SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN
MARC YOR

Moyennes mobiles et semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 53-77
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__53_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Moyennes mobiles et semimartingales.

T. Jeulin[(1)] *et M. Yor*[(2)]

(1) *UFR de Mathématiques et URA 1321, Université Paris 7, Tour 45-55, 5ème étage, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cédex 05.*

(2) *Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, Tour 56, 3ème étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cédex 05.*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0. On a étudié en [JY] le processus défini pour $t \geq 0$ par :

$$T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} X_s \, ds \ ;$$

on a vu en particulier que :

* T(X) est un mouvement brownien réel ;

* pour tout $t > 0$, la tribu $\sigma\{T(X)_s \mid s \leq t\}$ coïncide, aux ensembles négligeables près, avec celle du pont brownien de longueur t, défini pour $u \leq t$ par : $X_u^{(t)} = X_u - \frac{u}{t} X_t$; en conséquence, pour tout $t \geq 0$, $\sigma\{T(X)_s \mid s \leq t\}$ est indépendante de $\sigma\{X_s \mid s \geq t\}$.

* la transformation T est ergodique sur l'espace de Wiener.

On peut aussi écrire : $T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} \int_0^s dX_v \, ds = \int_0^t \left(1 - \mathrm{Log}\frac{t}{v}\right) dX_v$, ce qui incite à introduire :

$$\mathcal{M} \equiv \left\{\rho :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ fonction mesurable telle que : } 0 < \int_0^1 \rho^2\left(\frac{1}{u}\right) du < \infty\right\}$$

et à étudier pour $\rho \in \mathcal{M}$ le processus $\left(R_t \equiv \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right) dX_s\right)_{t\geq 0}$.

On peut chercher, par exemple :

- à quelles conditions R est une semi-martingale dans la filtration de X ou dans sa filtration propre ?
- Quelle est la famille $\mathcal{M}_b$ des fonctions ρ de $\mathcal{M}$ pour lesquelles R est un mouvement brownien et quelles sont dans ce cas les propriétés de la transformation $X \longrightarrow R$?

De fait, on voit aisément que le processus $\tilde{R}$ défini pour $\tau \in \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{R}_\tau = e^{-\tau/2} R_{\exp\tau}$$

est un processus gaussien stationnaire (plus précisément une moyenne mobile) ;

l'étude proposée plus haut traite donc, en fait, de processus gaussiens stationnaires pour lesquels une importante littérature existe ; on apporte ici des compléments aux travaux de JAIN-MONRAD [JMo], EMERY [E], STRICKER [S]. On retrouve ainsi, avec une démonstration différente, le résultat suivant qui figure dans KNIGHT ([Kn] théorème 6.5) :

R est une $\mathcal{X}$-semi-martingale si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ *et* $q \in \mathcal{M}$ *tels que :* $\rho = c + \int_1^{\cdot} \frac{1}{\psi}\, q(\psi)\, d\psi$; *cX est alors la partie martingale de* R, *tandis que sa partie à variation finie est* $\int_0^{\cdot} \left(\frac{1}{u}\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dX_s\right) du$.

Le passage par les processus gaussiens stationnaires permet en outre de donner un autre éclairage à certains résultats de [JY].

Conventions : soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(Z_r)_{r\in J}$ un processus mesurable défini sur l'espace probabilisé [complet] $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$;
$\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_r)_{r\in J}$ désigne la filtration engendrée par Z :

$$\mathcal{Z}_r = \sigma\{Z_s \mid s \le r,\ s \in J\} \vee \mathcal{N}\ ,$$

où $\mathcal{N}$ est la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{A}$.

Pour $L = (L_t)_{t\ge 0}$ processus indexé par $\mathbb{R}_+$, $\tilde{L}$ est le processus défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{L}_\tau = e^{-\tau/2} L_{\exp\tau}$$

1) Quelques réécritures.

Soit $X = (X_t)_{t\ge 0}$ un mouvement brownien ; $\tilde{X}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à X : remarquons que, pour $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$,

$$E[\tilde{X}_\tau \tilde{X}_\sigma] = \exp{-\tfrac{1}{2}|\tau - \sigma|} = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\gamma(\tau-\sigma)} \frac{1}{1+4\gamma^2}\, d\gamma\ ;$$

$\tilde{X}$ est gaussien stationnaire ; sa mesure spectrale λ_0 a pour densité $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+4\gamma^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

Soit aussi $\beta_\tau = \begin{cases} \tilde{X}_\tau - \frac{1}{2}\int_\tau^0 \tilde{X}_s\, ds & \text{si } \tau \le 0 \\ \tilde{X}_\tau + \frac{1}{2}\int_0^\tau \tilde{X}_s\, ds & \text{si } \tau \ge 0 \end{cases}$;

β est un mouvement brownien (indexé par $\mathbb{R}$) (ses accroissements sont gaussiens, centrés, indépendants, $E[(\beta_\tau - \beta_\sigma)^2] = |\tau - \sigma|$) et $\beta_0 = \tilde{X}_0 = X_1$) ;
pour φ de classe C^1, à support compact dans $]0,\infty[$,

$$\int_0^\infty \varphi(s)\, dX_s = -\int_0^\infty \varphi'(s)\, X_s\, ds = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\tau}\left(\varphi(e^\tau)\right) e^{\tau/2}\, \tilde{X}_\tau\, d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}\varphi(\tau)\ (d\tilde{X}_\tau + \tfrac{1}{2}\,\tilde{X}_\tau\,d\tau) \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}\varphi(\tau)\,d\beta_\tau$$

où $\mathcal{U}$ est l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ sur $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ définie par :

$$\mathcal{U}\varphi(\tau) = e^{\tau/2}\,\varphi(e^\tau)\ ;$$

on notera que $\tilde{\mathcal{X}}_\tau$ coïncide avec la tribu $\sigma\{\beta_y - \beta_z \mid y \le z \le \tau\}$.

Dans la suite, on identifiera (isométriquement) l'espace gaussien de $\tilde{X}$ et $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ en identifiant $\tilde{X}_\tau$ et la fonction $\gamma \longrightarrow e^{i\gamma\tau}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2} + i\gamma}$.

Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+,ds)$, $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(s)\,dX_s$ sera donc identifié avec $\widehat{\mathcal{U}\varphi}$

(pour $f \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f ; on notera aussi e_τ la fonction $\gamma \longrightarrow e_\tau(\gamma) = e^{i\gamma\tau}$).

Soit $\rho \in \mathcal{M}$ et, pour $t \ge 0$, $R_t \equiv \displaystyle\int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$; on a :

$$\tilde{R}_\tau = e^{-\tau/2}\,R_{\exp\tau} = e^{-\tau/2}\int_{\mathbb{R}} e^{\sigma/2}\,\rho(e^{\tau-\sigma})\,1_{\{\sigma < \tau\}}\,d\beta_\sigma\ ;$$

$\tilde{R}$ est donc la *moyenne mobile adaptée* $\tau \longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\tau} \eta_\rho(\tau - \sigma)\,d\beta_\sigma$ où :

$$\eta_\rho(\tau) = 1_{\{\tau > 0\}}\,e^{-\tau/2}\,\rho(e^\tau) \quad (\eta_\rho \in L^2(\mathbb{R},\lambda))\ ;$$

$\tilde{R}$ est gaussien stationnaire, de fonction de covariance :

$$E[\tilde{R}_\sigma\,\tilde{R}_\tau] = \int_{-\infty}^{\sigma} \eta_\rho(\tau-\upsilon)\,\eta_\rho(\sigma-\upsilon)\,d\upsilon = \int_0^\infty \eta_\rho(\upsilon)\,\eta_\rho(\tau-\sigma+\upsilon)\,d\upsilon \quad (\sigma \le \tau)$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\eta}_\rho(\upsilon)|^2\,e^{i\upsilon(\tau-\sigma)}\,d\upsilon\ ;$$

la mesure spectrale de $\tilde{R}$ est la mesure de densité $(2\pi)^{-1}\,|\hat{\eta}_\rho(\upsilon)|^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$; on a donc :

Lemme 1 : *Soit $\rho \in \mathcal{M}$ et $\eta_\rho(\tau) = 1_{\{\tau > 0\}}\,e^{-\tau/2}\,\rho(e^\tau)$; alors ρ appartient à $\mathcal{M}_b$ si et seulement si* :

$$(\tfrac{1}{4} + \gamma^2)\,|\hat{\eta}_\rho(\gamma)|^2 = 1 \qquad \lambda\text{-p.s.}$$

Si on utilise l'identification à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\tilde{R}_\tau$ s'identifie à $\overline{\hat{\eta}_\rho}\,e_\tau$.

Soit $t > 0$; l'étude de la tribu $\mathcal{R}_t$ ou de l'espace gaussien engendré par $\{R_s\}_{s \le t}$ revient, avec $\tau = \mathrm{Log}\,t$, à la recherche du sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\{\gamma \longrightarrow \overline{\hat{\eta}_\rho(\gamma)}\,\exp i\gamma\sigma\ ;\ \sigma \le \tau\}$, ce qui motive les quelques rappels suivants ; les résultats énoncés sont essentiellement dûs à Paley et Wiener [PW] ou à Beurling [B] ; on en trouvera aussi des démonstrations dans le livre

de Dym et McKean [DMK] qui a fortement inspiré ce travail (le lien avec les processus stationnaires remonte à Karhunen [Ka]) :

• la *classe de Hardy* $\mathbf{H}^2_+$ est l'ensemble des fonctions H analytiques dans le demi-plan supérieur $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im m(z) > 0\}$ et telles que

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} |H(\alpha+i\varepsilon)|^2 \, d\alpha < \infty ;$$

H appartient à $\mathbf{H}^2_+$ si et seulement si

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{izt} h(t) \, dt \qquad \text{où } h \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbb{R},\lambda) \qquad (z \in \mathbf{C}_+) ;$$

on a alors : $\lim_{\varepsilon\to 0} H(\alpha+i\varepsilon) = \hat{h}(\alpha)$ $\quad d\alpha$ p.s. et dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbb{R},\lambda)$;

dans la suite, pour $h \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbb{R},\lambda)$, nulle p.s. sur $]-\infty,0[$, on notera encore $\hat{h}$ la fonction de $\mathbf{H}^2_+$: $z \in \mathbf{C}_+ \longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} e^{izt} h(t) \, dt$; si h n'est pas triviale, $|\hat{h}|$ a la propriété caractéristique : $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Log}|\hat{h}(\gamma)| \, \frac{d\gamma}{1+\gamma^2} > -\infty$.

• $H \in \mathbf{H}^2_+$ ($H = \hat{h}$) est dite *extérieure* si $H \not\equiv 0$ et vérifie en un (ou tout) point $\alpha + i\varepsilon$ de $\mathbf{C}_+$: $\mathrm{Log}|H(\alpha+i\varepsilon)| = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Log}|\hat{h}|(x)}{(x-\alpha)^2+\varepsilon^2} \, dx$

Par exemple, la fonction $\hat{\eta}_1(z) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - iz}$ est extérieure.

• Une fonction G analytique sur $\mathbf{C}_+$ est dite *intérieure* si $|G| \le 1$ sur $\mathbf{C}_+$ et si $G_{0+}(\alpha) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} G(\alpha+i\varepsilon)$ est $d\alpha$ p.s. de module 1.

• Toute H de $\mathbf{H}^2_+$ s'écrit (de façon unique à une constante multiplicative de module 1 près) comme produit E × G où $E \in \mathbf{H}^2_+$ est extérieure et G est intérieure ; avec $H = \hat{h}$, le sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\{e_\tau \hat{h} \mid \tau \ge 0\}$ coïncide avec $G_{0+} \mathbf{H}^2_+$; une expression explicite de E est :

$$E(z) = \exp\left(-\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z} \mathrm{Log}|\hat{h}|(\gamma) \, \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right) .$$

On notera que pour $h \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$, à valeurs réelles, on a la *condition de réalité* : $\overline{\hat{h}(z)} = \hat{h}(-\bar{z})$; "la" partie intérieure et "la" partie extérieure de $\hat{h}$ seront choisies de manière à vérifier la même propriété (elles sont alors définies à la multiplication par ± 1 près).

Pour $\kappa \in \mathcal{M}$, G_κ est un facteur intérieur de $\hat{\eta}_\kappa$ avec $\overline{G_\kappa(z)} = G_\kappa(-\bar{z})$ $(z \in \mathbf{C}_+)$; si $\rho \in \mathcal{M}$, on prendra $G \equiv \dfrac{\hat{\eta}_\rho}{\hat{\eta}_1}$ et si on utilise l'identification de l'espace

gaussien de $\tilde{X}$ à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\int_0^\infty \varphi(t)\, dR_t$ s'identifie à $(\mathcal{U}\varphi)\hat{}\ \overline{G}_\rho$.

Remarque : Pour φ de classe C^1, à support compact dans $]0,\infty[$, et $\kappa \in \mathcal{M}$,

$-\int_0^\infty \varphi'(s)\, K_s\, ds$ s'identifie dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à $\gamma \longrightarrow (\frac{1}{2} + i\gamma)\ (\mathcal{U}\varphi)\hat{}\,(\gamma)\ \overline{\hat{\eta}_\kappa}(\gamma)$

L'application $\varphi \longrightarrow \int_0^\infty \varphi(s)\, dK_s \equiv -\int_0^\infty \varphi'(s)\, K_s\, ds$ se prolonge par continuité aux φ de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ telles que : $\int_{\mathbb{R}} \left|(\mathcal{U}\varphi)\hat{}\,(\gamma)\right|^2 (\frac{1}{4} + \gamma^2) \left|\hat{\eta}_\kappa(\gamma)\right|^2 d\gamma < \infty$

(on retrouve l'intégrale gaussienne classique).

Lemme 2 : *Soit* $\kappa \in \mathcal{M}$; *soit* κ_e *et* ρ_κ *les fonctions de* $\mathcal{M}$ *telles que* :

$$\widehat{\eta_{\kappa_e}}(\gamma) = \exp\left(-\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \gamma\eta}{\gamma - \eta} \operatorname{Log}|\hat{h}|(\eta)\, \frac{d\eta}{1+\eta^2}\right), \qquad \widehat{\eta_{\rho_\kappa}} = \hat{\eta}_1 \times \frac{\widehat{\eta_{\kappa_e}}}{\widehat{\eta_\kappa}}\ .$$

Soit, pour $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ *et* $Y_t^{(\kappa)} = \int_0^t \rho_\kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$; $Y^{(\kappa)}$ *est un mouvement brownien engendrant la même filtration que* K *et* $K_t \equiv \int_0^t \kappa_e\left(\frac{t}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}$.

Démonstration :

On notera que $\widehat{\eta_{\kappa_e}}$ est un facteur extérieur de $\widehat{\eta_\kappa}$ et que $\frac{\hat{\eta}_{\rho_\kappa}}{\hat{\eta}_1}$ est intérieure ;

comme $|\widehat{\eta_{\rho_\kappa}}| = |\hat{\eta}_1|$ λ-p.s., $Y^{(\kappa)}$ est un mouvement brownien (lemme 1) ;

si on identifie $\tilde{X}_\tau$ et $\overline{\hat{\eta}_1}\ e_\tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$) dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\tilde{K}_\tau$ s'identifie à $\overline{\hat{\eta}_\kappa}\ e_\tau$;

$\int_0^\infty \varphi(s)\, dY_s^{(\kappa)}$ s'identifie à $\overline{G_{\rho_\kappa}}\ (\mathcal{U}\varphi)\hat{}\,(\gamma)$ ($\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+,dt)$) ;

$e^{-\tau/2}\int_0^{e^\tau} \kappa_e\left(\frac{1}{s}e^\tau\right) dY_s^{(\kappa)}$ s'identifie à $\overline{G_{\rho_\kappa}}\ e^{-\tau/2}\left\{\mathcal{U}\kappa_e(\frac{1}{\cdot}e^\tau)\right\}\hat{} = \overline{G_{\rho_\kappa}\hat{\eta}_{\kappa_e}}\ e_\tau = \overline{\hat{\eta}_\kappa}\ e_\tau$.

En outre, l'espace gaussien engendré par $\{\tilde{K}_\sigma \mid \sigma \le 0\}$ (resp. par $\{\tilde{Y}_\sigma^{(\kappa)} \mid \sigma \le 0\}$ s'identifie au sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\{\overline{\hat{\eta}_\kappa}\ e_\sigma \mid \sigma \le 0\}$ (resp. par $\{\overline{\hat{\eta}_{\rho_\kappa}}\ e_\sigma \mid \sigma \le 0\}$) ; $\hat{\eta}_\kappa$ et $\hat{\eta}_{\rho_\kappa}$ ont même facteur intérieur G_{ρ_κ} ; ces deux espaces coïncident donc avec $\overline{G_{\rho_\kappa}}\ H_-^2$; d'où l'égalité des filtrations de $Y^{(\kappa)}$ et de K □

Si $G_\kappa \equiv 1$ et $G_\kappa \equiv -1$, $\overline{G}_\kappa\ H_-^2 \subseteq H_-^2$, $\overline{G}_\kappa\ H_-^2 \neq H_-^2$; en conséquence, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la tribu $\mathcal{R}_t$ est contenue strictement dans $\mathcal{X}_t$.

Plus précisément, pour φ, $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+,dt)$, $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \varphi(t)\, dY_t^{(\kappa)} \times \int_0^\infty \psi(t)\, dX_t\right] = 0$

équivaut à : $\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{U}\varphi)\hat{}(\gamma)\ \overline{(\mathcal{U}\varphi)\hat{}(\gamma)}\ \overline{G}_K(\gamma)\ d\gamma = 0$; par suite :

Lemme 3 : *Pour* $\varphi \in L^2([0,1],\lambda)$, $\int_0^1 \varphi(t)\ dY_t^{(K)}$ *est indépendante de* $\mathcal{R}_1$ *si* $(\mathcal{U}\varphi)\hat{}$ *est orthogonale à* $\overline{G}_K\ H_-^2$.

Par contre, comme $|G_K| = 1$, on a $G_K\ L^2 = L^2$ et $\sigma(R_s,\ s \geq 0) = \sigma(X_s,\ s \geq 0)$;

Lemme 4 :

1) Soit $\overline{X}$ *le mouvement brownien obtenu à partir de* X *par inversion du temps :* $\overline{X}_t = t\ X_{1/t}$ $(t > 0)$; *pour* $f \in L^2(\mathbb{R}_+,dt)$, $\int_0^\infty f(t)\ d\overline{X}_t = \int_0^\infty \mathcal{J}f(t)\ dX_t$ *où* $\mathcal{J}$ *est l'isométrie (involutive) de* $L^2(\mathbb{R}_+,dt)$:

$$f \longrightarrow : \mathcal{J}f(t) = \int_0^{1/t} f(s)ds - \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) ;$$

on a : $$((\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f)\hat{}(\gamma) = \frac{\frac{1}{2} + i\gamma}{\frac{1}{2} - i\gamma}\ \overline{(\mathcal{U}\varphi)\hat{}(\gamma)}\ .$$

2) Soit $\rho \in \mathcal{M}_b$ *et* $\overline{R}_t = t\ R_{1/t}$. *i)* $\overline{X}_t = \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right)\ d\overline{R}_s$.

ii) Avec $\tilde{\rho}(z) \equiv \int_0^{1/z} \rho\left(\frac{1}{u}\right)\ du - \frac{1}{z}\ \rho(z)$ $(\rho \equiv 0$ *sur* $]-\infty,1[)$, *on a :*

$$X_t = \tilde{\rho}(1)\ R_t + \int_t^\infty \tilde{\rho}\left(\frac{u}{t}\right)\ dR_u\ ;$$

en particulier $E[X_t|\mathcal{R}_t] = \tilde{\rho}(1)\ R_t$ *et* X_t *est indépendant de* $\mathcal{R}_t$ *si et seulement si* $\tilde{\rho}(1) = 0$; *une condition équivalente est :*

$$G_\rho\left(\frac{i}{2}\right) = 0 \qquad \left(et\ \gamma \longrightarrow \frac{\frac{1}{2} + i\gamma}{\frac{1}{2} - i\gamma}\ est\ un\ des\ "facteurs"\ de\ G_\rho\right).$$

Démonstration :

1) Pour φ de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^\infty \varphi(s)\ d\overline{X}_s = -\int_0^\infty \overline{X}_s\ \varphi'(s)\ ds = -\int_0^\infty X_{1/s}\ s\ \varphi'(s)\ ds = -\int_0^\infty X_v\ \varphi'\left(\frac{1}{v}\right)\ v^{-3}\ dv$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \varphi'\left(\frac{1}{v}\right)\ v^{-3}\ dv\right)\ dX_s = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(s)\ dX_s$$

(on a aussi $e^{-\tau/2}\overline{X}_{exp\tau} = e^{\tau/2}X_{exp-\tau}$; $\mathcal{J}$ correspond donc au retournement du temps dans les intégrales "stochastiques" par rapport au mouvement brownien β introduit au début de ce paragraphe). Remarquons de plus que :

$$(\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f(v) = e^{v/2}\int_0^{e^{-v}} f(s)ds - e^{-v/2}\ f(e^{-v}) = e^{v/2}\int_{-\infty}^{-v} e^{r/2}\ \mathcal{U}f(r)\ dr - \mathcal{U}f(-v)$$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{x/2}\, \mathcal{U}f(x-v)\, dx - \mathcal{U}f(-v)$, d'où : $\quad \{(\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f\}^{\wedge}(\gamma) = \dfrac{\frac{1}{2}+i\gamma}{\frac{1}{2}-i\gamma}\,(\mathcal{U}f)^{\bar{\wedge}}(\gamma)$

(lue dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\mathcal{J}$ correspond à la multiplication par une fonction Δ, vérifiant : $\overline{\Delta(\gamma)} = \Delta(-\gamma)$ et $|\Delta(\gamma)| = 1$, suivie d'une conjugaison, ou d'un retournement du temps).

2) Soit $\mathcal{D}_\rho$ l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ définie par $\int_0^\infty \varphi(t)\, dR_t = \int_0^\infty \mathcal{D}_\rho(\varphi)(t)\, dX_t$.

$[(\mathcal{U}\circ\mathcal{D}_\rho)(\varphi)]^{\wedge} = \bar{G}_\rho(\mathcal{U}\varphi)^{\wedge}$, $[(\mathcal{U}\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)(\varphi)]^{\wedge}(\gamma) = \dfrac{\frac{1}{2}+i\gamma}{\frac{1}{2}-i\gamma}\, G_\rho(\mathcal{U}\varphi)^{\bar{\wedge}}$, d'où $\mathcal{D}_\rho\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho = \mathcal{J}$;

si $W_t = \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right) d\bar{R}_s$, on a :

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dW_t = \int_0^\infty \mathcal{D}_\rho\varphi(t)\, d\bar{R}_t = \int_0^\infty (\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)\varphi(t)\, dR_t$$

$$= \int_0^\infty (\mathcal{D}_\rho\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)\varphi(t)\, dX_t = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(t)\, dX_t \quad \text{et } W_t = \bar{X}_t.$$

$$\bar{X}_a = \int_0^a \rho\left(\frac{a}{s}\right) d\bar{R}_s = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(t)\, dR_t, \qquad \text{où } \varphi(s) = \rho\left(\frac{a}{s}\right) 1_{\{s\le a\}} ;$$

$$\mathcal{J}\varphi(t) = \int_0^{\inf(a,1/t)} \rho\left(\frac{a}{s}\right) ds - \frac{1}{t}\,\rho(at)\, 1_{\{t\ge 1/a\}}$$

$$= 1_{\{t\ge 1/a\}}\, a\left(\int_0^{1/at} \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds - \frac{1}{at}\,\rho(at)\right) + 1_{\{t<1/a\}}\, a\int_0^1 \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds ;$$

$$X_b = \ell\bar{X}_{1/b} = R_b \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds + \int_\ell^\infty \left(\int_0^{\ell/t} \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds - \frac{\ell}{t}\,\rho\left(\frac{\ell}{t}\right)\right) dR_t = \tilde{\rho}(1)\, R_b + \int_\ell^\infty \tilde{\rho}\left(\frac{u}{\ell}\right) dR_u \quad \square$$

Remarques 5 :

1) La transformation T, obtenue pour $\rho(x) \equiv (1 - \mathrm{Log}\, x)\, 1_{\{x>1\}}$, correspond dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à la multiplication par $\dfrac{i\gamma - \frac{1}{2}}{i\gamma + \frac{1}{2}}$.

On notera, de façon générale, que pour $\tilde{W}$ processus gaussien stationnaire, le processus W défini sur $\mathbb{R}_+$ par $W_t = t^{1/2}\, \tilde{W}_{\mathrm{Log}\, t}$ vérifie :

$$\int_{0+} \frac{1}{s}\, |W_s|\, ds \text{ converge p.s et } T(W) \text{ a même loi que } W.$$

2) Soit $\mathcal{K} : L^2(\mathbb{R}_+,dt) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+,dt)$ l'isométrie : $f \longrightarrow \mathcal{K}f(t) = \frac{1}{t}\, f\left(\frac{1}{t}\right)$;

on a : $\qquad (\mathcal{U}\circ\mathcal{K})f(v) = e^{-v/2} f(e^{-v}) = \mathcal{U}f(-v)$; $\mathcal{J} = T\circ\mathcal{K}$.

3) Toute fonction intérieure G se factorise en

$$G(x) = c\, e^{ikx}\, B(x)\, S(x),$$

avec $|c| = 1$, $k \ge 0$,

$S(\alpha) = \exp i \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma\alpha + 1}{\gamma - \alpha} \frac{d\mu(\gamma)}{1 + \gamma^2}$ où μ est une mesure (positive) singulière

telle que : $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\gamma)}{1 + \gamma^2} < \infty$ (S est la partie *singulière* de G) ;

$B(\alpha) = \prod_{n\in D} \varepsilon_n \frac{a_n - \alpha}{\overline{a}_n - \alpha}$, $\varepsilon_n = 1$ si $|a_n| \leq 1$, $\varepsilon_n = \frac{\overline{a}_n}{a_n}$ sinon

(les (a_n) sont les zéros de G situés dans le demi-plan supérieur ouvert).

Pour $\rho \in \mathcal{M}_b$, η_ρ étant réelle, $\hat{\eta}_\rho(-u + i\upsilon) = \overline{\hat{\eta}_\rho(u + i\upsilon)}$ $(u \in \mathbb{R}, \upsilon > 0)$; en conséquence :

- $c = 1$ ou -1 ;
- l'ensemble des zéros de G_ρ est invariant par $\mathcal{R}e\zeta \longrightarrow -\mathcal{R}e\zeta$;

B se factorise donc en B_1 B_2, B_1 correspondant aux zéros imaginaires purs :

$B_1(\alpha) = \left(\prod_{n\in D_1, \upsilon_n \leq 1} \frac{\alpha - i\upsilon_n}{\alpha + i\upsilon_n}\right)\left(\prod_{n\in D_1, \upsilon_n > 1} \frac{-\alpha + i\upsilon_n}{\alpha + i\upsilon_n}\right)$ avec $\upsilon_n > 0$ et $\sum_{n\in D_1} \frac{\upsilon_n}{1 + \upsilon_n^2} < \infty$

(condition de convergence du produit pour $\mathcal{I}m\alpha > 0$) ;

$B_2(\alpha) = \prod_{n\in D_2}\left(\frac{u_n + i\upsilon_n - \alpha}{u_n - i\upsilon_n - \alpha} \times \frac{u_n - i\upsilon_n + \alpha}{u_n + i\upsilon_n + \alpha}\right)$

$(u_n > 0, \upsilon_n > 0$ et $\sum_{n\in D_2} \frac{\upsilon_n}{1 + u_n^2 + \upsilon_n^2} < \infty)$;

- $S(\alpha) = \exp -i\left(\frac{\ell}{\alpha} + 2\alpha \int_{]0,\infty[} \frac{1}{\alpha^2 - \gamma^2} dF_\rho(\gamma)\right)$ où $\ell \in \mathbb{R}_+$ et

F_ρ est une mesure singulière symétrique telle que : $\int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{1 + \gamma^2} dF_\rho(\gamma) < \infty$

Si G est une fonction intérieure, on a vu en [CJ]-Proposition IV.6.3 que $1 - G$ appartient à H^2_+ si et seulement si $\sum_{n\in D} \mathcal{I}m(a_n) + \mu(\mathbb{R}) < \infty$ et

$G(\alpha) = B_0(\alpha)\, S(\alpha)$ où $B_0(\alpha) = \prod_{n\in D} \frac{a_n - \alpha}{\overline{a}_n - \alpha}$

On a alors $1 - G = \hat{h}$ et $\int_{\mathbb{R}_+} |h|^2(t)\, dt = \sum_{n\in D} 2\mathcal{I}m(a_n) + \mu(\mathbb{R})$.

2) Propriétés ergodiques.

Soit $C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{C}$; ξ est le processus des coordonnées sur C, $\mathcal{C}_t = \sigma(\xi_s \mid s \leq t)$; W est la mesure de Wiener sur $(C, \mathcal{C})$. Pour $\rho \in \mathcal{M}_b$, on note Ξ_ρ l'application définie sur $(C, \mathcal{C}, W)$ par

$$\xi \longrightarrow \left(\int_0^t \rho\left(\frac{t}{u}\right) d\xi_u\right)_{t\geq 0} ;$$

W est invariante par Ξ_ρ.

Remarque 6 : *Pour* ρ, κ *dans* $\mathcal{M}_b$, $\Xi_\rho \circ \Xi_\kappa = \Xi_\kappa \circ \Xi_\rho = \Xi_{\rho\odot\kappa}$ *où* $G_{\rho\odot\kappa} = G_\rho\, G_\kappa$; *en particulier,* $\Xi_\rho^n = \Xi_{\rho_n}$ *où* $G_{\rho_n} = (G_\rho)^n$.

Proposition 7 : *Soit* $\rho \in \mathcal{M}_b$, $\rho \not\equiv 1$ *et* $\rho \not\equiv -1$;

i) la tribu $\bigcap_n (\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_1)$ *est* W*-triviale* ;

ii) en conséquence, la transformation Ξ_ρ *est fortement mélangeante et donc ergodique sur* $(C,\mathcal{C},W)$.

Démonstration :

le point essentiel est *i)* ; on en déduit, par "*scaling*", que pour tout $t \geq 0$, $\bigcap_n (\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_t)$ est W-triviale ; comme $\Xi_\rho^{-1}(\mathcal{C}_t) \subseteq \mathcal{C}_t$ aux ensembles W-négligeables près, on obtient (théorème de convergence des martingales inverses) :

pour tout $B \in \mathcal{C}_t$, $\lim_n W[B \mid (\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_t)] = W[B]$; d'où la propriété de mélange, d'abord sur $\mathcal{C}_t$ puis sur $\mathcal{C} = \bigvee_t \mathcal{C}_t$. D'après le lemme 3, *i)* est conséquence de :

$$\bigcap_n (\overline{G}_\rho^n\, H_-^2) = \{0\} ;$$

ce dernier point résulte de l'unicité (à des constantes multiplicatives près) de la décomposition de $\varphi \in H_+^2$, $\varphi \neq 0$, en un produit $j \times e$ où j est intérieure et e extérieure □

Remarques 8 :

i) Soit $k > 0$: $G_k(\gamma) = e^{ik\gamma}$ correspond à $\kappa = \sqrt{r}\,1_{[r,\infty[}$ ($r = e^k > 1$) et à la transformation $\xi_t \longrightarrow \sqrt{r}\,\xi_{t/r}$ ("*scaling*").

ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $q_m(s) = \frac{1}{(m-1)!}\, s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, \mathrm{Log}^{m-1}\left(\frac{1}{s}\right) 1_{\{s<1\}}$;

$Uq_m(x) = 1_{\{x<0\}}\, \frac{1}{(m-1)!}\, (-x)^{m-1}\, e^{-i\psi x}$, $(Uq_m)\hat{}\,(\gamma) = \left(\frac{i}{\gamma - \psi}\right)^m$;

Si L_n désigne le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Laguerre, $L_n(w) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-1)^k\, \frac{1}{k!}\, w^k$, avec $\tau = \mathrm{Log}\, t$ et $\Im m\psi > 0$, $\int_0^t s^{-(\frac{1}{2}+i\psi)}\, L_n\left(w\mathrm{Log}\frac{t}{s}\right) dX_s$ s'identifie dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à :

$$e^{i(\gamma-\psi)\tau} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-1)^k\, w^k \left(\frac{i}{\gamma - \psi}\right)^{k+1} = e^{i(\gamma-\psi)\tau} \left(\frac{i}{\gamma - \psi}\right) \left(\frac{\gamma - \psi - iw}{\gamma - \psi}\right)^n ;$$

$\int_0^t s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, L_n\left(-2\Im m\psi\, \mathrm{Log}\frac{t}{s}\right) dX_s$ s'identifie à $e^{i(\gamma-\psi)\tau} \left(\frac{i}{\gamma - \psi}\right) \left(\frac{\gamma - \overline{\psi}}{\gamma - \psi}\right)^n$.

Si ψ *est zéro de multiplicité* h *de* G_ρ ($\Im m\psi > 0$), *la tribu*

$$\sigma\left\{\int_0^t s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, \log^{r-1} s\, dX_s \; ; \; 1 \leq r \leq h\right\}$$

est indépendante de $\mathcal{R}_t$:

pour $n < h$, $G_\rho(\gamma)\,\frac{i}{\gamma-\psi}\left(\frac{\gamma-\overline{\psi}}{\gamma-\psi}\right)^n = \frac{i}{\gamma-\overline{\psi}}\,G^{\#}(\gamma)$ où $G^{\#}$ est intérieure ; comme $\frac{1}{\gamma-\overline{\psi}} = \int_0^\infty e^{-i\overline{\psi}x}\,e^{i\gamma x}\,dx$, $\gamma \longrightarrow G_\rho(\gamma)\left(\frac{i}{\gamma-\psi}\right)\left(\frac{\gamma-\overline{\psi}}{\gamma-\psi}\right)^n$ appartient à H^2_+ et il suffit d'appliquer le lemme 3.

L'ensemble des fonctions $\{s \longrightarrow s^{\pm iu}\ s^{-(\nu+1/2)}\ \mathrm{Log}^n\left(\frac{1}{s}\right)\ 1_{\{s<1\}},\ n \geq 0\}$ étant total dans $L^2([0,1],ds)$, on retrouve l'ergodicité de Ξ_ρ ; c'est la démarche adoptée en [JY] pour montrer l'ergodicité de T.

iii) Indiquons une autre approche de l'ergodicité dans le cas singulier :

Lemme 9 :

Soit ν une mesure positive bornée, singulière, à support compact sur $\mathbb{R}$ et N_ν la fonction intérieure définie par $N_\nu(x) \equiv \exp -i\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-\zeta}\,d\nu(\zeta)$ $(\Im m\, x > 0)$;

1) $1 - N_\nu \in H^2_+$; *plus précisément, si* $\psi_\nu(t) \equiv 1_{\{t>0\}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\zeta}\,d\nu(\zeta)$,

$\gamma_\nu \equiv -\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n!}\,\psi_\nu^{*n}$, *on a :* $\gamma_\nu \in L^2$, $\gamma_\nu = \gamma_\nu\,1_{\mathbb{R}_+}$ *et* $1 - N_\nu = \hat{\gamma}_\nu$.

2) Si $\nu = \ell\delta_a$ $(\ell > 0)$, *alors :* $\gamma_\nu(t) = 1_{\{t>0\}}\,e^{-iat}\left(\frac{\ell}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{\ell t})$, où J_1 *désigne la fonction de Bessel d'ordre* 1.

3) Soit a un point du support de ν, et soient c, $\eta > 0$;

$N_{c,\eta}(\gamma) = \lim_{r\to 0+} \exp -ic\int_{]a-\eta,a+\eta]} \frac{1}{\gamma+ir-\zeta}\,d\nu(\zeta)$ $(\gamma \in \mathbb{R})$;

$1 - N_{c,\eta}$ *converge* λ-p.s. *et dans* $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ *vers* $1 - \exp\frac{ic}{a-\gamma}$ *quand* $\eta \longrightarrow 0$.

Démonstration :

1) pour $x = \alpha + i\rho$ avec $\rho > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{i}{x-\zeta}\,d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho + i(\zeta-\alpha)}\,d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty e^{-(\rho+i\zeta-i\alpha)t}\,dt\,d\nu(\zeta)$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\rho-i\alpha)t}\,\psi_\nu(t)\,dt = \hat{\psi}_\nu(x) \qquad \text{(noter que } \psi_\nu \text{ est bornée) ;}$$

$N_\nu(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!}\,\hat{\psi}^n_\nu(x) = 1 - \int_0^\infty \gamma_\nu(u)\,e^{iux}\,du$;

soit pour $\gamma \in \mathbb{R}$, $N_\nu(\gamma) = \lim_{r\to 0+} N_\nu(\gamma + ir)$ (cette limite existe λ-p.s., est de module 1 et vaut $\exp -i\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\gamma-\zeta}\,d\nu(\zeta)$ si $\gamma \notin \mathrm{Supp}\nu$) ;

si $\mathrm{Supp}\nu \subseteq\ ]-A,+A[$ $(A > 0)$, on a :

$$|1 - N_\nu(\gamma)| \leq 2\,1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\gamma-\zeta|}\,d\nu(\zeta)\,1_{\{|\gamma|\,>\,2A\}}$$

$$\leq 2\,1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \tfrac{1}{2}\,\nu(\mathbb{R})\,\frac{1}{|\gamma| - A}\,1_{\{|\gamma|\,>\,2A\}} \in L^2(\mathbb{R},\lambda) .$$

2) Si $\nu = \ell\delta_a$ $(\ell > 0)$, $\psi_\nu(t) = 1_{\{t>0\}}\, \ell\, e^{-ita}$, $\psi_\nu^{*n}(t) = 1_{\{t>0\}}\, \frac{\ell^n t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-ita}$

$$\gamma_\nu(t) = e^{-iat}\, 1_{\{t>0\}} \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\, \frac{\ell^n t^{n-1}}{n!(n-1)!} = e^{-iat}\, 1_{\{t>0\}} \left(\frac{\ell}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{\ell t}).$$

3) résulte de la majoration (vérifiée pour $-A < a - \eta < a + \eta < A$) :

$$|1 - N_{c,\eta}| \leq 2\, 1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \frac{1}{2}\, \frac{1}{|\gamma| - A}\, 1_{\{|\gamma| > 2A\}} \quad \square$$

Soit donc $\rho \in \mathcal{M}_b$ avec G_ρ *singulière*, $0 < F_\rho(\mathbb{R})$, et $c = 1$;

si N_ν est une fonction intérieure singulière de mesure associée ν vérifiant :

$$\nu(\mathbb{R}) < \infty,\ \nu \ll F_\rho \text{ et } \frac{d\nu}{dF_\rho} \leq 1,$$

$G_\rho\, \overline{N}_\nu$ est intérieure singulière, $1 - N_\nu \in H_+^2$ (lemme 9-*1*), $\overline{N}_\nu\, G_\rho\, (N_\nu - 1) \in H_+^2$

et pour $h \in H_-^2$, $\int_{\mathbb{R}} \overline{G}_\rho(\gamma) h(\gamma)(1 - N_\nu(\gamma))\, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} h(\gamma)\, \overline{\overline{N}_\nu\, G_\rho\, (N_\nu - 1)}(\gamma)\, d\gamma = 0$

(avec les notations du lemme 9, $\int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{1/2} \gamma_\nu \circ \mathrm{Log}\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ est indépendant de $\mathcal{R}_t$)

$\bigcup_n (\overline{G}_\rho^n H_-^2)^\perp$ contient donc V_ρ, le sous-espace de H_-^2 engendré par les $(1 - \overline{G})$ où G est une fonction intérieure singulière de mesure associée ν vérifiant :

$$\nu(\mathbb{R}) < \infty,\ \nu \ll F_\rho \text{ et } \frac{d\nu}{dF_\rho} \text{ bornée} ;$$

d'après le lemme 6-*3)*, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\ell > 0$,

$$\gamma \longrightarrow 1 - \exp\frac{-i\ell}{a - \gamma} \text{ appartient à l'adhérence de } V_\rho \text{ dans } H_+^2 ;$$

soit $\hat{h} \in H_-^2$, orthogonal à $\bigcup_n (\overline{G}_\rho^n H_-^2)^\perp$; on a :

$$\int_0^\infty h(t)\, \exp{-iat}\, \left(\frac{c}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{ct})\, dt = 0 \text{ pour tout } c \geq 0 ;$$

pour tout $r > 0$, $\int_0^\infty h(t^2)\, \exp{-iat^2}\, J_1(rt)\, dt = 0$; la transformée de Hankel de la fonction : $t > 0 \longrightarrow \frac{1}{t}\, h(t^2)\, \exp{-iat^2}$ est nulle ; h est donc nulle λ-p.s..

iv) Conservons les notations du lemme 9 ; on a $\int_{\mathbb{R}} |1 - N_\nu|^2(x)\, dx = 2\pi\, \nu(\mathbb{R})$ (voir Remarque 5-3) ; supposons que ν soit une probabilité symétrique [singulière] ; pour $0 \leq a \leq b$, $N_{b\nu}\, \overline{N_{a\nu}}$ est intérieure singulière et $1 - N_{a\nu}$ est orthogonale à $(N_{b\nu} - N_{a\nu})$; par suite :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \gamma_{a\nu}(t)\, \gamma_{b\nu}(t)\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (1 - N_{a\nu})(x)\, \overline{(1 - N_{b\nu})}(x)\, dx$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |1 - N_{a\nu}|^2(x)\, dx = a$$

et $a \geq 0 \longrightarrow \int_0^1 s^{-1/2}\, \gamma_{a\nu} \circ \mathrm{Log}\left(\frac{1}{s}\right) dX_s$ est un mouvement brownien.

3) Variations quadratiques.

Proposition 10 :

Soit $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$;

$$\Delta(\tau) \equiv \mathbb{E}[(\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_0)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau\alpha)) \, |\hat{\eta}_\kappa|^2(\alpha) \, d\alpha.$$

K *a une version continue si et seulement si* $\tilde{K}$ *a une version continue ; une condition nécessaire et suffisante pour cela est :*

$$\int_{0+} du \left\{-\log\left(\int_0^1 1_{\{\Delta(\tau) \le u^2\}} \, d\tau\right)\right\}^{1/2} < \infty .$$

Plus précisément, si K *est continu, pour tout* $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $\lim_{t\to 0} t^{-\varepsilon} K_t = 0$.

Démonstration :

Le critère de continuité sur $\tilde{K}$ est celui de Fernique [F2] (voir aussi [JMa]).

Comme $\mathbb{E}[K_t^2] = t \int_0^1 \kappa^2\left(\frac{1}{s}\right) ds$, il reste à vérifier : $\lim_{t\to 0} t^{\varepsilon} K_t = 0$ $(\varepsilon > -\frac{1}{2})$.

Soit donc Z un processus gaussien stationnaire, continu, et pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\xi_n = \sup_{n\le\tau\le n+1} |Z_\tau - Z_n| \ ;$$

on déduit de : $\sup_{n\le\tau\le n+1} |Z_\tau| \le |Z_n| + \xi_n$ et $\mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi_0] < \infty$, que :

$\forall\, \alpha > 0$, $\sum_{n\le 0} e^{n\alpha} \sup_{n\le\tau\le n+1} |Z_\tau| \in \mathcal{L}^1$ et $\lim_{n\to-\infty} (\sup_{\tau\le n} e^{\alpha\tau} |Z_\tau|) = 0$. □

Remarque : Si H est un processus gaussien stationnaire dont la mesure spectrale admet une densité φ décroissante au voisinage de ∞, Marcus [M] montre que H a une version continue si et seulement si :

$$\int^{\infty} \left(\int_\alpha^{\infty} \varphi(u) \, du\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha\sqrt{\log\alpha}} \, d\alpha \quad \text{est fini.}$$

Avec $\varphi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha(\log\alpha)^{\alpha}}$ au voisinage de ∞ , on obtient, pour $0 < \alpha \le 1$, des exemples de moyennes mobiles non continues.

Proposition 11 :

Soit $\tilde{W}$ *un processus gaussien stationnaire de mesure spectrale* μ ;

$$\mathbb{E}[(\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_0)^2] = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau\alpha)) \, d\mu(\alpha) \equiv \Delta_\mu(\tau) \equiv \tau \, \tilde{\Delta}_\mu(\tau) .$$

Pour $\mathcal{T}$ *subdivision de* $[a,b]$ $(\mathcal{T} = \{a = \tau_0 \le \tau_1 \le \dots \le \tau_n \le \tau_{n+1} = b\}$, $n \in \mathbb{N})$, *soit* $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *la variation quadratique de* $\tilde{W}$ *le long de* $\mathcal{T}$:

$$\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T}) \equiv \sum_{j=0}^{n} (\tilde{W}_{\tau_{j+1}} - \tilde{W}_{\tau_j})^2 .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *converge en probabilité quand le pas* $|\mathcal{T}|$ $(\equiv \sup\{|\tau_{j+1} - \tau_j|,\ 0 \le j \le n\})$ *tend vers* 0 *est* :

(#1) $c^2 \equiv \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(hx))\, d\mu(x)$ *existe*[1] et

(#2) $0 = \lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \iint d\mu(x)d\mu(y) \left| \sum_{j=0}^{n} (\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp iy\tau_{j+1} - \exp iy\tau_j) \right|^2$

$\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *converge alors en probabilité vers* $c^2(b-a)$.

Démonstration : D'après Schreiber [Sc], si $(\Sigma_2(\tilde{W},\mathcal{T},[a,b]))_{\mathcal{T}}$ converge en probabilité, elle converge aussi dans tous les espaces L^p. En particulier,

$$\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] \text{ existe.}$$

Or $\mathbb{E}[(\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma)^2] = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau - \sigma)x)\, d\mu(x) = \Delta_\mu(\tau - \sigma)$;

en prenant pour $0 < 2h < b - a$, $n = \left[\frac{b-a}{h}\right]$ $\left(n \geq \frac{b-a}{2h} > 1\right)$, on obtient, si $\mathcal{T}$ est la subdivision définie par $\tau_j = a + jh$ pour $0 \leq j \leq n$, $\tau_{n+1} = b$:

$$\mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] = \tilde{\Delta}_\mu(h)\, h \left[\frac{b-a}{h}\right] + \Delta_\mu\left(b - a - \left[\frac{b-a}{h}\right]h\right) ;$$

d'où la nécessité de l'existence de $c^2 = \lim_{h\to 0} \tilde{\Delta}_\mu(h)$;

si cette limite existe, on a : $\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] = c^2(b-a)$.

Rappelons pour mémoire les propriétés élémentaires suivantes :

Lemme 12 : *i) Pour* (U,V) *vecteur gaussien centré,*

$$\mathbb{E}[U^2V^2] = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial^2 y} \mathbb{E}[\exp i(xU + yV)]\Big|_{x=y=0} = 2\,(\mathbb{E}[UV])^2 + \mathbb{E}[U^2]\,\mathbb{E}[V^2].$$

ii) Pour $(U_1, \ldots, U_n)$ *vecteur gaussien centré,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *réels,*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j^2\right) = 2 \sum_{1\leq j,k\leq n} \alpha_j \alpha_k \,\mathrm{cov}(U_j,U_k)^2 \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, \mathbb{E}[U_j^2]\right)^2.$$

On a donc :

$$\mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})) = 2 \sum_{1\leq j,k\leq n} \mathbb{E}\left[(W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j})(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})\right]^2$$

$$= 2 \sum_{1\leq j,k\leq n} \left| \int d\mu(x)\, (\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp -ix\tau_{k+1} - \exp -ix\tau_k) \right|^2$$

$$= 2 \iint d\mu(x)\, d\mu(y)\, |H_{\mathcal{T}}(x,y)|^2$$

où $H_{\mathcal{T}}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} (\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp iy\tau_{j+1} - \exp iy\tau_j)$

$$\left(= -xy\, (1_{\mathcal{D}_{\mathcal{T}}})\hat{}\,(x,y) \text{ si } \mathcal{D}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{j=1}^{n} [\tau_j,\tau_{j+1}]^2\right),$$

---

[1] *La condition (#1) assure déjà l'existence d'une version continue de* $\tilde{W}$.

et $\mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T}) - \Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{S})) = 2\iint d\mu(\alpha)\, d\mu(\gamma)\, |H_{\mathcal{T}}(\alpha,\gamma) - H_{\mathcal{S}}(\alpha,\gamma)|^2$.

La convergence quand $|\mathcal{T}| \to 0$ de $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ revient donc à celle de $H_{\mathcal{T}}$ dans $L^2(\mu\otimes\mu)$; comme $\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} H_{\mathcal{T}}(\alpha,\gamma) = 0$, on a les résultats annoncés □

Remarques 13 :

1) D'après Wiener ([W], Théorème 21), les limites $\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (1-\cos(h\alpha))d\mu(\alpha)$ et $\lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T}\int_{\{0<\alpha\le T\}} \alpha^2\, d\mu(\alpha)$ existent simultanément et sont égales.

2) Une condition équivalente à (*#2*) est :

$$\sum_{1\le j,k\le n} (\Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_{k+1}) - \Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_k) - \Delta_\mu(\tau_j - \tau_{k+1}) + \Delta_\mu(\tau_j - \tau_k))^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0$$

Nous n'avons malheureusement pas su trouver de condition équivalente à (*#2*) ne faisant pas apparaitre de subdivision ...

3) Soit ℓ et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à variation finie sur tout intervalle borné ; on suppose g croissante et on s'intéresse à l'existence d'une variation quadratique sur tout intervalle $[a,b]$ pour le processus $\ell\, \tilde{W}\circ g$.

• Supposons (*#1*) et (*#2*) vérifiées ; $\tilde{W}$ est continu et, pour $\mathcal{T}$ subdivision de $[a,b]$ ($\mathcal{T} = \{a = \tau_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_n \le \tau_{n+1} = b\}$, $n \in \mathbb{N}$),

$$\Sigma_2(\ell\, \tilde{W}\circ g,[a,b],\mathcal{T}) = \sum_{j=0}^{n} \ell^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2 + \sum_{j=0}^{n} \tilde{W}_{g(\tau_{j+1})}(\ell(\tau_{j+1}) - \ell(\tau_j))^2$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{n} \ell(\tau_j)\, \tilde{W}_{g(\tau_{j+1})}(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)})(\ell(\tau_{j+1}) - \ell(\tau_j)) ;$$

quand $|\mathcal{T}|$ tend vers 0, les deux derniers termes convergent vers 0, tandis que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n} \ell^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{n} \ell^2(\tau_j)\, \Delta_\mu(g(\tau_{j+1}) - g(\tau_j))$$

$$\xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} c^2 \int_a^b \ell^2(\tau)\, dg(\tau) ;$$

si $\mathcal{S}$ est la subdivision de $[g(a),g(b)]$ définie par $\sigma_j = g(\tau_j)$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=0}^{n} \ell^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2\right) =$$

$$= 2\sum_{1\le j,k\le n} \ell^2(\tau_j)\, \ell^2(\tau_k)\left|\int d\mu(\alpha)\, (\exp i\alpha\sigma_{j+1} - \exp i\alpha\sigma_j)(\exp -i\alpha\sigma_{k+1} - \exp -i\alpha\sigma_k)\right|^2$$

$$\le 2\sup_{\gamma\in[a,b]} \ell^4(\gamma) \iint d\mu(\alpha)\, d\mu(\gamma)\, |H_{\mathcal{S}}(\alpha,\gamma)|^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0.$$

Inversement, supposons g strictement croissante et ℓ non identiquement nulle ; supposons que $\ell\, \tilde{W}\circ g$ ait une variation quadratique sur tout intervalle $[a,b]$. Avec une démonstration analogue à celle de la proposition 11, on montre que

(#1) et (#2) sont vérifiées et que la variation quadratique de $\ell\ \tilde{W}\circ q$ sur $[a,\&]$ est $c^2 \int_a^{\&} \ell^2(\tau)\ dq(\tau)$.

Soit en particulier, $W_t = \sqrt{t}\ \tilde{W}_{\log t}$ $(t > 0)$; W a une variation quadratique sur tout intervalle $[a,\&] \subseteq]0,\infty[$ si et seulement si (#1) et (#2) sont vérifiées ; cette variation est alors $c^2(\& - a)$; de plus, W admet une variation quadratique sur $[0,\&]$ pour $\& > 0$:

si $\mathcal{T} = \{0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = \&\}$ est une subdivision de $[0,\&]$

$$\Sigma_2(W,[0,\&],\mathcal{T}) = \sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2$$
$$+ 2 \sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})\ t_j\ t_{j+1}^{-1/2}\ W_{t_{j+1}} (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} t_j\ (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2 ;$$

d'après la proposition 10, pour $u < 1$, il existe une v.a. positive C avec :

$$\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \le C \sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{u-1}$$
$$\le C\ |\mathcal{T}|^{1-v} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(\sqrt{t_{j+1}} + \sqrt{t_j})^2}\ t_{j+1}^{u+v-1}\ (t_{j+1} - t_j) \le C\ |\mathcal{T}|^{1-v} \int_0^{\&} t^{u+v-2}\ dt ;$$

en choisissant $0 < u, v < 1$ avec $u + v > 1$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0 \text{ p.s. ;}$$

comme $\left| \sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})\ t_j\ t_{j+1}^{-1/2}\ W_{t_{j+1}} (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)}) \right|$ est majoré par

$\left(\sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} t_j\ (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2 \right)$, il reste à établir que $\Theta_{\&,\mathcal{T}} \equiv \sum_{j=1}^{n} t_j (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2$ converge dans L^2 vers $c^2\&$, quand $|\mathcal{T}| \to 0$.

Soit $0 < \eta < \&$; on peut supposer que la partition $\mathcal{T}$ contient toujours η ;

$$\mathbb{E}[\Theta_{\&,\mathcal{T}}] = \sum_{j=0}^{n} t_j\ \Delta_\mu \circ \log\left(\frac{t_{j+1}}{t_j}\right) = \int_0^{\&} \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(u)\ du$$

où $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(u) = \sum_{j=0}^{n} 1_{]t_j,t_{j+1}]}(u)\ \frac{t_j}{u}\ \tilde{\Delta}_\mu \circ \log\left(\frac{t_{j+1}}{t_j}\right) \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} c^2$

en étant dominé par $\sup_{h>0} \tilde{\Delta}_\mu(h) < \infty$.

$$\mathrm{Var}(\Theta_{\&,\mathcal{T}}) \le 2\ \mathrm{Var}(\Theta_{\eta,\mathcal{T}_{|[0,\eta]}}) + 2\ \&^2\ \mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[\eta,\&],\mathcal{T}_{|[\eta,\&]}))$$
$$\le 2\ \eta^2\ \sup_{h>0} \tilde{\Delta}_\mu^2(h) + 2\ \&^2\ \mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[\eta,\&],\mathcal{T}_{|[\eta,\&]}))$$

et $\limsup_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathrm{Var}(\Theta_{\delta,\mathcal{T}}) \le 2\,\eta^2 \sup_{h>0} \tilde{\Delta}_\mu^2(h)$ pour tout $\eta > 0$ □

Exemples 14 :

1) Supposons qu'au voisinage de 0, Δ_μ soit différence de deux fonctions convexes. La dérivée à droite $x \longrightarrow \Delta_\mu'(x+)$ définit alors une mesure (signée) ν sur un voisinage de 0 (*noter* que ν est symétrique et $\nu[\{0\}] = \Delta_\mu'(0+) \ge 0$) ;

$$|\Delta_\mu(x+h-k) - \Delta_\mu(x+h) - \Delta_\mu(x-k) + \Delta_\mu(x)|^2$$
$$= \left(\int_x^{x+h} du\ \nu(]u-k,u])\right)^2 = \left(\int d\nu(\omega)\ \lambda_1([x,x+h] \cap [\omega,\omega+k])\right)^2$$
$$= \iint d\nu(\omega)\ d\nu(\omega)\ \lambda_1([x,x+h] \cap [\omega,\omega+k])\ \lambda_1([x,x+h] \cap [\omega,\omega+k])\ ;$$

pour $h, k \ge 0$, $\lambda_1([x,x+h] \cap [\omega,\omega+k]) \le \inf(h,k)\ 1_{\{x-k<\omega<x+h\}}$;

pour $\mathcal{T}$ subdivision de $[a,b]$ (avec $b-a$ assez petit),

$$\sum_{1\le j,k\le n} (\Delta_\mu(\tau_{j+1}-\tau_{k+1}) - \Delta_\mu(\tau_{j+1}-\tau_k) - \Delta_\mu(\tau_j-\tau_{k+1}) + \Delta_\mu(\tau_j-\tau_k))^2$$
$$\le \iint d|\nu|(\omega)d|\nu|(\omega) \sum_{j,k} \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[\omega+\tau_k,\omega+\tau_{k+1}])\ \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[\omega+\tau_k,\omega+\tau_{k+1}])$$

De $\sum_{j,k} \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}] \cap [\omega+\tau_k,\omega+\tau_{k+1}])\ \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}] \cap [\omega+\tau_k,\omega+\tau_{k+1}])$

$$\le \sum_{j,k} 1_{\{\tau_j-\tau_{k+1}<\omega<\tau_{j+1}-\tau_k\}}\ 1_{\{\tau_j-\tau_{k+1}<\omega<\tau_{j+1}-\tau_k\}}\ \inf(\tau_{j+1}-\tau_j, \tau_{k+1}-\tau_k)^2$$
$$\le \sum_j (\tau_{j+1}-\tau_j)\ \{2|\mathcal{T}| + \lambda_1(]\tau_j-\omega,\tau_{j+1}-\omega[\cap\ ]\tau_j-\omega,\tau_{j+1}-\omega[)\}$$
$$\le \sum_j (\tau_{j+1}-\tau_j)\ \{2|\mathcal{T}| + \lambda_1(]\tau_j,\tau_{j+1}[\cap\ ]\tau_j+|\omega-\omega|,\tau_{j+1}-|\omega-\omega|[)\}$$
$$\le 2|\mathcal{T}|\ (b-a) + \sum_j (\tau_{j+1}-\tau_j)^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0,$$

on déduit que $\tilde{W}$ a une variation quadratique sur $[a,b]$, égale à $(b-a)\ \nu[\{0\}]$.

2) Soit ν une mesure de Radon sur $]0,1]$ telle que $\int_{]0,1]} \sqrt{\psi}\ d|\nu|(\psi) < \infty$ et soit $Y_t = \int X_{ty}\ d\nu(\psi)$; Y est continu et $Y_t = \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ où $\kappa(x) = \nu\left(\left[\frac{1}{x},1\right]\right)$;

on a en effet : $\int_0^1 \kappa^2\left(\frac{1}{s}\right) ds = \int_0^1 \nu([x,1])^2\ dx \le \int_0^1 |\nu|([x,1])^2\ dx$

$$= \iint \omega\wedge\omega\ d|\nu|(u)\ d|\nu|(\omega) \le \left(\int_{]0,1]} \sqrt{\psi}\ d|\nu|(\psi)\right)^2 < \infty\ ;$$

soit N la mesure [bornée] sur $\mathbb{R}_+$ définie pour f borélienne bornée par :

$$\int f\ dN = \int_{]0,1]} \sqrt{\psi}\ f(-\log\psi)\ d\nu(\psi), \qquad \text{et } \overset{\vee}{N} \text{ sa symétrisée.}$$

On a : $\hat{\eta}_\kappa(\gamma) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - i\gamma} \int_{]0,1]} \sqrt{\psi}\, \exp(i\gamma \log\psi)\, d\nu(\psi) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - i\gamma}\, \hat{N}(\gamma)$;

Y est gaussien stationnaire, de mesure spectrale $d\mu(\gamma) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{1 + 4\gamma^2} |\hat{N}(\gamma)|^2\, d\gamma$

$\Delta_\mu(h) = E[(\tilde{Y}_0 - \tilde{Y}_h)^2] = 2 \int_R \left(\exp-\frac{1}{2}|\psi| - \exp-\frac{1}{2}|\psi - h|\right) dN \bullet \check{N}(\psi)$ est différence de fonctions convexes. Y a donc une variation quadratique sur [0,t], égale à $c^2 t$, où : $c^2 = \Delta'_\mu(0+) = N \bullet \check{N}(\{0\}) = \sum_{x \geq 0} N[x]^2 = \sum_{t \in]\delta, 1]} t\nu[t]^2$.

4) Propriété de semimartingale.

Proposition 15 ([Kn]) :

Soit $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$; K *est une* $\mathcal{X}$*-semimartingale si et seulement si :*

$$\kappa(\alpha) = c + \int_1^\alpha q(\psi)\, \frac{1}{\psi}\, d\psi \quad \textit{pour } \lambda \textit{ presque tout } \alpha > 1, \textit{ où } \int_0^1 q^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty .$$

K *est alors continue ; sa partie martingale est* $c\,X$ ($[K,K]_t = c^2 t$, $[K,X] = ct$) *sa partie à variation finie est* $\int_0^\cdot \frac{1}{u} \left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dX_s\right) du$.

La proposition 15 est conséquence du résumé suivant des résultats de Stricker [S2] sur les semimartingales gaussiennes (voir aussi [JMo]) :

Lemme 16 : *On suppose donnés sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *une filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ *[vérifiant les conditions habituelles] et un espace gaussien* $\mathcal{G}$.

Soit $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ *un processus gaussien centré, tel que :*

- *pour tous* $0 \leq s \leq t \leq 1$, Z_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et*
- $E[Z_t | \mathcal{F}_s]$ *appartient à* $\mathcal{G}$.

Z *est une* $\mathcal{F}$*-semimartingale si et seulement si elle est une* $\mathcal{F}$*-quasimartingale ; elle appartient alors à tous les espaces* $\mathcal{H}^p$ *et se décompose en* $Z = Z_0 + M + A$ *où* M *est une* $\mathcal{F}$*-martingale,* A *un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible à variation intégrable vérifiant : pour tout* $t \geq 0$, A_t *et* M_t *sont dans* $\mathcal{G}$; A_t *est limite faible dans* L^2 *quand* h *tend vers 0 de* $\frac{1}{h} \int_0^t E[Z_{s+h} - Z_s | \mathcal{F}_s]\, ds$ ($Z_u \equiv 0$ *si* $u \geq 1$; *la limite est forte si* A *est continu).*

Démonstration de la proposition 15 :

Si K est une $\mathcal{X}$-semimartingale, $\tilde{K}_\tau$ est une $\tilde{\mathcal{X}}$-semimartingale sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbf{R}$; on a : $\tilde{K}_\tau = \int_{-\infty}^\tau \eta_\kappa(\tau - u)\, d\beta_u$ et pour $\sigma < \tau$:

$$\mathbb{E}[\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_\sigma | \tilde{\mathcal{X}}_\sigma] = \int_{-\infty}^{\sigma} (\eta_\kappa(\tau-u) - \eta_\kappa(\sigma-u))\, d\beta_u ;$$

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_\sigma | \tilde{\mathcal{X}}_\sigma]|] = \vartheta \left(\int_{-\infty}^{\sigma} (\eta_\kappa(\tau-u) - \eta_\kappa(\sigma-u))^2\, du\right)^{1/2}$$

$$= \vartheta \left(\int_0^{\infty} (\eta_\kappa(\tau-\sigma+u) - \eta_\kappa(u))^2\, du\right)^{1/2} \text{ où } \vartheta \equiv \mathbb{E}[|X_1|] ;$$

la propriété de quasimartingale de $\tilde{K}$ équivaut donc à :

$$\int_0^{\infty} (\eta_\kappa(h+u) - \eta_\kappa(u))^2\, du = O(h^2).$$

Suivant Hardy et Littlewood ([HL] théorème 24), introduisons, pour u, $h > 0$,

$$D_h(u) \equiv \frac{1}{h} (\eta_\kappa(h+u) - \eta_\kappa(u)) ;$$

$\mathcal{D} = \{D_h | \ h > 0\}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$; il existe donc une suite $(h_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ avec : $h_n \longrightarrow 0_+$ et D_{h_n} converge faiblement vers γ ;

comme pour λ-presque tout α, $\frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} \eta_\kappa(u)\, du = \eta_\kappa(\alpha)$, on a pour $0 < \alpha < \psi$:

$$\int_\alpha^\psi \gamma(t)\, dt = \lim_n \int_\alpha^\psi D_{h_n}(t)\, dt = \lim_n \left(\frac{1}{h_n}\int_\psi^{\psi+h_n} \eta_\kappa(u)\, du - \frac{1}{h_n}\int_\alpha^{\alpha+h_n} \eta_\kappa(u)\, du\right)$$

$$= \eta_\kappa(\psi) - \eta_\kappa(\alpha) \text{ pour } \lambda\otimes\lambda \text{ presque tous } (\alpha,\psi) \text{ de } \mathbb{R}_+^2 ;$$

soit $c \equiv \operatorname{esslim}_{\alpha\to 0_+} \eta_\kappa(\alpha)$, $g \in \mathcal{M}$ tel que $\frac{1}{2}\eta_\kappa + \gamma = \eta_g$ et $\delta(\alpha) = c + \int_1^\alpha g(\psi)\frac{1}{\psi}\, d\psi$

on a : $\int_1^\infty \delta^2(\alpha)\, \alpha^{-2}\, d\alpha < \infty$ et $\eta_\delta(\alpha) = e^{-\alpha/2}\left(c + \int_1^{e^\alpha} g(\psi)\, \frac{1}{\psi}\, d\psi\right)$;

$d\eta_\delta(\alpha) = -\frac{1}{2}\eta_\delta(\alpha)\, d\alpha + e^{-\alpha/2} g(e^\alpha)\, d\alpha = \gamma(\alpha)\, d\alpha$, i.e. $\eta_\delta = \eta_\kappa$ λ-p.s. .

On a alors : $\mathbb{E}\left[\int_a^b d\sigma \left|\int_{-\infty}^\sigma \gamma(\sigma-u)\, d\tilde{X}_u\right|\right] = \vartheta\,(b-a)\left(\int_0^\infty \gamma^2(u)\, du\right)^{1/2} < \infty$

et : $\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{h}\int_a^b d\sigma\, \mathbb{E}[\tilde{K}_{\sigma+h} - \tilde{K}_\sigma | \tilde{\mathcal{X}}_\sigma] - \int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^\sigma \gamma(\sigma-u)\, d\beta_u\right|\right]^2$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^\sigma \left(\frac{1}{h}\int_{\sigma-u}^{\sigma-u+h} \gamma(\chi)\, d\chi - \gamma(\sigma-u)\right) d\beta_u\right|\right]^2$$

$$\le \vartheta^2\,(b-a)^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{h}\int_\omega^{\omega+h} \gamma(\chi)\, d\chi - \gamma(\omega)\right)^2 d\omega \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

$\left(\int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^\sigma \gamma(\sigma-u)\, d\beta_u\right)_{b\ge a}$ est donc la partie à variation finie de la $(\tilde{\mathcal{X}}_b)_{b\ge a}$-quasimartingale $(\tilde{K}_b - \tilde{K}_a)_{b\ge a}$. On a immédiatement la décomposition canonique de la $\mathcal{X}$-semimartingale K □

Avec les notations du lemme 2, la proposition 15 a pour conséquence :

Corollaire 17 : *Soit* $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$.

1) K *est une semimartingale si et seulement si* :

$\kappa_e(\alpha) = c + \int_1^\alpha q(\psi)\,\frac{1}{\psi}\,d\psi$ *pour* λ *presque tout* $\alpha > 1$, où $q \in M$

$\left(\text{on a donc pour } \gamma \in \mathbb{C}_+,\ \hat{\eta}_{\kappa_e}(\gamma) = \dfrac{c + \hat{\eta}_q(\gamma)}{\frac{1}{2} - i\gamma}\right)$;

sa décomposition canonique est $c\,Y^{(K)} + \int_0^\cdot \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(K)}\right) du$ *où* $Y^{(K)}$ *est le mouvement brownien* $Y_t^{(K)} = \int_0^t \rho_K\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$.

2) *La loi de* K *est équivalente à celle de* X *si et seulement si* $\kappa \in M_b$.

Démonstration :

1) découle de la proposition 15 appliquée dans la filtration $\mathcal{Y}^{(K)}$, qui coïncide (lemme 2) avec la filtration $\mathcal{K}$.

2) Si la loi de K est équivalente à celle de X, K est une semi-martingale ;

ainsi $K_t = c\,Y_t^{(K)} + \int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(K)}\right) du$;

puisque $[K,K]_t = c^2 t$, il faut $c^2 = 1$; le théorème de Girsanov impose alors :

$\int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(K)}\right)^2 du < \infty$, ce qui nécessite :

$\infty > \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(K)}\right)^2 du\right] = \int_0^t \frac{1}{u}\,du \int_0^\infty q^2\left(\frac{1}{s}\right) ds$ et $q \equiv 0$. □

Remarques 18 : Pour que $K = \int_0^\cdot \kappa\left(\frac{\cdot}{s}\right) dX_s$ soit une $\mathcal{X}$-semimartingale, il faut que K soit une $\mathcal{K}$-semimartingale (d'où une condition sur κ_e) et que Y soit une $\mathcal{X}$-semimartingale (d'où une condition sur ρ_K) ; la première condition est :

$\kappa_e(\alpha) = c + \int_1^\alpha q(\psi)\,\frac{1}{\psi}\,d\psi$ pour λ_1 presque tout $\alpha > 1$ $\left(\int_0^1 q^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty\right)$

$$K_t = cY_t^{(K)} + \int_0^t \left(\frac{1}{u}\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(K)}\right) du$$

$\hat{\eta}_{\kappa_e}(\gamma) = \dfrac{c + \hat{\eta}_q(\gamma)}{\frac{1}{2} - i\gamma} = (c + \hat{\eta}_g(\gamma))\,\hat{\eta}_1(\gamma)$ et $(c + \hat{\eta}_g)\,\hat{\eta}_1$ est extérieure ;

la deuxième condition est :

$\rho_K(\alpha) = 1 + \int_1^\alpha \ell(\psi)\,\frac{1}{\psi}\,d\psi$ pour λ_1 presque tout $\alpha > 1$ $\left(\int_0^1 \ell^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty\right)$

et $1 + \hat{\eta}_\ell$ intérieure ; $Y_t^{(K)} = X_t + \int_0^t \left(\frac{1}{u}\int_0^u \ell\left(\frac{u}{s}\right) dX_s\right) du$.

- $\hat{\eta}_\ell = 1 - G_K$ appartient à H_+^2 ; on a vu à la remarque 5-3) que :

$$G_K(\zeta) = \left(\prod_{n\in D} \frac{a_n - \zeta}{\bar{a}_n - \zeta} \right) \exp -i\left(\frac{\ell}{\zeta} + \int_{]0,\infty[} \frac{2\zeta}{\zeta^2 - \gamma^2}\, dF(\gamma) \right) = B_0(\zeta)\, S(\zeta)$$

où $\{a_n \mid n \in D\} \subseteq \mathbf{C}_+$, stable par $\psi \longrightarrow -\bar{\psi}$ et $\sum_{n\in D} \Im m(a_n) < \infty$,

F mesure positive bornée singulière.

En outre, $\hat{\eta}_K = (c + \hat{\eta}_g)\, \hat{\eta}_1\, (1 + \hat{\eta}_\ell)$ d'où l'on tire

$$\kappa(\alpha) = c + \int_1^\alpha h(\psi)\, \frac{1}{\psi}\, d\psi \text{ pour } \lambda_1 \text{ presque tout } \alpha > 1 \left(\int_0^1 h^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty \right)$$

ou $\eta_h = c\eta_\ell + \eta_g + \eta_\ell * \eta_g$ soit : $h(t) = c\, \ell(t) + g(t) + \int_1^t \ell(s)\, g\left(\frac{t}{s}\right) s^{-1}\, ds$.

D'après le lemme 4-ii), on a aussi :

$$X_t = \left(1 + \int_1^\infty g(v)\, v^{-2}\, dv\right) Y_t^{(K)} + \int_t^\infty \left(\int_{u/t}^\infty g(v)\, v^{-2}\, dv \right) dY_u^{(K)}$$
$$= Y_t^{(K)} + \int_1^\infty Y_{tv}^{(K)}\, g(v)\, v^{-2}\, dv.$$

Suite de l'exemple 14-ii)

1) Si ν est diffuse, $Y \left(= \int X_{y.}\, d\nu(y)\right)$ a une variation quadratique nulle ;
Y n'est une semi-martingale que si elle est à variation finie (ou intégrable).
Une condition équivalente est : $\lim_{h\to 0} \tilde{\Delta}(h)$ existe, ou $\int |\hat{N}(\gamma)|^2\, d\gamma < \infty$
ou, ν est absolument continue, de densité φ et $\int_0^1 y\, \varphi^2(y)\, dy < \infty$.

2) Particularisons en prenant $\nu = \lambda\, \delta_1 + \mu\, \delta_{1/a}$ $(a > 1,\ \lambda\mu \neq 0)$; on étudie donc $Y_t = \lambda X_t + \mu X_{t/a}$; on va voir que ce n'est jamais une semi-martingale.

Soit $\alpha > 0$ et $\zeta_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbf{C}$ tels que : $a = e^\alpha$, $\frac{\lambda}{\mu} = \exp -\alpha(\frac{1}{2} - i\zeta_0)$:

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \exp -\alpha(\tfrac{1}{2} + v_0),\ v_0 = -\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|,$$

$\alpha u_0 = 0$ ou π selon que $\lambda\mu > 0$ ou $\lambda\mu < 0$)

$$\eta_K(\alpha) = (\lambda + \mu\, 1_{\{\alpha \geq \alpha\}})\, e^{-\alpha/2},\ \hat{\eta}_K(\zeta) = -2i\mu \exp -\frac{\alpha}{2}(1 + i\zeta_0 + i\zeta)\, \frac{\sin\alpha(\zeta - \zeta_0)}{\frac{1}{2} - i\zeta} ;$$

Premier cas : $v_0 < 0$, i.e. $\sqrt{a}\, \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| > 1$;

$\hat{\eta}_K$ *est une fonction extérieure,* $Y = X$ *et* Y *n'est pas une semi-martingale.*

Deuxième cas : $v_0 > 0$, i.e. $\sqrt{a}\, \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| < 1$;

$$\left|\frac{\sin\alpha(\zeta - \zeta_0)}{\sin\alpha(\zeta - \bar{\zeta}_0)}\right| = \frac{\operatorname{ch}2\alpha(v - v_0) + \cos 2\alpha(u - u_0)}{\operatorname{ch}2\alpha(v + v_0) + \cos 2\alpha(u - u_0)} = \frac{\operatorname{ch}2\alpha(v - v_0) + \cos 2\alpha u}{\operatorname{ch}2\alpha(v + v_0) + \cos 2\alpha u}$$

est majoré par 1 sur $\mathbf{C}_+$ et vaut 1 à la frontière ;

la partie intérieure de $\hat{\eta}_\kappa$ est donc $\dfrac{\sin\alpha(\zeta-\zeta_0)}{\sin\alpha(\zeta-\bar{\zeta}_0)}$

et sa partie extérieure est : $-2i\mu \exp-\frac{\alpha}{2}\vartheta_0 \exp-\frac{\alpha}{2}(1+i\bar{\zeta}_0+i\zeta) \dfrac{\sin\alpha(\zeta-\bar{\zeta}_0)}{\frac{1}{2}-i\zeta}$;

$\kappa_e = \exp-\frac{\alpha}{2}\vartheta_0 \ \mu \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} + 1_{[a,\infty[}\right)$ où $\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} = \exp-\alpha(\frac{1}{2} - i\bar{\zeta}_0) = \dfrac{\mu}{\lambda}$,

soit $\kappa_e = \operatorname{sgn}(\lambda\mu)\sqrt{a}\ (\mu + \lambda\, 1_{[a,\infty[})$ $\quad Y_t = \operatorname{sgn}(\lambda\mu)\sqrt{a}\ (\mu Y_t^{(\kappa)} + \lambda Y_{t/a}^{(\kappa)})$;

on est ramené au premier cas et Y n'est pas une semi-martingale.

De plus, $\hat{\eta}_{\rho_\kappa} = \dfrac{\sin\alpha(\zeta-\zeta_0)}{\sin\alpha(\zeta-\bar{\zeta}_0)} \dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\zeta}$

$$\eta_{\rho_\kappa}(\alpha) = \exp-(\alpha/2)\left(\exp-2\alpha\vartheta_0 - 2\operatorname{sh}2\alpha\vartheta_0 \sum_{k>0} \exp 2k\alpha(\tfrac{1}{2}-\vartheta_0)\ 1_{\{\alpha\geq 2k\alpha\rangle}\right)$$

$$\rho_\kappa(t) = \exp-2\alpha\vartheta_0 - 2\operatorname{sh}2\alpha\vartheta_0 \sum_{k>0} \exp 2k\alpha(\tfrac{1}{2}-\vartheta_0)\ 1_{\{t\ \geq\ a^{2k}\}}$$

$$= a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right) \sum_{k>0} \left(a^2\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2k} 1_{\{t\ \geq\ a^{2k}\}}$$

$$Y_t^{(\kappa)} = a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 X_t + \left(a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right) \sum_{k>0} \left(a^2\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2k} X_{ta^{-2k}}$$

$Y^{(\kappa)}$ n'est pas une $\mathfrak{X}$-semimartingale, ce que l'on constate sur ρ_κ ou sur $\hat{\eta}_{\rho_\kappa}$: $\dfrac{\sin\alpha(\zeta-\zeta_0)}{\sin\alpha(\zeta-\bar{\zeta}_0)}$ est un produit de Blaschke admettant pour zéros $\zeta_0 \pm n\,\dfrac{\pi}{\lambda}$).

Troisième cas : $\vartheta_0 = 0$, i.e. $\sqrt{a}\ \left|\dfrac{\lambda}{\mu}\right| = 1$;

$\hat{\eta}_\kappa(\zeta) = \mu\operatorname{sgn}(\lambda\mu)\ \dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\zeta}\left(1 + \operatorname{sgn}(\lambda\mu)\exp\alpha i\zeta\right)$ *est extérieure ;* $\mathcal{Y} = \mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ *n'est pas une semimartingale.*

Les considérations précédentes vont nous permettre de caractériser les processus gaussiens stationnaires qui sont aussi des semi-martingales. La fin de l'article est consacrée à la démonstration du résultat suivant :

Proposition 19 :

Soit $\tilde{W}$ *un processus gaussien stationnaire, de mesure spectrale* $\mu = \mu_s + \ell.\lambda$ *où* μ_s *est singulière et* $\ell = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$ *est la densité de la partie absolument continue de* μ *par rapport à la mesure de Lebesgue* λ (ℓ *est paire*) ;

$\tilde{W}$ *est une semi-martingale (dans sa filtration propre) si et seulement si :*

1) $\int \gamma^2\, d\mu(\gamma) < \infty$ *(et* $\tilde{W}$ *est continu, à variation finie)*

ou

2) $\int \gamma^2\, d\mu_s(\gamma) < \infty$, $\int \gamma^2\, \ell(\gamma)\, d\gamma = \infty$, $\int_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{1+\gamma^2} \operatorname{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma > -\infty$ *et*

• *il existe* $c > 0$ *avec* : $c^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma^2 \ell(\gamma)\, d\gamma$

• $\int (c^2 - 2c\gamma \sqrt{\ell(\gamma)} \cos\varphi(\gamma) + \gamma^2 \ell(\gamma))\, d\gamma < \infty$, *où* φ *est la conjuguée de* $\mathrm{Log}\ell$

i.e. avec $\zeta = \alpha + i\psi$, $\varphi(\alpha) = \lim_{\psi\to 0_+} \mathcal{R}e\left(-\frac{\zeta}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma^2 - \zeta^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma\right)$.

Commençons par quelques rappels sur les filtrations des processus gaussiens stationnaires ; ce sont des conséquences immédiates de l'*alternative de Szegö* (voir par exemple [DMK] chapitre 4, ou [Ka]) (les notations sont celles de la proposition 18) :

1) si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma = -\infty$, $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \tilde{W}_\tau = \tilde{W}_\infty$.

2) si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma > -\infty$, on peut écrire $\tilde{W} = \tilde{U} + \tilde{V}$ où :

• $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont gaussiens stationnaires *indépendants*, de mesures spectrales respectives μ_s et $\ell.\lambda$;

• $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \tilde{W}_\tau = \tilde{U}_\infty$;

• de plus $\ell = |\hat{\eta}_{K_e}|^2$ où $\hat{\eta}_{K_e}$ est la fonction *extérieure* de $\mathbb{H}^2$ définie par :

$$\hat{\eta}_{K_e}(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\gamma\zeta}{\gamma-\zeta} \mathrm{Log}\ell(\gamma) \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right) = \exp\left(-i\frac{\zeta}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma^2-\zeta^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma\right) ;$$

η_{K_e} appartient à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ et est nulle sur $]-\infty,0[$ et $\tilde{V}_\cdot = \int_{-\infty}^{\cdot} \eta_{K_e}(\cdot - \sigma)\, d\beta_\sigma$ où β est un mouvement brownien (indexé par $\mathbb{R}$) avec $\tilde{\mathcal{V}}_\tau = \sigma\{\beta_x - \beta_y\ ;\ \psi \le \alpha \le \tau\}$

Rappelons aussi que le processus gaussien stationnaire $\tilde{W}$, de mesure spectrale μ a des trajectoires à variation finie si et seulement si μ a un moment d'ordre 2, auquel cas pour $\sigma \le \tau$, $\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma = \int_\sigma^\tau \tilde{\omega}_x\, dx$, où $\tilde{\omega}$ est un processus [mesurable] gaussien stationnaire de mesure spectrale ν où $\frac{d\nu}{d\mu}(\alpha) = \alpha^2$.

Supposons maintenant que $\tilde{W}$ soit une semi-martingale, ou ce qui revient au même - voir lemme 16 - une quasi-martingale ; ainsi :

$\forall\ -\infty < a < b < \infty$, $\exists\ K(a,b) \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ a = \tau_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_n \le \tau_{n+1} = b$,

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\tilde{W}_{\tau_{j+1}} | \tilde{\mathcal{W}}_{\tau_j}] - \tilde{W}_{\tau_j}\right|\right] \le K(a,b).$$

Si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma = -\infty$, $\tilde{W}$ est nécessairement à variation finie (puisque $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \tilde{W}_\tau = \tilde{W}_\infty$) et on vient de rappeler que cela signifie : $\int \gamma^2\, d\mu(\gamma) < \infty$.

Si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \operatorname{Log} f(\gamma)\, d\gamma > -\infty$, pour $\sigma \leq \tau$,

$$\mathbb{E}[|\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma | \tilde{\mathcal{U}}_\infty]|] = \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau | \tilde{\mathcal{W}}_\sigma] - \tilde{W}_\sigma \middle| \tilde{\mathcal{U}}_\infty]\right|\right]$$

$$\leq \mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau | \tilde{\mathcal{W}}_\sigma] - \tilde{W}_\sigma|] ;$$

comme $\mathbb{E}[|\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma|] = \left(\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \{1 - \cos(\tau-\sigma)\gamma\}\, d\mu_s(\gamma)\right)^{1/2}$, on obtient avec $a < b$,

$0 < 2h < b - a$, $n = \left[\frac{b-a}{h}\right]$ $\left(n \geq \frac{b-a}{2h} > 1\right)$ et $\sigma_j = \inf(a + jh,\ n)$ $(0 \leq j \leq n)$

$$n\left(\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \{1 - \cos h\gamma\}\, d\mu_s(\gamma)\right)^{1/2} \leq \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\tilde{W}_{\sigma_{j+1}} | \tilde{\mathcal{W}}_{\sigma_j}] - \tilde{W}_{\sigma_j}\right|\right] \leq K(a,b).$$

On en déduit que $h \longrightarrow h^{-2}\, \Delta_{\mu_s}(h)$ est bornée au voisinage de 0 et (lemme de Fatou) que μ_s a un moment d'ordre 2. $\tilde{U}$ est donc gaussien stationnaire, absolument continu ; pour $\sigma \leq \tau$, $\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma = \int_\sigma^\tau \tilde{u}_x\, dx$, où $\tilde{u}$ est un processus [mesurable] gaussien stationnaire de mesure spectrale ν où $\frac{d\nu}{d\mu_s}(\alpha) = \alpha^2$.

La moyenne mobile $\tilde{V}$ est donc une $\tilde{W}$-quasimartingale ou, ce qui revient au même car $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont indépendants, une $\tilde{V}$-quasimartingale. D'après le corollaire 17, $(\frac{1}{2} + i\gamma)\, \hat{\eta}_{K_e}(\gamma) = c + \hat{\eta}_Q(\gamma)$ et

$$c = \lim_{\mathcal{I}m\gamma \to \infty} (\tfrac{1}{2} + i\gamma)\, \hat{\eta}_{K_e}(\gamma) = \lim_{\psi \to \infty} \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\psi}{\gamma^2 + \psi^2} \operatorname{Log}\{(\tfrac{1}{4} + \gamma^2) f(\gamma)\}\, d\gamma\right)$$

On a aussi $c - i\gamma\, \hat{\eta}_{K_e}(\gamma) = \frac{1}{2}\hat{\eta}_{K_e}(\gamma) + \hat{\eta}_Q(\gamma) \in H^2_+$, ce qui se traduit puisque :

$$\hat{\eta}_{K_e}(t) = \sqrt{f(t)}\ e^{i\varphi(t)}$$

par la finitude de $\int (c^2 - 2c\gamma\sqrt{f(\gamma)}\cos\varphi(\gamma) + \gamma^2 f(\gamma))\, d\gamma$.

Remarques 20 :

Soit $\tilde{W}$ un processus gaussien stationnaire, de mesure spectrale $\mu = f.\lambda$ absolument continue. Des conditions nécessaires pour que $\tilde{W}$ soit une semi-martingale sont :

1) $(1 + \gamma^2)\, f(\gamma) \leq A + g(\gamma)$ *où* $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int |g(\gamma)|\, d\gamma < \infty$.

2) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \gamma^2 f(\gamma)\, d\gamma$ *existe.*

(Notons que *1)* et *2)* suffisent pour que $\tilde{W}$ ait une variation quadratique)

En outre si $\Delta_\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int (1 - \cos\gamma\alpha) \left|\frac{c + \hat{\eta}_Q(\gamma)}{\frac{1}{2} + i\gamma}\right|^2 d\gamma$, on a aussi,

$$\Delta_\mu(\alpha) = \int (\exp -\tfrac{1}{2}|\psi| - \exp -\tfrac{1}{2}|\alpha - \psi|)\, d(\theta * \check{\theta})(\psi),$$

où ϑ est la mesure [de Radon, portée par $\mathbb{R}_+$] $c\delta_0 + \eta_Q.\lambda_1$;

$\lim_{\alpha\to\infty} \Delta_\mu(\alpha) = \mu[\mathbb{R}] \equiv \Delta_\mu(\infty)$ et $\Phi_\mu(\alpha) = \Delta_\mu(\infty) - \Delta_\mu(\alpha)$ est une fonction positive, différence de deux fonctions convexes, telle que la mesure associée à Φ'_μ soit $\frac{1}{4}\Phi_\mu.\lambda_1 + \vartheta * \overset{\vee}{\vartheta}$.

Une autre écriture est : $$\Delta_\mu(\alpha) = \mathbb{E}\left[\iint L_T^{\alpha+u-v}\, d\vartheta(u)\, d\vartheta(v)\right],$$

où $(L_t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R},t\geq 0}$ est la famille des temps locaux du mouvement brownien X et T est une variable exponentielle indépendante de paramètre $\frac{1}{8}$.

Bibliographie :

[B] BEURLING A.: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81, 239-255, 1949.

[CJ] CHALEYAT-MAUREL M., JEULIN T. : Grossissement gaussien de la filtration brownienne. L.N.Math. 1118, 59-109, Springer,1985.

[DMK] DYM H., McKEAN H.P. : Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. Academic Press, 1976.

[E] EMERY M. : Covariance des semimartingales gaussiennes. C.R.A.S. Paris, t.295, Série I, 703-705, 1982.

[F1] FERNIQUE X : Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens. C.R.A.S. Paris, t.278, Série A, 363-365, 1974.

[F2] FERNIQUE X : Régularité des fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires. Probab.Th.Rel.Fields 88, 521-536, 1991.

[HL] HARDY G.H. , LITTLEWOOD J.E. : Some properties of fractional integrals,I. Math.Zeitschrift 27, 565-606, 1928.

[JMa] JAIN N.C., MARCUS M.B. : Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series of functions. Ann.Inst.Fourier 24, 117-141, 1974.

[JMo] JAIN N.C., MONRAD D. : Gaussian quasimartingales. Z.f.W. 59, 139-159, 1982.

[JY] JEULIN T., YOR M. : Filtration des ponts browniens et équations différentielles stochastiques linéaires. Séminaire de Probabilités XXIV, L.N.in Maths 1427, Springer, 1990.

[Ka] KARHUNEN K. : Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen. Arkiv för Mat. 1, 141-160, 1950.

[Kn] KNIGHT F.B. : Foundations of the prediction process. Oxford Studies in Probability 1, Clarendon Press, Oxford 1992.

[M] MARCUS M.B. : Continuity of Gaussian processes and random Fourier series. Annals of Probability 1, 968-981, 1973.

[PW] PALEY R., WIENER N. : Fourier transforms in the complex domain. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.19, 1934

[R] RUDIN W. : Real and complex analysis. Mc Graw Hill, 1970.

[Sc] SCHREIBER M. : Fermeture en probabilité de certains sous-espaces d'un espace L^2. Application aux chaos de Wiener. Z.f.W. 14, 36-48, 1969.

[So] SONG S. : Quelques conditions suffisantes pour qu'une semimartingale soit une quasimartingale. Stochastics 16, 97-109, 1986.

[S1] STRICKER C. : Une caractérisation des quasimartingales. Séminaire de Probabilités IX, L.N.Math. 465,420-424, Springer, 1975.

[S2] STRICKER C. : Semimartingales gaussiennes. Application au problème de l'innovation. Z.f.W. 64, 303-312, 1983.

[W] WIENER N. : The Fourier integral & certain of its applications. Cambridge University Press, 1933.