BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL MENDÈS FRANCE
G. TENENBAUM

Dimension des courbes planes, papiers plies et suites de Rudin-Shapiro

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 207-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__207_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 207-215.

DIMENSION DES COURBES PLANES, PAPIERS PLIÉS ET SUITES DE RUDIN-SHAPIRO

PAR

M. MENDÈS FRANCE et G. TENENBAUM (*)([1])

RÉSUMÉ. – Nous nous proposons d'étudier ici l'aspect chaotique de certaines courbes planes, obtenues de façon mécaniste, et en rapport étroit avec la suite de RUDIN-SHAPIRO.

ABSTRACT. – The chaotic behaviour of certain curves which are obtained by systematic folding, is shown to be intimalety related to generalised RUDIN-SHAPIRO sequences.

Nous nous proposons d'étudier ici l'aspect chaotique de certaines courbes planes, obtenues de façon mécaniste, et en rapport étroit avec la suite de RUDIN-SHAPIRO ([8], [9]).

1. Dimension des courbes planes

Quoique ne remplissant pas le plan comme une courbe de Peano, certaines courbes planes non bornées sont tellement sinueuses qu'on aurait tendance à les considérer comme balayant une aire. Plus précisément, pour toute courbe plane Γ localement rectifiable issue d'un point M_0, notons :

Γ_t, la portion commençante de Γ dont la longueur est t;

K_t, le plus petit ensemble convexe contenant Γ_t;

∂K_t, la frontière de K_t;

$|\partial K_t|$, la longueur de ∂K_t;

Σ_t^ε, la mesure de l'aire plane balayée par un disque de rayon ε centré sur Γ_t;

et introduisons la définition suivante :

(*) Texte reçu le 25 janvier 1980.

M. MENDÈS FRANCE et G. TENENBAUM, Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

([1]) Les auteurs tiennent à remercier M. Dekking et S. Wilson pour leur aide au cours de l'élaboration de ce travail.

© Gauthier-Villars

DÉFINITION. — *Soit* Γ *une courbe plane localement rectifiable; on appelle dimension inférieure (resp. supérieure) de* Γ *la quantité :*

$$\underline{\dim}\,(\Gamma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \liminf_{t\to\infty}\frac{\log \Sigma_t^{\varepsilon}}{\log|\partial K_t|}$$

(resp. $\overline{\dim}\,(\Gamma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{t\to\infty}(\log \Sigma_t^{\varepsilon}/\log|\partial K_t|)$).

De plus, dans le cas où $\underline{\dim}\,(\Gamma)=\overline{\dim}\,(\Gamma)$, *on appelle dimension de* Γ, *et on note* $\dim(\Gamma)$, *cette valeur commune.*

Le lecteur vérifiera facilement les deux observations suivantes :

(1) pour toute courbe Γ localement rectifiable et non bornée, on a :

$$1\leqslant\underline{\dim}\,(\Gamma)\leqslant\overline{\dim}\,(\Gamma)\leqslant 2;$$

(2) pour tout couple (α, β) de réels satisfaisant à $1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 2$, il existe une courbe Γ pour laquelle :

$$\underline{\dim}\,(\Gamma)=\alpha,\qquad \overline{\dim}\,(\Gamma)=\beta.$$

Intuitivement, la dimension mesure la vitesse de remplissage du plan, ou d'une portion du plan, par un « ruban » porté par la courbe. On constate, par exemple, qu'une demi-droite issue de M_0 est de dimension 1, alors que la spirale d'équation polaire $\rho=\theta^{\alpha}(\alpha>0)$ est de dimension $\min(2, 1+(1/\alpha))$.

On notera que notre définition de la dimension n'est pas sans rapport avec celle introduite par B. MANDELBROT dans [6], chap. VI : Distribution de la matière stellaire.

2. Mots et courbes

Soit $A=\{g, d\}$ un alphabet à deux lettres $g=$ gauche, $d=$ droite. Un mot w est un élément du langage :

$$A^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}A^n,$$

où A^0 est le langage réduit au mot vide, noté 1. L'ensemble A^* est muni de la structure de monoïde pour la concaténation; 1 est l'élément neutre pour cette opération. Il est pratique d'identifier les lettres g et d avec les mots correspondants de longueur unité. La longueur d'un mot w de A^* est représentée par $|w|$; on notera l'égalité $|1|=0$.

Courbe associée à un mot

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine M_0, on associe à chaque mot $w=e_1 \dots e_s$ de A^* une ligne brisée $M_0 M_1 \dots M_{s+1}$ de la façon suivante :

M_1 est le point de coordonnées (1, 0); chaque segment $M_r M_{r+1}$ $(0 \leqslant r \leqslant s)$ est de longueur unité; l'angle $(\overrightarrow{M_{r-1} M_r}, \overrightarrow{M_r M_{r+1}})$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$ vaut $+\pi/2$ si $e_r = g$ et vaut $-\pi/2$ si $e_r = d$.

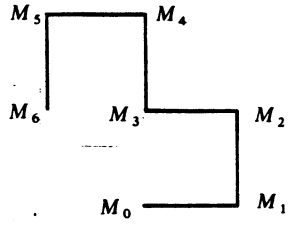

Fig. 1. – Ligne brisée associée au mot $w=gg\,d\,gg$.

Par abus de langage, nous noterons encore w la courbe associée au mot w.

Les opérateurs P_+ et P_-.

On définit sur A^* deux opérateurs P_+ et P_- par les formules :

$$P_+(1)=g, \qquad P_-(1)=d,$$
$$P_+(e_1 \dots e_s)=ge_1\,de_2\,ge_3\,d \dots e_s f,$$
$$P_-(e_1 \dots e_s)=de_1\,ge_2\,de_3\,g \dots e_s f',$$

où l'on a posé, pour $s \geqslant 1$,

$$f=\begin{cases} d & \text{si } s \text{ est impair,} \\ g & \text{si } s \text{ est pair,} \end{cases} \qquad f'=\begin{cases} d & \text{si } s \text{ est pair,} \\ g & \text{si } s \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ces deux opérateurs admettent l'interprétation géométrique suivante. Soit $w=M_0 M_1 \dots M_{s+1}$ la représentation graphique du mot w; dans un premier temps, on referme tous les angles droits de sorte que la ligne w vienne s'entasser sur le segment $M_0 M_1$ resté fixe; ensuite, on plie la figure obtenue en

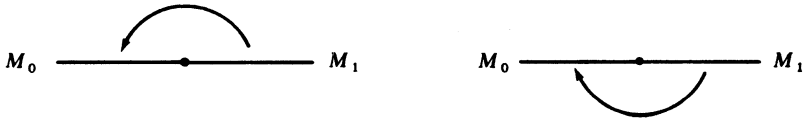

Fig. 2

rabattant la moitié droite sur la moitié gauche soit par-dessus, soit par-dessous — on crée ainsi $s+1$ nouveaux angles infiniment petits; enfin, on déploie la figure en réagrandissant tous les angles jusqu'à la valeur $\pi/2$ et en multipliant toutes les longueurs par 2; la nouvelle ligne obtenue est $P_+(w)$ ou $P_-(w)$, selon le sens du pliage.

Simplicité des lignes

Nous dirons qu'une ligne $w=M_0M_1\dots M_{s+1}$ est simple si pour tout couple (i, j), $0\leqslant i\leqslant j\leqslant s$, les segments non orientés M_iM_{i+1} et M_jM_{j+1} sont distincts. Ainsi la ligne *ggg* est simple, alors que la ligne *gggg* ne l'est pas.

DAVIS et KNUTH ont montré dans [2] que si l'une des trois lignes w, $P_+(w)$, $P_-(w)$ est simple alors elles le sont toutes les trois. On en déduit immédiatement que si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une suite arbitraire de signes + ou −, alors la ligne :

$$\prod_{j=1}^{n} P_{\varepsilon_j}(1)=P_{\varepsilon_n}P_{\varepsilon_{n-1}}\dots P_{\varepsilon_1}(1)$$

est simple.

Topologie sur A^*

Soit w un mot de A^*; on désigne par w_k le facteur gauche de w constitué par les k premières lettres de w ($k\leqslant|w|$), avec la convention $w_0=1$. Cela permet de définir une distance d sur A^* par la formule :

$$d(w, w')=(\max\{k+1 : w_k=w'_k\})^{-1}.$$

Le complété de A^* pour cette topologie est $A^*\cup A^{\mathbf{N}}$ et contient donc des mots de longueur infinie.

Simplicité et dimension des lignes obtenues par pliages

Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ une suite infinie de signes + ou −; la famille des lignes finies $\prod_{j=1}^{n} P_{\varepsilon_j}(1)$, $n=0, 1, 2, \dots$, possède des lignes adhérentes infinies; d'après le résultat de DAVIS et KNUTH cité plus haut, ce sont toutes des lignes infinies simples. Leurs formes sont cependant suffisamment sinueuses pour que ces courbes soient de dimension 2, au sens défini dans le premier paragraphe :

THÉORÈME 1. — *Pour toute suite (ε_n) de $\{-, +\}^{\mathbf{N}}$ et toute ligne infinie w adhérente à la famille des lignes finies :*

$$\prod_{j=1}^{n} P_{\varepsilon_j}(1), \qquad n=0, 1, 2, \dots;$$

on a :

$$\dim(w)=2.$$

Ce résultat est suggéré par les figures reproduites dans l'article de DAVIS et KNUTH [2]. En particulier, si l'on choisit $\varepsilon_n=(-1)^n$ pour tout n, on constate que l'adhérence contient exactement deux courbes, l'une recouvrant la partie $0\leqslant y\leqslant x$ du réseau $\mathbb{Z}^2$ et l'autre la partie $0\leqslant y\leqslant x$ (*voir* aussi [7]).

La démonstration du théorème 1 repose sur l'étude de certaines sommes d'exponentielles liées à des suites généralisant la suite de RUDIN-SHAPIRO (*voir* RUDIN [8], SHAPIRO [9], CHRISTOL et coll. [1]).

3. Suites de Rudin-Shapiro

De l'égalité évidente :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\pm e^{ik\theta}|^2\, d\theta=n,$$

valable pour tout choix des signes $+$ ou $-$, on déduit :

$$\sup_{\theta\in\mathbf{R}} |\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\pm e^{ik\theta}|\geqslant\sqrt{n}.$$

RUDIN [8] et SHAPIRO [9] ont montré que cette inégalité est optimale à une constante multiplicative près : ils ont construit une suite $(r_k)\in\{-,+\}^{\mathbf{N}}$ telle que l'on ait pour tout réel θ et tout entier positif n :

$$|\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} r_k e^{ik\theta}|\leqslant(2+\sqrt{2})\sqrt{n}.$$

Leur construction fait intervenir le développement des entiers en base 2. Nous allons retrouver leur résultat, en l'étendant à une famille de suites plus générales, et nous en déduirons ensuite la preuve du théorème 1.

Soit w un mot de A^*; on désigne par $|w|_g$ (resp. $|w|_d$) le nombre de lettres g (resp. d) apparaissant dans w. En particulier on a :

$$|w|=|w|_g+|w|_d.$$

A tout mot w de A^*, on associe les deux polynômes trigonométriques à coefficients ± 1 :

$$A(w,\theta)=\textstyle\sum_{0\leqslant r\leqslant(1/2)|w|}\exp\left\{i\dfrac{\pi}{2}(|w_{2r}|_g-|w_{2r}|_d)\right\}e^{ir\theta},$$

$$B(w;\theta)=\textstyle\sum_{0\leqslant r<(1/2)|w|}\exp\left\{i\dfrac{\pi}{2}(|w_{2r+1}|_g-|w_{2r+1}|_d-1)\right\}e^{ir\theta}.$$

THÉORÈME 2. — *Soit* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *une suite de signes* + *ou* −, *et soit :*

$$w = \prod_{j=1}^{n} P_{\varepsilon_j}(1).$$

Alors, pour tout réel θ *et tout entier* $k \leqslant |w| = 2^n - 1$, *on a :*

$$|A(w_k; \theta)| \leqslant (1+\sqrt{2})\sqrt{k}$$

et :

$$|B(w_k; \theta)| \leqslant (1+\sqrt{2})\sqrt{k}.$$

Remarque. — Le polynôme de RUDIN-SHAPIRO correspond au choix particulier $\varepsilon_j = (-1)^j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Démonstration du théorème 2. — Soit k un entier $\leqq 2^{n-1}$; la définition même des opérateurs P_+ et P_- implique la formule :

$$|(P_{\varepsilon_n} \ldots P_{\varepsilon_1}(1))_k|_g = |(P_{\varepsilon_{n-1}} \ldots P_{\varepsilon_1}(1))_{[k/2]}|_g + \left[\frac{k+2+\varepsilon_n}{4}\right],$$

d'où l'on déduit :

$$|w_k|_g = |(P_{\varepsilon_n} \ldots P_{\varepsilon_1}(1))_k|_g = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{[k\,2^{j-n}]+2+\varepsilon_j}{4}\right]$$

et, symétriquement :

$$|w_k|_d = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{[k\,2^{j-n}]+2-\varepsilon_j}{4}\right].$$

Si $k = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(k)\,2^j$ est le développement dyadique de k, les formules précédentes impliquent :

$$|w_k|_g - |w_k|_d = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{n-j}\,|e_j(k) - e_{j+1}(k)|.$$

Considérons alors, pour $m \leqslant n$, le polynôme :

$$\tilde{C}(\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n; x)$$

$$= \sum_{r=0}^{2^{n-m+1}-1} \exp\left\{\frac{i\pi}{2}(|w_r|_g - |w_r|_d)\right\} x^r$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{n-m+1}-1} \prod_{j=0}^{n-m} i^{\varepsilon_{n-j}|e_j(r)-e_{j+1}(r)|}\, x^r;$$

on pose :

$$\tilde{A}(\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_n; x) = \mathscr{R}e(\tilde{C}(\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_n; x)),$$

$$\tilde{B}(\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_n; x) = \mathscr{I}m(\tilde{C}(\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_n; x)).$$

On constate que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont à coefficients ± 1 et que l'on a identiquement :

$$\tilde{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; e^{i\theta/2}) = A(w; \theta),$$
$$\tilde{B}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2} B(w; \theta).$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a pour $n \geqslant 2$:

$$\tilde{C}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x) = \tilde{C}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; x) + i^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} x^{2^{n-1}} \tilde{C}(-\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; x),$$

d'où l'on déduit que, si $E = \tilde{A}$ ou $\tilde{B}$, on a pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x) \\ E(-\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x) \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & a_j \\ 1 & -a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\varepsilon_n; x) \\ E(-\varepsilon_n; x) \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $a_j = i^{\varepsilon_{n-j}+\varepsilon_{n-j+1}} x^{2^j}$.

Maintenant :

$$\tilde{A}(\varepsilon_n; x) = 1$$

et

$$\tilde{B}(\varepsilon_n; x) = i^{\varepsilon_n - 1} x;$$

pour $|x| = 1$, ces deux polynômes sont de module 1; par suite, pour $|x| = 1$ et $n \geqslant 1$,

$$(1) \qquad |E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x)|^2 + |E(-\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x)|^2 \leqslant 2 \prod_{j=1}^{n-1} N_j^2,$$

où N_j est la norme de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_j \\ 1 & -a_j \end{pmatrix}$ considérée comme opérateur sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ muni de la norme euclidienne. Le lemme suivant montre que $N_j = \sqrt{2}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

LEMME 1. — *Pour tout nombre complexe a de module* 1, *la norme d'opérateur de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ *est égale à* $\sqrt{2}$.

La preuve est immédiate : pour tout couple (z, z') de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ on a

$$|z + az'|^2 + |z - az'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Revenant à l'inégalité (1), on obtient pour $|x| = 1$:

$$(2) \qquad |E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; x)| \leqslant 2^{(1/2)n}.$$

Cela permet d'achever la démonstration du théorème 2.

Soit, en effet, un entier $k \leqslant 2^n - 1$ dont le développement dyadique est :

$$k = 2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_t}, \qquad \nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_t \geqslant 0;$$

on a, pour $x = e^{i\theta/2}$,

$$A(w_k; \theta) = \sum_{0 \leqslant r \leqslant k,\, r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)} \prod_{j=0}^{n-1} i^{\varepsilon_{n-j} |e_j(r) - e_{j+1}(r)|} x^r$$

$$= \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} \sum_{2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_s} \leqslant r \leqslant 2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_{s+1}} - 1,\, r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)} \times \prod_{j=0}^{n-1} i^{\varepsilon_{n-j} |e_j(r) - e_{j+1}(r)|} x^r,$$

où l'on convient que $\nu_{t+1} = 0$.

Cela implique :

$$A(w_k; \theta) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \nu_1} b_\nu \tilde{A}(\varepsilon_{n-\nu+1}, \ldots, \varepsilon_n; x) + b_0,$$

où les b_ν sont nuls si ν est différent d'un ν_j et de module 1 sinon. Grâce à (2) on obtient donc :

$$|A(w_k; \theta)| \leqslant \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant \nu_1} |b_\nu| 2^{(1/2)\nu} = \sum_{j=1}^{t} 2^{(1/2)\nu_j} \leqslant (1 + \sqrt{2}) \sqrt{k},$$

la dernière inégalité étant prouvée facilement par récurrence sur k.

Le cas de $B(w_k; \theta)$ se traitant de manière analogue, cela achève la démonstration.

4. Démonstration du théorème 1

Soit w un mot de longueur infinie appartenant à l'adhérence de la suite $\prod_{j=1}^{n} P_{\varepsilon_j}(1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ On a :

$$\underline{\dim}\,(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{k \to \infty} \frac{\log(2k\varepsilon)}{\log |\partial K_k|}$$

où ∂K_k est le périmètre du plus petit convexe contenant w_k. Comme w est porté par le réseau $\mathbb{Z}^2$ et que w est simple, w est non borné. Par suite

$$\underline{\dim}\,(w) = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log k}{\log |\partial K_k|};$$

il nous reste donc à estimer $|\partial K_k|$.

LEMME 2. — *Soit v un mot de A^*; les coordonnées de l'extrémité finale de la ligne représentative de v sont :*

$$(A(v; 0), B(v, 0)).$$

On démontre facilement ce lemme par récurrence sur $|v|$.

Maintenant, d'après le théorème 2, on voit que la ligne w_k est entièrement contenue dans le carré centré en M_0, de côtés parallèles aux axes et de longueurs $2(1+\sqrt{2})\sqrt{k}$, donc :

$$|\partial K_k| \leqslant 8(1+\sqrt{2})\sqrt{k},$$

d'où $\underline{\dim}\,(w)=2$.

C.Q.F.D.

Remarque. — On peut montrer directement, sans faire appel au théorème 2, que $|A(w_k; 0)|$ et $|B(w_k; 0)|$ sont majorés par $(1+\sqrt{2})\sqrt{k}$. Toutefois, il nous a semblé intéressant de mettre en évidence le lien entre les deux théories, apparemment indépendantes, des courbes obtenues par pliages et des suites de RUDIN-SHAPIRO.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL (G.), KAMAE, (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 108, 1980, p. 401-419.

[2] DAVIS (C.) and KNUTH (D.). — Number representations and dragon curves I, II, *J. recreational Math.*, vol. 3, 1970, p. 61-81 et 133-149.

[3] DEKKING (F. M.). — Constructics voor 0-1 rijen met strikt ergodische ofgesloten baar, *Doctoraalscriptie*, 1974, Pays-Bas.

[4] GARDNER (M.). — *Mathematical magic show*, Knopf, New York, 1977.

[5] KAHANE (J. P.). — Hélices et quasi-hélices, Advances in mathematics (supplementary studies) dédié à L. Schwartz (à paraître).

[6] MANDELBROT (B.). — *Objets fractals, forme, hasard et dimension*, Nouvelle bibliothèque scient., Flammarion, 1975.

[7] MENDÈS FRANCE (M.). — Principe de la symétrie perturbée, *Sém. Théorie des Nombres*, Paris, 1980.

[8] RUDIN (W.). — Some theorems on Fourier coefficients, *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 10, 1959, p. 855-859.

[9] SHAPIRO (H. S.). — Extremal problems for polynomials and power series, *Thesis*, M.I.T., 1951.