant r_1 \dots r_m.$$

Quand J varie, les $u(\mathrm{J})$ tendent vers u; de même, les formules de récurrence définissant les v_m montrent que $v_m(\mathrm{J}) \to v_m$. On en déduit bien

$$|v_m| \leqslant r_1 \dots r_m, \quad \textit{cqfd.}$$

Remarque. — La démonstration ci-dessus établit en fait les inégalités

$$|c_m| \leqslant |\wedge^m u|, \quad |v_m| \leqslant |\wedge^m u| \quad \text{et} \quad |\wedge^m u| \leqslant r_1 \dots r_m.$$

7. La théorie de Riesz.

Soit, comme ci-dessus, u un endomorphisme complètement continu de l'espace de Banach $E=c(I)$, soit $H(t)=\det(1-tu)$ son déterminant de Fredholm, et soit $P(t, u)$ sa résolvante de Fredholm. On a tout d'abord :

Proposition **11.** — *Soit a un élément du corps* K. *Pour que* $1-au$ *soit inversible dans* $\mathscr{L}(E, E)$, *il faut et il suffit que* $H(a)\neq 0$.

Si $H(a)\neq 0$, la relation

$$H(a)=(1-au).P(a, u)=P(a, u).(1-au)$$

montre que $1-au$ est inversible. Réciproquement, supposons que $1-au$ soit inversible, et écrivons son inverse sous la forme $1-v$. En écrivant que $(1-au)(1-v)=1$, on trouve $v=-au+auv$, ce qui montre que v est complètement continu. Le déterminant $\det(1-v)$ est donc défini, et le corollaire 1 à la proposition 7 montre que

$$\det(1-au).\det(1-v)=1$$

ce qui démontre que $\det(1-au)\neq 0$.

Proposition **12.** — *Soit $a\in K$ un zéro d'ordre h du déterminant de Fredholm* $H(t)$. *L'espace* E *se décompose de façon unique en somme directe topologique de sous-espaces fermés stables par u*

$$E=N(a)+F(a)$$

jouissant des propriétés suivantes :

(i) $1-au$ *est nilpotent sur* $N(a)$.

(ii) $1-au$ *est inversible sur* $F(a)$.

De plus, la dimension de $N(a)$ *est finie et égale à h.*

Si $f=\sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m$ est une série formelle, et si s est un entier $\geqslant 0$, nous poserons

$$\Delta^s f=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+s}{s}e_{m+s}t^m.$$

Si K est de caractéristique zéro, on a $\Delta^s f=\frac{1}{s!}\frac{d^s f}{dt^s}$. Les « dérivées divisées » Δ^s transforment une fonction entière en une fonction entière. Dire que a est un zéro d'ordre h de $H(t)$ signifie que l'on a

$$\Delta^s H(a)=0 \quad \text{pour} \quad s<h \quad \text{et} \quad \Delta^h H(a)=c\neq 0.$$

Considérons alors l'identité :

$$(1-tu).P(t, u)=H(t).$$

En lui appliquant l'opérateur Δ^s, on trouve :

$$(1-tu)\Delta^s P(t, u)-u\Delta^{s-1}P(t, u)=\Delta^s H(t).$$

Posons $v_s = \Delta^s P(a, u)$. En faisant $t = a$ dans les identités précédentes, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}
(1-au).v_0 &= 0\\
(1-au).v_1 - u.v_0 &= 0\\
&\cdots\\
(1-au).v_{h-1} - u.v_{h-2} &= 0\\
(1-au).v_h - u.v_{h-1} &= c, \text{ avec } c \neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence sur s, que $(1-au)^{s+1}v_s = 0$ pour $s<h$. D'autre part, si l'on pose :

$$e = c^{-1}(1-au).v_h \quad \text{et} \quad f = -c^{-1}u.v_{h-1}$$

la dernière équation montre que $e+f=1$. De plus, on a :

$$fe^h = 0, \quad \text{puisque} \quad (1-au)^h v_{h-1} = 0.$$

[Noter que, puisque les v_s sont des séries de puissances de u, tous les endomorphismes considérés commutent entre eux.]

En développant l'équation $(e+f)^h = 1$, on trouve :

$$e^h + (he^{h-1}f + \ldots + hef^{h-1} + f^h) = 1.$$

Posons alors :

$$p = e^h, \quad q = he^{h-1}f + \ldots + hef^{h-1} + f^h.$$

On a $p+q=1$ et $pq=0$ puisque $fe^h=0$. Il s'ensuit que $p^2=p$, $q^2=q$: les endomorphismes p et q sont des *projecteurs* et si l'on pose $N(a) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$, $F(a) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$, l'espace E se décompose en somme directe

$$E = N(a) + F(a).$$

On a $(1-au)^h q = 0$, ce qui montre que $1-au$ est *nilpotent sur* $N(a)$; de même, la formule $(1-au)^h(v_h)^h = c^h p$ montre que $1-au$ *est inversible sur* $F(a)$, son inverse étant $c^{-h}(1-au)^{h-1}(v_h)^h$. On a donc démontré l'existence de la décomposition cherchée; son unicité est immédiate. Reste à montrer que $\dim N(a) = h$. Soit W un sous-espace de dimension finie de $N(a)$, stable par u. D'après la remarque 2 du n° 1, le sous-espace W est facteur direct dans E, et E/W est de la forme $c(J)$. On peut appliquer le lemme 2 du n° 6, et l'on en déduit que $\det(1-tu)$ est divisible par $\det(1-tu_W) = (1-ta^{-1})^{\dim W}$. Il s'ensuit que $\dim W \leqslant h$, et ceci étant vrai pour tout W, on voit que l'on a nécessairement $\dim N(a) \leqslant h$. Appliquant encore le lemme 2, on obtient $\det(1-tu) = (1-ta^{-1})^{\dim N(a)} H'(t)$, où $H'(t)$ est le déterminant de Fredholm de la restriction de u à $F(a)$. D'après la proposition 11, on a $H'(a) \neq 0$, et comme a est zéro d'ordre h de $H(t)$, on en déduit finalement que $\dim N(a) = h$, *cqfd.*

Corollaire (« alternative de Fredholm »). — *Pour tout* $a \in K$, *l'image de* $1-au$ *est un sous-espace fermé de codimension finie de* E; *cette codimension est égale à la dimension du noyau de* $1-au$.

C'est évident sur la décomposition $E = E(a) + F(a)$.

Remarques. — 1) Lorsque K est *localement compact*, l'existence de la décomposition $E = N(a) + F(a)$ peut aussi se démontrer, sans faire intervenir la théorie de Fredholm, en procédant exactement comme Riesz (cf. par exemple Dieudonné [2], Chap. XI, §§ 3, 4, dont les démonstrations s'appliquent sans changement).

2) La théorie classique de Fredholm fournit des formules explicites (à la Cramer) pour la résolution des équations du type

$$x - a.u(x) = y, \quad y \in E$$

cf. par exemple l'exposé de Sikorski [9]. Il est très probable que ces formules restent valables dans le cas considéré ici. (Par contre, on ne peut pas suivre la présentation de la théorie donnée par Grothendieck [7], ne serait-ce qu'à cause des nombreuses factorielles qu'il a introduites en dénominateur.)

3) Ce qui précède ne concerne qu'une racine a de $H(t)$ *qui appartient* au corps K. Plus généralement, soit a une racine quelconque de $H(t)$, soient $a^{(i)}$ ses conjuguées, et formons le polynôme

$$Q(t) = \Pi\,(1 - a^{(i)}t),$$

chaque $a^{(i)}$ étant répété un nombre de fois égal à sa multiplicité. Les coefficients de Q appartiennent à K. On a alors une décomposition analogue à celle de la proposition 12 :

$$E = N(Q) + F(Q),$$

avec $Q(u)$ nilpotent (resp. inversible) sur $N(Q)$ (resp. sur $F(Q)$). Cela se voit en écrivant $Q(u)$ sous la forme $1-u'$, avec $u' \in \mathscr{C}(E, E)$, et en appliquant la proposition 12 à u' et à $a = 1$. On obtient ainsi une théorie en tout point analogue à celle de Riesz.

Signalons une application simple de ce qui précède :

Proposition **13.** — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soient* E *et* F *deux espaces de Banach sur* K, *soient* $u \in \mathscr{C}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(E, F)$, *et supposons que* v *soit surjectif. Alors l'image de* $u+v$ *est un sous-espace fermé de codimension finie de* F.

(Dans le cas classique, c'est un résultat de Schwartz, cf. [1], exposé 16.)

Soit N le noyau de v; d'après le théorème de Banach, v définit par passage au quotient un isomorphisme de E/N sur F. D'après la proposition 2 du n° 1, il existe dans E un supplémentaire fermé F′ de F. Comme $(u+v)(E)$ contient $(u+v)(F')$, il suffit de prouver que $(u+v)(F')$ est un sous-espace fermé de codimension finie de F; on est donc ramené au cas où v est un isomorphisme, donc aussi au cas où $v = 1$; en appliquant alors le corollaire à la proposition 12 avec $a = -1$, on obtient le résultat cherché.

Corollaire. — *Soient* $C=(C_n, d_n)$ *et* $C'=(C'_n, d'_n)$ *deux complexes, les* C_n, C'_n *étant des espaces de Banach, et les applications bords*

$$d_n : C_{n+1} \to C_n, \qquad d'_n : C'_{n+1} \to C'_n$$

étant linéaires et continues. Soit $u : C' \to C$ *une application linéaire complètement continue commutant avec les applications bords. Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit n un entier tel que u applique* $H_n(C')$ *sur* $H_n(C)$; *alors* $H_n(C)$ *est de dimension finie.*

Soit Z_n (resp. Z'_n) le sous-espace des cycles de degré n de C (resp. C'); l'application u définit une application linéaire

$$\bar{u} : Z'_n \to Z_n$$

qui est complètement continue. L'hypothèse faite sur les H_n équivaut à dire que l'application

$$(d_n, \bar{u}) : C_{n+1} \times Z'_n \to Z_n$$

est surjective. D'après la proposition 13, l'image de $(d_n, \bar{u})-(0, \bar{u})$ est un sous-espace de codimension finie de Z_n; comme cette image est égale à $d_n(C_{n+1})$, cela signifie bien que $H_n(C)$ est de dimension finie.

8. Dualité.

Soit E (resp. F) un espace de Banach, et soit E' (resp. F') son dual. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le *transposé* u' de u est défini; c'est un élément de $\mathscr{L}(F', E')$.

Proposition **14.** — *Si u est complètement continu, il en est de même de son transposé.*

Si u est complètement continu, il existe une suite u_n d'applications continues de rang fini tendant vers u. Comme $|u'-u'_n| \leqslant |u-u_n|$, la suite des u'_n tend vers u', et les u'_n sont de rang fini. Donc u' est complètement continu.

Exemple. — Soit $E=c(I)$, soit $F=c(J)$. On a $E'=b(I)$, $F'=b(J)$. Soit (n_{ij}) une matrice bornée telle que n_{ij} tende vers o quand $j \to \infty$, la convergence étant *uniforme* par rapport à i. Si $y=(y_j)_{j\in J}$ appartient à $b(J)$, posons

$$u'y=(x_i)_{i\in I}, \qquad \text{avec } x_i=\sum_{j\in J} n_{ij}y_j.$$

On définit ainsi une application linéaire $u' : F' \to E'$ qui est *complètement continue.* En effet, c'est la transposée d'une application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ qui est complètement continue en vertu du cor. à la prop. 4.

Proposition **15.** — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit* $u \in \mathscr{C}(E, E)$. *Alors* $\det(1-tu)=\det(1-tu')$ *et, pour tout* $a \in K$, *la décomposition de Riesz de* E' *est duale de celle de* E.

(Noter que, puisque la valuation de K est discrète, E et E' sont isomorphes à des espaces $c(I)$ et $c(I')$; en particulier, $\det(1-tu)$ et $\det(1-tu')$ sont bien définis.)

Soit $E = E(a) + F(a)$ la décomposition de Riesz de E; par dualité, on obtient une décomposition $E' = E(a)' + F(a)'$ de E', et comme $1 - au$ est nilpotent (resp. inversible) sur $E(a)$ (resp. sur $F(a)$), son transposé $1 - au'$ est nilpotent (resp. inversible) sur $E(a)'$ (resp. sur $F(a)'$). Donc $E' = E(a)' + F(a)'$ est la décomposition de Riesz de E' relative à a.

On a un résultat analogue pour les racines de $\det(1 - tu)$ qui ne sont pas dans le corps K (cf. remarque 3 du n° 7). On en déduit que $\det(1 - tu)$ et $\det(1 - tu')$ ont les mêmes racines, avec les mêmes multiplicités. D'après la théorie des fonctions entières p-adiques (cf. Dwork [4], § 1) cela entraîne que $\det(1 - tu) = \det(1 - tu')$.

[On peut aussi commencer par montrer que $\det(1 - tu) = \det(1 - tu')$ quand u est *de rang fini*, et passer à la limite.]

9. Exemples tirés de [4].

Nous supposerons dans ce numéro que la valuation de K est *discrète*; on a donc $x = a^{v(x)}$, avec $a < 1$, v étant un homomorphisme de K^* sur un sous-groupe discret de **R**.

Soient n et d deux entiers $\geqslant 1$, et soit $X = (X_0, \ldots, X_{n+1})$ un système de $n+2$ indéterminées; soit T la partie de $\mathbf{N}^{n+2}$ formé des $u = (u_0, \ldots, u_{n+1})$ tels que $du_0 = u_1 + \ldots + u_{n+1}$ (nous suivons ici les conventions du § 3 de [4], plutôt que celles du § 2). Si $u \in T$ on note X^u le monôme $X_0^{u_0} \ldots X_{n+1}^{u_{n+1}}$. Soit b un élément de **R** tel qu'il existe $\pi \in K$ avec $v(\pi) = b$. Soit $L(b)$ l'ensemble des séries

$$f = \sum_{u \in T} a_u X^u, \quad a_u \in K$$

telles que $v(a_u) + bu_0$ soit borné inférieurement, ou, ce qui revient au même, telles que $|a_u \pi^{-u_0}|$ soit borné. On munit $L(b)$ de la norme

$$|f| = \operatorname{Sup}_{u \in T} |a_u \pi^{-u_0}|.$$

C'est un *espace de Banach*, isomorphe à l'espace $b(T)$. Soit $b' = v(\pi')$, et supposons que $b' > b$; alors $L(b')$ est un sous-espace de $L(b)$. *L'injection* $i : L(b') \to L(b)$ *est complètement continue* (« critère de normalité de Montel »); en effet, si l'on identifie $L(b)$ et $L(b')$ à $b(T)$, l'application i transforme (x'_u) en (x_u), avec

$$x_u = (\pi'/\pi)^{u_0} x_u;$$

elle est donc définie par une matrice diagonale à termes tendant vers o ce qui suffit à établir sa complète continuité (cf. n° 8).

On a deux autres types d'applications linéaires à considérer :

(i) On se donne un élément $g = \Sigma c_u X^u$ de $L(b)$, avec $b > 0$. L'application $f \to fg$ est un endomorphisme continu de $L(b)$, que l'on note encore g.

(ii) Soit q un entier fixé $\geqslant 2$. Si $f = \Sigma a_u X^u$ est une série formelle, on pose $\psi(f) = \Sigma a_{qu} X^u$; si $f \in L(b)$, on a $\psi(f) \in L(qb)$, et ψ est une application linéaire continue de $L(b)$ dans $L(qb)$.

Comme $b>0$, on a $qb>b$, et l'injection $L(qb)\xrightarrow{i}L(b)$ est définie. En composant

$$L(qb)\xrightarrow{i}L(b)\xrightarrow{g}L(b)\xrightarrow{\psi}L(qb),$$

on obtient un endomorphisme α de $L(qb)$, noté $\psi\circ g$ par abus d'écriture. Puisque i est complètement continu et que g et ψ sont continus, α est *complètement continu*; son déterminant de Fredholm se calcule en remarquant que c'est le transposé de l'endomorphisme complètement continu défini par la matrice (c_{qu-v}); en appliquant à α les théories de Riesz et de Fredholm, on retrouve les résultats du § 2 de [4].

L'un des résultats principaux du § 3 de [4] est la construction d'une *suite exacte*

$$0\to E\xrightarrow{d}E^{n+1}\xrightarrow{d}\dots\xrightarrow{d}E^{\binom{n+1}{2}}\xrightarrow{d}E^{n+1}\xrightarrow{d}E\to W\to 0,$$

où E est un espace de Banach du type $L(b)$, où W est un espace vectoriel de dimension finie, et où les opérateurs d sont construits par un procédé standard (« complexe de l'algèbre extérieure ») à partir des opérateurs différentiels $D_1,\dots,D_{n+1}$. Si l'on munit $E^{\binom{n+1}{i}}$ de l'endomorphisme $u_i=q^i(\psi\circ g)$, les u_i commutent aux opérateurs d, et la proposition 9 montre que l'on a :

$$\prod_{i=0}^{i=n+1}\det(1-tq^i\psi\circ g)^{(-1)^i\binom{n+1}{i}}=\det(1-t\bar{\alpha}),$$

où $\bar{\alpha}$ est l'endomorphisme de W défini par $\psi\circ g$. On obtient ainsi directement la formule du théorème 4.2 de [4], formule qui joue un rôle essentiel dans le calcul de la fonction zêta d'une hypersurface.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, *Séminaire E.N.S.*, 1953-1954.

[2] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Acad. Press, 1960.

[3] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. of Maths.*, *82*, 1960, p. 631-648.

[4] B. Dwork, On the zeta function of a hypersurface, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 12, 1962.

[5] I. Fleischer, Sur les espaces normés non archimédiens, *Proc. Acad. Amsterdam*, *57*, 1954, p. 165-168.

[6] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 16, 1955.

[7] A. Grothendieck, La théorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, *84*, 1956, p. 319-384.

[8] A. Monna, Sur les espaces normés non archimédiens : I. *Proc. Acad. Amsterdam*, *59*, 1956, p. 475-483; II. *Ibid.*, p. 484-489; III. *Ibid.*, *60*, 1957, p. 459-467; IV. *Ibid.*, p. 468-476.

[9] R. Sikorski, The determinant theory in Banach spaces, *Colloquium mathematicum*, *8*, 1961, p. 141-198.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1961.