SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

P. MATHIEU

Quand l'inégalité log-Sobolev implique l'inégalité de trou spectral

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 30-35

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__30_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUAND L'INEGALITE LOG-SOBOLEV IMPLIQUE L'INEGALITE DE TROU SPECTRAL

P.Mathieu.
LATP-CMI. Rue Joliot-curie.
F-13013 Marseille.
PMathieu@gyptis.univ-mrs.fr.

Résumé: Nous montrons que, sur une variété Riemannienne de volume fini, l'inégalité de Sobolev logarithmique implique l'inégalité de trou spectral.

Soit E un espace localement compact séparable. Soit μ une mesure de Radon sur E. Nous supposons que μ est une probabilité et que son support est E. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une forme de Dirichlet symétrique sur (E, μ) au sens de Fukushima 1980. Nous supposerons que $1 \in \mathcal{F}$ (1 est la fonction constante égale à 1) et que $\mathcal{E}(u, 1) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u, u)$. Nous utilisons aussi la notation $\|u\|_p$ pour la norme de la fonction u dans $L_p = L_p(E, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Pour une fonction positive $u \in L_2$, on notera

$$E_2(u) = \int u^2 \log u^2 d\mu - \int u^2 d\mu \log \int u^2 d\mu$$

Soient $m \in \mathbb{R}_+$ et $\Lambda > 0$. Nous dirons que la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité log-Sobolev de constantes Λ et m si, pour toute fonction positive $u \in \mathcal{F}$, on a

$$E_2(u) \leq \frac{1}{\Lambda}(\mathcal{E}(u) + m \int u^2 d\mu) \tag{1}$$

On appelle "inégalité log-Sobolev tendue" l'inégalité (1) si $m = 0$. Il est connu que l'inégalité (1) est équivalente à certaines propriétés de contraction du semi-groupe Markovien associé à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Par exemple on a, pour tout $t > 0$, $\|P_t u\|_q \leq e^{m'} \|u\|_2$, où $q = 1 + \exp(4\Lambda t)$ et $m' = (1/2 - 1/q)m/\Lambda$. Remarquer que si $m = 0$ - i.e. si l'inégalité est tendue - alors $m' = 0$ et P_t est en fait une contraction de L_2 dans L_q. Nous renvoyons à Bakry 1992 pour d'autres résultats.
Soit maintenant

$$\Lambda(2) = \inf_{u \in \mathcal{F}, \int u d\mu = 0} \frac{\mathcal{E}(u)}{\int u^2 d\mu} \tag{2}$$

le trou spectral du générateur de $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Nous dirons que la forme de Dirichlet satisfait l'inégalité de trou spectral si $\Lambda(2) > 0$. -
D'après les propositions 3.7 et 3.9 de Bakry 1992, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait une inégalité log-Sobolev tendue si et seulement si elle satisfait une inégalité log-Sobolev et l'inégalité de trou spectral. Des estimées du trou spectral en fonction de constantes dans des inégalités de Sobolev, log-Sobolev... ont également été obtenues par S.Aida 1997. L'objet de cette note est de montrer que, sous certaines conditions d'ergodicité plus faibles que l'inégalité de trou spectral, on conserve l'implication: "log-Sobolev" implique "log-Sobolev tendue".
Pour cela nous introduisons la propriété suivante:

(P) Pour toute suite de fonctions $u_n \in \mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\|u_n\|_\infty \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, alors u_n converge vers 0 en μ mesure.

THEOREME

Si $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait la propriété (P) et une inégalité log-Sobolev, alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité de trou spectral.

Avant de donner la preuve du théorème, voici un exemple:

COROLLAIRE 1

Soit E une variété Riemannienne connexe complète. On choisit pour μ la mesure de volume Riemannienne et nous supposerons donc que E est de volume égal à 1. Soit $\mathcal{E}(u) = \int_E |du|^2 d\mu$, la forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace Beltrami sur E. $\mathcal{F}$ est l'espace de Sobolev H_1. Alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait la propriété (P). D'après le théorème, cela implique que, si $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité log-Sobolev alors elle satisfait aussi l'inégalité de trou spectral.

Preuve

Nous recopions la preuve donnée dans Mathieu 1996-2. Soit K un sous-ensemble compact connexe régulier de E. Il existe une constante C telle que, pour toute fonction $u \in C^\infty$, on ait

$$\mu(K) \int_K (u - \frac{\int_K u d\mu}{\mu(K)})^2 d\mu \leq \frac{1}{C} \int_K |du|^2 d\mu \tag{3}$$

(En d'autres termes, nous avons une inégalité de Poincaré sur K. Nous donnons une preuve de l'inégalité (3) en annexe).

Soit u_n une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\|u_n\|_\infty \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}
&\int u_n^2 d\mu \\
&= \int_K u_n^2 d\mu + \int_{E-K} u_n^2 d\mu \\
&\leq \frac{(\int_K u_n d\mu)^2}{\mu(K)^2} + \frac{1}{C\mu(K)} \int_K |du_n|^2 d\mu + \int_{E-K} u_n^2 d\mu \\
&\leq \frac{\mu(E-K)^2}{\mu(K)^2} + \frac{1}{C\mu(K)} \mathcal{E}(u_n) + \mu(E-K)
\end{aligned}$$

Donc

$$\limsup \int u_n^2 d\mu \leq \frac{\mu(E-K)^2}{\mu(K)^2} + \mu(E-K)$$

Il suffit maintenant de choisir K assez gros pour montrer que u_n converge vers 0 dans L_2 donc en μ mesure.

Remarques

1-Pour une forme de Dirichlet symétrique (comme c'est le cas ici), la propriété (P) est équivalente à la propriété suivante:

$$\sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|P_t u - \int u d\mu\|_1 \to 0$$

quand t tend vers $+\infty$.
2-La propriété (P) permet également d'obtenir des estimées pour les temps d'atteinte pour le processus de Markov associé à $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: soit $(X_t, t \geq 0)$ le processus de Markov associé à $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Pour un ensemble mesurable A, on note $\tau_A = \inf\{t > 0 \ t.q. \ X_t \in A\}$ le temps d'atteinte de A par X. Alors (P) a lieu si et seulement si $\lim_{T\to\infty} \sup_A \mu(A) P_\mu[\tau_A \geq T] = 0$. (P_μ désigne la loi du processus X quand la loi de X_0 est μ). Voir Mathieu 1996-2 et 1996-3.
3-Tous les processus de Markov symétriques ergodiques ne satisfont pas (P). Par exemple le processus d'exclusion simple symétrique en dimension 1 ne satisfait pas (P). (Voir Mathieu 1996-2)

COROLLAIRE 2

Comme dans le corollaire 1, nous choisissons pour $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ la forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété connexe complète de volume 1. Soit $n > 2$. Supposons que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n:

$$\|u\|_p \leq \frac{1}{\Lambda}(\mathcal{E}(u) + m \int u^2 d\mu)$$

où $p = 2n/(n-2)$.
Alors la variété E est compacte.

Preuve
L'inégalité de Sobolev implique l'inégalité de Sobolev faible et donc l'inégalité log-Sobolev. (Voir Bakry 1992, chapitre 4). D'après le théorème, on a donc une inégalité de trou spectral. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait donc une inégalité de Sobolev et l'inégalité de trou spectral. D'après Bakry 1992, Lemme 4.1, cela implique que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfait en fait l'inégalité de Sobolev tendue i.e. avec $m = \Lambda$.
D'après la remarque 1 suivant le théorème 5.4 de Bakry 1992, le diamètre de E est fini. Donc E est compacte.

Preuve du théorème
Supposons l'inégalité (1) satisfaite ainsi que (P).
1- Reformulons (P): soit $u_n \in \mathcal{F}$, une suite de fonctions telle que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$. Soit $k > 0$ et posons $v_n = u_n \wedge k \vee (-k)$ et $w_n = v_n - \int v_n d\mu$. Alors

$$\frac{k}{2}\mu(u_n > \frac{k}{2}) \leq \int_{u_n > \frac{k}{2}} u_n d\mu = -\int_{u_n \leq \frac{k}{2}} u_n d\mu \leq \sqrt{\mu(u_n \leq \frac{k}{2})}$$

car $\int u_n^2 d\mu \leq 1$. Donc

$$\int (k - v_n) d\mu \geq \frac{k}{2} \mu(v_n \leq \frac{k}{2}) = \frac{k}{2} \mu(u_n \leq \frac{k}{2})$$
$$\geq \frac{k^3}{8} \mu(u_n > \frac{k}{2})^2 \geq \frac{k^3}{8} \mu(u_n \geq k)^2$$

Sur l'ensemble où $u_n \geq k$, on a $v_n = k$, donc

$$\int |w_n| d\mu \geq \mu(u_n \geq k) \int (k - v_n) d\mu \geq \frac{k^3}{8} \mu(u_n \geq k)^3$$

Comme nous avons supposé que $\mathcal{E}(1, u) = 0$ et comme v_n est une contraction normale de u_n, on a $\mathcal{E}(w_n) = \mathcal{E}(v_n) \leq \mathcal{E}(u_n)$. De plus $\|w_n\|_\infty \leq 2k$. La suite w_n satisfait donc les hypothèses de (P), donc w_n converge vers 0 en μ mesure et donc dans L_1. D'après les inégalités ci-dessus, cela implique que $\mu(u_n \geq k) \to 0$. De même on montrerait que $\mu(u_n \leq -k) \to 0$. On a ainsi prouvé que u_n converge vers 0 en μ mesure. Comme la suite u_n est bornée dans L_2 elle converge en fait vers 0 dans L_1. Nous avons donc montré que (P) implique
(P'): pour toute suite de fonctions $u_n \in \mathcal{F}$ telles que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, alors u_n converge vers 0 dans L_1.
2- Nous allons aussi ré-écrire l'inégalité log-Sobolev sous une forme un peu différente. Soient $p < 2 < p'$ et $q < 0 < q'$ tels que $1/p + 1/q = 1/p' + 1/q' = 1/2$. L'inégalité de Holder implique que

$$q \log \frac{\|u\|_p}{\|u\|_2} \leq q' \log \frac{\|u\|_{p'}}{\|u\|_2}$$

En faisant tendre p' vers 2 et en choisissant $p = 1$, on obtient

$$-2 \log \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \leq \frac{E_2(u)}{\|u\|_2^2} - \tag{4}$$

(1) et (4) impliquent que

$$2 \log \frac{\|u\|_2}{\|u\|_1} \leq \frac{1}{\Lambda} (\frac{\mathcal{E}(u)}{\|u\|_2^2} + m) \tag{5}$$

pour toute fonction positive $u \in \mathcal{F}$.
3- Montrons que $\Lambda(2) \neq 0$. Il suffit de prouver que, pour toute suite $u_n \in \mathcal{F}$ telle que $\int u_n d\mu = 0$, $\int u_n^2 d\mu \leq 1$ et $\mathcal{E}(u_n) \to 0$, on a $\int u_n^2 d\mu \to 0$ Or d'après (P'), u_n converge vers 0 dans L_1. D'après (5), u_n converge donc vers 0 dans L_2.

Annexe
Nous donnons ici une démonstration de l'inégalité (3): on notera n la dimension de la variété E, d la distance sur K et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\varepsilon_1 > 0$. Soit $(x_i, i = 1...N)$ une famille de points de l'intérieur de K tels que $K \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon_1)$, où $B(x, r)$ désigne la boule géodésique de centre x et rayon r.
Soient $k, l \in \{1, ...N\}$. Soit $(l(t), t \in [0, 1])$ un chemin dans l'intérieur de K tel que $l(0) = x_k$ et $l(1) = x_l$. Soit $\varepsilon_2 = \inf_{k,l} \inf_t d(l(t), \partial K)$. Soit $\varepsilon_3 < \varepsilon_1, \varepsilon_3 < \varepsilon_2/3$. Soient $x \in B(x_k, \varepsilon_1) \cap K$ et $y \in B(x_l, \varepsilon_1) \cap K$. Soit $(l_{x,y}(t), t \in [-1/4, 5/4])$

un chemin de x à y tel que $l_{x,y}(t) \in K$, $d(l_{x,y}(0), x_k) \leq \varepsilon_3$, $d(l_{x,y}(1), x_l) \leq \varepsilon_3$, $\sup_{t\in[0,1]} d(l_{x,y}(t), l(t)) < \varepsilon_2$. Nous supposons de plus que $\sup_{x,y} \sup_t |\frac{d}{dt} l_{x,y}(t)| < \infty$ et que

$$(*) \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)\Phi(l_{x,y}(t)) \leq C \int_K \Phi(z)d\mu(z)$$

pour toute fonction positive régulière Φ. Ici C est une constante indépendante de Φ et t. Pour construire $(l_{x,y}(t), -1/4 \leq t \leq 0)$, on utilise un difféomorphisme entre $B(x_k, \varepsilon_1)$ et B. Rappelons que, par hypothèse, K est régulier, c'est-à-dire qu' il est possible de choisir ε_1 et les x_i tels que soit $B(x_i, \varepsilon_1) \subset K$, soit il existe un difféomorphisme F de $B(x_i, \varepsilon_1)$ vers B tel que l'image de $B(x_i, \varepsilon_1) \cap \partial K$ soit $B \cap [x_n = 0]$, et l'image de $B(x_i, \varepsilon_1) \cap Int(K)$ soit $B \cap [x_n < 0]$. On procède de même pour $t \in [1, 5/4]$. Soient maintenant $e_0 \in T_{x_k}K$ et $e_1 \in T_{x_l}K$ tels que $l_{x,y}(0) = \exp_{x_k}(e_0)$ et $l_{x,y}(1) = \exp_{x_l}(e_1)$. On identifie les espaces tangents $(T_{l(t)}K, t \in [0,1])$ par transport parallèle le long de la courbe l. Pour $t \in [0,1]$, posons $e_t = e_0 + t(e_1 - e_0) \in T_{l(t)}K$ et $l_{x,y}(t) = \exp_{l(t)}(e_t)$. Le chemin ainsi construit satisfait nos hypothèses.
On a alors

$$\begin{aligned}
&2\mu(K) \int_K (u(x) - \frac{\int_K u(y)d\mu(y)}{\mu(K)})^2 d\mu(x) \\
=&\int_K d\mu(x) \int_K d\mu(y)(u(x) - u(y))^2 \\
\leq&\Sigma_{k,l} \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)(u(x) - u(y))^2
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)(u(x) - u(y))^2 \\
=&\int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y)(\int_{-1/4}^{5/4} dt\ du(l_{x,y}(t)).\frac{d}{dt} l_{x,y}(t))^2 \\
\leq&C' \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) \int_{-1/4}^{5/4} dt |du(l_{x,y}(t))|^2 \\
\leq&C' \sup_t \int_{K\cap B(x_k,\varepsilon_1)} d\mu(x) \int_{K\cap B(x_l,\varepsilon_1)} d\mu(y) |du(l_{x,y}(t))|^2 \\
\leq&C' \int_K |du(x)|^2 d\mu(x) \text{ d'après } (*) \\
=&C'\mathcal{E}(u)
\end{aligned}$$

où la constante C' ne dépend ni de k, ni de l, ni de u.

L'auteur remercie D.Bakry et M.Ledoux pour leurs suggestions qui ont permis de simplifier la preuve du théorème.

Références:
Aida.S. (1997): Uniform positivity improving property, Sobolev inequality and spectral gaps. Preprint.

Bakry.D. (1992): L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes. Ecole d'été de St Flour 1992. LNM 1581.
Fukushima.M. (1980): Dirichlet forms and Markov processes. (North Holland).
Mathieu.P. (1996-1): Hitting times and spectral gap inequalities. A paraître dans Ann. IHP.
Mathieu.P (1996-2): On the law of the hitting time of a small set by a Markov process. Preprint
Mathieu.P (1996-3): Uniform estimates of the hitting times of big sets by a Markov process. Preprint