SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN MÉMIN

Sur la contiguïté relative de deux suites de mesures. Compléments

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 371-376

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__371_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA CONTIGUITE RELATIVE DE DEUX SUITES DE MESURES

COMPLEMENTS

J. Mémin (*)

La lecture de l'article [4] de Liptser-Pukelcheim-Shiryayev, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de contiguité pour une suite (P^n, Q^n) de couples de probabilités définies sur une suite $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ d'espaces mesurables munis d'une filtration discrète $(\mathcal{F}^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, permet de compléter les résultats donnés dans le séminaire 16 [1]. On en profitera également pour préciser certaines démonstrations ou rectifier des erreurs. Les notations sont celles de [1].

A) Quelques propriétés relatives au processus densité :

On considère $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+})$ un espace filtré, P et Q deux probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telles que si $\Pi = \frac{P+Q}{2}$, $(\mathcal{F}_t)$ est Π-complète, $\bigvee_t \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite.
On note Z le processus densité (de Lebesgue) de Q par rapport à P (cf. par ex : [2] p. 212-214), pour $p \in \mathbb{N}$, R_p est le temps d'arrêt $R_p = \inf\{t : Z_t \leq 1/p\}$, $R = \inf\{t : Z_t = 0\}$ et on note $E = \bigcup_p [\![0,R_p]\!]$.
On considère la (P,E) surmartingale locale M définie par $M = \int Z_{s-}^{-1}\, d\, Z_s$; enfin Z^* désigne comme d'habitude le processus défini par $Z^*_t = \sup_{s\leq t} Z_s$.

LEMME 1 : ([4] pour une filtration discrète)

Pour tout L,N appartenant à $\mathbb{R}^+$, on a les inégalités :

(1) : $P[Z_\infty > N] \leq P[Z^*_\infty > N] \leq 1/N$

(2) : $Q[\inf_t Z_t \leq L] \leq L$

(3) : $Q[Z^*_\infty \geq N] \leq L/N + Q[Z_\infty \geq L]$)

(4) : $Q[\mathrm{Sup}_t\ \Delta M_t \geq N^2] \leq 1/N + Q[Z^*_\infty \geq N]$.

Démonstration :

L'inégalité (1) est élémentaire, Z étant une P-sur martingale avec $E_p[Z_0] \leq 1$.

(*) : Département de Mathématiques, Université de Rennes, 35042 RENNES cédex.

Pour (2), soit $T = \inf \{t : Z_t \leq L\}$

$$Q[\inf_t Z_t \leq L] = \int_{\{Z_T \leq L\}} Z_T \, dP \leq L.$$

Montrons (3) :

$$\begin{aligned} Q[Z^*_\infty \geq N] &= \int_{\{Z^*_\infty \geq N\}} Z_\infty \, dP + Q[Z^*_\infty \geq N, Z_\infty = \infty] \\ &= \int_{\{Z^*_\infty \geq N\}} Z_\infty \, dP + Q[Z_\infty = \infty]. \\ &= \int_{\{Z^*_\infty \geq N, Z_\infty \geq L\}} Z_\infty \, dP + \int_{\{Z^*_\infty \geq N, Z_\infty < L\}} Z_\infty \, dP + Q[Z_\infty = \infty] \\ &\leq \int_{\{Z_\infty \geq L\}} Z_\infty \, dP + L\, P[Z^*_\infty \geq N] + Q[Z_\infty = \infty] \\ &\leq Q[Z_\infty \geq L] + L/N. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité (4) on note maintenant T le temps d'arrêt :

$$T = \inf \{t : \Delta M_t \geq N\} \wedge R_p, \text{ pour un } p \in \mathbb{N}.$$

$$\{\sup_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\} = \{\Delta M_t \geq N^2\}$$

mais : $$\{\Delta M_T \geq N^2\} = \{\frac{Z_T}{Z_{T-}} - 1 \geq N^2\} = \{\frac{Z_T}{Z_{T-}} \geq N^2 + 1\}$$

$$\{\sup_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\} \subset \{\frac{Z^*_{R_p}}{\inf_{t \leq R_p} Z_{t-}} \geq N^2 + 1\}$$

$$\subset \{Z^*_{R_p} \geq (N^2 + 1)(\inf_{t \leq R_p} Z_{t-}), \inf_{t \leq R_p} Z_t > 1/N\} \cup \{\inf_{t \leq R_p} Z_t \leq 1/N\}.$$

$$\subset \{Z^*_{R_p} \geq (N^2 + 1)/N\} \cup \{\inf_{t \leq R_p} Z_t \leq 1/N\}$$

$$\subset \{Z^*_\infty \geq (N^2 + 1)/N\} \cup \{\inf_t Z_t \leq 1/N\}$$

On a donc obtenu :

$$Q[\bigcup_p \{\sup_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\}] \leq Q[Z^*_\infty \geq N] + Q[\inf_t Z_t \leq 1/N]$$

d'où le résultat en utilisant (2).

On supposera à partir de maintenant que Q est localement absolument continue par rapport à P, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la restriction de Q à $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la restriction de P à $\mathcal{F}_t$; Z (resp : M) est alors une P (resp : (P,E)) martingale locale.

Soit C(M) le processus croissant défini sur E par

$$(5) : \quad C(M)_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + 1/2 \sum_{s \leq t} (1 - (1 + \Delta M_s)^{1/2})^2.$$

C(M) est (P,E) localement intégrable, de sorte que l'on peut définir son (P,E) compensateur prévisible noté $\tilde{C}^{p}(M)$ (voir [1]). Soit M' défini sur E par :

(6) : $M'_t = - M_t + \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \left(\frac{\Delta M_s^2}{1 + \Delta M_s} \mathbb{1}_{\{s<R\}} \right)$ et U le P-compensateur prévisible du processus $\mathbb{1}_{\{t \geq R\}}$

$N = M' + U$ est ([1], lemme 1-4) une (Q,E) martingale locale, donc une Q-martingale locale puisque E^c est Q-évanescent. Le lemme suivant complète le lemme 1-8 de [1] et relie les processus $\tilde{C}^{P}(M)$ et $\tilde{C}^{P}(M')$.

LEMME 2 :

Le processus C(M') *défini par :*

$$C_t(M') = \langle M^c, M^c \rangle_t + {}^1/_2 \sum_{s \leq t} (1 - (1 + \Delta M's)^{1/2})^2$$

est Q-localement intégrable et son Q-compensateur prévisible noté $\tilde{C}^{Q}(M')$ *est tel que l'on a l'égalité :*

(7) : $\tilde{C}^{P}_t(M) = \tilde{C}^{Q}_t(M')_t + U_t/_2$ Q- p.s.

Démonstration :

On commence par remarquer que $\tilde{C}^{P}(M)$ est Q-localement intégrable. Maintenant soit $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$, et Y un processus prévisible positif tel que $E_Q [\int_s^t Y_s \, d \tilde{C}^{p}_s(M)^{R_p}] < \infty$. On négligera dans les calculs la partie $\langle M^c, M^c \rangle$ commune à C(M) et C(M').

$$2 E_Q [\int_o^t Y_s \, d \tilde{C}^{p}_s(M)^{R_p}] = 2 E_p [\int_o^t Z_s Y_s \, d \tilde{C}^{p}_s(M)^{R_p}]$$

$$= 2 E_p [\int_o^t Z_{s-} Y_s \, d \tilde{C}^{p}_s(M)^{R_p}] = 2 E_p [\int_o^t Z_{s-} Y_s \, d C_s(M)^{R_p}]$$

$$= E_p [\sum_{\substack{s \leq R_p \wedge t \\ R_p < R}} Y_s Z_{s-} (1 - (1 + \Delta M_s)^{1/2})^2] + E_p [\sum_{s \leq t} Y_s Z_{s-} \mathbb{1}_{\{R_p = R = 0\}}]$$

(car sur $\{s = R_p = R\}$ $1 + \Delta M_s = 0$)

$$= E_p [\sum_{\substack{s \leq R_p \wedge t \\ R_p < R}} Y_s Z_{s-} (1 - (1 + \Delta M's)^{1/2})^2 (1 + \Delta M_s)] + E_p [\int_o^{t \wedge R_p} Y_s Z_{s-} \, dU_s]$$

$$= 2 E_p [\int_o^{t \wedge R_p} Z_s Y_s \, d C_s(M')] + E_p [\int_o^{t \wedge R_p} Z_s Y_s \, d U_s]$$

$$= 2 E_Q [\int_o^{t \wedge R_p} Y_s \, d C_s(M')] + E_Q [\int_o^{t \wedge R_p} Y_s \, d U_s]$$

$$= E_Q [\int_o^{t \wedge R_p} Y_s \, d (2 \tilde{C}^{Q}_s (M') + U_s)]$$ d'où le résultat. (Dans la démonstration on a

montré que $\int Y \, d\, C(M')$ était Q-intégrable dès que $\int Y \, d\, C(M)$ l'était, d'où l'existence du processus $\overset{\nu Q}{C}(M')$).

Le lemme suivant fait partie de la démonstration du théorème 2-7 de [1] ; le début (p. 330) de cette dernière démonstration étant insuffisant, elle est reprise ici complètement.

LEMME 3 :

Pour tout $N > 1$ *on a l'inégalité :*

(δ) : $Q\,[Z_\infty \leq N^2] \leq \frac{1}{2N} + Q\,[\overset{\nu P}{C}_\infty(M) \leq 8 \log 2\, N^2]$

Démonstration :

Soit Z' défini par $Z' = (Z_0/Z)^{1/2}$ sur $[\![0,R[\![$

$= 0$ sur $[\![R,\infty[\![$.

On vérifie immédiatement que sur $[\![0,R[\![$ on a :

$Z' = (\mathcal{E}(M))^{-1/2} = (\mathcal{E}(M'))^{1/2}$; et comme $[\![R,\infty[\![$ est Q-évanescent, on a, à la Q-indistinguabilité près $Z' = (\mathcal{E}(M'))^{1/2}$, c'est-à-dire :

$Z' = \exp [\, 1/2\ M' - 1/4\ \langle M^c, M^c\rangle] \prod_s (1 + \Delta M'_s)^{1/2} \exp (-\, 1/2\ \Delta M'_s)$.

Un calcul élémentaire montre que ceci peut encore s'écrire :

$Z' = \mathcal{E}(1/2\ N - V)$ où N est la Q-martingale locale $M' + U$ et

$V = 1/8\ \langle M^c, M^c\rangle + 1/2 \sum_s (1 - (1 + \Delta M'_s)^{1/2})^2 + 1/2\ U$.

Ainsi V a pour Q-compensateur prévisible A où $A = \overset{\nu Q}{C}(M') + 1/2\ U - 7/8\ \langle M^c, M^c\rangle$ c'est-à-dire compte-tenu du lemme 2 : $A = \overset{\nu P}{C}(M) - 7/8\ \langle M^c, M^c\rangle$.

Soit L : $1/2\ N - V + A$; alors $Z' = \mathcal{E}(L-A)$. On va commencer par montrer que $\Delta A < 1$ Q-p.s.

Soit T un temps d'arrêt prévisible ; on a la succession d'égalités :

$$-\Delta A_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = E_Q\,[-\Delta A_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}] = E_Q\,[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} (\Delta L_T - \Delta A_T) | \mathcal{F}_{T-}]$$

$$= E_Q\,[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \Delta(1/2\ N - V)_T \,|\, \mathcal{F}_{T-}] = E_Q[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}((1 + \Delta M'_T)^{1/2} - 1) \,|\, \mathcal{F}_{T-}]$$

$$> -1 \quad Q.\ ps$$

Ce qui montre que $\{(t,\omega) : \Delta A_t(\omega) \geq 1\}$ est Q-évanescent.

On peut alors écrire ([3], prop II-1) :

$Z'_t = \mathcal{E}(L-A)_t = \mathcal{E}(\hat{L})_t \, \mathcal{E}(-A)_t$ avec $\hat{L}_t = \int_0^t \frac{1}{1-\Delta A_s} \, d\, L_s$, et $\mathcal{E}(\hat{L})$est une martingale locale positive donc une surmartingale positive.

Soit N>1.

$$Q\,[Z'_\infty \geq 1/N\,] = Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N\,]$$

$$\leq Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N\,,\ \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2\,]$$

$$+ Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N,\ \mathcal{E}(-A)_\infty < 1/2N^2\,]$$

$$\leq Q\,[\mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2\,] + Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty > 2N\,].$$

Mais $Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty > 2N\,] \leq 1/2N \;\; E_Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_0] \leq 1/2N.$

Donc $Q\,[Z'_\infty \geq 1/N\,] \leq 1/2N + Q[\mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2]$

$$\leq 1/2N + Q\,[\exp(-A)_\infty \geq 1/2N^2]$$

$$\leq 1/2N + Q\,[A_\infty \leq \log 2N^2]$$

Ce qui donne le résultat, car $\forall\, A_\infty \overset{\sim}{\geq} C_\infty^P\ (M)$.

B) Conditions nécessaires et suffisantes de contiguité :

On considère $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t\in\mathbb{R}^+})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces filtrés, $(P^n,Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de couples de probabilités sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$, $(\mathcal{F}_t^n)$ vérifiant les conditions habituelles relativement à la probabilité $\frac{P_n + Q_n}{2}$; on suppose que Q^n est localement absolument continue par rapport à P^n, et on considère pour chaque n les processus M^n, Z^n, $C(M^n)$, définis comme M, Z, C(M) de la partie A.

On dira qu'une suite (X^n) de variables aléatoires à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, Q^n)$ est Q^n-tendue si on a la propriété suivante :

$\lim_{K\uparrow\infty} (\limsup_n \; Q^n\,[\,|X^n| > K\,]) = 0.$

(Q^n) est contigue à (P^n) si et seulement si (Z_∞^n) est Q^n-tendue (lemme 2-1 de [1]) ;
(P^n) et (Q^n) sont complètement séparables si et seulement si on a la propriété :

pourt tout $K>0$, $\limsup_n Q^n\,[Z_\infty^n > K] = 1$ (lemme 2-2 de [1]).

On déduit alors immédiatement de la partie A les résultats suivants :

LEMME 4 : ([4] , dans le cas d'une filtration discrète).

a) (Q^n) est contigue à (P^n) si et seulement si (Z_∞^{n*}) est Q^n-tendue.

b) Si $\lim_{K\uparrow\infty} \lim\sup_n Q^n [\tilde{C}{}^{P^n}_{\infty}(M^n) > K] = 1$ *alors* (P^n) *et* (Q^n) *sont complètement séparables.*

c) Si (Q^n) *est contigue à* (P^n), $(\tilde{C}{}^{P^n}_{\infty}(M^n))$ *et* $(\sup_t \Delta M^n_t)$ *sont* Q^n*-tendues.*

Démonstration :

L'inégalité (3) du lemme 1 montre que l'on a l'équivalence :

(Z^n_∞) est Q^n-tendue $\iff$ $(Z^{n\,*}_\infty)$ est Q^n-tendue.

Le *b)* et la première partie du c) découlent directement du lemme 3 ; enfin la seconde partie du c) découle de l'inégalité (4) du lemme 1.

Compte-tenu du lemme 4 et du corollaire 2-8 de [1] on obtient le critère de contiguité suivant :

THEOREME :

(Q^n) est contigue à (P^n) si et seulement si les suites : $(\tilde{C}{}^{P^n}_{\infty}(M^n))$ et $(\sup_t \Delta M^n_t)$ sont Q^n-tendues .

RÉFÉRENCES :

[1] G.K Eagleson J. Mémin : Sur la contiguité de deux suites de mesures : généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev. Sém. de Proba. XVI. Lect.Notes in Mathematics n° 920, Springer-Verlag.

[2] J. Jacod : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect.Notes in Mathematics n° 714 - Springer-Verlag.

[3] D. Lépingle - J. Mémin : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Z W 42 175-203 (1978).

[4] R.Ch. Liptser - F. Pukelcheim, A.N. Shiryayev : Sur des conditions nécessaires et suffisantes de contiguité et de complète séparabilité de probabilités - 1982 (à paraître).

Errata de l'article [1]:

p. 335 l. 2 $\quad Q^n\big|_{\mathcal{F}^n_0} = P^n\big|_{\mathcal{F}^n_0}$

p. 336 l. 20 et l. 3 : remplacer c^n_∞ par $\int_0^\infty (\beta^n_s)^2 \, d\, c^n_s$

l. 6 : remplacer c^n_t par $\int_0^t (\beta^n_s)^2 \, d\, c^n_s$