SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE COURRÈGE

Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions höldériennes et noyaux de convolution régularisants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 34-51

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__34_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département de Mathématique

Novembre 1966

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS

=:=:=:=:=:=

Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions Höldériennes et Noyaux de convolution régularisants

par Philippe COURRÈGE

SOMMAIRE :

- L'opérateur de convolution associé en valeur principale à un noyau de Caldéron - Zygmund homogène de classe $C^{o,\mu}$ sur la sphère unité applique continûment $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ si $0 < \lambda < \mu \leq 1$ (Théorème I, n° 3.2. et Théorème II , n° 3.3) .

- Formule de dérivation sous le signe somme pour l'opérateur de convolution associé à un noyau homogène de degré $1-n$ (Théorème III , n° 4.2) .

- Application : L'opérateur de convolution associé à un noyau homogène de degré $m-n$ et de classe $C^{m,\mu}$ sur la sphère unité applique $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda}(R^n)$ si $0 < \lambda < \mu \leq 1$ (Théorème IV , n° 4.3) . Cas particulier du potentiel Newtonien (n° 4.4) .

§ 1 - Notations ; espaces de fonctions Höldériennes .

1.1.- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par $C^p(\Omega)$ (p entier ≥ 0 , Ω ouvert de R^n) l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur Ω et ayant des dérivées jusqu'à l'ordre p continues, et par $C_k^p(\Omega)$ (resp. $C_K^p(\Omega)$) le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions de $C^p(\Omega)$ à support compact (resp. à support contenu dans le compact K) . On pose $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C_k(\Omega) = C_k^0(\Omega)$ et $C_k^\infty(\Omega) = \bigcap_p C_k^p(\Omega)$.

On pose en outre ,

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \qquad [1 \leq i \leq n \ , \ f \in C^1(\Omega) \ ]$$

$$D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \quad [\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_n) \in N^n, |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, f \in C^{|\beta|}(\Omega)] \ .$$

1.2.- Normes et espaces de fonctions Höldériennes . Si $0 < \lambda \leq 1$, on pose,

$$[f]_{0,\lambda} = \sup_{\substack{x' \in R^n, x'' \in R^n \\ x' \neq x''}} \frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|^\lambda} \qquad (f \in C(R^n))$$

$$[f]_{p,\lambda} = \sum_{|\beta| = p} [D^\beta f]_{0,\lambda} \qquad (f \in C^p(R^n), p \text{ entier} \geq 0) \ .$$

On désigne par $C^{p,\lambda}(R^n)$ le sous-espace de $C^p(R^n)$ formé des fonctions $f \in C^p(R^n)$ ayant toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre p bornées et telles que $[f]_{p,\lambda} < +\infty$.

Pour $f \in C^{p,\lambda}(R^n)$, on pose

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq p} \|D^\beta f\| + [f]_{p,\lambda} \qquad (1)$$

---

(1) Si $f \in C(R^n)$ est bornée, on pose $\|f\| = \sup_{x \in R^n} |f(x)|$.

On désigne par $C_k^{p,\lambda}(R^n)$ (resp. $C_K^{p,\lambda}(R^n)$) le sous-espace de $C^{p,\lambda}(R^n)$ formé des fonctions à support compact (resp. à support compact contenu dans le compact K), et par $C_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$ (Ω ouvert de R^n) le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions f telles que $\varphi f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$ pour tout $\varphi \in C_k^\infty(\Omega)$.

On a alors, en vertu de la formule de Taylor,

(1.1) $$C^{p+1}(\Omega) \subset C_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$$

(p entier ≥ 0, $0 < \lambda \leq 1$)

(1.2) $$C_k^{p+1}(R^n) \subset C_k^{p,\lambda}(R^n) \subset C_k^p(R^n) \quad .$$

Les espaces $C^{p,\lambda}(R^n)$ et $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ seront toujours munis de la topologie associée à la norme $\| \ \|_{p,\lambda}$ qui en fait des <u>espaces de Banach</u>.

1.3. - On note Σ_n la <u>sphère</u> unité de R^n ($\Sigma_n = \{z \mid z \in R^n \text{ et } |z| = 1\}$) et σ_n la mesure Riemanienne sur Σ_n associée à la métrique Riemanienne induite par la métrique euclidienne sur R^n ("mesure superficielle"). Posant $\omega_n = \sigma_n(\Sigma_n)$, on rappelle que,

$$\tau_n = \int_{|y| \leq 1} dy = \frac{\omega_n}{n} \quad \text{(en particulier } \omega_1 = 2\text{)}$$

On rappelle en outre la formule de désintégration de la mesure de Lebesgue sur R^n en coordonnées polaires,

(1.3) $$\int_{R^n} f(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}\, d\rho \int_{\Sigma_n} f(\rho\theta)\, \sigma_n(d\theta) \qquad (f \in C_k(R^n)) \quad .$$

§ 2 - Opérateur de convolution associé à un noyau singulier .

2.1. - Un noyau singulier (sur R^n) sera ici une fonction $k \in C(R^n \setminus \{0\})$ positivement homogène de degré - n :

$$k(tz) = t^{-n} k(z) \qquad (z \in R^n \setminus \{0\}, t > 0) \qquad (2.1)$$

Pour un tel noyau, on pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$k_\varepsilon(z) = 1_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)}(z)\, k(z) \qquad (z \in R^n) \qquad (2.2)$$

(2) ; ou encore ,

$$k_\varepsilon(z) = k(z) \text{ si } |z| \geq \varepsilon \text{ et } k_\varepsilon(z) = 0 \text{ si } |z| < \varepsilon \ .$$

Alors $k_\varepsilon \in \mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$, et définit un opérateur de convolution $f \to k_\varepsilon * f$ appliquant $C_k(R^n)$ dans $C(R^n)$. On va étudier

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(x-z) dz \ .$$

PROPOSITION . - Soient k un noyau singulier, et $0 < \lambda \leq 1$.

(1) Si $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f(x)$ existe pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $x \in R^n$, alors ,

$$\int_{\Sigma_n} k(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = 0 \ . \qquad (2.3)$$

(2) Inversement, si (2.3) est satisfaite, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f(x)$ existe pour tout $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $x \in R^n$, la convergence ayant lieu uniformément en $x \in R^n$.

---

(1) $B_\varepsilon(x) = \{z \mid z \in R^n \text{ et } |z-x| < \varepsilon\}$; si $W \subset R^n$, $1_W(z) = 1$ si $z \in W$ et $1_W(z) = 0$ si $z \notin W$.

En effet, R étant un nombre > 0 , on a , pour $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$ et $\varepsilon < R$,

$$\int_{|z|\geq\varepsilon} k(z)\, f(x-z)dz = \int_{R>|z|\geq\varepsilon} k(z)[\,f(x-z)-f(x)\,]\,dz + \int_{|z|\geq R} k(z)f(x-z)dz + f(x)\log\frac{R}{\varepsilon}\int_{\Sigma_n} k(\theta)\sigma_n(d\theta),$$

ainsi qu'il résulte de (1.3) et de l'homogénéité (2.1) de k .

On conclut alors en remarquant d'une part que la fonction $z \longrightarrow 1_{B_R(0)}(z)\, k(z)[\,f(x-z) - f(x)\,]$ est sommable dans R^n puisque ,

$$|k(z)\,[\,f(x-z)-f(x)\,]\,| \leq \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)|\,.\,[f]_{o,\lambda}\,|z|^{\lambda-n} \qquad ; \tag{2.4}$$

et d'autre part que, pour $x \in R^n$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{R>|z|\geq\varepsilon} k(z)[\,f(x-z)-f(x)\,]dz = \int_{|z|\geq\varepsilon} k(z)[\,f(x-z)-f(x)\,]dz\ ,$$

la limite étant atteinte uniformément en x , en vertu de ce que, d'après (2.4) et (1.3) ,

$$\Big|\int_{\varepsilon_2>|z|\geq\varepsilon_1} k(z)[\,f(x-z)-f(x)\,]dz\Big| \leq \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)|\,[f]_{o,\lambda}\,\frac{\omega_n}{\lambda}\,(\varepsilon_2^{\lambda}-\varepsilon_1^{\lambda})\ .$$

c. q. f. d.

2.2. - Ainsi, à un noyau singulier k <u>d'intégrale nulle sur la sphère unité</u> [propriété (2.3)], on associe une application linéaire $\widetilde{k}$ de $C_k^{o,\lambda}(R^n)$ $(0<\lambda\leq 1)$ dans $C(R^n)$ en posant,

$$\widetilde{k}f(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} k_\varepsilon * f(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|z|\geq\varepsilon} k(z)f(x-z)dz\ , \tag{2.5}$$

et on a aussi, pour chaque $R > 0$

$$\widetilde{k}f(x) = \int_{|z|<R} k(z)\,[\,f(x-z) - f(x)\,]\,dz + \int_{|z|\geq R} k(z)\,f(x-z)\,dz \tag{2.6}$$

$$(x \in R^n,\ f \in C_k^{o,\lambda}(R^n))\ .$$

En outre, si, pour chaque $f \in C_k^\infty(R^n)$; on pose

$$(2.7) \qquad < Vpk, f > = \widetilde{k}\check{f}(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} k(z) f(z) dz \qquad ([1]) ,$$

on définit une distribution Vpk sur R^n appelée <u>la distribution valeur principale de k</u>. Et on a,

$$(2.8) \qquad Vpk * f = \widetilde{k} f \quad \text{pour tout } f \in C_k^{o,\lambda}(R^n) .$$

Cette relation est vraie, pour $f \in C_k^\infty(R^n)$ par définition de Vpk (relation (2.7)). Si $f \in C_k^{o,\lambda}(R^n)$, on a, pour $\varphi \in C_k^\infty(R^n)$,

$$\begin{aligned} < Vpk * f, \varphi > &= (Vpk * f) * \check{\varphi}(0) = Vpk * (f * \check{\varphi})(0) \\ &= \widetilde{k}(f * \check{\varphi})(0) \quad , \text{ puisque } f * \check{\varphi} \in C_k^\infty(R^n) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * (f * \check{\varphi})(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} < k_\varepsilon * f, \varphi > \\ &= < \widetilde{k} f, \varphi > \quad \text{puisque } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} k_\varepsilon * f = \widetilde{k} f \end{aligned}$$

uniformément d'après la proposition 2.1. D'où (2.8), φ étant arbitraire.

2.3. - <u>Exemple classique de l'opérateur de Hilbert</u>.

<u>Cas n = 1</u> - $k(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad (z \in R \quad , z \neq 0)$

<u>Cas n > 1</u> - $k(z) = z_j |z|^{-(n+1)}$ $\qquad (z = (z_i) \in R^n , \ z \neq 0 \ , \ 1 \leq j \leq n)$.

§ 3 - <u>Noyaux singuliers de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$</u> .

3.1. - On appellera <u>noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$</u> $(0 < \mu \leq 1)$ un noyau singulier k (n° 2.1) tel que

$$(3.1) \qquad k \in C_{loc}^{o,\mu}(R^n - \{0\})$$

$$(3.2) \qquad \int_{\Sigma_n} k(\theta) \sigma_n(d\theta) = 0 .$$

([1]) $\check{f}(x) = f(-x)$; toujours sous l'hypothèse (2.3) sur k.

Pour un tel noyau, on posera,

$$(3.3)\quad \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} = \sup_{\theta\in\Sigma_n} |k(\theta)| + \sup_{\substack{\theta'\in\Sigma_n,\theta''\in\Sigma_n \\ \theta'\neq\theta''}} \frac{|k(\theta'') - k(\theta')|}{|\theta''-\theta'|^{\mu}} \quad .$$

En vertu de (3.1), $\|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} < +\infty$; inversement, si k est un noyau singulier tel que $\|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} < +\infty$, alors $k \in C^{o,\mu}_{loc}(R^n \setminus \{0\})$, ainsi qu'il résulte du lemme suivant :

LEMME.- Pour $0 < \mu \leq 1$ et $0 < \alpha < 1$, on pose,

$$M_{\alpha,\mu} = 2^{\mu} + \operatorname{Sup}_{1-\alpha\leq s\leq 1+\alpha} \frac{|s^n - 1|}{|s-1|^{\mu}} \quad (\text{on a } M_{\alpha,\mu} < +\infty) \ .$$

Alors, si k est un noyau singulier sur R^n (n° 2.1),

$$(3.4)\quad |k(z') - k(z)| \leq M_{\alpha,\mu} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} |z'-z|^{\mu} \, |z|^{-(n+\mu)}$$

pour tout $z \in R^n \setminus \{0\}$, $z' \in R^n \setminus \{0\}$ tels que $|z'-z| \leq \alpha |z|$.

En effet, posant $|z| = \rho$, $|z'| = \rho'$, $z_1 = \rho^{-1} z$ et $z'_1 = \rho'^{-1} z'$, on a, d'une part,

$$\begin{aligned} |k(z') - k(z)| &= |\rho'^{-n} k(z'_1) - \rho^{-n} k(z_1)| \\ &\leq \rho^{-n} \{ |k(z'_1) - k(z_1)| + |k(z'_1)| \, |(\tfrac{\rho'}{\rho})^{-n} - 1| \} \\ &\leq \rho^{-n} \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \{ |z'_1 - z_1|^{\mu} + |(\tfrac{\rho'}{\rho})^{-n} - 1| \} \ . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $|\rho'-\rho| \leq |z'-z|$,

$$|z'_1 - z_1| \leq \frac{1}{\rho} |z'-z| + \rho' |\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}| \leq 2\rho^{-1} |z'-z| \quad .$$

Enfin, $|z'-z| \leq \alpha |z|$ entraîne que $(1-\alpha)\rho \leq \rho' \leq (1+\alpha)\rho$.

D'où le lemme, puisque $\sup_{1-\alpha\leq s\leq 1+\alpha} \frac{|s^{-n} - 1|}{|s-1|^{\mu}} < +\infty$.

c.q.f.d.

Puisque $C^1(R^n\setminus\{0\}) \subset C^{o,\mu}_{loc}(R^n\setminus\{0\})$ $(0 < \mu \leq 1)$, tout noyau singulier k d'intégrale nulle sur la sphère unité (relation (3.2)) et de classe C^1 sur $R^n\setminus\{0\}$ est un noyau de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$. Il en est ainsi, en particulier, de l'opérateur de Hilbert (n° 2.3).

3.2 - THÉORÈME I.- Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \leq 1$, et k un noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$. Alors,

(1) il existe une constante $C_{\lambda,\mu} > 0$ [1] telle que, pour tout $f \in C^{o,\lambda}_k(R^n)$,

$$[\tilde{k}f]_{o,\lambda} \leq C_{\lambda,\mu} \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} [f]_{o,\lambda} \tag{3.5}$$

(2) pour chaque compact K de R^n, il existe une constante $C^K_{\lambda,\mu} > 0$ [1] telle que, pour tout $f \in C^{o,\lambda}_K(R^n)$, $\tilde{k}f \in C^{o,\lambda}(R^n)$ et

$$\|\tilde{k}f\|_{o,\lambda} \leq C^K_{\lambda,\mu} \|k\|_{o,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{o,\lambda} \quad . \tag{3.6}$$

Pour établir (3.5), on considère une fonction $f \in C^{o,\lambda}_K(R^n)$ et deux points x et x' de R^n, et on pose $|x'-x| = d > 0$.

En vertu de (2.6), on a, pour R assez grand,

$$\tilde{k}f(x') = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy + \int_{B_R(x')\setminus B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy \quad ,$$

puisque, f étant à support dans K, $\int_{R^n\setminus B_R(x')} k(x'-y)f(y)dy = 0$ dès que $B_R(x') \supset K$.

De même,

$$\tilde{k}f(x) = \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy + \int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]\,dy$$

$$= \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy + \int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x')]\,dy \quad ,$$

puisque $\int_{B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} k(x-y)\,dy = 0$ d'après l'hypothèse (3.2).

([1]) dépendant aussi de n, mais pas de k.

Ainsi, pour R assez grand,

(3.7) $\mathcal{K}f(x') - \tilde{k}f(x) = I_1 - I_2 + I_3(R) + I_4(R) - I_5(R)$, où

$$I_1 = \int_{B_{2d}(x)} k(x'-y)[f(y)-f(x')]\,dy , \qquad I_2 = \int_{B_{2d}(x)} k(x-y)[f(y)-f(x)]dy$$

$$I_3(R) = \int_{B_R(x')\cap B_R(x)\setminus B_{2d}(x)} [k(x'-y)-k(x-y)][f(y)-f(x')]dy ,$$

$$I_4(R) = \int_{B_R(x')\setminus(B_R(x')\cap B_R(x))} k(x'-y)[f(y)-f(x')]dy \quad \text{et} \quad I_5(R) = \int_{B_R(x)\setminus(B_R(x')\cap B_R(x))} k(x-y)[f(y)-f(x')]dy .$$

On majore alors séparément chacun de ces termes :

$$|I_1| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda} \int_{|y-x|\le 2d} \frac{dy}{|y-x|^{n-\lambda}} \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda} \int_{|y-x'|\le 3d} \frac{dy}{|y-x'|^{n-\lambda}} ,$$

puisque $|y-x| \le 2d \Rightarrow |y-x'| \le 3d$; d'où

(3.8) $$|I_1| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda}\, \omega_n \int_0^{3d} \rho^{\lambda-1}\,d\rho = \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda} 3^{\lambda} d^{\lambda} ,$$

d'après (1.3) ; et, de même ,

(3.9) $$|I_2| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda} \frac{\omega_n}{\lambda} 2^{\lambda} d^{\lambda} .$$ Ensuite ,

$$|I_3(R)| \le \int_{R^n\setminus B_{2d}(x)} |k(x'-y)-k(x-y)|\,|f(y)-f(x')|\,dy$$

$$\le M_{1/2,\mu}\, \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda}\, d^{\mu} \int_{|y-x|\ge 2d} \frac{dy}{|y-x|^{n+\mu-\lambda}} ,$$

en vertu du lemme 3.1. ci-dessus,

$$\le M_{1/2,\mu}\, \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n}[f]_{0,\lambda}\, \omega_n d^{\mu} \int_{2d}^{+\infty} \rho^{\lambda-\mu-1}\,d\rho \ ; \text{ d'où}$$

$$(3.10) \qquad |I_3(R)| \le M_{1/2,\mu} \, \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \, \omega_n \, \frac{2^{\lambda-\mu}}{\mu-\lambda} \, d^{\lambda} \qquad ([1]) \; .$$

Enfin

$$|I_4(R)| \le \int_{B_R(x')\setminus B_{R-d}(x')} |k(x'-y)| \, |f(y)-f(x')| \, dy \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{0,\lambda} \int_{B_R(x')\setminus B_{R-d}(x)} \frac{dy}{|y-x'|^n}$$

$$= \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\| \; \omega_n \int_{R-d}^{R} \rho^{-1} \, d\rho = \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\| \; \omega_n \log \frac{R}{R-d} \quad ;$$

d'où $\lim_{R\to\infty} |I_4(R)| = 0$; et de même , $\lim_{R\to\infty} |I_5(R)| = 0$.

D'où la majoration (3.5), en vertu de (3.8) , (3.9), (3.10), en faisant tendre R vers l'infini dans (3.7) .

La majoration (3.6) n'offre alors pas de difficulté : prenant $f \in C_K^{0,\lambda}(R^n)$, on a, d'après (2.6) (avec R = 1) ,

$$|\tilde{k} f(x)| \le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} [f]_{0,\lambda} \int_{|z|<1} \frac{dz}{|z|^{n-\lambda}} + \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\| \int_{\substack{|z|\ge 1 \\ z\in x-K}} \frac{dz}{|z|^n} \quad ;$$

$$\le \|k\|_{0,\mu,\Sigma_n} \|f\|_{0,\lambda} \left\{ \frac{\omega_n}{\lambda} + \tau_n(K) \right\} .$$

c.q.f.d.

([1]) On note ici l'importance de l'hypothèse $\lambda < \mu$.

3.3.- THÉORÈME II.- Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \leq 1$, et k un noyau singulier de Calderón - Zygmund de classe $C^{o,\mu}$ (n° 3.1). Alors l'opérateur de convolution $\tilde{k}$ associé à k (n° 2.2) applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ (K compact de R^n, p entier ≥ 0) ; et on a,

$$D^\beta(\tilde{k}f) = \tilde{k}(D^\beta f) \qquad (f \in C_k^{p,\lambda}(R^n),\ 0 \leq |\beta| \leq p) \tag{3.11}$$

En langage de la Théorie des distributions, la relation (3.11) résulte immédiatement du Théorème I : si $f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$, on a (en notant D' la dérivation au sens des distributions),

$$D'^\beta(\mathrm{Vp}\, k * f) = \mathrm{Vp}\, k * D'^\beta f = \mathrm{Vp}\, k * D^\beta f \in C^{o,\lambda}(R^n),$$

pour $0 \leq |\beta| \leq p$. D'où $\mathrm{Vp}\, k * f \in C^{p,\lambda}(R^n)$, et (3.11).

On peut aussi procéder directement à partir des noyaux k_ϵ : si $f \in C_k^{p,\lambda}(R^n)$, on a, pour $\epsilon > 0$

$$k_\epsilon * f \in C^p(R^n) \quad \text{et} \quad D^\beta(k_\epsilon * f) = k_\epsilon * D^\beta f$$

($0 \leq |\beta| \leq p$) par simple dérivation sous le signe somme (voir l'appendice ci-dessous) ; on conclut alors grâce à la convergence uniforme de $k_\epsilon * f$ vers $\tilde{k}f$ lorsque ϵ tend vers 0 (proposition 2.1).

La continuité de $\tilde{k}$ de $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda}(R^n)$ résulte alors de (3.11), de la continuité de $\tilde{k}$ de $C_K^{o,\lambda}(R^n)$ dans $C^{o,\lambda}(R^n)$ [majoration (3.6), Théorème I], et de ce que la topologie de $C^{p,\lambda}(R^n)$ est engendrée par les applications $g \longrightarrow D^\beta g$ ($0 \leq |\beta| \leq p$) de $C^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{o,\lambda}(R^n)$.

c.q.f.d.

§ 4 - Dérivation sous le signe somme pour un noyau homogène de degré 1-n - Noyaux de convolution régularisants .

4.1 - Une classe importante de noyaux de Calderón - Zygmund est introduite par la proposition suivante :

PROPOSITION . - Soit h une fonction de $C^1(R^n \setminus \{0\})$, positivement homogène de degré $1-n$ ($h(tz) = t^{1-n} h(z)$, $t > 0$, $z \in R^n \setminus \{0\}$) .
Alors, pour $1 \leq i \leq n$, $k_i = D_i h$ est un noyau singulier d'intégrale nulle sur la sphère unité (propriété (2.3), n° 2.1) .

En effet, $k_i \in C(R^n \setminus \{0\})$, et il est élémentaire que k_i est homogène de degré $1-n-1 = -n$. Il reste donc à montrer que $\int_{\Sigma_n} k_i(\theta)\sigma_n(d\theta) = 0$. Pour cela ([1]), soit $\rho \in C^1(R)$ telle que, Supp $\rho \subset [1,2]$ et $\int_0^\infty \frac{\rho(t)}{t}\, dt = 1$. Une intégration par parties donne ,

$$\int_{R^n} D_i h(x)\, \rho(|x|)\, dx = - \int_{R^n} h(x)\, \rho'(|x|)\, \frac{x_i}{|x|}\, dx .$$

D'où , en calculant les deux membres en coordonnées polaires,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r}\, dr \int_{\Sigma_n} D_i h(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = - \int_0^{+\infty} \rho'(r)\, dr \int_{\Sigma_n} h(\theta).\theta_i\, \sigma_n(d\theta) \quad ;$$

et le résultat, puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r}\, dr = 1$ et $\int_0^{+\infty} \rho'(r)\, dr = 0$.

c. q. f. d.

([1]) Cette démonstration est empruntée à AGMON dans "Lectures on elliptic boundary Problems" (van Nostrand Math. Studies) page 152 .

4.2 - Si m est un nombre réel ≥ 1, et si $h \in C^1(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ est homogène de degré $m-n$, h appartient à $\mathfrak{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$; donc $h * f \in C(\mathbf{R}^n)$ pour tout $f \in C(\mathbf{R}^n)$. De plus, si $m > 1$, $D_i h$ est homogène de degré $m-1-n > -n$, donc $D_i h$ appartient aussi à $\mathfrak{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq i \leq n)$. On va chercher à calculer $D_i(h * f)$ (où f est a priori non dérivable) en dérivant sous le signe somme dans l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^n} h(x-y)f(y)dy$, bien que le Théorème classique à ce sujet (voir l'appendice) ne soit pas applicable à cause de la singularité de h à l'origine. Quoi qu'il en soit :

THÉORÈME III. - Soit h une fonction de $C^1(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ (positivement) homogène de degré $m-n$, avec $m \geq 1$ ($h(tz) = t^{m-n}h(z)$, $t > 0$, $z \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$). Alors,

(1) si $m > 1$, pour tout $f \in C_k(\mathbf{R}^n)$, $h * f \in C^1(\mathbf{R}^n)$, et

$$D_i(h * f) = (D_i h) * f \qquad (1 \leq i \leq n) \,. \tag{4.1}$$

(2) si $m = 1$, pour tout $f \in C^{0,\lambda}_k(\mathbf{R}^n)$ $(0 < \lambda \leq 1)$, $h * f \in C^1(\mathbf{R}^n)$, et

$$D_i(h * f) = (\mathrm{Vp}\, D_i h) * f + C_i(h)\, f \qquad ([1]) \text{, où} \tag{4.2}$$

$$C_i(h) = \int_{\Sigma_n} h(\theta)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta) \qquad (1 \leq i \leq n) \,. \tag{4.3}$$

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. - Étant donnée une fonction $g \in C_k(\mathbf{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$, on pose, $g_\varepsilon(x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} g(y)dy$ $(x \in \mathbf{R}^n)$. Alors, $g_\varepsilon \in C^1(\mathbf{R}^n)$, et

$$D_i g_\varepsilon(x) = -\varepsilon^{n-1} \int_{\Sigma_n} g(x + \varepsilon\theta)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta) \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ 1 \leq i \leq n) \,. \tag{4.4}$$

([1]) voir les n^{os} 4.1 et 2.2 ci-dessus.

En effet, posant $X_\varepsilon = 1_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ ($X_\varepsilon(y) = 0$ si $|y| < \varepsilon$ et $X_\varepsilon(y) = 1$ si $|y| \geq \varepsilon$), on a $g_\varepsilon = X_\varepsilon * g$. Il en résulte par dérivation sous le signe somme (voir l'appendice) que, si $g \in C^1_k(R^n)$, $g_\varepsilon \in C^1(R^n)$, et $D_i g_\varepsilon = X_\varepsilon * D_i g$; c'est-à-dire, $D_i g_\varepsilon(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} D_i g(x+y)dy = \varepsilon^n \int_{|z| \geq 1} D_i g(x+\varepsilon z)\, dz$; d'où (4.4) en intégrant par parties sur la variété à bord $R^n \setminus B_1(0) = M$ selon la formule $\int_M \operatorname{div} Z \, d\tau = \int_{\partial M} Z.n\, d\sigma$ où Z est le champ de vecteurs défini par $Z_j = 0$ ($j \neq i$), et $Z_i(z) = g(x+\varepsilon z)$ ($z \in R^n \setminus B_1(0)$)[1].

On passe ensuite au cas général ($g \in C_k$) en considérant une suite (g_n) de fonctions de C^1_k convergeant uniformément vers g.

c. q. f. d.

On établit alors comme suit le théorème III : on désigne par f une fonction de $C_k(R^n)$, et, pour $\varepsilon > 0$, on pose,

$X_\varepsilon = 1_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ comme ci-dessus, et

(4.5) $\Phi_\varepsilon(x, z) = \int_{R^n} X_\varepsilon(x-y)h(z-y)f(y)dy$ $(x \in R^n,\ z \in R^n)$, et

(4.6) $\varphi_\varepsilon(x) = \Phi_\varepsilon(x, x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} h(x-y)f(y)\, y$.

On va montrer que la fonction Φ_ε est de classe C^1 sur $\{(x, z) \mid |x-z| < \varepsilon/2\}$, En effet, d'abord, pour x fixé, $\Phi_\varepsilon(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\{z \mid |z-x| < \varepsilon/2\}$, et on a,

(4.7) $\frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_\varepsilon(x, z) = \int_{R^n} X_\varepsilon(x-y)D_i h(z-y)f(y)dy$ $(|z-x| < \varepsilon/2)$,

---

([1]) ceci pour $n \geq 2$; pour $n = 1$, le lemme résulte d'un calcul direct élémentaire.

par dérivation sous le signe somme [le théorème rappelé dans l'appendice justifie une telle dérivation car la fonction $(z,y) \longrightarrow X_\varepsilon(x-y)D_i h(z-y)f(y)$ est bornée pour $|z-x| < \varepsilon/2$ et $y \in R^n$] .

Par ailleurs, désignant par γ_ε une fonction numérique de classe C^∞ sur R^n , nulle au voisinage de 0 et égale à 1 hors de $B_{\varepsilon/2}(0)$, on a , pour z fixé et $|x-z| < \varepsilon/2$

$$\Phi_\varepsilon(x,z) = \int_{R^n} X_\varepsilon(x-y)\,\gamma_\varepsilon(z-y)\,h(z-y)f(y)dy$$ ce qui montre que, en vertu du lemme , $\Phi_\varepsilon(\cdot\,,z)$ est de classe C^1 sur $\{x \mid |x-z| < \varepsilon/2\}$, et que, pour $|x-z| < \varepsilon/2$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\Phi_\varepsilon(x,z) = -\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(z-x-\varepsilon\theta)\,f(x+\varepsilon\theta)\,\theta_i\sigma_n(d\theta) \quad . \tag{4.8}$$

Conjuguant alors (4.7) et (4.8) , on obtient que φ_ε est de classe C^1 sur R^n , et que, pour $x \in R^n$,

$$\begin{aligned} D_i\varphi_\varepsilon(x) &= \int_{|y-x|\geq\varepsilon} D_i h(x-y)f(y)dy - \varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(-\varepsilon\theta)f(x+\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) \quad , \\ &= \int_{|y-x|\geq\varepsilon} D_i h(x-y)f(y)dy + \varepsilon^{m-1}\int_{\Sigma_n} h(\theta)f(x-\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta) \end{aligned} \tag{4.9}$$

en vertu de l'homogénéité de h .

Faisant tendre alors ε vers zéro dans (4.9), on voit que, le premier terme au second membre tend vers $D_i h * f(x)$ si $m > 1$, et vers $(\text{vp } D_i h) * f(x)$ si $m = 1$ et $f \in C_k^{0,\lambda}(R^n)$ (proposition 2.1), et le second terme vers 0 si $m > 1$ et vers $C_i(h)\,f(x)$ si $m = 1$, et ceci uniformément sur R^n . D'où le théorème, puisque $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = h * f(x)$.

c. q. f. d.

4.3 - Noyaux de convolution m fois régularisants. Soient m un entier ≥ 1, et $\nu \in C^m(R^n\setminus\{0\})$ une fonction positivement homogène de degré m-n. Alors, pour $0 \leq |\beta| < m-1$, $D^\beta\nu \in C^{m-|\beta|}(R^n\setminus\{0\})$ est homogène de degré $m - |\beta| - n > -n$, donc $D^\beta\nu \in \mathcal{L}^1_{loc}(R^n)$, et par application répétée du Théorème III (propriété (1)), on obtient,

pour tout $f \in C_k(R^n)$, $\nu * f \in C^{m-1}(R^n)$ et

$$D^\beta(\nu * f) = D^\beta\nu * f \qquad (0 \leq |\beta| \leq m-1) \quad . \tag{4.10}$$

En outre, si $|\beta| = m-1$, $D^\beta\nu \in C^1(R^n\setminus\{0\})$ est homogène de degré 1-n ; donc, d'après le théorème III (propriété (2)), pour tout $f \in C^{o,\lambda}_k(R^n)$ $(0<\lambda\leq 1)$, $\nu * f \in C^m(R^n)$, et

$$D_iD^\beta(\nu * f) = vp\, D_iD^\beta\nu) * f + C_i(D^\beta\nu)f \quad . \tag{4.11}$$

Enfin, en conjuguant ce résultat avec le Théorème II (n° 3.3), on obtient :

THÉORÈME IV. - Soient λ et μ deux nombres réels tels que $0 < \lambda < \mu \leq 1$, et $\nu \in C^{m,\mu}_{loc}(R^n\setminus\{0\})$ une fonction homogène de degré m - n (m entier ≥ 1). Alors, l'opérateur de convolution $f \longrightarrow \nu * f$ associé à ν applique continûment $C^{p,\lambda}_K(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda}(R^n)$ (p entier ≥ 0, K compact de R^n).

4.4 - Application au noyau Newtonien.

Supposant $n \geq 3$, on pose

$$\nu(z) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\,|z|^{2-n} \qquad (z \in R^n\setminus\{0\}) .$$

Alors (Théorème IV) :

PROPOSITION - Soit λ un nombre réel tel que $0<\lambda<1$.

(1) Pour tout $f \in C^{o,\lambda}_k(R^n)$, $\nu * f \in C^{2,\lambda}(R^n)$ et

$$\Delta(\nu * f) = -f . \tag{4.12}$$

(2) Pour tout compact K de R^n et tput entier $p \geq 0$, il existe une constante $C^K_{p,\lambda} > 0$ telle que, pour tout $f \in C^{p,\lambda}_K(R^n)$,

$$\|\nu * f\|_{p+2,\lambda} \leq C^K_{p,\lambda}\,\|f\|_{p,\lambda} \tag{4.13}$$

Un contre-exemple. Le noyau newtonien ν n'applique pas $C_k(R^n)$ dans $C^2(R^n)$:

On désigne par θ une fonction continue numérique de variable réelle telle que,

$$\theta(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u \leq 0$$
$$\theta(u) = \frac{1}{\log \frac{1}{u}} \quad \text{pour} \quad 0 < u < \alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$
$$\theta(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u \geq 1 \ .$$

On désigne, d'autre part, par ψ une fonction de $C_k^\infty(R^n)$ égale à 1 au voisinage de 0 ; et on pose

$$f(x) = \psi(x)\, \theta(x_1^2 - \sum_{j=2}^{n} x_j^2) \ .$$

Alors, $f \in C_k(R^n)$, et $\nu * f$ n'a pas de dérivée seconde par rapport à x_1 à l'origine.

Appendice. - Un théorème de dérivation sous le signe somme.

THÉORÈME.- Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de R, λ la mesure de Lebesgue sur I, Y un espace mesurable, et τ une mesure σ-finie sur Y. On désigne par $F : (t, y) \to F(t, y)$ une fonction mesurable sur $I \times Y$ ayant les propriétés suivantes :

(a) pour tout $y \in Y$, $F(\cdot, y)$ est de classe C^1 sur I ; on pose

(1) $$F'(t, y) = \frac{d}{ds} F(s, y)\Big/_{s=t} \qquad (t \in I, \ y \in Y) \ .$$

(b) $$\int_a^b dt \int_Y \tau(dy)\, |F'(t, y)| < +\infty$$

(c) la fonction $t \to \int_Y F'(t, y)\, \tau(dy)$ [définie presque partout sur I d'après (b)] est continue sur I.

(d) il existe $t_o \in I$ tel que $F(t_o, \cdot) \in L^1(Y, \tau)$.

Alors, $F(t, .) \in L^1(Y, \tau)$ pour tout $t \in I$, la fonction $t \to \Phi(t) = \int_Y F(t, y)\, \tau(dy)$ est de classe C^1 sur I, et on a,

(2) $$\Phi'(t) = \int_Y F'(t, y)\, \tau(dy) \quad \text{pour tout} \quad t \in I \ .$$

En effet, supposant, par exemple, que $t_o = a$ (hypothèse (d)), on pose

$$\psi(t) = \int_a^t ds \int_Y F'(s,y)\,\tau(dy) \qquad (t \in I) \tag{3}$$

$\psi(t)$ est bien défini, pour chaque $t \in I$, en vertu de (b), et, en vertu de (c), ψ est de classe C^1 sur I et

$$\psi'(t) = \int_Y F'(t,y)\,\tau(dy) \quad \text{pour tout } t \in I . \tag{4}$$

Par ailleurs, d'une part en vertu de (a), on a

$$\int_a^t F'(s,y)ds = F(t,y) - F(a,y) \quad \text{pour } t \in I,\ y \in Y ; \tag{5}$$

d'autre part, en vertu de (b), l'application

$y \longrightarrow \int_a^t F'(s,y)\,ds$ est dans $L^1(Y,\tau)$, donc aussi, d'après (5), l'application $F(t,\cdot)(t \in I)$ puisque $F(a,\cdot) \in L^1(Y,\tau)$ en vertu de (d).

Finalement, le théorème de Fubini appliqué au second membre de (3) donne, compte tenu de (5),

$$\psi(t) = \int_Y F(t,y)\,\tau(dy) - \int_Y F(a,y)\,\tau(dy) . \tag{6}$$

D'où le théorème en rapprochant (4) et (6)

c. q. f. d.