SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Séries de distributions aléatoires indépendantes (exposé 2)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 65-71

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__65_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités — Février 1967

SÉRIES DE DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

(par X. Fernique)

Exposé 2

Le but de cet exposé est la démonstration des deux théorèmes suivants qui généralisent mot pour mot des théorèmes classiques sur les séries de variables aléatoires numériques indépendantes :

Théorème 1 : Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes telle que $\prod_n L_{X_n}$ converge simplement vers une limite continue ; alors la série $\sum_n X_n$ converge presque sûrement.

Théorème 2 : Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes telle que $\prod_n |L_{X_n}|$ converge simplement vers une limite continue ; il existe alors une suite (x_n) de distributions telle que la série $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement.

§ 1 - LEMMES PRELIMINAIRES -

Lemme 1 : Soit f une fonction de type positif continue sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 à l'origine ; dans ces conditions, on a pour tout nombre positif a

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{Re}\, f(x) \leq 3\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{a}\int_0^a (1 - \mathrm{Re}\, f(t))\, dt$

Démonstration : On démontre d'abord l'inégalité quand $f(x) = \exp(ivx)$ par des calculs bêtes ; on en déduit le cas général en intégrant par rapport à une mesure de probabilité $\mu(dv)$.

Lemme 2 : Soient f, f_n des fonctions de type positif, réelles et positives, continues sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 1 à l'origine telles que $f = \prod_n f_n$; on suppose donnés deux nombres $c \in]\,0, \frac{1}{3}\,]$ et $d > 0$ tels que pour tout nombre réel x, on ait :

$$1 - f(x) \leqslant c\,(1 + d\,x^2)\,; \tag{2}$$

dans ces conditions, pour tout nombre réel x, on a aussi

$$\sum_n (\,1 - f_n(x)) \leqslant 12c(\,1 + dx^2\,)\,. \tag{3}$$

Démonstration : Les hypothèses $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ et $f = \prod_n f_n$ montrent que pour tout nombre réel t, on a :

$$\sum_n (1 - f_n(t)) \leqslant \ln \frac{1}{f(t)}\,;$$

en utilisant le lemme 1 appliqué aux fonctions f_n avec $a = \frac{1}{\sqrt{d}}$, on obtient :

$$\sum_n (1 - f_n(x)) \leqslant k\,(1 + d\,x^2)\,\sqrt{d}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{d}}} \ln \frac{1}{f(t)}\,dt.$$

L'hypothèse (2) montre que sur l'intervalle d'intégration, $\ln \frac{1}{f(t)}$ est majoré par $\ln \frac{1}{1 - 2c}$ donc par (3 ln 3) c puisque c est inférieur à $\frac{1}{3}$; on en déduit le résultat.

Corollaire : Soient L, L_n des fonctions de type positif réelles et positives, continues sur $\mathcal{D}$ prenant la valeur 1 à l'origine telles que $L = \prod_n L_n$; pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe alors une f. q. Q sur $\mathcal{D}$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \sum_n (1 - L_n(\varphi)) \leqslant \varepsilon\,(1 + Q(\varphi, \varphi))\,. \tag{4}$$

Démonstration : On peut supposer $\varepsilon < 4$ de sorte que $\frac{\varepsilon}{12}$ soit inférieur à $\frac{1}{3}$. Il existe alors (exposé 1, (1a)) une f.q. Q sur $\mathcal{D}$ telle que :

$$Q(\varphi,\varphi) \leqslant \frac{12}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad 1 - L(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \ ;$$

On a alors :

$$1 - L(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \left(1 + Q(\varphi,\varphi) \right) .$$

C'est en effet évident si $Q(\varphi,\varphi)$ est inférieur ou égal à $\frac{12}{\varepsilon}$, et dans l'autre cas le second membre est supérieur ou égal à 1, lui-même supérieur ou égal au premier.

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, les fonctions $L(x\varphi)$, $L_n(x\varphi)$ vérifient alors les hypothèses du lemme 2 avec $c = \frac{\varepsilon}{12}$ et $d = Q(\varphi,\varphi)$; on en déduit le résultat.

Lemme 3 : (Symétrisation des distributions aléatoires) :

Soient Q et R deux f. q. sur $\mathcal{D}$, Q étant subordonnée à R ; pour toute distribution aléatoire X, il existe une distribution x telle que :

$$(5) \qquad \forall h \geqslant 0 \ , \ \mathbb{P}\left\{ X - x \not\in h K_R \right\} \leqslant 2\,\mathbb{P}\left\{ X^s \not\in h K_Q \right\}$$

(les notations sont celles de l'exposé 1).

Démonstration : Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ dont l'image dans $\hat{E}_R$ soit orthonormale et totale ; pour tout entier $n > 0$, les inégalités classiques de symétrisation ([1] p. 147) montrent qu'on a :

$$\forall h \geqslant 0, \mathbb{P}\left\{ \exists\, m \leqslant n \mid \left[\langle X, \varphi_m \rangle - \mu(\langle X, \varphi_m \rangle) \right]^2 > h^2\, Q(\varphi_m, \varphi_m) \right\}$$
$$\leqslant 2\,\mathbb{P}\left\{ \exists\, m \leqslant n \mid \langle X^s, \varphi_m \rangle^2 > h^2\, Q(\varphi_m, \varphi_m) \right\}.$$

On en déduit :

$$\forall h \geqslant 0,\ \mathbb{P}\left\{ \exists n \in \mathbb{N} \mid \left[\langle X, \varphi_n \rangle - \mu(\langle X, \varphi_n \rangle) \right]^2 > h^2\, Q(\varphi_n, \varphi_n) \right\}$$

$$(6) \qquad \leqslant 2\ \mathbb{P}\left\{ \exists \varphi \in \mathcal{D} \mid \langle X^s, \varphi \rangle^2 > h^2\, Q(\varphi, \varphi) \right\}$$

Nous distinguons maintenant deux cas :

a) si pour tout nombre $h \geqslant 0$, le second membre de (5) est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, l'inégalité (5) est trivialement vérifiée pour tout élément x de $\mathcal{D}'$.

b) Dans le cas contraire, il existe un nombre $h_o \geqslant 0$ tel que le second membre de (6) soit strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, l'inégalité (6) montre alors un sous-ensemble Ω_o de l'espace d'épreuves de probabilité non nulle, donc non vide, dans lequel on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left[\langle X, \varphi_n \rangle - \mu(\langle X, \varphi_n \rangle) \right]^2 \leqslant h_o^2\ Q(\varphi_n, \varphi_n) ;$$

soit ω_o un élément de Ω_o, on pose $X_o = X(\omega_o)$; soit Y_o l'élément de $\mathcal{D}'$ défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \langle Y_o, \varphi \rangle = \sum_n \left[\langle X_o, \varphi_n \rangle - \mu(\langle X, \varphi_n \rangle) \right] R(\varphi, \varphi_n)$$

on aura alors, pour tout entier n :

$$\langle X_o - Y_o, \varphi_n \rangle = \mu(\langle X, \varphi_n \rangle) ;$$

On pose alors $x = X_o - Y_o$; en substituant dans (6), utilisant la subordination de Q, on obtient :

$$\forall h \geqslant 0,\ \mathbb{P}\left\{ \sum_n \left[\langle X - x, \varphi_n \rangle \right]^2 > h^2 \right\} \leqslant 2\ \mathbb{P}\left\{ X^s \in h\, K_Q \right\} ;$$

on en déduit immédiatement le résultat.

§ 2 - LES THEOREMES DE CONVERGENCE -

Les différents modes de convergence des distributions aléatoires ont été étudiées dans [2] : on y trouvera les définitions et propriétés des convergences étroites des lois, des convergences en loi, des convergences presque sûres des distributions aléatoires. Rien de tout cela n'est utile ici ; il suffit de définir la convergence presque sûre d'une suite de distributions aléatoires :

Définition : On dit qu'une suite (X_n) de distributions aléatoires ayant même espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ converge presque sûrement si l'ensemble $\{\omega \mid (X_n(\omega))$ ne converge pas $\}$ est un élément de $\mathcal{A}$ de probabilité nulle.

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons la notation suivante : étant donnés une f. q.$\mathcal{Q}$sur $\mathcal{D}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, nous dirons qu'une suite (X_n) de idistributions aléatoires possède la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ si on a :

$$\sum_n \mathbb{E}\left\{\inf\left[1, \bar{Q}(X_n, X_n)\right]\right\} \leq \varepsilon .$$

Lemme de convergence : Soit (X_n) une suite de distributions aléatoires indépendantes possédant une propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$; il existe alors une suite (x_n) de distributions telle que la série $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement.

Démonstration : L'inégalité classique de Kolmogorov généralisée aux expaces de Hilbert montre que pour toute famille (V_k) de variables aléatoires centrées indépendantes à valeurs dans un espace de Hilbert séparable et tout nombre $\varepsilon > 0$, on a :

$$(7) \qquad \mathbb{P}\left\{\sup_k \left\| \sum_{j=1}^{k} V_j \right\| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_k \mathbb{E}\left\{\| V_k \|^2\right\} .$$

Sous les hypothèses du lemme, on considère la suite (Y_n) des distributions aléatoires tronquées par K_Q, définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) \text{ si } X_n(\omega) \text{ appartient à } K_Q , \\ 0 \quad \text{dans le contraire.} \end{cases}$$

Le lemme de Borel-Cantelli et la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ montrent qu'il suffit pour conclure de construire une suite (x_n) de distributions telle que $\sum_n (Y_n - x_n)$ converge presque sûrement. On pose pour cela :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n = \mathbb{E}(Y_n).$$

L'inégalité (7) et la propriété $\mathcal{P}(Q, \varepsilon)$ montrent en effet que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^{p} (Y_n - x_n) \right)$ est presque sûrement une suite de Cauchy dans $\hat{E}_Q$; elle converge presque sûrement dans $\mathcal{D}'$; d'où le résultat.

Démonstration du Théorème 2 : Pour tout entier n, on pose $L_n = |L_{X_n}|^2 = L_{X_n^s}$ et on note Π_n la loi de X_n^s ; on pose aussi $L = \prod_n L_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le corollaire du lemme 2 montre qu'il existe une f. q. Q sur $\mathcal{D}$ telle que la relation (4) soit vérifiée. Le corollaire du lemme de Minlos (exposé 1) appliqué aux sommes partielles de la série de terme général Π_n montre que pour toute f. q. R sur $\mathcal{D}$ à laquelle Q soit subordonnée, on a :

$$\sum_n \int_{K_R} \bar{R}(x,x) \, d\Pi_n(x) + \sum_n \Pi_n \left\{ \mathcal{D}' - K_R \right\} \leqslant 6\varepsilon ;$$

ceci signifie que la suite (X_n^s) possède la propriété $\mathcal{P}(R, 6\varepsilon)$. Soit alors S une f. q. sur $\mathcal{D}$ à laquelle R soit subordonnée ; le lemme 3 montre qu'il existe une suite (x'_n) de distributions telles que, pour tout entier n, on ait :

$$\forall t \geqslant 0, \; \mathbb{P}\left\{ \bar{S}(X_n - x'_n, X_n - x'_n) \geqslant t \right\} \leqslant 2\,\mathbb{P}\left\{ \bar{R}(X_n^s, X_n^s) \geqslant t \right\} ;$$

dans ces conditions, on a :

$$\mathbb{E}\left\{ \inf\left[\tilde{S}(X_n - x'_n, X_n - x'_n), 1 \right] \right\} \leqslant 2\,\mathbb{E}\left\{ \inf\left[\tilde{R}(X_n^s, X_n^s), 1 \right] \right\}.$$

Il en résulte que la suite $(X_n - x'_n)$ possède la propriété $\mathcal{P}(S, 12\varepsilon)$. Le lemme de convergence donne alors immédiatement le résultat.

Démonstration du théorème 1 : Le théorème 2 montre qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{D}'$ telle que $\sum_n (X_n - x_n)$ converge presque sûrement ; en particulier pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, le produit

$$\prod_n \left[L_{X_n}(\varphi) \exp(-i \langle x_n , \varphi \rangle \right.$$

converge vers une limite fonction continue de φ. En comparant avec l'hypothèse du théorème, on en déduit que $\sum_n x_n$ converge dans $\mathcal{D}'$; par différence, on en déduit le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

(On trouvera une liste de références à la fin du premier exposé).

[1] M. LOÈVE Probability theory, N. York, Van Nostrand, 1960.

[2] X. FERNIQUE Processus linéaires, processus généralisés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble , à paraître.

--oo0oo--