SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Une application aux fonctionnelles additives d'un théorème de Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 93-96

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__93_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

1967-68

- Séminaire de Probabilités -

UNE APPLICATION AUX FONCTIONNELLES ADDITIVES D'UN THEORÈME DE MOKOBODZKI

par Claude DELLACHERIE

1. MOKOBODZKI vient de démontrer l'existence d'un ultrafiltre ν sur $\underset{\sim}{N}$, possédant la propriété suivante : soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, et soit X_n une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, qui converge en probabilité vers une v.a. X. Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a $\lim_\nu X_n(\omega) = X(\omega)$.

La démonstration de MOKOBODZKI (qui figure dans un autre exposé du séminaire) utilise l'hypothèse du continu.*

Nous allons appliquer ce résultat à la construction de fonctionnelles additives de Markov possédant la propriété de "perfection".

2. Soit E un espace localement compact à base dénombrable, et soit (P_t) un semi-groupe markovien sur $(E, \underline{\underline{B}}_u(E))$ - nous supposons le semi-groupe markovien uniquement pour simplifier les notations, on sait bien comment ramener le cas sousmarkovien au cas markovien au moyen d'un pcint supplémentaire. Nous supposons que

pour toute loi de probabilité μ sur E, il existe un processus de Markov admettant μ comme loi initiale, (P_t) comme semi-groupe de transition, et dont les trajectoires sont continues à droite.

On peut alors construire la " réalisation à droite canonique du semi-groupe (P_t)" : Ω désignant l'ensemble de toutes les applications continues à droite de $\underset{\sim}{R}_+$ dans E, X_t l'application coordonnée d'indice t sur Ω, on munit Ω des tribus $\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(X_s , s \leq t)$, $\underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{T}}(X_s , s \geq 0)$ et des mesures P^μ pour lesquelles le processus (X_t) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition, μ comme mesure initiale. D'une

* L'article de MOKOBODZKI n'étant pas paru, l'exposé ne figure pas ici.

manière générale, nous utiliserons toutes les notations de MEYER [3] . Nous ferons en outre l'hypothèse suivante (qui entraîne la propriété de Markov forte)

soit f une fonction p-excessive ($p \geq 0$) ; alors f est presque borélienne et "continue à droite sur les trajectoires" (i.e., quelle que soit la loi initiale μ , pour P^μ-presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \mapsto f \circ X_t(\omega)$ est continue à droite.)

Nous dirons qu'une partie de Ω est négligeable si elle est P^μ-négligeable pour toute loi initiale μ . De même, deux processus (A_t) et (B_t) définis sur Ω , à valeurs réelles, seront dits indistinguables si l'ensemble $\{\omega \mid \exists t : A_t(\omega) \neq B_t(\omega)\}$ est négligeable. L'expression p.s. ou pour presque tout $\omega \in \Omega$ sans qualification signifie sauf sur un ensemble négligeable.

Rappelons la définition d'une fonctionnelle p-additive continue (p-fac). C'est un processus $A = (A_t)$ défini sur Ω , à valeurs réelles ≥ 0 ou $+\infty$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) pour tout t , A_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable ;

b) pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto A_t(\omega)$ est à valeurs finies, nulle pour $t = 0$, continue, croissante ;

c) quels que soient s,t , l'ensemble $\{\omega \mid A_{s+t}(\omega) \neq A_s(\omega) + e^{-ps} A_t(\theta_s \omega)\}$ (que nous désignerons par $H_{s,t}$) est négligeable.

Les ensembles négligeables appartenant à toutes les tribus $\underline{\underline{F}}_t$, nous pouvons supposer que b) est satisfaite identiquement, sans aucun inconvénient : il suffit de remplacer $A_t(\omega)$ par 0 pour tout t , si ω ne satisfait pas à b). Il n'en serait pas de même si a) était renforcée (mesurabilité par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}^0_{t+}$ par exemple). Ici, de toute façon, l'utilisation de l'ultrafiltre de MOKOBODZKI nous interdira de renforcer a) : nous supposerons donc, dans la suite, que nos fonctionnelles satisfont identiquement à b) sans ensemble exceptionnel.

On dit que la p-fac A est parfaite si l'ensemble $H = \bigcup_{s,t} H_{s,t}$ est négligeable. Notre objet est la démonstration du théorème suivant, qui a été établi par BLUMENTHAL et GETOOR dans le cas où le semi-groupe (P_t) satisfait à l'hypothèse de continuité absolue.

THEOREME.- Toute p-fac est indistinguable d'une p-fac parfaite.

Nous nous bornerons dans la démonstration (schématique) à traiter le cas où $p > 0$. La méthode à utiliser pour passer au cas $p = 0$ est indiquée dans

les démonstrations antérieures (livre à paraître de BLUMENTHAL-GETOOR ; exposé de C. DOLEANS au séminaire de l'an dernier)

LEMME.- *Soit A une p-fac ($p > 0$). Il existe une fonction presque-borélienne ϕ, finement continue, bornée, strictement positive partout, telle que la p-fac B définie par*

$$B_t = \int_0^\infty e^{-ps}\, \phi \circ X_s\, dA_s$$

admette un p-potentiel borné (i.e., $E^\bullet[B_\infty]$ est bornée).

Pour la démonstration, voir les références citées plus haut. Le retour de B à A par la formule $A_t = \int_0^t e^{-ps}\, \frac{1}{\phi} \circ X_s\, dB_s$ étant évident, il suffira de montrer que B est indistinguable d'une p-fac parfaite - autrement dit, de traiter le cas où la p-fac A admet un p-potentiel borné.

LEMME.- *Soit A une p-fac admettant un p-potentiel borné f . Posons*

$$f_n = n(f - e^{-p/n} P_{1/n} f)$$

$$A^n_t = \int_0^t e^{-ps} f_n \circ X_s\, ds$$

Alors $\sup_{s \geq 0} |A_s - A^n_s| \to 0$ en norme dans $L^1(P^\mu)$, quelle que soit la loi initiale μ.

Nous admettrons ce lemme, établi dans les références citées. Prouvons le théorème. Désignons par ν l'ultrafiltre de MOKOBODZKI, par K l'ensemble des $\omega \in \Omega$, tels que

$$\sup_{s \geq 0} |A_s(\omega) - A^n_s(\omega)| \text{ ne tende pas vers } 0 \text{ suivant } \nu$$

par L, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$t \mapsto A^n_t(\omega) \text{ ne converge pas uniformément suivant } \nu .$$

D'après le théorème de MOKOBODZKI, K est négligeable ; comme L est contenu dans K, L est négligeable. Posons

$$A'_t(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \in L$$

$$A'_t(\omega) = \lim_\nu A^n_t(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \notin L$$

Si $\omega \notin K$, on a $A_t(\omega) = A'_t(\omega)$ pour tout t, donc les deux processus A et A'

sont indistinguables : en particulier, A' satisfait à a) . Il est clair que A' satisfait à b). D'autre part, si $\omega \notin L$, la relation (identique)

$$A_t^n(\theta_s\omega) = A_{t+s}^n(\omega) - A_s^n(\omega)$$

montre que $\theta_s\omega \notin L$, et par conséquent $A'_t(\theta_s\omega) = \lim_n A_t^n(\theta_s\omega)$ pour tout t ; cela entraîne aussitôt que A' est une p-fac parfaite. Le théorème est établi.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. BLUMENTHAL et R. GETOOR.- Markov processes and potential theory. Academic Press, 1968.

[2] C. DOLEANS.- Fonctionnelles additives parfaites. Séminaire de Probabilités II Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1968.

[3] P.A. MEYER.- Processus de Markov. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag.

* * *