SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BRETAGNOLLE

p-variation de fonctions aléatoires. 2ième partie : processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 64-71

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__64_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg 1970/71

Séminaire de Probabilité

p-VARIATION DE FONCTIONS ALÉATOIRES

2ième partie: Processus à accroissements indépendants

par Jean Bretagnolle

I. Justification de la 1ère partie : P.W. MILLAR, dans [1] a étudié la p-variation des processus à accroissements indépendants et stationnaires (désormais P.A.I.) et a posé la conjecture démontrée dans le Théorème III; dans cet article, il a démontré un résultat partiel rendant la conjecture tout à fait raisonnable; pour résoudre la problème pour les P.A.I., il suffit de montrer le théorème II pour des v.a. indépendantes et équidistribuées: c'est ce que j'avais fait tout d'abord, et voilà pourquoi dans la partie 1 on passe de A à D^u, pour rendre les a_i assez proches de v.a. indépendantes équidistribuées minorées.

II. Extensions du Théorème I : Soient (X_i) des variables aléatoires indépendantes, centrées pour $p > 1$; on définit comme dans I la fonction aléatoire S par $S(n) = \sum_{i \leq n} X_i$; alors:

Théorème II : Si $p \in]0,2[$, il existe une constante C_p, ne dépendant que de p, telle que :

$$\sum_{a<i\leq b} E\{|X_i|^p\} \leq E\{ W^p(S)_a^b \} \leq C_p \cdot \sum_{a<i\leq b} E\{|X_i|^p\} .$$

démonstration: le cas $0<p\leq 1$ est trivial, ainsi que l'inégalité de

gauche; désormais, on suppose $1<p<2$ et les X_i centrées.

Lemme 1: On peut supposer les X_i symétriques.

démonstration: Soit $M(\omega)$ une fonction aléatoire, et $M'(\omega')$ indépendante de la première et de même loi, $[a,b]$ un intervalle de N, et $P(\omega) = \{ t_i(\omega) \}$ la partition de $[a,b]$ qui réalise $W^p(M)_a^b(\omega)$:

$$W^p(M)_a^b = \sum_{t_i(\omega)\in P(\omega)} |M_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)}(\omega)|^p \text{ ; comme } M = M-M' + M',$$

$$W^p(M)_a^b \lesssim \sum_{t_i \in P} |(M-M')_{t_i}^{t_{i+1}}|^p + \sum_{t_i \in P} |M'^{t_{i+1}}_{t_i}|^p$$

$$\leq W^p(M-M')_a^b + \sum_{t_i\in P(\omega)} |M'^{t_{i+1}(\omega)}_{t_i(\omega)}(\omega')|^p .$$

Il suffit alors de démontrer le

Lemme2: si les X_i sont centrées, $E\{|\Sigma_a^b X_i|^p\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$.

En effet, si le Théorème a été démontré dans le cas symétrique, prenant $M = S$, $M-M'$ est somme de variables symétriques $X-X'$ et alors $E\{W^p(M-M')_a^b\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i-X_i'|^p\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$ puisque X_i et X_i' sont de même loi.

Par ailleurs, $E_\omega E_{\omega'}\{ \sum_{t_i\in P(\omega)} |M'^{t_{i+1}}_{t_i}|^p\} = E_\omega\{ \sum E_{\omega'}\{|\Sigma_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)} X_i'(\omega')|^p\}$

$\lesssim E_\omega\{ \sum \Sigma_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)} E\{|X_i'|^p\} \}$ (d'après l'indépendance de ω et ω' et le lemme 2) $= E_\omega\{\Sigma_a^b E\{|X_i'|^p\}\}$ (il s'agit d'une partition de $[a,b]$) $= \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$ (les X_i ont même loi que les X_i') . En combinant ces inégalités, on obtient $E\{W^p(M)_a^b\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$.

démonstration du lemme 2: Il sort de l'inégalité de Marcinkiewicz - Zygmund qui assure en particulier que si les X_i sont centrées et indépendantes, $E\{|\Sigma X_i|^p\} \lesssim E\{|\Sigma X_i^2|^{p/2}\}$. Mais $|\Sigma X_i^2|^{p/2} \leq \Sigma |X_i|^p$.

démonstration du T II dans le cas symétrique: On interprète alors X_i comme $A_i(\omega')\varepsilon_i(\omega)$, les deux arguments ω et ω' étant indépendants, ($A_i = |X_i|$) les A_i étant 2 à 2 indépendantes, ainsi que les ε_i, qui sont des Rademachers. On écrit le T I conditionnellement en ω', puis on intègre les inégalités .

***

Théorème III : on suppose $1< p < 2$

III a : Soit X_t un P.A.I. centré, sans partie brownienne, de mesure de Lévy $L(dx)$ de support contenu dans $[-1,+1]$; il existe alors deux constantes D_p, D'_p ne dépendant que de p telles que :

$$D_p \int |x|^p L(dx) \quad \leq \quad E\{W^p(X)_0^1\} \quad \leq \quad D'_p \int |x|^p L(dx) \quad .$$

III b : Soit X_t un P.A.I. de mesure de Lévy $L(dx)$; La C.N.S. pour que sa p-variation sur $[0,1]$ soit finie p.s. est qu'il n' ait pas de partie brownienne et que l'intégrale $\int_{|x|\leq 1} |x|^p L(dx)$ soit finie; sinon, la p-variation est p.s. infinie .

démonstration : ne démontrons que III a pour l'instant; pour une fonction cadlag (continue à droite et pourvue de limites à gauche) la p-variation est aussi bien le sup que le sup sur les sommes finies que le sup sur les sommes dyadiques: on peut discrétiser et pour pouvoir conclure avec le T II, il suffit de montrer le:

lemme 3: Quand t tend vers 0, $t^{-1}E\{|X_t|^p\} \approx \int |x|^p L(dx)$ sous III a. Or, si X et X' sont indépendantes, de même distribution, centrées, on a $E\{|X-X'|^p\} \approx E\{|X|^p\}$ (on en a la moitié du lemme 2, l'autre

provient de l'inégalité de Jensen: $|X'|^p = |E_X\{X'-X\}|^p \leq E_X|X'-X|^p$)

Pour démontrer le lemme 3, on se ramène donc au cas symétrique .

Or si X est une v.a. symétrique de fonction caractéristique $\varphi_X(u)$, $\|X\|_p^p \approx \int (1-\varphi_X(u))u^{-p-1}du$, pour $0<p<2$; il faut donc montrer que $\int\{1-\exp[\int (1-\cos ux)L(dx)]\}t^{-1}u^{-p-1}du \approx \int |x|^pL(dx)$: une des inégalités est évidente, l'autre vient, quand t tend vers 0, par convergence dominée .

III. Le cas du Mouvement brownien : Redémontrons le

Théorème IV (Paul Lévy) : La 2-variation du Mouvement Brownien B_t sur [0,1] est p.s. infinie .

Lemme 4 :Soit f une fonction cadlag, définie sur [0,1] et g continue de R^+ dans R^+. Soit $E_M=\{t \mid 0\leq t<1$;il existe t', $t<t'<1$ avec $\frac{f(t')-f(t)}{g(t'-t)}>M\}$ Si $|E_M| = 1$(| | est la mesure de Lebesgue), alors à tout ε on peut associer une famille finie $\{0<t_1<t_2<\ldots<t_{2n-1}<t_{2n}<1\}$ avec $\sum_{0\leq k<n} (t_{2k}-t_{2k-1})>1-\varepsilon$ et $\frac{f(t_{2k})-f(t_{2k-1})}{g(t_{2k}-t_{2k-1})} > M$ pour tout k .

dém: un t' tel que l'inégalité ait lieu sera dit associé à t; M étant fixé, soit E_a défini par { |en supplément, il existe un t' associé avec $t'-t > a$}.Alors E_M est la réunion des E_a pour a petit, tout est mesurable, donc je peux trouver a tel que $|E_a| > 1-\frac{1}{2}\varepsilon$; soit alors $\hat{t}_1 = \inf\{t \mid t\in E_a\}$, $t_1\in E_a$ avec $t_1-\hat{t}_1<2^{-2}$, t_2 un t' a-associé à t_1 et, en général: $\hat{t}_{2k+1}=\inf\{t \mid t>t_{2k};t\in E_a\}$, $t_{2k+1}\in E_a$ avec $t_{2k+1}-\hat{t}_{2k+1}<$

$\varepsilon 2^{-2k-2}$, t_{2k+2} a-associé à t_{2k+1}; comme $t_{2k}-t_{2k-1} > a$, on atteint 1 en un nombre fini de fois; la deuxième inégalité est vérifiée par construction, et $\varepsilon/2 \geq |E_a^c| \geq \Sigma\, t_{2k+1}-t_{2k}$, $\varepsilon/2 \geq \Sigma\, t_{2k+1}-t_{2k+1}$ ....

Proposition Soit X_t un P.A.I., h une fonction paire, convexe, positive, de fonction inverse g; on suppose que $\limsup_{t\to 0} X_t/g(t)$ ou que $\limsup_{t\to 0} |X_t|/g(t) = +\infty$ p.s. ; la h-variation de X_t est alors infinie sur $[0,1]$, p.s.

démonstration:(la h-variation se définit en remplacant $x \to |x|^p$ par $x \to h(x)$) Soit $\Omega_M = \{\omega, t \mid t \in E_M(\omega)\}$, $E_M(\omega)$ étant l'ensemble du lemme 4 correspondant à $f(.) = X_.(\omega)$; $X_t(\omega)$ étant c.a.d.l.g et mesurable du couple (t,ω), Ω_M est mesurable; les accroissements étant indépendants et stationnaires, la section de Ω_M par $t=t_o$ a une probabilité 1 pour tout t_o, sous l'hypothèse faite; donc (Fubini) $P\otimes|||\{\Omega_M\} = 1$, donc les sections $E_M(\omega)$ ont presque toutes une mesure de Lebesgue 1, les hypothèses du lemme 4 sont remplies . Alors $W^h(X)_0^1 \geq \Sigma_k h_o X_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} \geq$ $\Sigma_k h(Mg(t_{2k}-t_{2k-1})) \geq \Sigma_k Mh_o g(t_{2k}-t_{2k-1}) \geq M(1-\varepsilon)$, avec probabilité 1, ceci pour tout M, tout ε .

On a en particulier démontré le Théorème IV, puisque d'après la loi du Logarithme itéré, $\limsup_{t\to 0} B_t/t^{\frac{1}{2}} = +\infty$

Remarques:-$\limsup_{t\to o}|X_t|/g(t) = \infty$ avec une $P>0$ entraîne que X_t ou $-X_t$ avec $P=1$ est tel que $\limsup_{t\to o} X_t/g(t) = +\infty$(Loi 0-1)

-le T IV est à rapprocher du résultat suivant lequel si

on se donne une suite emboitée de partitions (certaines) P_n de $[0,1]$ la suite $V_n = \sum_{t_{i,n}} |B_{t_{i+1,n}} - B_{t_{i,n}}|^2$ tend p.s. vers 1 .

Corollaire : Le théorème I est faux pour p=2, et $\lim_{p \to 2} \uparrow M_p = +\infty$.

démonstration : Remarquons tout d'abord que la fonction aléatoire S étant fixée, $[W^p(S)_a^b]^{1/p}$ est décroissante de p: pour toute partition P, $[\sum_{i<k(P)} |S_{t_{i+1}} - S_{t_i}|^p]^{1/p}$ est décroissante de p ; si $\{M_p | p<2\}$ était borné, on pourrait passer à la limite dans le T I, puisqu'on a à y évaluer un sup sur un nombre fini de sommes, et M_2 serait finie. Si M_2 est finie, le T II est valable avec X_i gaussiennes et p=2, on discrétise le Brownien comme dans T III, et on obtient une contra - diction avec T IV.

***

IV Démonstration de III b et divers

Un P.A.I X_t de mesure de Lévy L(dx) peut toujours se décomposer en somme de 4 P.A.I. indépendants $\sigma B_t + Y_t + P_t + at$, où:

- σB_t est la partie brownienne.
- Y_t , de mesure de Lévy $1_{\{|x| \leq 1\}} \cdot L(dx)$ est centré.
- P_t , de mesure de Lévy $1_{\{|x|>1\}} \cdot L(dx)$ est un processus de Poisson généralisé, c'est-à-dire qu'il est constant par paliers, n'a qu'un nombre p.s. fini de discontinuités dans tout intervalle de temps, et peut s'écrire $P_t = \sum_{s \leq t} (P_s - P_{s-})$.
- at est une translation certaine, regroupant tout ce qui reste .

La translation a une p-variation finie ($p \geq 1$) ainsi, p.s., que P_t.

Si donc $\sigma = 0$ et si $\int_{|x|\leq 1} |x|^p L(dx) < +\infty$, d'après III a et (W), la p-variation de X est p.s finie sur $[0,,1]$.

Toujours d'après (W), si la p-variation de X_t n'est pas finie avec probabilité positive, il en est de même pour $\sigma B_t + Y_t$; si $\sigma > 0$, en écrivant $\sigma B_t(\omega) + Y_t(\omega')$, les deux arguments ω ω' indépendants, soit $P_n(\omega)$ des partitions qui réalisent à la limite la 2-variation de σB_t, indépendantes de $Y(\omega')$; comme $(a+b)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2$, on a $2W^2(\sigma B+Y)_0^1 \geq \sigma^2 \cdot \sum_{t_i \in P(\omega)} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 - 2 \sum_{t_i \in P(\omega)} |Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}|^2$. Mais le P.A.I. Y est centré, et donc $E\{Y_t^2\} = yt$ pour un $y \in R$, et comme $P(\omega)$ est indépendante de Y, l'espérance du 3° terme est $2y$; le second tend p.s. vers $+\infty$ (T IV); la 2-variation de la somme est infinie, donc à fortiori la p-variation d'après la remarque , corollaire p.6.

Si $\sigma = 0$, $W^p(Y)_0^1 \geq \sum_{s\leq 1} |Y_s - Y_{s-}|^p$, or $Z_t = \sum_{s\leq t} |Y_s - Y_{s-}|^p$ est un processus croissant, à accroissements indépendants et stationnaires, et sa mesure de Lévy $M(dx) =$ évidemment $1_{\{|x|\leq 1\}} \cdot |x|^p \cdot L(dx)$: si l'intégrale diverge, $Z_1 = +\infty$ p.s., et la démonstration est terminée .

Remarque: on aurait pu utiliser le résultat connu suivant lequel, si $\sigma > 0$ ou si l'intégrale diverge, $\limsup_{t \to o} |X_t|/t^{1/p} = +\infty$ p.s.; par ailleurs, a contrario, toujours d'après la proposition p.5, si $\sigma = 0$ et convergence de l'intégrale, $\lim_{t \to o} X_t/t^{1/p} = 0$ p.s. (il est cependant plus simple d'utiliser le critère de Khintchine !)

-Pour une h convexe, $h(x)/x^2$ décroissante, j'ai le T I asymptotique sur les sommes de v.a . indépendantes équidistribuées, mais pas sur les P.A.I.

-Additif aux exposés sur la p-variation

Contrairement à la dernière ligne de l'exposé, je sais étendre les résultats à la classe de fonctions (C) ainsi définie:
h $\in$ (C) si h est paire, continue, nulle en 0, convexe et de plus g définie sur R^+ par $g(x) = h(x^{\frac{1}{2}})$ est concave. On pose $\mathcal{L}(x) = h(x)/x^2$.

(remarque: pour la h-variation , le problème ne se pose vraiment que pour une h sur-additive sur R^+, soit $h(x)/x$ croissante; si $h(x) = \sigma(x^2)$, le problème disparait; la condition $\mathcal{L}(x)$ décroissante est donc naturelle)

De même, le processus à accroissements indépendants et stationnaires X_t sera de type (C) si: pas de partie brownienne, pas de sauts d'amplitude supérieure à 1, centré; on note $\bar{h}$ le nombre $\int h(x)L(dx)$.

(remarque: pour l'étude locale, les restrictions faites sur X sont raisonnables; la partie brownienne l'emporte trop largement en 0, et au contraire les grands sauts n'interviennent qu'après un temps >0 p.s.; enfin $h(x)=\sigma(x)$, on peut toujours centrer le processus)

Théorème:(i) ou bien $\limsup_{x\to 0^+} \frac{\mathcal{L}(2x)}{\mathcal{L}(x)} < 1$, et alors pour tout processus de type (C) tel que $\bar{h}$ soit fini, $\lim_{t\to 0} h(X_t)/t = 0$ p.s. et $E\{W^h(X)_0^t\} = O(t.\bar{h})$

(ii) ou bien $\limsup_{x\to 0^+} = 1$, et il existe alors un processus de type (C), avec $\bar{h}$ fini et $\limsup_{t\to 0} h(X_t)/t$ infinie p.s., $W^h(X)_0^t$ infini p.s. pour tout t>0.

Reference

[1] - P.W. Millar "Path behavior of processes with stationary independent increments", Z. W-theorie u. verw. Gebiete 17 (1971), p.53-73.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

RUE RENÉ DESCARTES

67 - STRASBOURG