SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS

Fonctionnelles additives parfaites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 34-42

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__34_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1966-67

FONCTIONNELLES ADDITIVES PARFAITES

(par Catherine DOLEANS)

Nous montrons dans cet exposé comment les résultats de Blumenthal et Getoor sur la représentation des fonctions p-excessives régulières et ceux de S. Watanabe sur la structure des fonctionnelles additives, positives, purement discontinues et quasi continues à gauche d'un processus de Hunt permettent de prouver que toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

E est un espace localement compact à base dénombrable et (P_t) un semi-groupe de transition markovien sur E satisfaisant à l'hypothèse (A) de Hunt (on suppose pour simplifier que les noyaux P_t transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes). On suppose de plus qu'il existe une mesure positive θ sur E telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - presque partout soit la fonction identiquement nulle (Hypothèse L). Les notations Ω, (X_t), θ_t, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_t$, $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ seront celles de [3] (processus canoniques).

Théorème : Sous ces hypothèses toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration. - Remarquons tout d'abord que, toute fonctionnelle additive

positive (A_t) étant fortement markovienne, on a pour tout temps d'arrêt T

$$(*)\quad A_{T+s} = A_T + A_s \circ \theta_T \qquad \forall s$$

et

$$(**)\quad A_{(T+s)-} = A_T + A_{s-} \circ \theta_T \qquad \forall s > 0$$

sauf sur un ensemble H_T négligeable pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$. (A_t) se décompose donc en la somme des trois fonctionnelles additives positives $B_t = \sum_{s\leq t} (A_s - A_{s-})\, I_{\{X_s = X_{s-}\}}$, $C_t = \sum_{s\leq t} (A_s - A_{s-})\, I_{\{X_s \neq X_{s-}\}}$ et $D_t = A_t - B_t - C_t$. On est donc ramené à étudier séparément les cas : d'une fonctionnelle purement discontinue naturelle, d'une fonctionnelle purement discontinue quasicontinue à gauche, d'une fonctionnelle continue.

1. ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE, QUASI CONTINUE A GAUCHE.

Si une fonctionnelle additive positive (C_t) est purement discontinue et quasi-continue à gauche, il existe une fonction f borélienne positive sur $E \times E$, nulle sur la diagonale, telle que (C_t) soit indistinguable de la fonctionnelle

$$Sf_t = \sum_{s\leq t} f(X_{s-}, X_s)\, I_{\{X_s \neq X_{s-}\}} \cdot$$

(Ce résultat est dû à S. Watanabe [6] , et a été exposé au théorème 6 de [4]). La fonctionnelle Sf_t étant parfaite le théorème est établi dans ce cas.

2. ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE NATURELLE.

Nous commençons par le cas où la fonctionnelle possède un p-potentiel borné.

Lemme 1. - Soit (B_t) une fonctionnelle additive positive, naturelle, purement discontinue. S'il existe un nombre $p \geq 0$ tel que le p-potentiel $U_B^p = \underset{\sim}{E}^{\bullet} [\int_0^{\infty} e^{-pt} \, d B_t]$ soit borné, alors (B_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration :

1) Soit $\epsilon > 0$ et posons $T^{\epsilon} = \inf (t ; B_t - B_{t-} > \epsilon)$. D'après [2], T^{ϵ} est un temps d'arrêt accessible (ce qui entraîne que pour chaque mesure $\underset{\sim}{P}^x$ il existe une suite S_k^x de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_k S_k^x = T^{\epsilon}$, $S_k^x < T^{\epsilon}$ $\forall k$) et le processus $B_t - \Delta B_{T^{\epsilon}} I_{\{t \leq T^{\epsilon}\}}$ est encore naturel. En itérant ce procédé et en faisant varier ϵ on voit que l'ensemble des points de discontinuité de B_t est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles T_n.

2) Considérons maintenant la fonction $f = U_B^p$; f étant p-excessive on a $(f \circ X_t)_-$ [1] $\geq f \circ X_{t-}$ p. s. , et une construction analogue à celle faite pour (B_t) montre que $\{(t, \omega) ; (f \circ X_t)_- \neq f \circ X_{t-}\}$ est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles S_n.

3) Soit maintenant T un temps d'arrêt accessible ; si $x \in E$, T_n^x désigne une suite de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_n T_n^x = T$, $T_n^x < T$ $\forall n$; le processus croissant naturel associé à la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$ est $C_t = \int_0^{t]} e^{-ps} \, d B_s$ et l'on a si $m \geq n$:

$$\underset{\sim}{E}^x [- \xi_T + \xi_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}]$$

ce qui donne en passant à la limite en m puis en n (on remarquera que $\underline{\underline{F}}_T = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n^x}$) :

$$\underset{\sim}{E}^x [-\xi_T + \xi_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T]$$

ou encore

$$\xi_T - \xi_{T-} = C_{T-} - C_T \quad \underset{\sim}{P}^x\text{-p. s.}$$

---

(1) $(f \circ X_t)_- = \lim_{\substack{s<t \\ s \to t}} f \circ X_s$; cette limite existe sauf sur un ensemble négligeable, ne dépendant pas de t.

4) La fonctionnelle p-additive (C_t) $(C_{t+s} = C_t + e^{-pt} C_s \circ \theta_t$ p. s.), est donc indistinguable de la fonctionnelle p-additive parfaite $C'_t = \sum_{s \le t} e^{-ps} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}) I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ et la fonctionnelle $B_t = \int_o^{t]} e^{ps} d C_s$ est indistinguable de la fonctionnelle $\sum_{s \le t} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}] I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ qui est parfaite.

c. q. f. d.

Passons maintenant au cas général ; considérons une fonctionnelle additive (B_t) positive naturelle et purement discontinue ; le temps d'arrêt $T^k = \inf \{t ; B_t - B_{t-} \in] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \}$ est un temps d'arrêt terminal sans points permanents. Les relations (*) et (**) ainsi que la proposition 2 de [4] montrent que, si T_n^k sont les itérés de T^k, la fonctionnelle $B_t^k = \sum_{t \ge T_n^k} \Delta B_{T_n^k}$ est une fonctionnelle additive positive dont les sauts sont compris entre $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$. La fonctionnelle (B_t) étant une somme dénombrable de telles fonctionnelles, il suffit de montrer que chacune des fonctionnelles B_t^k est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite. Mais d'après la proposition 3 de [4], B_t^k est somme d'une suite de fonctionnelles additives positives naturelles purement discontinues ayant un p-potentiel borné. Celles - ci sont indistinguables d'une fonctionnelle parfaite d'après le lemme 1, il en est donc de même de leur somme (B_t^k), et enfin de (B_t).

c. q. f. d.

3. ÉTUDE DES FONCTIONNELLES CONTINUES

La "perfection" de la fonctionnelle additive positive et continue (D_t) va résulter des lemmes 2, 3, 4. Nous rappelons tout d'abord la définition suivante:

Définition : Une fonction p-excessive f est dite uniformément p-excessive si elle est bornée et si les fonctions $f_n = n \int_o^{1/n} e^{-ps} P_s f \, ds$ tendent uniformément (en croissant) vers la fonction f lorsque n tend vers l'infini.

Les lemmes 2 et 3 suivants sont dûs à Blumenthal et Getoor ([1]).

Lemme 2. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue ; si pour un $p \geq 0$, le p-potentiel f de (A_t) est une fonction uniformément p-excessive, la fonctionnelle (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration : Pour montrer que (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite nous montrerons que la fonctionnelle $B_t = \int_o^t e^{ps}\, d A_s$ est indistinguable d'une fonctionnelle p-additive parfaite (si ξ_t désigne la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$, B_t est, pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^\mu$, le processus croissant continu associé à la surmartingale ξ_t) .

Posons pour tout n entier :

$$f_n = n \int_o^{1/n} e^{-ps} P_s f \, ds$$

$$g_n = n(f - e^{-p/n} P_{1/n} f) \quad (\text{on a } f_n = U^p g_n),$$

$$\xi_t^n = e^{-pt} f_n \circ X_t$$

$$B_t^n = \int_o^t e^{-ps} g_n \circ X_s \, ds \quad (\text{on a } f_n = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n])$$

$T_n^\epsilon = \inf \{ t ; \xi_t - \xi_t^n > \epsilon \}$ (T_n^ϵ est un temps d'arrêt et l'on a $T_n^\epsilon = \infty$ pour n assez grand).

Pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^\mu$, (B_t^n) est le processus croissant continu associé au potentiel ξ_t^n et l'on a, si $c = \sup_x f(x)$:

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n)^2] = 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^\infty \xi_t^n \, d B_t^n] \leq 2c \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n] \leq 2c^2 < +\infty$$

et

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] = 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^\infty (\xi_t^n - \xi_t^m) \, d (B_t^n - B_t^m)]$$

(on applique T. 15 chap. VII de [5] d'abord au processus (B_t^n), puis au processus $B_t^n - B_t^m$ lorsqu'on est sûr que les quantités $E^{\cdot} [(B_\infty^n)^2]$ sont finies). Si m et n sont supérieurs à q on a donc :

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] \leq 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^{T_q^\epsilon} | \xi_t^n - \xi_t^m | d(B_t^n + B_t^m) + 4c \int_{T_q^\epsilon}^{+\infty} d (B_t^n + B_t^m)]$$

$$\leq 2\epsilon \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[B_{\infty}^{n} + B_{\infty}^{m} \right] + 8\, c\, P^{p}_{T_q^{\epsilon}} f$$

$$\leq 4\, \epsilon\, c + 8\, c\, P^{p}_{T_q^{\epsilon}} f$$

(On a utilisé la relation $P^{p}_{T} f_n = \underset{\sim}{E}^{\cdot}\left[\int_T^{+\infty} d\, B_s^n \right]$).

Comme les temps d'arrêts T_q^{ϵ} sont identiquement égaux à $+\infty$ lorsque q est assez grand, les fonctions $x \to P^{p}_{T_q^{\epsilon}} f(x)$ tendent uniformément vers 0 avec $\frac{1}{q}$ et l'on peut construire une sous-suite n_i telle que l'on ait pour tout $x \in E$

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^{x}\left[(B_{\infty}^{n_i} - B_{\infty}^{n_{i+1}})^2 \right]} \leq 2^{-i}.$$

L'inégalité de Doob appliquée aux martingales $\xi_t^{n_i} + B_t^{n_i}$ de variables aléatoires terminales $B_{\infty}^{n_i}$ donne alors :

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^{x}\left[\sup_s \left| \xi_s^{n_i} + B_s^{n_i} - \xi_s^{n_{i+1}} - B_s^{n_{i+1}} \right| \right]} \leq \alpha\, 2^{-i} \quad (\alpha = \text{constante}) ;$$

et les fonctions $s \mapsto \xi_s^{n_i} + B_s^{n_i}$ forment $\underset{\sim}{P}^{x}$ - p. s. une suite de Cauchy pour la convergence uniforme. Les fonctions $s \mapsto \xi_s^{n_i}$ étant uniformément convergentes vers ξ_s (f est uniformément p-excessive), l'ensemble $\Lambda = \{ \omega ;\ B_s^{n}(\omega)$ ne converge pas uniformément sur $(0, +\infty)$ quand $i \to +\infty \}$ est de $\underset{\sim}{P}^{x}$- mesure nulle pour tout $x \in E$. D'autre part si $\complement\Lambda$ contient ω, il contient $\theta_s \omega$ (car $e^{-ps} B_t^{n_i}(\theta_s \omega) = B_{s+t}^{n_i}(\omega) - B_s^{n_i}(\omega)$).

Posons :

$$B'_s(\omega) = \begin{cases} \lim_i B_s^{n_i}(\omega) & \text{sur } \complement\Lambda \\ 0 & \text{sur } \Lambda ; \end{cases}$$

(B'_s) est une fonctionnelle p-additive continue parfaite ; on vérifie facilement que pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{x}$ $B'_t + \xi_t$ est une martingale ; d'après T 21 chap. VII de [5] , (B'_t) est donc $\underset{\sim}{P}^{x}$-p. s. indistinguable de (B_t) et les fonctionnelles (B_t) et (B'_t) sont indistinguables .

c. q. f. d.

Lemme 3. - Soit A une fonctionnelle additive continue positive, il existe une fonction φ partout > 0 telle que la fonctionnelle additive continue $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$ soit de 1-potentiel borné.

Démonstration : Soit $\varphi = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t} dt \right]$ et $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$.

Pour tout temps d'arrêt T on a :

$$\varphi \circ X_T = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t \circ \theta_T} dt \,|\, \underline{F}_T \right] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[e^{T} e^{A_T} \int_T^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds \,|\, \underline{F}_T \right]$$

et donc en utilisant T. 15 chap VII de [5] :

$$U^1_{A'} = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty e^{-u} \varphi \circ X_u \, d A_u \right] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty e^{A_u} d A_u \int_u^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds \right]$$

$$= \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty ds \, e^{-s} e^{-A_s} \int_0^s e^{A_u} d A_u \right] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} \left[\int_0^\infty e^{-s} (1 - e^{-A_s}) ds \right] \leq 1$$

c. q. f. d.

Il nous suffira donc de traiter le cas où A a un 1-potentiel borné, cas qui résulte du lemme suivant et du lemme 2.

Lemme 4. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue dont le p-potentiel f est borné, il existe alors des fonctionnelles additives continues positives A^n_t telles que les fonctions $f_n = U^p_{A_n}$ soient uniformément p-excessives et que $A_t = \sum_n A^n_t$.

Démonstration : Choisissons une mesure θ bornée telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - p.p. soit la fonction zéro, et considérons le noyau W défini par :

$$W g^x = \underset{\sim}{E}^x \left[\int_0^\infty e^{-pt} g \circ X_t \, d A_t \right]$$

La mesure $\eta = \theta W$ est une mesure bornée ($< \eta , 1 > = < \theta, W 1 > = < \theta, f > < + \infty$) et les fonctions $e^{-pt} P_t f$ tendent vers la fonction f lorsque $t \to 0$; il existe

donc, d'après le théorème d'Egorov, une suite croissante de compacts K_n tels que $e^{-pt} P_t f$ tende uniformément vers f sur K_n et que $\eta(E \setminus \bigcup_n K_n) = 0$

Posons $g_n = W(I_{K_n})$ et $\Gamma = E \setminus \bigcup_n K_n$; la fonction $W I_\Gamma$ étant p-excessive, et nulle θ-p.p. est identiquement nulle et les fonctions g_n et $f_n = g_n - g_{n-1}$ sont p-excessives et bornées. De plus pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $h > 0$ tel que l'on ait ; si $t < h$.

$$e^{-pt} P_t f + \epsilon \geq f \qquad \text{sur } K_n$$

on a donc sur K_n

$$W(I_{K_n}) + e^{-pt} W(1-I_{K_n}) \leq f \leq e^{-pt} P_t f + \epsilon = e^{-pt} P_t W I_{K_n} + e^{-pt} P_t (W(1-I_{K_n})) + \epsilon$$

c. à. d.

$$g_n = W I_{K_n} \leq e^{-pt} P_t g_n + \epsilon \qquad \text{sur } K_n .$$

D'après le principe du maximum cette inégalité a lieu partout sur E et les fonctions g_n (et donc les fonctions f_n) sont uniformément p-excessives. Pour chaque fonction f_n on peut construire une fonctionnelle p-additive continue parfaite A_t^n telle que $f_n = E_{ww}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-pt} d A_t^n]$ (cette construction est contenue dans la démonstration du lemme 2). La fonctionnelle additive naturelle $A_t' = \sum_n A_t^n$ a pour p-potentiel la fonction $\sum_n f_n = f - W I_\Gamma = f$, elle est donc indistinguable de la fonctionnelle additive continue A_t (voir l'argument utilisé à la fin du lemme 2).

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B LUMENTHAL et GETOOR, livre à paraître

[2] C. DOLÉANS, Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables, C.R.A.S. (voir aussi dans ce fascicule le "Guide des processus").

[3] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques III, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[4] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques IV, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, Hermann Paris 1966.

[6] S. WATANABE, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. J. of math. (1964) p. 53-70.

-=-=-=-=-