SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une majoration du processus croissant naturel associé à une surmartingale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 166-170

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__166_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

UNE MAJORATION DU PROCESSUS CROISSANT NATUREL ASSOCIÉ À UNE SURMARTINGALE

(P.A.Meyer)

Tous les processus considérés ci-dessous sont continus à droite, et adaptés à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, croissante et continue à droite. L'espace probabilisé sous-jacent est supposé complet, et la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles négligeables.

Si $H=(H_t)$ est un processus, nous désignerons par H^* la variable aléatoire $\sup_t |H_t|$. Notre objet principal est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1.- Soit $X=(X_t)$ un potentiel de la classe (D), et soit $A=(A_t)$ le processus croissant intégrable qui engendre X. Si p est un nombre >1 (fini) , il existe deux constantes C et C' telles que l'on ait

$$0<C,C'<\infty \qquad C N_p(X^*) \leqq N_p(A_\infty) \leqq C' N_p(X^*)$$

N_p désignant la norme dans L^p.

Nous déduirons ensuite du théorème 1 une partie d'un résultat récent de BURKHOLDER sur les martingales.

Voici encore quelques notations : k sera l'unique entier tel que $k<p\leqq k+1$ (on a donc $k\geqq 1$) ; C sera une constante positive, dont la valeur pourra varier d'une formule à l'autre. Enfin, la notation $\underset{\sim}{E}[.|\underline{\underline{F}}_t]$ pour l'opérateur d'espérance conditionnelle sera abrégée en $\underset{\sim}{E}_t[.]$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

1. La première des deux inégalités du théorème 1 est bien connue. En effet, on a $X^* \leqq \sup_t X_t+A_t$, et $N_p[\sup_t(X_t+A_t)] \leqq qN_p(A_\infty)$, q désignant l'exposant conjugué de p , en vertu d'une célèbre inégalité due à DOOB. Ainsi, il suffira de prouver la seconde inégalité.

Il suffira pour cela de traiter le cas où le processus A est continu et borné. En effet, supposons le théorème établi dans ces conditions. Soit A un processus croissant continu, mais non nécessairement borné, soit A^n le processus croissant $A\wedge n$, et soit X^n le potentiel engendré par A^n ; on a $N_p(A_\infty\wedge n) \leqq C' N_p((X^n)^*) \leqq C' N_p(X^*)$, d'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

Ensuite, désignons par A un processus croissant intégrable naturel, par X le potentiel qu'il engendre, par A^n le " laplacien approché" de

X d'ordre $\frac{1}{n}$ ([2], chap.VII, th.28), par X^n le potentiel engendré par A^n ; comme A^n est continu, on a $N_p(A^n_\infty) \leqq C'N_p((X^n)^\times) \leqq C'N_p(X^\times)$. Si ce dernier nombre est $+\infty$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, les variables aléatoires A^n_∞ forment un ensemble borné (donc faiblement compact) dans L^p ; comme elles convergent vers A_∞ faiblement dans L^1, elles convergent alors vers A_∞ faiblement dans L^p, et on a $N_p(A_\infty) \leqq \lim_n \inf N_p(A^n_\infty)$, d'où le résultat.

Nous supposerons donc, dans toute la suite, que A est borné et continu

2. Posons, j désignant un nombre $\geqq 1$

$$X^{(j)}_t = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j]$$

On a si $s<t$ $\underset{\sim}{E}_s[X^{(j)}_s] = \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_t)^j] \leqq \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_s)^j] = X^{(j)}_s$. Ce processus est donc une surmartingale (bornée), et on vérifie aussitôt que $\underset{\sim}{E}[X^{(j)}_\cdot]$ est une fonction continue à droite ; il existe donc une version continue à droite de cette surmartingale - c'est celle-ci que nous désignerons dans la suite par la notation $(X^{(j)}_t)$. Il s'agit évidemment d'un potentiel de la classe (D) (borné). Le processus croissant naturel qui engendre $(X^{(j)}_t)$ sera noté $(A^{(j)}_t)$. Nous écrirons $X^\times_{(j)}$ au lieu de $(X^{(j)})^\times$.

LEMME 1.- On a $dA^{(j)}_s = jX^{(j-1)}_s\, dA_s$, et donc $A^{(j)}_\infty \leqq X^\times_{(j-1)} A_\infty$.

Soit d'abord T un temps d'arrêt étagé, et soit $B \in \underset{\sim}{F}_T$. On a

$$\int_B X^{(j)}_T d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} X^{(j)}_t d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} (A_\infty - A_t)^j d\underset{\sim}{P} = \int_B (A_\infty - A_T)^j d\underset{\sim}{P}$$

On étend aussitôt cette relation à un temps d'arrêt T quelconque, au moyen d'une approximation par des temps d'arrêt étagés. Les processus $(X^{(j)}_t)$ et $((A_\infty - A_t)^j)$ satisfont donc aux hypothèses du th. 15, chap.VII de [2]. Par conséquent , en remplaçant j par j-1

$$\underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty jX^{(j-1)}_s dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty j(A_\infty - A_s)^{j-1} dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j] = X^{(j)}_t$$

(on a utilisé la continuité de A). D'où le résultat.

LEMME 2.- On a $\underset{k}{N_p}[X^\times_{(k)}] \leqq C[N_p(A_\infty)]^{k-1} N_p(X^\times)$.

Il suffit évidemment de démontrer la formule suivante, pour $j<p$

$$\underset{j}{N_p}[X^\times_{(j)}] \leqq CN_p(A_\infty)\underset{j-1}{N_p}(X^\times_{(j-1)})$$

Utilisons successivement l'inégalité de DOOB rappelée plus haut, le lemme 1, l'inégalité de HÖLDER pour les exposants conjugués j et j/(j-1). Il vient

$$N_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j)}) \leqq CN_{\frac{p}{j}}(A^{(j)}_{\infty}) \leqq CN_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j-1)}A_{\infty}) = C\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}}.A^{\frac{p}{j}}_{\infty}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$\leqq C\{ N_j(A^j_{\infty})N_{\frac{j}{j-1}}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= C\{(\underset{\sim}{E}[A^p_{\infty}])^{\frac{1}{j}}.(\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j-1}}])^{\frac{j-1}{j}}\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{j-1}}(X^{\times}_{(j-1)}) \cdot \qquad \text{CQFD}$$

3. Passons à la démonstration du théorème proprement dit . Calculons $(N_p(A_{\infty}))^p$; cela vaut

$$\underset{\sim}{E}[A^p_{\infty}] = \underset{\sim}{E}[-\int_0^{\infty} d((A_{\infty}-A_t)^p)] = \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(A_{\infty}-A_t)^{p-1}dA_t]$$

$$= \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty} X_t^{(p-1)}dA_t] \leqq \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(X_t^{(k)})^{\frac{p-1}{k}}dA_t]$$

En effet, posons $V=(A_{\infty}-A_t)^k$, $\eta = (p-1)/k$; comme on a $0<\eta<1$, la fonction $x \mapsto x^{\eta}$ est concave, et on a

$$X_t^{(p-1)} = \underset{\sim t}{E}[\ V^{\eta}\ ] \leqq (\underset{\sim t}{E}[V])^{\eta} = (X_t^{(k)})^{\eta} .$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de HÖLDER, puis le lemme 2

$$(N_p(A_{\infty}))^p \leqq C\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}}.A_{\infty}] \leqq CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{p-1}}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}}]$$

$$= CN_p(A_{\infty})\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p}{k}}]\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= CN_p(A_{\infty})\{N_{\frac{p}{k}}(X^{\times}_{(k)})\}^{\frac{p-1}{k}} \leqq CN_p(A_{\infty})\ \{N_p(X^{\times})\}^{\frac{p-1}{k}}\{N_p(A_{\infty})\}^{\frac{(k-1)(p-1)}{k}}$$

ou enfin

$$[N_p(A_{\infty})]^{\frac{p-1}{k}} \leqq C[N_p(X^{\times})]^{\frac{p-1}{k}}$$

d'où le théorème suit aussitôt.

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES MARTINGALES

4. Soit (X_n) une surmartingale positive à temps discret ; en la considérant comme restriction d'une surmartingale continue, constante sur chaque intervalle $[n,n+1[$, et en appliquant le résultat précédent à la partie potentiel de celle-ci, on obtient la majoration suivante :

Soit S la variable aléatoire positive

$$(X_0-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) + (X_1-\underset{\sim}{E}[X_2|\underline{\underline{F}}_1])+\ldots+(X_i-\underset{\sim}{E}[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i])+\ldots$$

Il existe une constante C_p telle que l'on ait $N_p(S) \leqq C_p N_p(X^*)$.

En particulier, considérons des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ qui forment une surmartingale positive à temps fini ; nous pouvons alors appliquer le résultat précédent à la surmartingale obtenue en posant $X_i=0$ pour $i>n$. La variable aléatoire S est alors égale à

$$X_0 +(X_1-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) +\ldots+(X_n-\underset{\sim}{E}[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}])$$

5. Considérons maintenant une martingale continue à droite , à temps continu, (M_t), et supposons que l'on ait $M_t \in L^2$ pour tout t. Soit une subdivision $0<t_1<t_2\ldots<t_n=t$, et considérons la surmartingale positive discrète (à temps fini) $X_0,\ldots,X_n$ définie de la manière suivante (par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_0,\underline{\underline{F}}_{t_1},\ldots,\underline{\underline{F}}_{t_n}$)

$$X_0 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_0]$$
$$X_1 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_1}] - M_{t_1}^2 + (M_{t_1}-M_0)^2$$
$$X_2 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_2}] - M_{t_2}^2 + (M_{t_2}-M_{t_1})^2$$
$$\ldots\ldots$$
$$X_n = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_n}] - M_{t_n}^2 + (M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2 = (M_t-M_{t_{n-1}})^2$$

La positivité résulte de l'inégalité $\underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}]-(\underset{\sim}{E}[M_t|\underline{\underline{F}}_{t_i}])^2 \geqq 0$ (convexité de $x \mapsto x^2$), et le fait que X est une surmartingale résulte de la relation

$$X_i-E[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i] = (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2 \quad \text{pour } 0<i\leqq n \quad (M_0^2 \text{ pour } i=0).$$

Cela donne la valeur de S : $M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\ldots+(M_t-M_{t_{n-1}})^2$. D'autre part, on a $X^* \leqq \sup_s \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_s] + 4 \sup_s M_s^2$. En utilisant l'inégalité de DOOB rappelée au début, on trouve que $N_p(X^*) \leqq C N_{2p}(M_t)$, et finalement on a trouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- Soit $1<p<\infty$, et soit (M_s) une martingale continue à droite. On a pour toute subdivision $0<t_1 \ldots <t_n=t$ l'inégalité

$$N_p[M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\ldots+(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2] \leqq CN_{2p}(M_t) \quad (2)$$

où C ne dépend que de p.

En particulier, faisons tendre le pas des subdivisions vers 0 ; la somme au premier membre converge dans L^1 vers $[M,M]_t$ (voir [3]). Le théorème 2 tel qu'il est énoncé équivaut au résultat de BURKHOLDER dont il a été question plus haut, et la relation

$$N_p([M,M]_t) \leqq CN_{2p}(M_t)$$

qui s'en déduit par passage à la limite (grâce au lemme de FATOU) est un résultat dû à P.W.MILLAR , communiqué dans une correspondance privée, et que nous déduisons ainsi du théorème 1.(2)

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. BURKHOLDER . Martingale transforms. Ann.Math.Stat. 37, 1966, 1494-1505

[2] P.A.MEYER . Probabilités et Potentiels , 1966.

[3] P.A. MEYER . Intégrales stochastiques I, Séminaire de Probabilités de l'Université de Strasbourg, 1967.

(2) Les résultats de BURKHOLDER et de MILLAR valent aussi pour p compris entre $\frac{1}{2}$ (exclu) et 1, et c'est là évidemment le cas le plus intéressant, puisqu'il concerne des martingales qui ne sont pas de carré intégrable. Bien que le théorème 1 soit trivial pour ces valeurs de p, on ne peut plus en déduire le théorème 2.