REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. MISITI
Y. MISITI
G. OPPENHEIM
J. M. POGGI

Analyse de signaux classiques par décomposition en ondelettes

Revue de statistique appliquée, tome 41, n° 4 (1993), p. 5-32
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1993__41_4_5_0>

© Société française de statistique, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1993, **XLI** (4), 5-32

ANALYSE DE SIGNAUX CLASSIQUES PAR DÉCOMPOSITION EN ONDELETTES

M. Misiti (2), Y. Misiti (1), G. Oppenheim (1,3), J.M. Poggi (1,4)

(1) Université Paris XI-Orsay, Laboratoire de Modélisation Stochastique et Statistique
C.N.R.S. URA 743, Bât. 425, Mathématiques, 91405 Orsay cedex
(2) Ecole Centrale de Lyon
(3) Université de Marne la Vallée
(4) Université Paris X – Nanterre

RÉSUMÉ

Ce texte a pour objet de familiariser le lecteur avec la décomposition en ondelettes de signaux univariés. Sa vocation est pratique et se base sur l'analyse de signaux classiques pour apprendre à reconnaître des formes.

On présente les ondelettes dans un premier temps, puis on dresse la liste des signaux analysés puis les essais et les résultats sont commentés. Les nombreux exemples élémentaires montrent l'usage que l'on peut faire d'un tel outil pour le traitement des séries temporelles.

Mots-clés : *Ondelettes, traitement du signal, séries temporelles.*

SUMMARY

This paper deals with the univariate wavelet methods from a practical viewpoint. After a brief presentation of the wavelet framework, a set of well-known signals are analysed, and the associated comments are presented.

The various simple examples show a possible use of wavelets in time series analysis.

Key-words : *Wavelets, signal processing, time series.*

1. Introduction

Ce texte a pour objet de familiariser le lecteur avec la décomposition en ondelettes de signaux univariés. Sa vocation est pratique et se basera essentiellement sur l'analyse de signaux classiques pour apprendre à reconnaître des formes.

Les signaux intéressants présentent en général, de nombreuses caractéristiques non stationnaires qui constituent une part importante de l'information contenue dans la série : dérive, tendance, ruptures, début et fin d'événements, phénomènes transitoires.

La plupart des approches mathématiques utilisées sont adéquates pour l'étude des processus stationnaires. On peut citer l'approche spectrale liée à la transformée de Fourier et celle issue des processus ARMA (cf. Azencott, Dacunha-Castelle 84 et Box, Jenkins 76).

De nouvelles méthodes élaborées et mises au point ces dernières années, unifient, généralisent des idées et des pratiques empiriques plus anciennes (cf. Flandrin, exposé n° 6 de Lemarié 90), et permettent d'analyser des signaux non-stationnaires. La transformée en ondelettes fait partie ce ces dernières, et son principe est de décrire, en fournissant des informations sur la régularité locale, l'évolution temporelle d'un signal à différentes échelles de temps.

Le paragraphe 2 présente succinctement les ondelettes ainsi qu'un algorithme de décomposition-reconstruction d'un signal univarié, simple et efficace dû à S. Mallat.

Le paragraphe 3 dresse la liste des signaux analysés. Les signaux choisis sont les signaux de base figurant classiquement dans les modèles de décomposition de séries temporelles non stationnaires.

Enfin dans le paragraphe 4 les essais et les résultats sont commentés. Les nombreux exemples élémentaires montrent l'usage que l'on peut faire d'un tel outil pour le traitement des séries temporelles et ont pour objet de constituer un début de «livre d'images» associé à des situations classiques.

2. La transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes est une transformée intégrale, comme les transformées de Fourier ou de Laplace, et est souvent présentée comme une alternative à la transformée de Fourier. Sa construction provient de deux limitations de l'analyse de Fourier : l'une abstraite liée à l'impossibilité d'analyser et de caractériser certains espaces fonctionnels (cf. Meyer 90); l'autre concrète dans le domaine du traitement du signal, issue de la difficulté à analyser localement des signaux non-stationnaires (cf. Flandrin dans Lemarié 90 p. 81). De nombreux textes de présentation de la théorie des ondelettes sont disponibles, on peut citer entre autres les trois premiers exposés dans Lemarié 90, Mallat 89, Daubechies 88, Strang 89, Gasquet- Witomski 90 et bien sûr le livre d'Y. Meyer.

Ce qui suit en présente rapidement des aspects partiels en se centrant sur le cadre géométrique des analyses multirésolution, les bases orthonormées d'ondelettes et l'algorithme de décomposition-reconstruction de Mallat.

2.1 Notion d'ondelettes

Soit Ψ une fonction choisie ici suffisamment régulière et bien localisée. Cette fonction sera appelée ondelette mère si elle vérifie la condition suivante :

$$\int_R \Psi(x)dx = 0$$

Cette condition (minimale) est souvent renforcée en :

$$\int_R x^k \Psi(x) dx = 0 \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant m$$

Pour fixer les idées, A. Grossman et J. Morlet (cités dans Meyer 90 p. 15) disent qu'une ondelette oscille, pendant un certain temps comme une onde mais est ensuite localisée grâce à un amortissement. L'oscillation d'une ondelette se mesure par le nombre $(m+1)$ de moments nuls.

A partir de cette unique fonction Ψ, on construit par translation et dilatation, une famille de fonctions qui sont les ondelettes de base :

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \Psi((x-b)/a) \quad a \in R^*, b \in R \tag{1}$$

Pour une fonction f de $L^2(R)$ on définit sa *transformée en ondelettes* continue par la fonction W_f définie par :

$$W_f(a,b) = (f, \Psi_{a,b}) \quad a \in R^*, b \in R \tag{2}$$

où (.,.) est le produit scalaire dans $L^2(R)$.

Il convient d'observer que si f est une fonction constante, ses coefficients d'ondelettes sont nuls. Les coefficients d'ondelettes mesurent les fluctuations (à l'échelle $|a|$) de la fonction f. La tendance à l'échelle $|a|$ est essentiellement éliminée dans (2).

Calculer cette fonction revient à faire l'*analyse* de f par l'ondelette Ψ (parfois appelée ondelette analysante). Elle permet une analyse locale de f ainsi que la mise en évidence d'effets d'*échelle*. En effet, supposons que Ψ soit nulle en dehors de $[-M, +M]$, alors $\Psi_{a,b}$ est nulle en dehors de $[-M|a|+b, M|a|+b]$. Par conséquent, la valeur de $W_f(a,b)$ dépend des valeurs de f dans un voisinage de b de longueur proportionnelle à a (notons que la valeur de la transformée de Fourier de f en un point, dépend des valeurs de f sur R tout entier).

Qualitativement les grandes valeurs de $W_f(a,b)$ fournissent une information sur l'irrégularité locale de f, autour de b à l'échelle a, car l'analyse en ondelettes est une analyse des fluctuations de f à toutes les échelles (pour plus de détails cf. Meyer 90 p. 110).

On dispose d'une formule de reconstruction permettant de faire la *synthèse* de f à partir de W_f. On peut imposer diverses conditions supplémentaires à Ψ en fonction des objectifs : décroissance rapide, dérivabilité, moments nuls jusqu'à un certain ordre, support compact.

Il est naturel de chercher à remplacer la famille redondante des fonctions $\Psi_{a,b}$ où $a \in R^*$ et $b \in R$ par une famille dénombrable, en se restreignant à des valeurs discrètes de a et b dans (1). Plus précisément on choisit un pas de dilatation $\alpha > 1$ et un pas de translation $\beta \neq 0$ et on prend a de la forme α^{-n}, $n \in Z$ et b de la forme $k\beta\alpha^{-n}$, $n, k \in Z$. En pratique, on prend le plus souvent $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Ceci conduit

à analyser f à l'aide des fonctions suivantes :

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k) \quad j,k \in Z \tag{3}$$

par la suite indexée par Z^2 suivante :

$$C_f(j,k) = (f, \Psi_{j,k}) \quad j,k \in Z \tag{4}$$

Formulons deux exigences sur les outils définis ci-dessus : assurer l'existence d'une formule de reconstruction de f à partir de (4) et une analyse non redondante. Elles conduisent à choisir Ψ de sorte que $\{\Psi_{j,k}, j,k \in Z\}$ soit une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(R)$.

2.2 Analyses multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes

Supposons donc que $\{\Psi_{j,k}, j,k \in Z\}$ soit une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(R)$ où $\Psi_{j,k}$ est donnée par (3).

Organisons les outils d'analyse (*i.e.* les ondelettes) par niveaux d'échelle. Pour tout j de Z, notons W_j le sous-espace fermé engendré par la famille $\{\Psi_{j,k}, k \in Z\}$, des ondelettes d'échelle $1/2^j$. On a alors :

$$L^2(R) = \mathop{\oplus}_{j \in Z} W_j \tag{5}$$

On introduit ensuite les espaces d'approximation V_j suivants :

$$V_{m+1} = \mathop{\oplus}_{j \leqslant m} W_j, m \in Z \tag{6}$$

En d'autres termes V_{m+1} est engendré par les ondelettes d'échelle plus grossière que $1/2^m$. On a les deux conséquences suivantes :

$$V_j \subset V_{j+1}, j \in Z \tag{7}$$
$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in Z \tag{8}$$

traduisant le fait que V_j est un espace d'approximation «plus grossier» que V_{j+1}, et que la différence entre ces deux espaces d'approximation successifs est constituée précisément des ondelettes d'échelle $1/2^j$. Il suit que pour une fonction f de $L^2(R)$ donnée, la suite des projections orthogonales de f sur les V_j fournit une suite d'approximations de plus en plus fines de f.

Les espaces $(V_j, j \in Z)$ constituent ainsi une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(R)$ vérifiant en outre (par (3), (5), (6) et le fait que les $\Psi_{j,k}$ forment une base orthonormée) :

(i) $\forall j \in Z, v(.) \in V_j \Leftrightarrow v(2.) \in V_{j+1}$

(ii) V_0 est invariant par translation entière

(iii) $\bigcup_{j\in Z} V_j$ est dense dans $L^2(R)$ et $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$.

P.G Lemarié-Rieusset et P. Auscher (cf. Lemarié-Rieusset 92 et Ausher 92) ont démontré que si les $\Psi_{j,k}$ forment une base orthonormée d'ondelettes où Ψ est suffisamment régulière et bien localisée, alors :

(iv) V_0 admet une base orthonormée de la forme $\{\Phi(x-k), k \in Z\}$, où Φ est régulière et bien localisée.

La suite $(V_j, j \in Z)$ est alors une *analyse multirésolution* de $L^2(R)$. La fonction Φ est appelée le *père des ondelettes*.

Le résultat est qu'inversement, à partir d'une analyse multirésolution, *i.e.* une suite croissante de sous-espaces fermés vérifiant (i) à (iv), on peut construire les W_j, Ψ et les $\Psi_{j,k}$.

En particulier on établit que pour tout j fixé, $\{\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Phi(2^j x - k), k \in Z\}$ est une base orthonormée de V_j et que $\{\Psi_{j,k} = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k), k \in Z\}$ est une base orthonormée de W_j.

On s'intéresse maintenant à l'analyse d'une fonction F de $L^2(R)$. On peut écrire, grâce à (5) et (6) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m(\varepsilon)$ tel que $\|F - Proj_{Vm}(F)\| \leqslant \varepsilon$, dès que $m \geqslant m(\varepsilon)$. Quitte à renuméroter les V_j, on peut supposer que l'approximation f de F appartient à V_0.

On va décomposer f en partant de $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$, les deux espaces étant orthogonaux. On projette alors orthogonalement sur les deux sous-espaces :

$$f = T_{-1}(f) + D_{-1}(f) \tag{9}$$

où $T_{-1}(f) = Proj_{V_{-1}}(f)$ est appelé la *tendance* de *niveau* -1, et $D_{-1}(f) = Proj_{W_{-1}}(f)$ est appelé le *détail* de niveau -1.

La terminologie tendance et détail est justifiée par le fait que la tendance est une approximation («basse fréquence») de f par des fonctions plus simples tandis que le détail correspond à une correction («haute fréquence») entre deux approximations successives (cf. Lemarié 90 p. 21 et 34).

Puis on itère en décomposant la tendance de niveau $-j$, en la tendance de niveau $-j-1$ corrigée par le détail de niveau $-j-1$, en utilisant $V_{-J} = V_{-j-1} \oplus W_{-j-1}$.

Donc pour j fixé, on peut écrire $V_0 = V_{-j} \oplus (W_{-j} \oplus ... \oplus W_{-1})$ et f se décompose en la somme de la tendance de niveau $-j$ (approximation de f à l'échelle 2^{-j}), et des détails des niveaux $-j$ à -1 (suite des corrections aux échelles 1/2 à 2^{-J}).

Inversement, connaissant la décomposition précédente d'une fonction f de V_0, on peut reconstruire f. Examinons maintenant l'algorithme permettant d'effectuer ces décompositions.

2.3 L'algorithme de décomposition-reconstruction.

L'algorithme de Mallat (cf. Mallat 89) prolonge les algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson, décrits par exemple dans Daubechies 88. Il permet d'effectuer une décomposition rapide (de complexité linéaire), ainsi qu'une reconstruction.

Supposons donnée la suite $T_0 = (T_{0,k}, k \in Z)$ des coefficients de la décomposition de f sur la base de V_0, c'est-à-dire $T_{0,k} = (f, \Phi_{0,k}), k \in Z$.

La *décomposition* s'effectue par un algorithme en cascade procédant par filtrages successifs. En notant T_{-j} (resp. D_{-j}) la suite des coefficients de la tendance (resp. du détail) de niveau $-j$, on passe au niveau suivant simplement par :

$$T_{-j-1,k} = \sum_{n \in Z} T_{-j,n} h(n-2k), \forall k \in Z \tag{10}$$

$$D_{-j-1,k} = \sum_{n \in Z} D_{-j,n} g(n-2k), \forall k \in Z \tag{11}$$

dans lesquelles h et g sont définies par :

$$h(x) = \sqrt{2} \int_R \Phi(2s-x)\Phi(s)ds, \forall x \in R \tag{12}$$

$$g(x) = \sqrt{2} \int_R \Phi(2s-x)\Psi(s)ds, \forall x \in R \tag{13}$$

C'est-à-dire que l'on passe de la suite T_{-j} à la suite T_{-j-1} (resp. D_{-j} à D_{-j-1}) par *filtrage* puis *sous-échantillonnage* en ne conservant que les termes pairs de la suite obtenue; c'est une agrégation.

Inversement, pour la *reconstruction* on a :

$$T_{-j,n} = \Sigma_{k \in Z} T_{-j-1,k}\, h(n-2k) + \Sigma_{k \in Z} D_{-j-1,k}\, g(n-2k), \forall n \in Z \tag{14}$$

Autrement dit, on insère la valeur 0 entre deux termes consécutifs de T_{-j-1} puis on filtre la suite obtenue, on fait de même avec D_{-j-1}, et on fait la somme.

Les algorithmes de décomposition et de reconstitution proposés par S. Mallat sont utilisés dans le paragraphe 4, ils ont été programmés en Matlab.

Faisons quelques remarques sur l'algorithme :

– A partir de deux fonctions Φ et Ψ, on construit les deux suites $H = (h(n), n \in Z)$ et $G = (g(n), n \in Z)$. On peut alors mettre en œuvre l'algorithme de Mallat. En fait, il suffit de partir de deux suites H et G pour cela mais bien entendu, sans condition supplémentaire, la partie «reconstruction» n'a aucune chance de redonner la suite initiale.

On peut mettre en évidence certaines propriétés que doivent posséder les suites H et G pour permettre la phase de reconstruction (voir Daubechies 88, Mallat 89, Cohen 90). Dans Cohen 90, les liens entre d'une part les filtres miroirs en quadrature (c'est-à-dire pratiquement les suites H et G) et d'autre part les analyses

multirésolution sont étudiés. On consultera aussi pour ce qui est de l'analyse de l'espace $l^2(Z)$ et les transformées en ondelettes discrètes, le chapitre 2 de Cohen 90 et Rioul, Duhamel 91.

– Dans les calculs, on utilise souvent les suites H et G obtenues à partir des ondelettes à support compact dues à Daubechies. On les note daubN. La réponse impulsionnelle du filtre associé à daubN contient $2N$ termes non nuls; on peut trouver les valeurs de ces termes pour $N = 1, ..., 10$, dans Daubechies 88, elles sont disponibles pour des ordres plus élevés par exemple dans le logiciel Megawave (cf. Froment 90). Ils ont été utilisés parfois pour de grandes valeurs de N (cf. Nicolas, Lefebvre 91). Outre que ces ondelettes sont à support compact, elles vérifient en particulier deux autres propriétés :

– l'ondelette daubN a N moments nuls, *i.e.*

$$\int_R \Psi(x) x^n dx = 0 \text{ pour } n = 0, 1, ..., N-1 \tag{15}$$

– on caractérise la régularité des ondelettes à support compact par l'appartenance de Φ et de Ψ à $C^\alpha, \alpha \in R_+$. Voici quelques valeurs pour les ondelettes daubN :

daub1(Haar)	L^2
daub2	$C^{0,5}$
daub3	$C^{0,91}$
daub4	$C^{1,27}$
daub5	$C^{1,59}$
daub7	$C^{2,15}$
daub10	$C^{2,90}$

(16)

– En pratique, pour décomposer un signal discret, on choisit usuellement de l'assimiler aux coordonnées dans la base de V_0. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 4, notons cependant que d'autres choix sont possibles comme par exemple une interpolation suivie d'une projection. D'autre part, le phénomène est observé sur un intervalle de temps fini. Ceci induit des effets de bord qui sont des effets locaux, d'autant plus faibles que le support de l'ondelette analysante est «petit» et que le niveau de résolution est élevé. Signalons que le problème que nous venons de soulever a été résolu dans Cohen *et al.* 93, en outre l'algorithme présenté (ondelettes sur l'intervalle) est bien conditionné au bord de l'intervalle.

Mentionnons enfin que si la trajectoire discrète disponible est de longueur L, les coefficients d'ondelettes qui sont les coordonnées dans la base de W_{-j}, *i.e.* le détail de niveau $-j$, sont au nombre d'environ $L/2^j$, de même pour la tendance correspondante. Ces suites replongées (on dira aussi remontées) dans V_0, c'est-à-dire que l'on se place par changement de base dans le même espace que le signal de base (en utilisant les inclusions des V_{-j} et W_{-j} dans V_0 pour $j > 0$), sont bien sûr de longueur L.

3. Les signaux analysés

Nous présentons dans ce paragraphe les signaux qui seront analysés et dont les résultats sont l'objet du paragraphe 4. Les graphiques de ces signaux sont regroupés dans deux planches en fin de paragraphe.

Ils sont classés par thèmes illustrant une ou plusieurs des possibilités de la décomposition en ondelettes.

3.1 Apprendre à lire une décomposition : «les classiques».

Il s'agit dans ce paragraphe d'opposer transformée en ondelettes et transformée de Fourier. D'où les deux signaux analysés :

s_1 : «une somme de sinus» (une superposition de fréquences)

$s_1(t) = \sin(3t) + \sin(0,3t) + \sin(0,03t), t = 1, ..., 1000$

s_2 : «deux sinus côte à côte» (une rupture de fréquence)

$s_2(t) = \sin(0,03t), t = 1, ..., 500$

$s_2(t) = \sin(0,3t), t = 501, ..., 1000$

3.2. Les bruits

On se propose d'abord ici d'examiner la décomposition en ondelettes de deux bruits : l'un blanc et l'autre coloré :

b_1 : «un bruit blanc»

$(b_1(t), t = 1$ à $1000)$ bruit blanc uniforme centré

b_2 : «un AR(3)»

$(b_2(t), t = 1$ à $1000)$

On propose ensuite de voir les conséquences d'une propriété des ondelettes de Daubechies : le nombre de moments nuls (cf. (15)) en examinant le signal suivant :

s_3 : «un polynôme bruité»

$s_3(t) = t^2 - t + 1 + b_1(t)$ pour t de 1 à 1 000 par pas de 1

3.3. Apprendre à détecter les ruptures et les discontinuités

Les signaux suivants contiennent des ruptures ou des discontinuités des dérivées première ou seconde des fonctions sous-jacentes et permettent d'illustrer la capacité des ondelettes à les mettre en évidence :

f_1 : «un échelon»

f_2 : «deux discontinuités proches»

$f_2(t) = 3t, t < 500$

$f_2(t) = 3t - 30, t > 510$

$f_2(t) = 1500$ sinon

f_3 : «une discontinuité de la dérivée seconde»

$f_3(t) = \exp(-4t^2), t < 0$

$f_3(t) = \exp(-t^2), t \geqslant 0$ sur $[-0.5, +0.5]$ échantillonnée à 10^{-3}

f_4 : «une rampe plus un bruit blanc»

$f_4(t) = 3t/500 + b_1(t), t < 500$

$f_4(t) = 3 + b_1(t), t \geqslant 500$

f_5 : «une rampe plus un bruit AR»

$f_5(t) = t/500 + b_2(t), t < 500$

$f_5(t) = 1 + b_2(t), t \geqslant 500$

3.4 Apprendre à décomposer en tendance + composante saisonnière + bruit

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la décomposition de deux types de signaux :

– trois signaux simulés obtenus en sommant des signaux déjà analysés (ceci permettra d'illustrer la propriété de sommation des analyses), et se prêtant à une décomposition additive classique en tendance, composante saisonnière et bruit;

– un signal réel qui est extrait de la courbe de charge électrique de juin 90 d'EDF. Le pas d'échantillonnage est de une minute et la valeur de la chronique est la consommation d'électricité sur le territoire français métropolitain mesurée en dizaines de Mw. L'objectif de description a conduit à faire une analyse multiéchelle de ce signal (pour plus de détails cf. Malgouyres *et al.* 90 ainsi que Misiti *et al.* 91).

Les signaux analysés sont les suivants :

S_1 : «un sinus + un bruit»

$S_1(t) = \sin(0,03t) + b_1(t)$

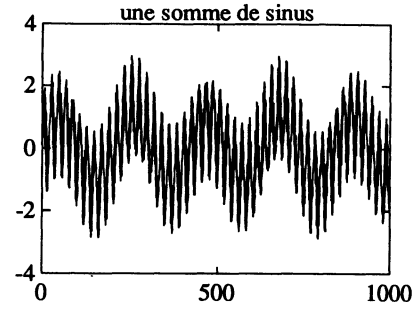
S_2 : «un triangle + un sinus»

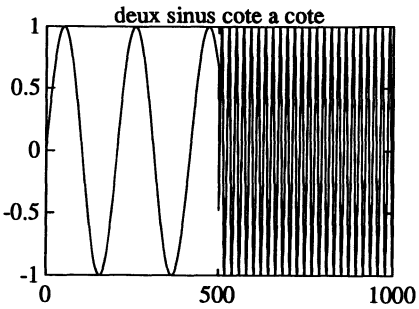
$S_2(t) = tr(t) + \sin(0,3t)$

S_3 : «un triangle + un sinus + un bruit»

$S_3(t) = tr(t) + \sin(0,3t) + b_1(t)/3$

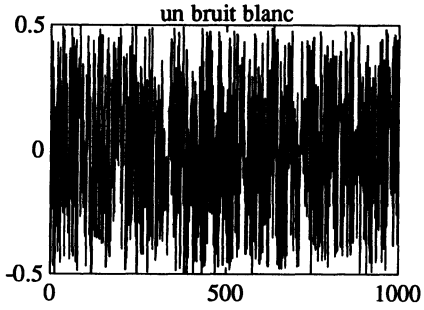
S : «un signal réel : un extrait d'une courbe de charge électrique»

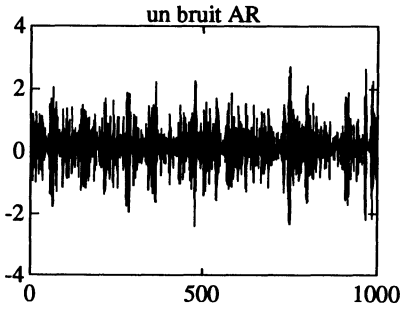


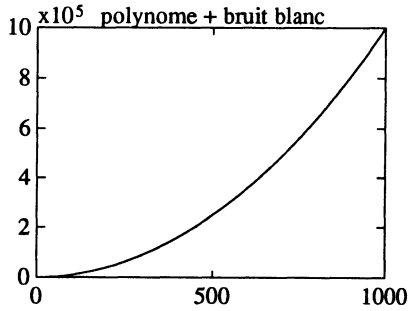


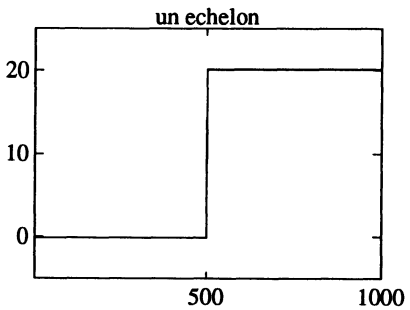
une superposition de frequences

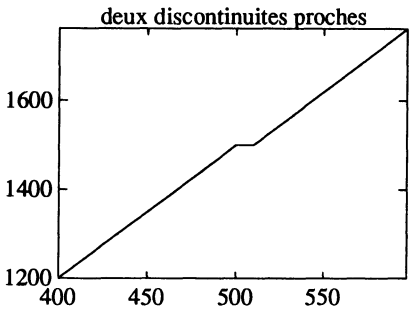
une rupture de frequence

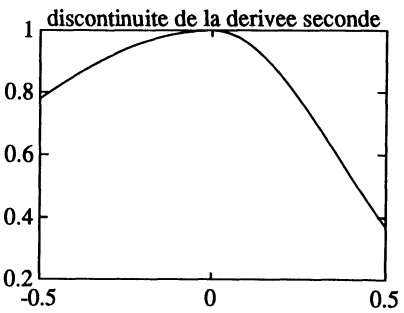


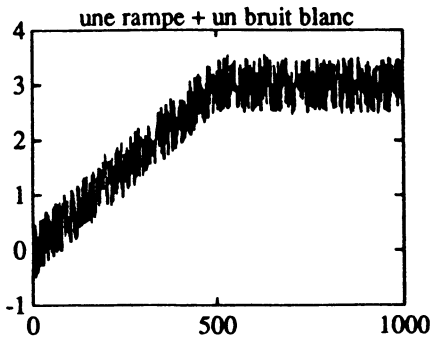


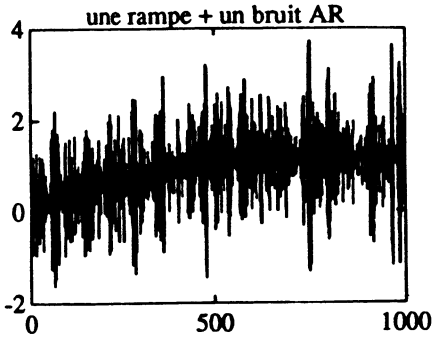


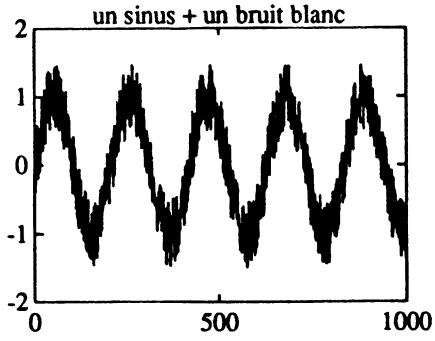


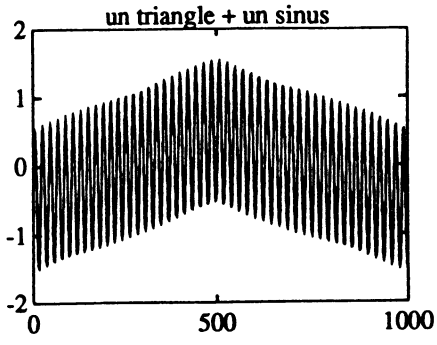


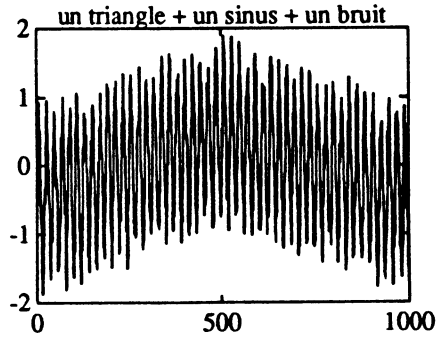


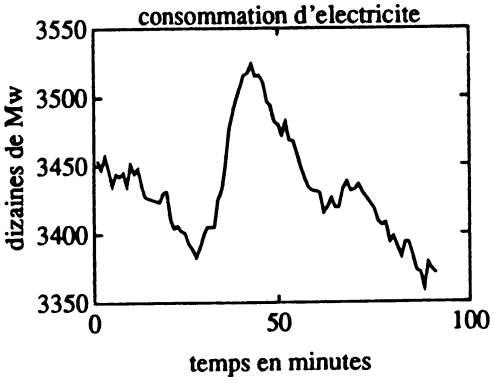

une rampe + un bruit blanc
4
3
2
1
0
-1
0
500
1000


une rampe + un bruit AR
4
2
0
-2
0
500
1000


un sinus + un bruit blanc
2
1
0
-1
-2
0
500
1000


un triangle + un sinus
2
1
0
-1
-2
0
500
1000


un triangle + un sinus + un bruit
2
1
0
-1
-2
0
500
1000


consommation d'electricite
dizaines de Mw
3550
3500
3450
3400
3350
0
50
100
temps en minutes

4. Les résultats

Nous employons dans les analyses les seules ondelettes suivantes : daub1 (ou Haar), daub2, ..., daub10. Elles sont les plus utilisées comme nous l'avons déjà signalé, d'autres ondelettes comme les ondelettes splines symétriques d'ordre 2 et 4, ont été essayées et donnent essentiellement des résultats semblables.

Cependant ce travail peut être complété utilement par l'expérimentation des nombreuses autres ondelettes disponibles dans des logiciels comme Megawave (cf. Froment 90).

Classiquement on manipule deux sortes d'objets :

– les coefficients d'ondelettes (*i.e.* de détails); ils sont surtout utiles pour la reconnaissance de ruptures ou discontinuités. Ce sont les coordonnées dans les bases orthonormées des W_k, qui sont répétées 2^k fois et translatées pour corriger l'effet de phase non linéaire des filtres associés au calcul, de façon à permettre une lecture synchrone avec le signal. Elles ne seront pas utilisées ici, car elles apportent au mieux autant d'informations que les signaux replongés du point de vue qui nous occupe.

– les détails et tendances remontés dans le temps initial : les coefficients de ces suites dans la base de V_0, homogènes au signal initial. L'examen simultané des tendances et des détails s'avère très utile pour l'aspect multiéchelle et nous insisterons sur ce point, particulièrement du point de vue pratique. Cette idée nous amène à centrer les traitements sur cet aspect que nous allons maintenant préciser.

On décompose donc le signal traité S (que l'on assimile aux coordonnées dans V_0 comme mentionné en 2.3) en une somme de signaux orthogonaux correspondant à des échelles de temps différentes, c'est à dire :

$$S = T(-j) + D(-1) + D(-2) + ... + D(-j)$$

où $T(-j)$ est la tendance de niveau $-j$, contenant les composantes de S de «période» supérieure à 2^j pas de base, et où $D(-k)$ est le détail de niveau $-k$, contenant les composantes du signal de «période» comprise entre 2^{k-1} et 2^k pas de base.

Pour chacun des signaux, on examine (sauf mention contraire) parallèlement : les détails $D(-1)$ à $D(-j)$ de haut en bas dans cet ordre et sur un seul graphique à une échelle commune (seule l'échelle est portée en ordonnée) et en regard les tendances $T(-1)$ à $T(-j)$, pour j adéquat. Les commentaires sont intégrés en haut des planches.

Chaque signal est analysé sur une planche autonome et selon un canevas commun constitué des rubriques suivantes : on précise le signal analysé, l'ondelette analysante, le nombre de niveaux de décomposition, puis des commentaires des graphiques accompagnés de compléments éventuels à expérimenter par le lecteur.

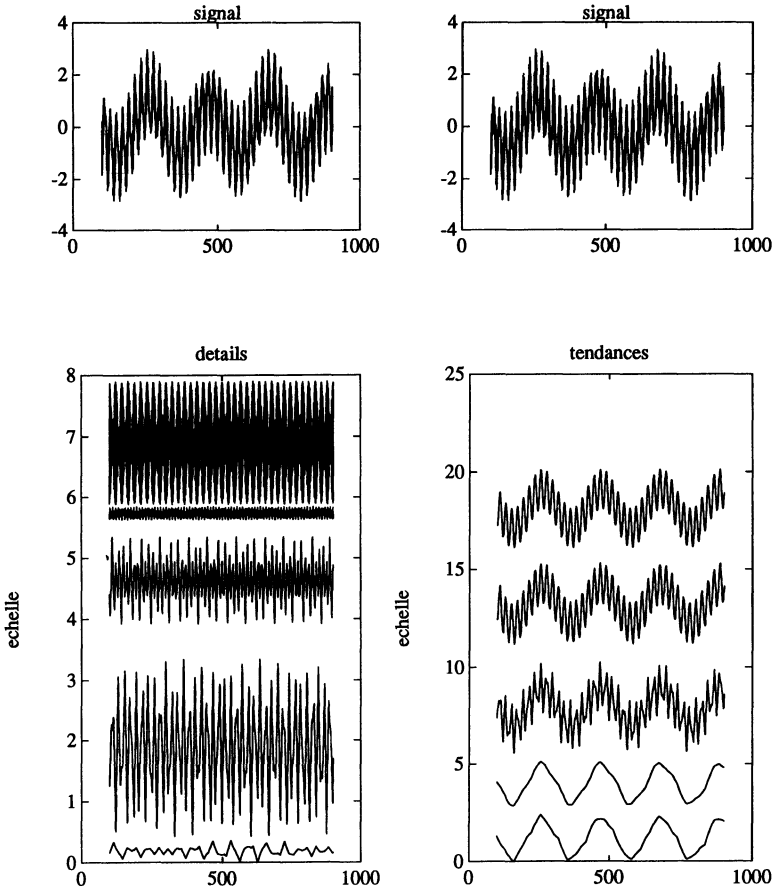
Signal analysé : «une somme de sinus», $s_1(t) = \sin(3t) + \sin(0,3t) + \sin(0,03t)$.

Ondelette analysante : **daub3**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est constitué de la somme de trois sinus : «lent», «moyen» et «rapide» vis-à-vis du pas d'échantillonnage de 1, les périodes correspondantes sont environ 200, 20 et 2 respectivement. On devrait donc voir ce dernier dans $D(-1)$, le sinus moyen dans $D(-4)$ et le sinus lent dans $T(-4)$. Les légères différences constatées sur les décompositions sont dues au pas d'échantillonnage. L'échelle des graphiques des tendances est trois fois plus petite que celle des détails.

$D(-1)$ contient principalement les composantes de s_1 de période comprise entre 1 et 2, c'est-à-dire le sinus «rapide», mais sa période n'est pas visible à l'échelle des graphiques. Un zoom de $D(-1)$ fait apparaître que chaque «ventre» est constitué de 10 oscillations, et permet de l'estimer. On trouve une période voisine de 2. $D(-2)$ est très faible. Ceci se retrouve sur les tendances : les deux premières se ressemblent car $T(-1) = T(-2) + D(-2)$. $D(-3)$ et surtout $D(-4)$ contiennent le sinus «moyen». On observe en effet une rupture entre les tendances -3 et -4. Les tendances -1 à -3 permettent d'estimer la période du sinus moyen. Ainsi il ne reste plus que le sinus «lent» qui apparaît dans $T(-4)$. La distance entre deux maximums successifs est de 200 qui est la période du sinus lent. Ce dernier, encore visible dans T(-5) disparaîtrait de la tendance pour passer dans le détail au niveau -8.

Compléments : essayer d'autres ondelettes, peu de changements sont notables.



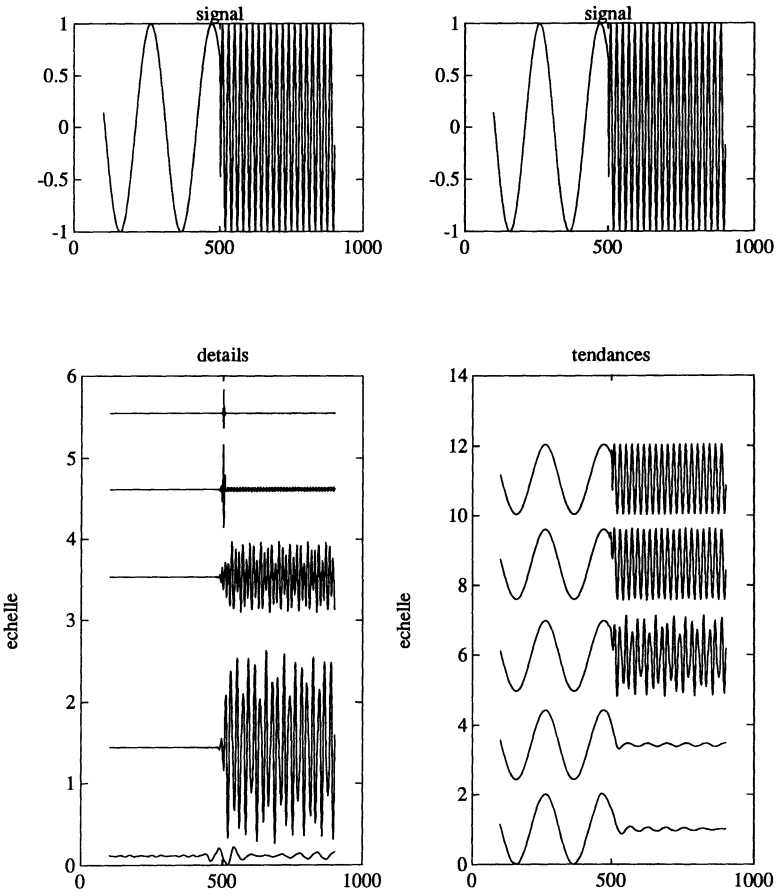
Signal analysé : «deux sinus côte à côte, une rupture de fréquence», $s_2(t) = \sin(0,03t)$ **pour** $t \leqslant 500$**, et** $s_2(t) = \sin(0,3t)$ **pour** $t > 500$.

Ondelette analysante : **daub5**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est constitué d'un sinus «lent» et d'un sinus «moyen», de part et d'autre de l'instant 500. Ces deux sinus ne sont pas raccordés de façon continue : $D(-1)$ et $D(-2)$ permettent de détecter cette discontinuité. Elle est très précisément localisée : seule une petite zone autour de l'instant 500 contient des détails grands. Ceci vient du fait que le reste du signal n'a pas de fréquences aussi hautes. Notons que si l'on s'interesse exclusivement au repérage de la discontinuité, daub1 serait plus utile que daub5.

$D(-3)$ et $D(-4)$ contiennent le sinus «moyen» comme dans l'analyse précédente. Le sinus «lent» apparaît dans $T(-4)$. Il est plus régulier que lors de l'analyse de s_1, à cause de la régularité de daub5, plus grande que celle de daub3. Le même signal analysé par la transformée de Fourier n'aurait pas permis de détecter l'instant de changement de fréquence du signal, clairement mis en évidence ici.

Compléments : essayer d'autres ondelettes, peu de changements sont notables.

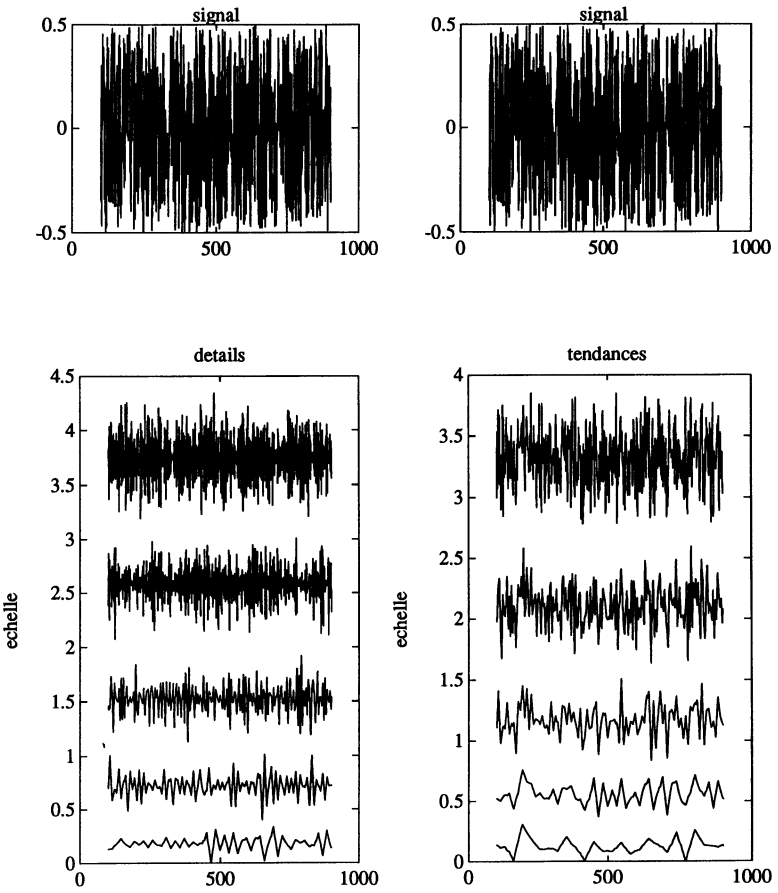


Signal analysé : «un bruit blanc uniforme», $b_1(t)$.

Ondelette analysante : **daub3**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : on retrouve à tous les niveaux des signaux assimilables à des bruits qui, comme on le voit, sont irréguliers. Ceci est dû au fait que le bruit blanc charge toutes les fréquences avec la même énergie. Les variances en revanche, diminuent régulièrement entre un niveau et le suivant, comme en témoigne une lecture de haut en bas des graphiques des détails (à gauche) et des tendances (à droite). La diminution de variance est d'un facteur 2 entre deux niveaux successifs, *i.e.* var $D(j) = 2\text{var}D(j-1)$. L'effet d'un tel bruit s'estompe donc aux basses résolutions. Notons enfin que les détails et les tendances ne sont pas des bruits blancs et que ces signaux sont de plus en plus dépendants à mesure que la résolution décroît. En revanche, les coefficients d'ondelettes sont des variables aléatoires non corrélées. Cette propriété n'est pas lisible sur les signaux remontés examinés ici.

Compléments : essayer un bruit blanc gaussien et des ondelettes plus «longues».

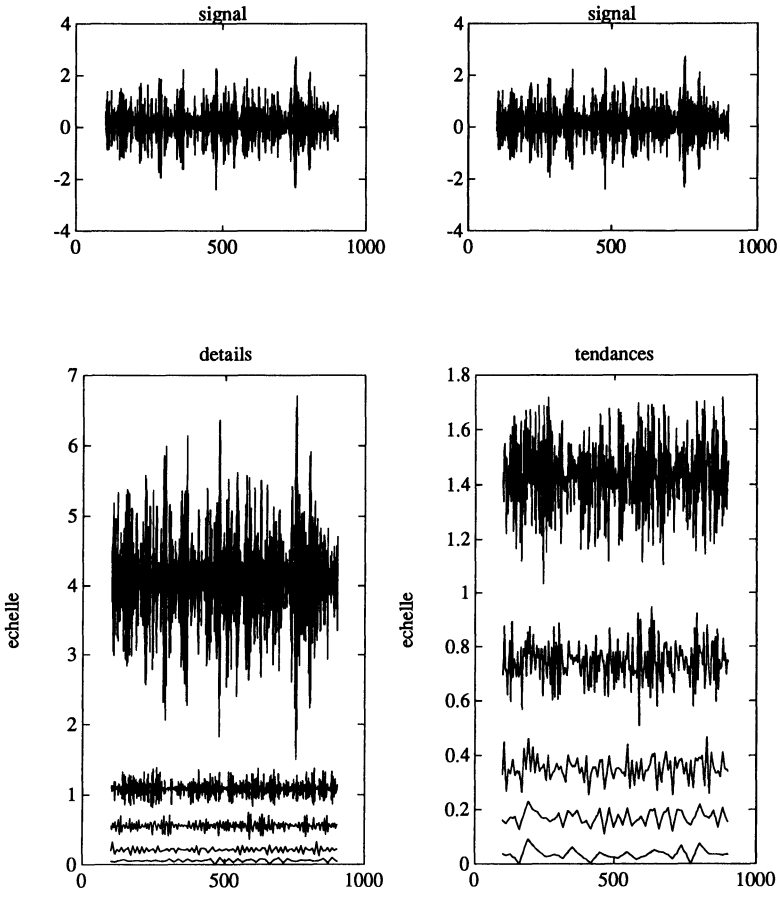


Signal analysé : «un bruit AR(3)», $b_2(t)$.

Ondelette analysante : **daub3**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : cette planche est à examiner en regard de la précédente car contrairement au cas du bruit blanc, on est en présence ici d'un bruit coloré dont le spectre charge essentiellement les hautes fréquences. On le retrouve donc principalement dans $D(-1)$ qui contient l'essentiel du signal (les détails sont à une échelle plus grande sur les graphiques que les tendances). Dans cette situation, fréquente en pratique, ses effets dans l'analyse s'estompent beaucoup plus rapidement que dans le cas du bruit blanc. On retrouve dans $T(-3)$, $T(-4)$ et $T(-5)$ le même schéma que dans l'analyse de b_1, bruit à partir duquel b_2 est construit par filtrage linéaire.

Compléments : essayer d'autres ARMA.

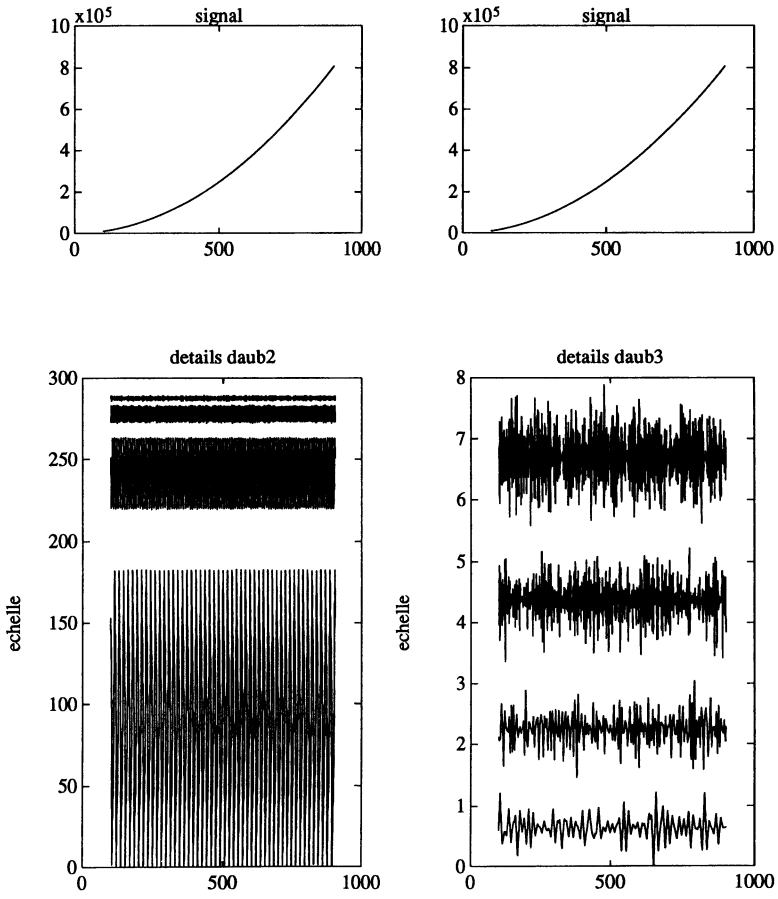


Signal analysé : «un polynôme + un bruit blanc» : $s_3(t) = t^2 - t + 1 + b_1(t)$.
Ondelettes analysantes : **daub2** et **daub3**, 4 niveaux de décomposition.

Commentaires : cette analyse vise à illustrer la propriété (15) qui implique que la décomposition par daubN d'un polynôme de degré p donne des détails nuls pourvu que $N > p$. Ici $p = 2$ et on examine les quatre premiers niveaux de détails pour deux valeurs de N : l'une trop petite, $N = 2$ à gauche et l'autre suffisante, $N = 3$ à droite. Les tendances sont omises car elles diffèrent très peu du signal.

Pour daub2 (à gauche) on a la décomposition de $t^2 + b_1(t)$ puisque $-t + 1$ est orthogonal à l'ondelette. En fait hormis au niveau -1 où l'on distingue les irrégularités dues au bruit, les détails de niveau -2 à -4 ont une allure périodique très régulière et croissent en fonction du niveau. Ceci s'explique par le fait que le détail de niveau k rend compte essentiellement des fluctuations de la fonction t^2 autour de sa moyenne sur les intervalles dyadiques de longueur 2^k. Celles-ci sont périodiques et d'un ordre de grandeur élevé vis-à-vis des détails de la décomposition du bruit. Au contraire pour daub3 (à droite) on retrouve l'analyse du bruit blanc $b_1(t)$ vue auparavant, car le polynôme est orthogonal à l'ondelette et n'intervient donc dans aucun des détails. L'ondelette supprime la partie polynômiale et analyse le bruit.

Compléments : faire la somme de s_2 et s_3 et la décomposer.



Signal analysé : «un échelon» : f_1.

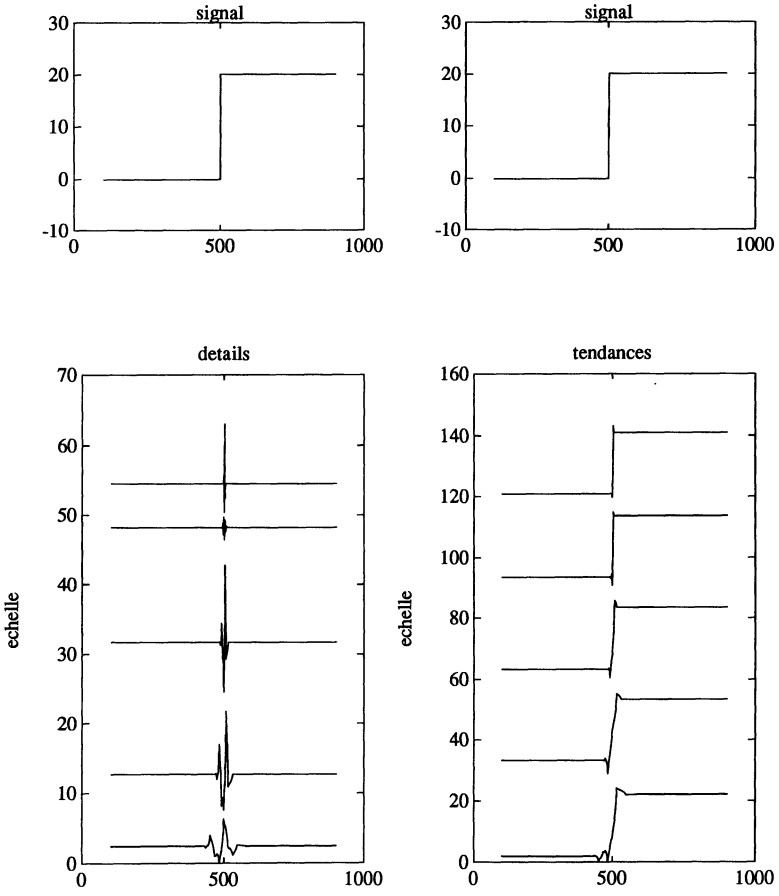
Ondelette analysante : **daub2**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : on traite ici l'exemple le plus simple de rupture : une fonction étagée. L'instant de saut est 500. La rupture est détectée à tous les niveaux mais bien entendu avec plus de précision aux hautes résolutions (niveaux -1 et -2) qu'aux basses (niveaux -4 et -5). Elle est très précisément localisée au niveau -1 où seule une toute petite zone autour de l'instant du saut est visible.

Remarquons que les détails remontés contiennent en fait chacun, essentiellement une ondelette de base remontée dans V_0.

Notons enfin que la localisation de la rupture est d'autant meilleure que l'ondelette correspond à un filtre court.

Compléments : essayer d'autres ondelettes.

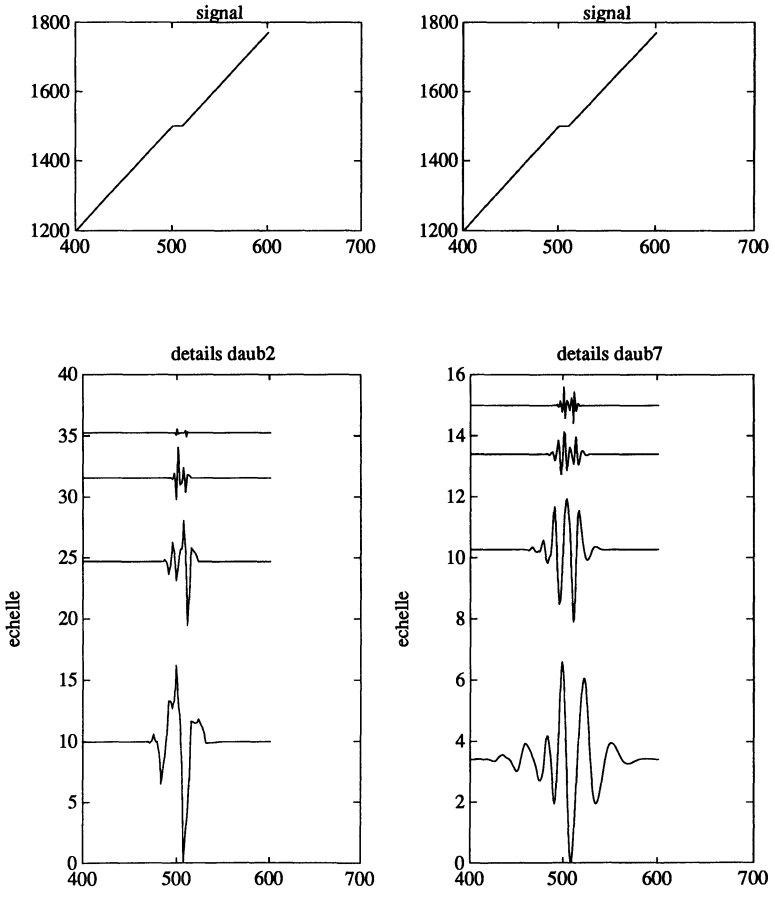


Signal analysé : «deux discontinuités proches» : f_2.

Ondelettes analysantes : **daub2** et **daub7**, 4 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est constitué de deux droites de même pente, de part et d'autre d'un palier très court. Le palier est d'ailleurs peu visible à l'œil nu sur le signal initial. Deux analyses sont faites, l'une avec une ondelette très localisée, filtre court, daub2 et l'autre avec une ondelette de filtre plus long : daub7. Dans les deux analyses le palier est très bien détecté : en dehors d'une zone restreinte $D(-1)$ est nul. En revanche la régularité du signal dans la palier est nette pour daub2 pour laquelle on distingue les instants de début et de fin de palier, tandis que pour daub7 les deux discontinuités sont agglomérées, seul le palier dans son entier est «visible». Cet exemple suggère de choisir des ondelettes associées à des filtres courts pour distinguer des discontinuités proches. L'examen des autres niveaux de détail illustre de nouveau l'imprécision de la détection aux basses résolutions. L'ondelette filtre la droite et analyse les discontinuités.

Compléments : essayer d'autres ondelettes.

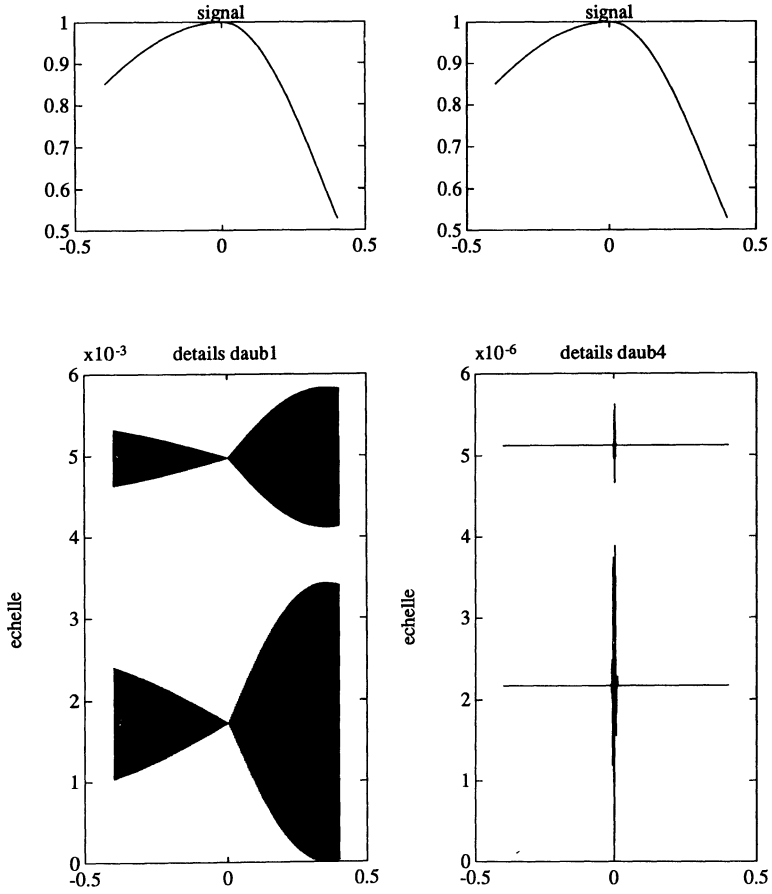


Signal analysé : «une discontinuité de la dérivée seconde» $f_3(t) = \exp(-4t^2), t < 0$ **et** $f_3(t) = \exp(-t^2), t \geqslant 0$.

Ondelettes analysantes : **daub1** et **daub4**, 2 niveaux de décomposition.

Commentaires : ceci vise à montrer que la régularité de l'ondelette (cf. (16)) peut être un élément important du choix. La fonction est constituée de deux exponentielles raccordées en 0 et le signal analysé est l'échantillonné de la fonction continue au pas de 10^{-3}. Elle est analysée par deux ondelettes différentes : daub1 (pas assez régulière) à gauche et daub4 (suffisamment régulière) à droite. A gauche avec daub1, la singularité n'est pas détectée au sens où les détails sont nuls en 0. Les zones noires correspondent à des oscillations très rapides des détails. Ceux-ci sont égaux à la différence entre la fonction et une approximation par une fonction constante par morceaux. La lente décroissance des détails lorsque t varie de $-0,5$ à 0 et la lente croissance à partir de 0 s'explique par le fait que la dérivée de f_3 est nulle et continue en 0. La valeur des détails est très petite (de l'ordre de 10^{-3} pour daub1 et 10^{-6} pour daub4) car f_3 est très lisse et ne comporte pas de hautes fréquences. Cet ordre de grandeur est encore plus faible pour daub4 car les fonctions de base associées sont plus régulières que pour daub1. Avec daub4, à droite, la discontinuité est au contraire bien détectée : les détails ne sont forts qu'en 0 et nuls partout ailleurs. C'est le seul élément qui ressort de l'analyse. Dans ce cas on note qu'il faut prendre une ondelette suffisamment régulière, ce qui se traduit par une réponse impulsionnelle du filtre plus longue, pour détecter la singularité.

Compléments : rajouter un bruit (s'il est de taille non négligeable, il masque la discontinuité et le repérage échoue); échantillonner moins finement (l'analyse est sensible au pas).

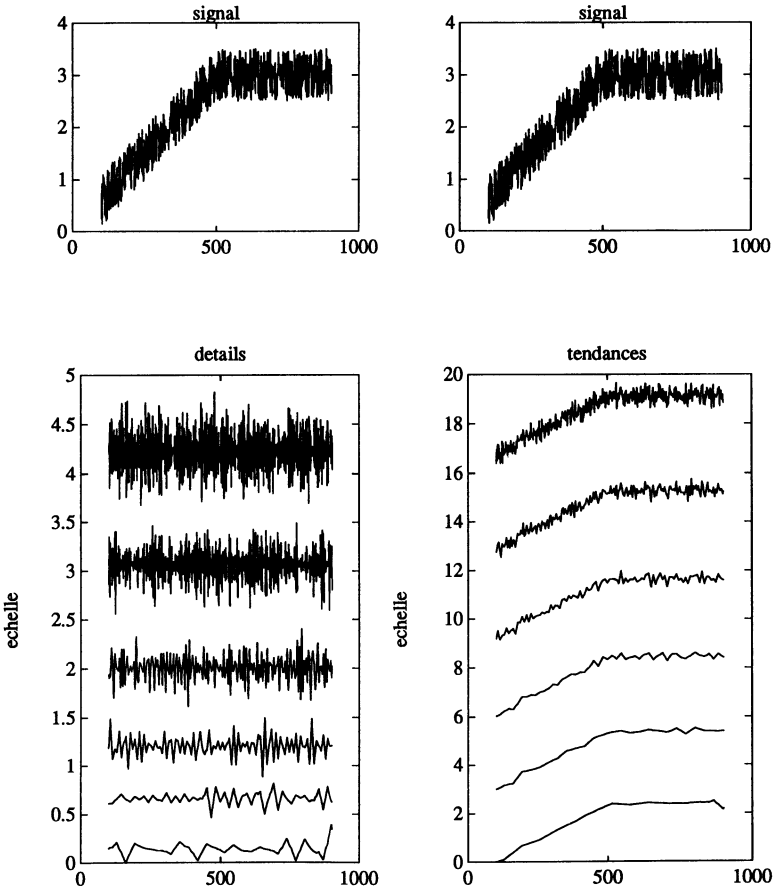


Signal analysé : «une rampe plus un bruit blanc» : f_4.

Ondelette analysante : **daub3**, 6 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est construit à partir du schéma «tendance» plus bruit. La «tendance» est une lente montée linéaire de 0 à 3 jusqu'à l'instant $t = 500$ et est constante après. Le bruit est le bruit blanc uniforme centré, variant entre $-0,5$ et $0,5$ examiné auparavant et noté b_1. Dans les graphiques de gauche, on retrouve la décomposition du bruit dans les détails. Dans les graphiques de droite, les tendances constituent une suite d'approximations de plus en plus précises (de moins en moins bruitées) de la rampe. Elles sont assez satisfaisantes à partir du niveau -3 et la rampe est bien restituée au niveau -6. On parvient donc à séparer la rampe du bruit. Et ceci bien que le bruit affecte toutes les échelles mais l'effet du bruit s'atténue suffisamment vite pour que les tendances aux basses résolutions restent fidèles à la rampe qui est un signal à basse fréquence. Notons enfin que la discontinuité de la rampe est assez précisément restituée mais légèrement décalée, ceci est dû au fait que la rampe est bien restituée mais pour un trop bas niveau de résolution.

Compléments : essayer d'autres ondelettes ou rajouter un bruit blanc gaussien à la rampe, en effet le bruit uniforme suggère d'estimer la rampe par le demi-somme des enveloppes supérieure et inférieure du signal, cette démarche ne serait pas reconductible avec un autre bruit.

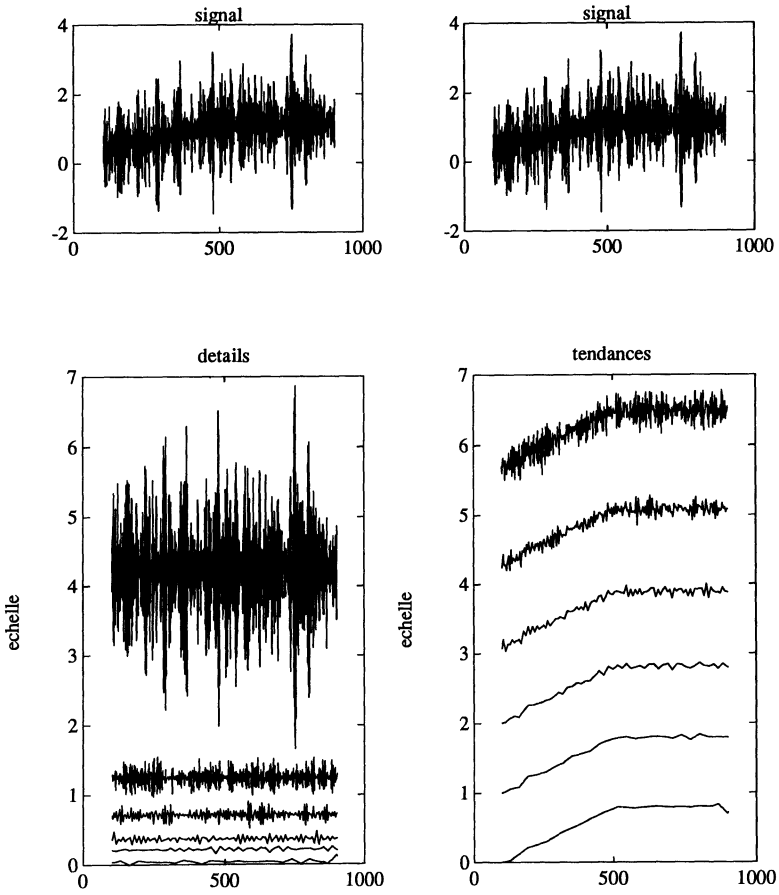


Signal analysé : «une rampe plus un bruit coloré» : f_5.

Ondelette analysante : **daub3**, 6 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est construit comme dans l'exemple précédent, à partir du schéma «tendance»plus bruit. La «tendance» est une lente montée linéaire de 0 à 1 jusqu'à l'instant $t = 500$ et est constante après. Le bruit est le bruit AR(3) centré, variant entre -3 et 3 examiné auparavant (b_2). *A priori* la situation semble plus défavorable que dans l'analyse précédente, du point de vue de la séparation de la rampe et du bruit. En effet, l'ordre de grandeur du bruit est six fois plus important que celui de la rampe. En fait il n'en est rien, les deux composantes du signal étant mieux séparées en fréquence. Dans les graphiques de gauche, on retrouve la décomposition du bruit coloré dans les détails. Dans les graphiques de droite, on a une décomposition assez semblable à celle de l'analyse précédente. Les tendances sont dès le niveau -3, des approximations satisfaisantes de la rampe.

Compléments : essayer d'autres ondelettes.



Signal analysé : «un sinus + un bruit blanc» : S_1.

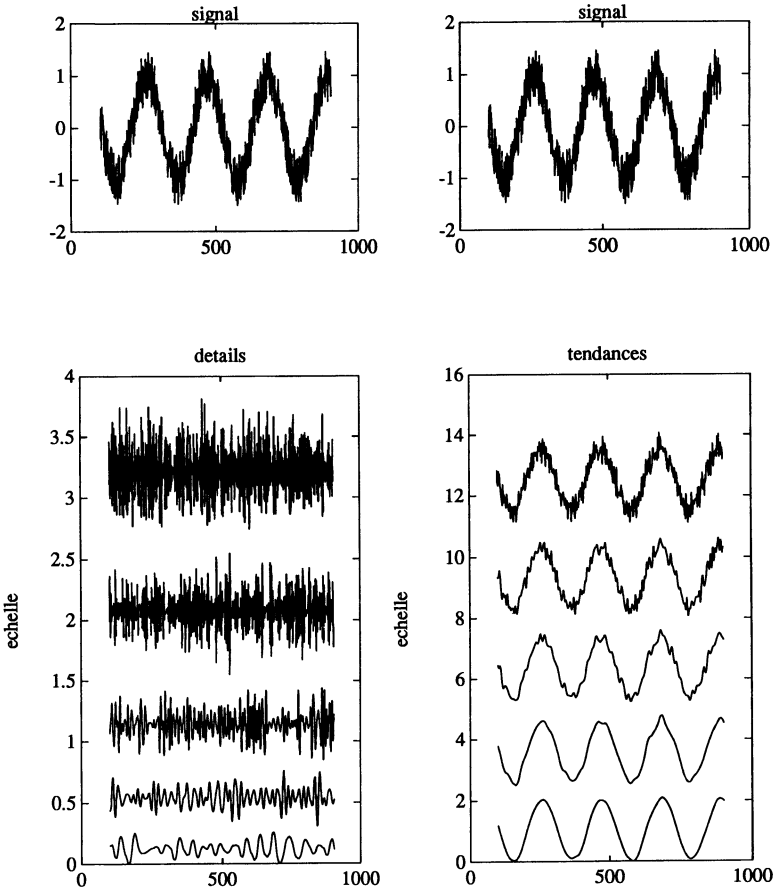
Ondelette analysante : **daub5**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est constitué de la somme de deux signaux déjà analysés auparavant : le sinus lent de période environ 200 et le bruit blanc uniforme noté b_1. Cet exemple est une illustration de la linéarité des décompositions : l'analyse de la somme de deux signaux est la somme des analyses.

Les détails sont ceux obtenus lors de la décomposition du bruit blanc.

Le sinus se retrouve dans la tendance de niveau -5, niveau suffisant pour que l'effet du bruit ne joue plus significativement vis-à-vis de l'ordre de grandeur du sinus.

Compléments : Essayer en conservant le même type de bruit, des sinus de périodes diverses.



Signal analysé : «un triangle + un sinus» : S_2.

Ondelette analysante : **daub5**, 6 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal est la somme du sinus moyen de période environ 20 et d'un «triangle».

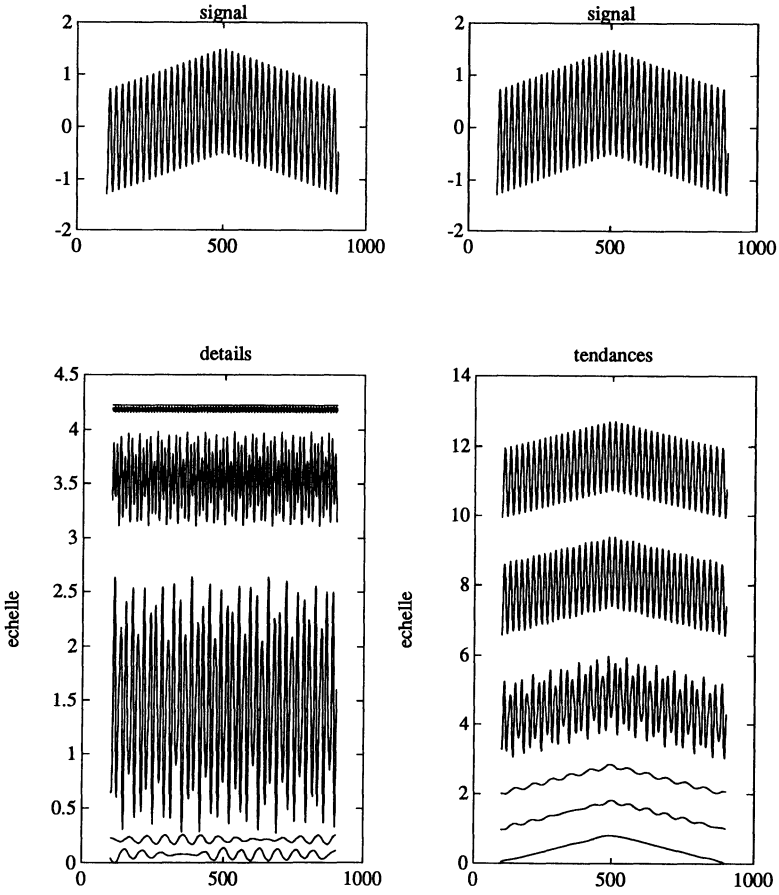
$D(-1)$ et $D(-2)$ sont très faibles, ceci indique que le signal ne contient pas de composantes de courte période vis-à-vis du pas.

$D(-3)$ et surtout $D(-4)$ sont dus au sinus. On distingue nettement le «passage» du sinus de la tendance de niveau -3 au détail de niveau -4.

Les détails de niveau plus bas sont très faibles.

$T(-6)$ contient le triangle qui ne contient que des basses fréquences.

Compléments : Essayer en conservant le même type de bruit, des sinus de périodes diverses.



Signal analysé : «un triangle + un sinus + un bruit» : S_3.

Ondelette analysante : **daub5**, 7 niveaux de décomposition.

Commentaires : le signal examiné ici est le signal précédent auquel est rajouté le bruit blanc uniforme (noté b_1) divisé par 3, et l'analyse est à comparer à la précédente. Les différences sont attribuables au seul bruit.

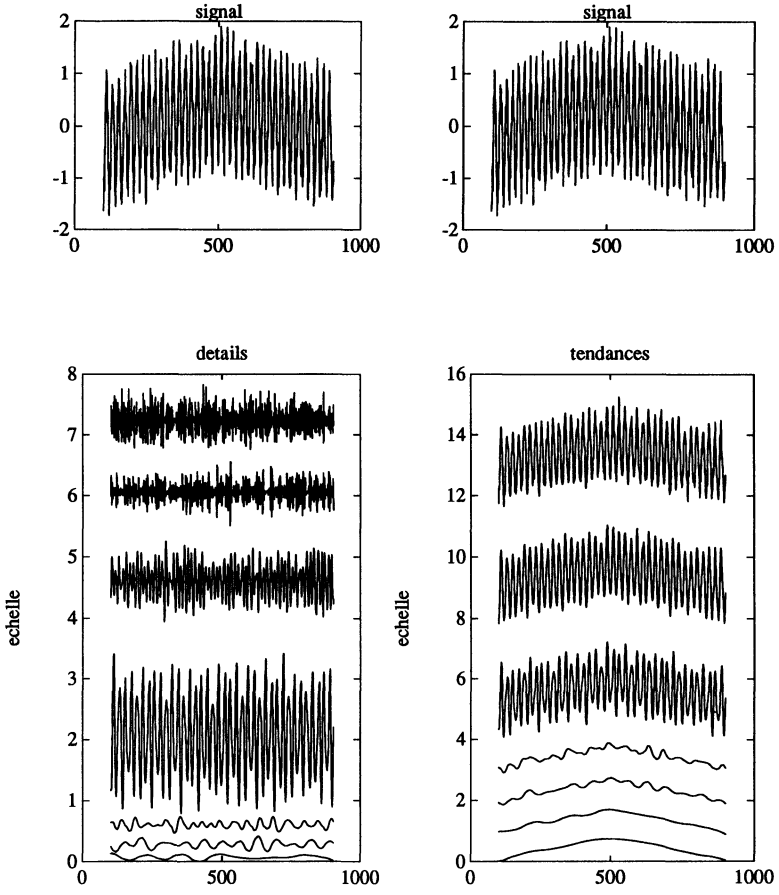
$D(-1)$ et $D(-2)$ sont dus au bruit.

$D(-3)$ et surtout $D(-4)$ sont dus au sinus.

Les détails de niveau plus bas sont de plus en plus faibles et proviennent du bruit.

$T(-7)$ contient le triangle, moins bien restitué que précédemment.

Compléments : remplacer le triangle par un polynôme, remplacer le bruit blanc par un bruit ARMA.

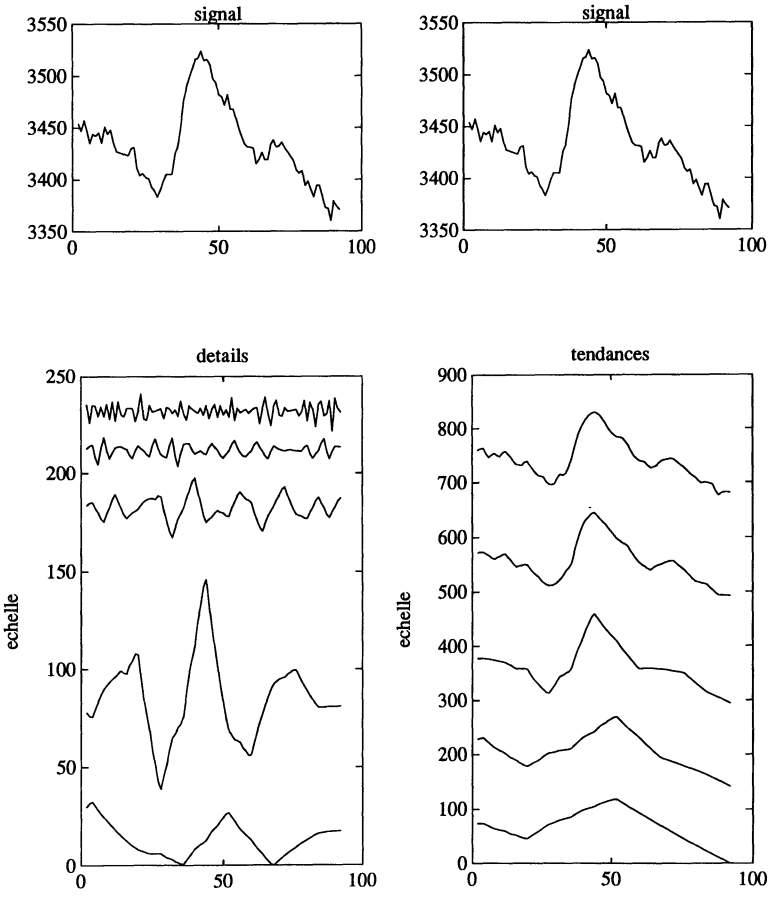


Signal analysé : «un signal réel : un extrait d'une courbe de charge électrique» : S.

Ondelette analysante : **daub3**, 5 niveaux de décomposition.

Commentaires : l'allure de la série est une bosse centrale précédée et suivie par un creux, puis une deuxième bosse nettement moins marquée.

Les détails des niveaux -1 et -2 sont du même ordre de grandeur et rendent compte des irrégularités locales dues aux bruits. Le détail de niveau -3 présente de fortes valeurs au début et à la fin de la «bosse» principale et permet de repérer les creux correspondants. Le détail de niveau -4 fait apparaître les aspects morphologiques plus grossiers de la série (trois bosses successives) et est remarquablement conforme à l'allure de la courbe. Ce sont les composantes essentielles du signal aux périodes inférieures à la demi-heure. Ceci se voit aussi très bien sur les tendances : $T(-1)$ et $T(-2)$ se ressemblent beaucoup et $T(-3)$ constitue encore une approximation de qualité raisonnable du signal original. En revanche en examinant $T(-4)$, on constate une perte d'information notable. Cette information est constituée du détail de niveau -4. Dans le cas de cette chronique, c'est l'aspect multiéchelle qui est le plus intéressant et le plus porteur de connaissance : les composantes essentielles du signal électrique pour compléter une description à la demi-heure (homogène à la tendance de niveau -5) sont les composantes de «période» comprises entre 8 et 16 minutes.



5. Conclusion

Après une présentation rapide des ondelettes, nous avons tenté de montrer l'intérêt des méthodes associées aux ondelettes dans le cadre des outils de traitement des séries temporelles. Le catalogue constitué contient les analyses de signaux élémentaires accompagnées de nombreux commentaires. Les signaux choisis sont les signaux de base figurant classiquement dans les modèles de décomposition de séries temporelles non stationnaires. Les commentaires et les analyses sont orientés vers les préoccupations usuelles de la statistique des séries chronologiques : recherche d'une description globale de l'évolution (tendances, phénomènes de grande période) complétée par des bruits et des effets locaux : ruptures, discontinuités ainsi que les phénomènes de courte période, répétitifs ou transitoires, c'est à dire localisés dans le temps et s'estompant plus ou moins rapidement. On insiste en particulier sur les aspects multiéchelles de la décomposition en ondelettes en examinant simultanément les signaux de tendances et de détails replongés dans le temps du signal initial. Enfin certaines pistes sont esquissées quant au choix de l'ondelette dans la famille des ondelettes dues à I. Daubechies, en fonction des objectifs de l'analyse et de la structure du signal.

Bibliographie

(1) AUSCHER P., *Toute base d'ondelettes régulières de $L^2(R)$ est issue d'une Analyse Multi- Résolution régulière*, C.R.A.S. Paris, t. 315, série I, 1227-1230, 1992.

(2) AZENCOTT R., DACUNHA-CASTELLE D., *Séries d'observations irrégulières*, Masson, 1984.

(3) BOX G., JENKINS G., *Time series analysis : forecasting and control*, Holden Day, 1976.

(4) COHEN A., *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal*, Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1990.

(5) COHEN A., FROMENT J., ISTAS J., *Analyse multi-résolution de signaux aléatoires*, C.R.A.S., 1991.

(6) COHEN A., DAUBECHIES I., JAWERTH B., VIAL P., *Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval*, C.R.A.S. Paris, t. 316, Série I, 417-421, 1993.

(7) DAUBECHIES I., *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., vol. XLI, 909-996, 1988.

(8) FLANDRIN P., *Fractionnal Brownian Motion and Wavelets*, in Wavelets, Fractals and Fourier Transforms. New developments and New Applications (M. Farge, J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos, eds.), Oxford Univ. Press, 1991.

(9) FROMENT J., *Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes*, Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1990.

(10) FROMENT J., MALLAT S., *Compression d'images et ondelettes. Une double approche contours et textures*, Actes de l'école CEA, EDF, INRIA «Problèmes

non linéaires appliquées. Ondelettes et paquets d'ondes», Rocquencourt, 227-247, 17-21 juin 1991.

(11) GASQUET C., WITOMSKI P., *Analyse de Fourier et Applications*, Masson, 1990.

(12) ISTAS J., *Statistique des processus gaussiens stationnaires continus par méthodes d'ondelettes*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, fev. 92.

(13) LEMARIÉ P.G. (ed.), *Les ondelettes en 1989*, Lect. Notes in Math., 1438, Springer Verlag, 1990.

(14) LEMARIÉ-RIEUSSET P.G., *Existence de «fonction-père» pour les ondelettes à support compact*, C.R.A.S. Paris, t. 314, Série I, 17-19, 1992.

(15) MALGOUYRES G., MISITI Y., OPPENHEIM G., POGGI J.M. MISITI M., *Courbe de charge et méthode des ondelettes, analyses descriptives*, Rapport de contrat de recherche EDF, déc. 1990.

(16) MALLAT S., *A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*, IEEE Trans. on PAMI, vol. 2, n° 7, 674-693, 1989.

(17) MANDELBROT B., VAN NESS J., *Fractionnal brownian motions, fractionnal noises and applications*, SIAM Review, 10, 422-437, 1968.

(18) MATLAB, Mathworks Inc., *Matlab reference manual*, 1990.

(19) MEYER Y., JAFFARD S., RIOUL O., *L'analyse par ondelettes*, Pour la Science, 119, sept. 87.

(20) MEYER Y., *Ondelettes et opérateurs*, Tome 1, Actualités mathématiques, Hermann, 1990.

(21) MISITI M., MISITI Y., OPPENHEIM G., POGGI J.M., DENIAU C., VIANO M.C., *Description de la courbe de charge électrique par décomposition en ondelettes et modélisation brownienne fractionnaire*, Rapport de contrat de recherche EDF, déc. 1991.

(22) NICOLAS J.M., LEFEBVRE T., *Ondelettes à support compact d'ordre élevé, applications aux ondelettes arborescentes*, Actes du treizième colloque GRETSI, Juan-Les-Pins, 57-60, sept. 91.

(23) RIOUL O., DUHAMEL P., *Transformées en ondelettes discrètes et continues : comparaison et algorithmes rapides*, Actes du treizième colloque GRETSI, Juan-Les-Pins, 193-196, sept. 91.

(24) STRANG G., *Wavelets and dilations equations : A brief introduction*, SIAM Review, vol. 31, 614-627, 1989.