SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Les résolvantes fortement fellériennes d'après Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 171-174

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__171_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

LES RÉSOLVANTES FORTEMENT FELLÉRIENNES D'APRÈS MOKOBODZKI

INTRODUCTION.- MOKOBODZKI a remarqué récemment qu'un théorème de GROTHENDIECK*, suivant lequel le produit de deux opérateurs faiblement compacts d'un espace $\underline{\underline{C}}(K)$ est fortement compact, entraîne que le produit de deux noyaux fortement fellériens est " fortement fellérien au sens strict" . On en déduit que les noyaux d'une résolvante ou d'un semi-groupe fortement fellérien sont fortement fellériens au sens strict, ce qui permet de simplifier beaucoup de démonstrations. MOKOBODZKI en déduit d'autre part d'importantes conséquences pour les noyaux " mesures harmoniques" en théorie du potentiel.

Nous allons donner ici une démonstration de ces propriétés, indépendante du théorème de GROTHENDIECK cité plus haut - et moins générale à certains égards, car nous allons utiliser la positivité des noyaux. Nous commencerons par traiter le cas métrisable, qui est de beaucoup le plus intéressant en pratique, et nous nous bornerons à quelques indications sur le cas non métrisable.

NOTATIONS.- Si E est un espace séparé, nous noterons $\underline{\underline{C}}(E)$ l'espace des fonctions réelles continues bornées sur E, $\underline{\underline{B}}(E)$ l'espace des fonctions réelles boréliennes bornées sur E ; ces deux espaces seront munis de la norme de la convergence uniforme. Nous noterons $\underline{\underline{M}}(E)$ l'espace des mesures (abstraites !) bornées, sur E muni de sa tribu borélienne.

Soient E et F deux espaces séparés, V un noyau sousmarkovien de E dans F (le mot noyau est pris au sens abstrait). On sait qu'il est intéressant de définir diverses "propriétés de FELLER" pour V :

Propriété F_1.- L'application $x \longmapsto \varepsilon_x V$ de E dans $\underline{\underline{M}}(F)$ est continue pour la topologie étroite sur $\underline{\underline{M}}(V)$. Autrement dit, $f \in \underline{\underline{C}}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{\underline{C}}(E)$.

Propriété F_2.- L'application $x \longmapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la topologie faible $\sigma(\underline{\underline{M}}(F), \underline{\underline{B}}(F))$. Autrement dit, $f \in \underline{\underline{B}}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{\underline{C}}(E)$.

Propriété F_3.- $x \longmapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la norme des mesures.

---

* GROTHENDIECK : sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\underline{\underline{C}}(K)$. Canadian J.Math. 5, 1953. Voir surtout DUNFORD-SCHWARTZ , Linear Operators I, p.493-494.

Ces trois propriétés s'énoncent habituellement : V est fellérien, V est fortement fellérien, V est fortement fellérien au sens strict. Cette terminologie est lourde, et nous dirons simplement $V \in F_i$, i=1,2,3.

Voici le théorème de MOKOBODZKI

THÉORÈME 1.- Soient E,F,G trois espaces métriques séparables , V un noyau sousmarkovien de E dans F, W un noyau sousmarkovien de F dans G. Supposons que l'on ait $V \in F_2$, $W \in F_2$; alors on a $VW \in F_3$.

La démonstration résulte de deux lemmes, intéressants par eux mêmes :

LEMME 1.- Soit (g_n) une suite d'éléments de la boule unité B_1 de $\underline{\underline{B}}(G)$. Il existe une suite (g'_n) extraite de (g_n), et une fonction $g \in B_1$, telles que Wg'_n converge simplement vers Wg.

DÉMONSTRATION.- Soit (y_m) une suite dense dans F , et soit $\lambda = \sum_m 2^{-m} \varepsilon_{y_m} W$. Toutes les mesures $\varepsilon_y W$ $(y \in F)$ sont absolument continues par rapport à la mesure positive bornée λ : en effet, soit f une fonction positive bornée λ-négligeable ; la fonction continue Wf est nulle aux points y_n, et donc partout. Extrayons alors de la suite (g_n) une suite (g'_n) , telle que les g'_n convergent vers une fonction borélienne $g \in B_1$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\lambda), L^1(\lambda))$, ce qui est possible du fait que $L^\infty(\lambda)$ est le dual de l'espace de Banach séparable $L^1(\lambda)$. Les mesures $\varepsilon_y W$ admettant des densités par rapport à λ, qui appartiennent à $L^1(\lambda)$; on a $\langle \varepsilon_y W, g \rangle = \lim_n \langle \varepsilon_y W, g'_n \rangle$, et le lemme est établi.

LEMME 2.- Soit (f_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{B}}(F)$ qui converge simplement, en restant bornée, vers une fonction $f \in B(F)$. Alors Vf_n converge uniformément vers Vf sur tout compact de E.

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où f=0. Posons $h_n = \sup_{m \geq n} |f_m|$; comme $|Vf_n| \leq Vh_n$, il suffit de montrer que $Vh_n \to 0$ uniformément. Mais $h_n \to 0$ en décroissant, donc $Vh_n \to 0$ en décroissant ; comme $Vh_n \in \underline{\underline{C}}(E)$ d'après F_2, le lemme de DINI donne le résultat cherché.

Prouvons le théorème 1. Désignons par B_1 la boule unité de $\underline{\underline{B}}(G)$, par U le noyau VW , par K un compact de E, et par C_1 l'ensemble des restrictions à K des fonctions Uf $(f \in B_1)$; C_1 est une partie de la boule unité de $\underline{\underline{C}}(K)$, et les lemmes 1 et 2 combinés montrent que de toute suite

(h_n) d'éléments de C_1, on peut extraire une suite qui converge uniformément sur K vers un élément de C_1. Par conséquent, d'après le théorème d'ASCOLI , C_1 est une partie équicontinue de $\underline{\underline{C}}(K)$. Autrement dit, d désignant la distance sur E

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0 \ : \ x\in K,\ y\in K,\ d(x,y)\leqq \eta \Longrightarrow \sup_{f\in B_1} |Uf^x - Uf^y| \leqq \varepsilon$$

Ceci équivaut à $\|\varepsilon_x U - \varepsilon_y U\| \leqq \varepsilon$. Pour obtenir l'énoncé, il suffit maintenant de choisir pour K l'ensemble des points d'une suite convergente.

Voici une application du théorème 1 (il est sans doute inutile de détailler l'énoncé analogue, relatif à un semi-groupe sousmarkovien).

THÉORÈME 2.- Soit (V_p) une résolvante sousmarkovienne sur un espace métrique séparable E ; si les noyaux V_p possèdent la propriété F_2, ils possèdent aussi la propriété F_3.

DÉMONSTRATION.- Soient $p>0$, $q>p$; nous avons $V_p = (q-p)V_qV_p + V_q$. L'application $x \longmapsto \varepsilon_x V_q V_p$ est continue pour la topologie de la norme des mesures, d'après le th.1 et la définition de la propriété F_3 ; l'application $x \longmapsto \varepsilon_x V_q$ converge uniformément vers 0 sur E lorsque $q\to\infty$, car $\| \varepsilon_x V_q \| \leqq 1/q$; d'où aussitôt l'énoncé.

LE CAS NON MÉTRISABLE

Nous recommandons vivement d'omettre ce qui suit. Nous allons traiter le cas où E,F,G sont trois compacts non nécessairement métrisables.

Montrons que le lemme 1 reste vrai dans ces conditions . A tout ensemble borélien A de G, associons la fonction $W(I_A)\in \underline{\underline{C}}(F)$; pour toute mesure bornée μ sur F (i.e. tout élément du dual de $\underline{\underline{C}}(F)$), l'application $A \longmapsto \langle \mu, W(I_A)\rangle$ est une mesure réelle sur F . L'application $A \longmapsto W(I_A)$ est donc une mesure vectorielle à valeurs dans $\underline{\underline{C}}(F)$, au sens de DUNFORD-SCHWARTZ , loc.cit. p. 318, et les théorèmes classiques sur les mesures vectorielles (D-S , lemme 5, p.321) entraînent l'existence d'une mesure positive bornée λ sur G, telle que $\lambda(A)=0 \Longrightarrow W(I_A)=0$ - autrement dit, que toutes les mesures $\varepsilon_y W$ soient absolument continues par rapport à λ.

Soit (g_n) une suite d'éléments de B_1 , et soit $\underline{\underline{T}}$ la tribu engendrée par les fonctions g_n : $\underline{\underline{T}}$ est une tribu séparable, et l'espace $L^1(\underline{\underline{T}},\lambda)$ est donc séparable. Extrayons donc de la suite (g_n) une suite (g'_n) qui converge faiblement vers une fonction $\underline{\underline{T}}$-mesurable g, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\underline{\underline{T}},\lambda), L^1(\underline{\underline{T}},\lambda))$; mais les mesures $\varepsilon_y W$ ont des densités par rapport à λ sur la tribu $\underline{\underline{T}}$, et il en résulte comme plus haut que Wg'_n converge vers Wg' simplement.

Il n'y a rien à modifier au lemme 1, et presque rien à changer à la démonstration du théorème - seulement le remplacement d'une distance d par un écart d compatible avec la topologie de E.