ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL SIBONY

Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations. Théorème de Doob généralisé

Annales de l'institut Fourier, tome 18, n° 2 (1968), p. 91-120

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_91_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 91-120.

ALLURE A LA FRONTIÈRE MINIMALE D'UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS THÉORÈME DE DOOB GÉNÉRALISÉ

par Daniel SIBONY

Introduction.

Ce travail développe et approfondit une ancienne Note aux Comptes Rendus ([9]) qui indiquait une généralisation possible aux espaces harmoniques de M. Brelot ([2]) de résultats obtenus par Constantinescu-Cornea [3] et Doob ([5]) sur l'allure à la frontière de Martin d'applications analytiques d'une surface de Riemann dans une autre.

On donne d'abord un cadre abstrait pour l'étude de l'allure à la frontière minimale. Puis on se place pour simplifier dans le cadre des espaces harmoniques de Bauer ([1]). Si Ω et Ω' sont deux espaces L.C.D. munis de la théorie des fonctions harmoniques de Bauer (c'est-à-dire avec axiome de convergence de Doob) on établit le théorème suivant en supposant les constants harmoniques.

Soit une application f ouverte de Ω dans Ω' et telle que

a) si u' est harmonique $\geqslant 0$ dans Ω', $u' \circ f$ est surharmonique dans Ω;

b) il existe une suite de fonctions (φ_n) numériques sur Ω', séparant Ω' telle que $\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi_n \circ f$ existe presque partout pour $h \in \mathrm{M}$ (M : ensemble des fonctions harmoniques minimales $\not\equiv 0$, $\mathcal{F}_h$ filtre fin associé à $h \in \mathrm{M}$) presque partout signifiant : presque partout pour toute localisée de la mesure conique associée à la fonction 1 dans la représentation intégrale.

Dans ces conditions, pour une certaine classe $\tilde{\Omega}'$ de

compactifiés de Ω' (compactifiés de type $\mathcal{M}$) f possède une limite dans $\tilde{\Omega}'$, presque partout suivant les filtres $\mathcal{F}_h$.

La condition : « f est ouverte », peut être remplacée par la suivante qui est plus faible :

pour toute φ surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω, la fonction $\inf \{\varphi' \in S' ; \varphi' \circ f = \varphi\}$ l'est dans Ω', où S' est le cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω'.

De ce théorème on déduit le théorème de Fatou-Naïm-Doob généralisé suivant [1] :

Dans un espace harmonique de Bauer Ω, toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω a une limite finie suivant les filtres fins $\mathcal{F}_h$, presque partout (au sens défini plus haut).

Pour obtenir cette application on prend pour espace d'arrivée l'espace $\Omega' =]0, \rightarrow[$ muni de la théorie du potentiel dont les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ sont les fonctions concaves croissantes.

Le problème de Dirichlet relatif aux filtres fins $\mathcal{F}_h$ se traite alors sans grande difficulté.

On établit aussi un théorème analogue au théorème de Riesz (F. et M.) montrant que l'hypothèse classique d'analicité de l'application f est excessive.

On étudie enfin une extension des fonctions analytiques de type Bl (Blaschke).

Cet article a bénéficié des critiques toujours fructueuses de mon camarade G. Mokobodzki que je remercie vivement. Il fait partie d'une série de travaux présentés en Juin 1967 pour une thèse d'État de Mathématiques. J'en profite donc pour remercier M. Brelot qui m'a initié à la théorie du Potentiel, M. Choquet pour maintes suggestions qu'il m'a faites, M. Deny et M^{lle} Libermann pour avoir fait partie du Jury de thèse.

1. Cadre abstrait de l'étude.

1. *Définitions et hypothèses.*

On adopte pour commencer un cadre général utilisé dans [6].

[1] Dans un article ultérieur, qui paraît dans ce volume, nous déduisons ce résultat d'un théorème plus général sur les limites fines.

Soit Ω un ensemble non vide et S un cône convexe de fonctions de Ω dans $\overline{\mathbf{R}}^+$. On suppose que $S = H + P$, où H et P sont deux cônes convexes de fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ et $\overline{\mathbf{R}}^+$ respectivement, et que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) $(s_1, s_2 \in S) \Longrightarrow (\inf(s_1, s_2) \in S)$.

2) Propriété de « décomposition » :
si $u_i \in H$ et $p_i \in P$ pour $i = 1,2$ et si $u_1 + p_1 \leqslant u_2 + p_2$ pour l'ordre naturel, alors $u_1 \leqslant u_2$.

3) Il existe une fonction $s_0 \in S$ telle que $s_0(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$. Les conditions 1) et 2) restant vérifiées pour le cône $\frac{1}{s_0} \cdot S$, on peut toujours supposer que $1 \in S$, ce qu'on fera.

La structure précédente sera désignée par le *couple* (Ω, S), qu'on dira parfois *couple surharmonique.*

DÉFINITIONS. RAPPEL. — *a) Une fonction* $h \in H$ *est minimale si la condition* $(v \in H, v \leqslant h)$ *implique* $v = \alpha h$ où $\alpha \in \mathbf{R}^+$.

b) Soit M *l'ensemble des fonctions minimales* $h \not\equiv 0$; *on identifiera en général deux fonctions minimales proportionnelles.*

c) Pour $E \subset \Omega$ *et* $\varphi : E \to \mathbf{R}^+$ *majorée par un élément* $v \in S$ *on introduit comme d'habitude la réduite :*

$$R_\varphi^E = \inf \{v \in S;\ v \geqslant \varphi \text{ sur } E\}$$

d) Une partie $E \subset \Omega$ *est dite effilée en* $h \in M$ *si* $R_h^E \not\equiv h$. *Un filtre* Φ *sur* Ω *est dit effilé en* h *si l'un de ses éléments l'est.*

Pour tout $h \in M$ l'ensemble des parties de Ω dont le complémentaire est effilé en h est un filtre $\mathcal{F}_h$ sur Ω, appelé *filtre fin* associé à h.

Remarque. — Si $h \in M$ est non bornée, alors

$$\bigcap_{e \in \mathcal{F}_h} e = \emptyset.$$

Il suffit de considérer une suite (α_n) dans $\mathbf{R}^+$, croissante vers $\alpha = \sup_{x \in \Omega} h(x)$ fini ou non, et telle que $\alpha_n < \alpha$, $\forall_n$.

Posons $e_n = \{h > \alpha_n\}$. Il est clair que $e_n \in \mathcal{F}_h \ \forall n$ car sur $\complement e_n$, on a : $\alpha_n \geqslant h$.

Donc,

$$\bigcap_{e \in \mathcal{F}_h} e \subset \bigcap_n e_n = \{h = \alpha\}$$

d'où le résultat si $\alpha = +\infty$.

Dans des applications on a le résultat quel que soit h par d'autres arguments (principe du minimum).

Remarque. — Supposons qu'il existe $p_0 \in \mathrm{P}$ tel que $p_0(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathrm{M}$, le filtre $\mathcal{F}_h$ possède une base formée d'ensembles du type $\{h \geqslant p\}$ où $p \in \mathrm{P}$ $p > 0$ dans Ω.

En effet, soit $e \in \mathcal{F}_h$; il existe $v \in \mathrm{P}$ telle que $v \geqslant h$ sur $\complement e$. Donc $v + \varepsilon p_2 > h$ sur $\complement e$, c'est-à-dire $\{p \leqslant h\} \subset e$, avec $p > 0$ dans Ω.

2. *Valeurs d'adhérence et limites fines.*

Soit Ω' un espace localement compact à base dénombrable et $\tilde{\Omega}'$ un espace compactifié de Ω'.

Définition 1. — *Pour toute application f de Ω dans Ω' et pour tout $h \in \mathrm{M}$, on pose :*

$$\mathcal{A}(f, h) = \bigcap_{e \in \mathcal{F}_h} \overline{f(e)}$$

où l'adhérence $\overline{f(e)}$ est prise dans $\tilde{\Omega}'$.

$\mathcal{A}(f, h)$ — qu'on notera plus brièvement $\mathcal{A}(h)$ — est l'ensemble des valeurs d'adhérence fines de f, c'est-à-dire suivant le filtre fin $\mathcal{F}_h$.

Pour tout $h \in \mathrm{M}$, $\mathcal{A}(h)$ est fermé non vide de $\tilde{\Omega}'$.

Propriétés de $\mathcal{A}(h)$.

Lorsqu'on étudie les limites fines, il est utile de savoir si l'ensemble $\mathcal{A}(h)$ est entièrement contenu dans Ω' ou s'il rencontre la frontière Δ' de Ω' dans son compactifié $\tilde{\Omega}'$. C'est ce qui justifie la distinction suivante à introduire parmi les fonctions minimales sur Ω.

Soit F_∞ le filtre sur Ω' engendré par les complémentaires des parties compactes.

DÉFINITION 2. — *On pose :*

$$H(f) = \{u \in H^+; \quad R_u^{f^{-1}(e')} = u \quad \forall e' \in F_\infty\}$$
$$M(f) = M \cap H(f) \quad \text{(cf. [3])}.$$

c'est-à-dire $M(f)$ *est l'ensemble des* $h \in M$ *où le filtre* $f^{-1}(F_\infty)$ *est non effilé.* Autrement dit :

$h \in M(f)$ si et seulement si pour toute partie E' relativement compacte de Ω', $f^{-1}(E') \notin \mathcal{F}_h$ (c'est-à-dire $f^{-1}\left(\complement E'\right)$ non effilé en h).

Pour tout $h \in M \setminus M(f)$, on dira que f est *bornée en* h, terminologie justifiée par la caractérisation suivante.

PROPOSITION 3. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{C}(h) \subset \Omega'$.
ii) $h \in M \setminus M(f)$.

Démonstration. — Si $h \in M \setminus M(f)$, il existe $e' \in F_\infty$ tel que $R_h^{f^{-1}(e')} \not\equiv h$ et par suite $\complement f^{-1}(e') \in \mathcal{F}_h$. Donc

$$\mathcal{C}(h) \subset \complement e' \subset \Omega'$$

car $\complement e'$ est relativement compact dans Ω'.

Réciproquement, si $\mathcal{C}(h) \subset \Omega'$, il existe, $\tilde{\Omega}'$ étant compact, un nombre fini $e_1, \ldots, e_n$ d'éléments de $\mathcal{F}_h$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} \subset \Omega'$$

donc il existe $e \in \mathcal{F}_h$ tel que $\overline{f(e)} \subset \Omega'$. Il est clair que $e_0 = f^{-1}(\overline{f(e)})$ appartient au filtre $\mathcal{F}_h$ donc, $\overline{f(e)}$ étant relativement compact dans Ω', on a $h \in M \setminus M(f)$.

Un argument analogue fournit la

PROPOSITION 4. — *Soit* U' *un ouvert de* $\tilde{\Omega}'$ *tel que* $\mathcal{C}(h) \subset U'$ *pour un* $h \in M$. *Alors on a :*

$$f^{-1}(U' \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h.$$

Démonstration. — En effet, dans le cas contraire on aurait pour tout $e \in \mathcal{F}_h$, $e \not\subset f^{-1}(U' \cap \Omega')$ donc $f(e) \not\subset U'$; $(\overline{f(e)} \setminus U')_{e \in \mathcal{F}_h}$

est alors une famille de fermés de $\tilde{\Omega}'$ dont toute intersection finie est non vide. Donc $\bigcap_{e\in\mathcal{F}_h}(\overline{f(e)}\setminus U') = e' \neq \emptyset$. L'ensemble e' serait alors dans $\mathcal{A}(h)$ et dans $\tilde{\Omega}'\setminus U'$, ce qui est absurde.

Définition 1'. — *Lorsque l'ensemble $\mathcal{A}(h)$ est réduit à un point, on pose*

$$\hat{f}(h) = \{\mathcal{A}(h)\}.$$

$\hat{f}(h)$ — la limite de f en h — ne dépend que de la génératrice de h dans le cône H. *On désignera par L_f l'ensemble des $h \in M$ où $\hat{f}(h)$ est défini.*

Proposition 5. — *Pour tout $x' \in \tilde{\Omega}'$ et tout (U'_α) système fondamental de voisinages ouverts de x' dans $\tilde{\Omega}'$, on a :*

$$\hat{f}^{-1}(x') = \bigcap_\alpha D_\alpha \qquad \text{où} \qquad D_\alpha = \{h \in M;\ f^{-1}(U'_\alpha \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h\}.$$

Démonstration. — En effet, si $h \in \hat{f}^{-1}(x')$, on a $U'_\alpha \supset \mathcal{A}(h)\ \forall\alpha$; donc d'après la proposition $f^{-1}(U'_\alpha \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h$, c'est-à-dire $h \in \bigcap_\alpha D_\alpha$. Réciproquement, si $f^{-1}(U'_\alpha \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h\ \forall\alpha$, alors $\mathcal{A}(h) \subset U'_\alpha \cap \Omega'$, d'où $\mathcal{A}(h) \subset \bigcap_\alpha \overline{U}'_\alpha = \{x'\}$.

Remarque 6. — On a les inclusions suivantes :

$$\hat{f}^{-1}(\tilde{\Omega}'\setminus\Omega') \subset M(f)$$
$$\hat{f}^{-1}(\Omega') \subset M\setminus M(f)$$

qui ne font que traduire la propriété analogue pour $\mathcal{A}(h)$. Elles seront utiles dans l'étude de l'ensemble des valeurs de $\hat{f}$.

Proposition 7. — *Soit $h \in L_f$, et* E *une partie de Ω non effilée en h. Si $\tilde{\Omega}'$ est métrisable, il existe une suite (x_n) contenue dans* E *telle que $\hat{f}(h) = \lim_n f(x_n)$ dans $\tilde{\Omega}'$ et*

$$\lim_n h(x_n) = \sup_{x\in\Omega} h(x).$$

Démonstration. — Soit $(\alpha_n) \subset \mathbf{R}^+$ croissante avec $\alpha_n < \sup_{x\in\Omega} h(x)$ et $\sup_n \alpha_n = \sup_\Omega h$; on pose $\omega_n = \{h > \alpha_n\}$; $\omega_n \in \mathcal{F}_h$. Soit

(U'_n) un système fondamental de voisinages ouverts de $\hat{f}(h)$ dans $\tilde{\Omega}'$. On a $\omega_n \cap f^{-1}(U'_n \cap \Omega') \not\subset \Omega \setminus E$ car par hypothèse $\Omega \setminus E \notin \mathcal{F}_h$. Il suffit alors de prendre x_n dans

$$\omega_n \cap f^{-1}(U'_n \cap \Omega') \cap E.$$

THÉORÈME 8. — *Supposons que* M *soit un espace mesurable (c'est-à-dire muni d'une tribu) tel que :*

Pour toute partie A *de* Ω, *l'ensemble* $\mathcal{E}_A$ *des points* h *de* M *où* A *est effilée, est un ensemble mesurable.*

Si de plus $\tilde{\Omega}'$ *est métrisable, alors :*

1° *l'ensemble* $M(f)$ *est mesurable.*

2° *l'ensemble* L_f *est mesurable.*

3° $\hat{f}$ *est mesurable* ($\tilde{\Omega}'$ *étant muni de sa tribu borélienne*).

Démonstration. — 1° Soit (K'_n) une suite croissante de compacts de Ω' avec $\Omega' = \bigcup_n K'_n$. On a :

$$M(f) = \{h \in M;\ \forall K' \text{ compact } \subset \Omega',\ R_h^{f^{-1}(K')} = h\}$$
$$= \bigcap_n \{h \in M;\ R_h^{f^{-1}(K'_n)} = h\},$$

qui est une intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

2° Soit d une distance sur $\tilde{\Omega}'$ compatible avec la topologie, F un fermé de $\tilde{\Omega}'$ et (x'_n) une suite dense dans F. Soit

$$U'_{m,n} = \left\{y \in \tilde{\Omega}';\ d(x'_n, y) < \frac{1}{m}\right\}$$
$$D_{m,n} = \{h \in M; f^{-1}(U'_{m,n} \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h\}.$$

On a $\hat{f}^{-1}(F) \subset \bigcap_m \bigcup_n D_{m,n}$. Soit $h \in \bigcap_m \bigcup_n D_{m,n}$. Pour tout m, il existe $n(m)$ tel que $f^{-1}(U'_{m,n(m)} \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h$. Soit x' un point d'adhérence de la suite $(x'_{n(m)})_m$ et U' un voisinage ouvert de x'. Il existe m tel que $U'_{m,n(m)} \subset U'$, donc

$$f^{-1}(U' \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(h) \subset \overline{U}'.$$

U' étant quelconque, on a $\mathcal{A}(h) = \{x'\}$, donc $h \in L_f$ et $h \in \hat{f}^{-1}(x') \subset \hat{f}^{-1}(F)$. Donc $\hat{f}^{-1}(F) = \bigcap_m \bigcup_n D_{m,n}$ et $D_{m,n}$ est mesurable, ce qui démontre aussi le 3°).

2. Théorèmes de limites fines à la frontière minimale.

On se propose maintenant d'établir des théorèmes analogues aux théorèmes de Riesz (F. et M.) et de Fatou étendus au cas des surfaces de Riemann par Constantinescu-Cornea (cf. [3]) et Doob ([5]).

A. Le théorème de Riesz.

Soit (Ω, S) *un couple dont la frontière minimale* M *vérifie la propriété suivante :*

(D) *l'ensemble* M *est un espace mesuré* $(M, \mathcal{T}, \mu)$ *avec une mesure* $\mu \geqslant 0$, *telle que pour tout* $v \in S$, $\lim_{\mathcal{F}_h} v(x)$ *existe et soit finie* $\mu - pp$ *pour* $h \in M$.

Cette hypothèse est vérifiée chaque fois qu'on peut démontrer un théorème du type Naïm-Doob assurant pour toute fonction « surharmonique » l'existence $\mu - pp$ d'une limite fine finie à la frontière minimale. Gowrisankaran [4] a montré qu'il en est ainsi dans une axiomatique de Brelot. *Nous montrerons plus loin qu'il en est de même dans une axiomatique de Bauer.*

Soit (Ω', S') un autre couple tel que Ω soit muni d'une topologie localement compacte rendant s.c.i. les fonctions de S'.

Dans le cas où Ω et Ω' sont deux surfaces de Riemann hyperboliques, le théorème de Riesz s'exprime ainsi (cf. [5], [3]) :

Soit f une application analytique de Ω dans Ω'; Ω_M et Ω'_M les frontières de Martin respectives. Soit

$$A' \subset \Omega' \cup \Omega'_M$$

tel que $A' \cap \Omega'_M$ soit de mesure harmonique extérieures nulle et $A' \cap \Omega'$ de capacité extérieure nulle. Si $\mathcal{C}(\xi) \subset A'$ pour tout ξ appartenant à un ensemble $A \subset \Omega_M$ de mesure harmonique extérieure strictement positive, alors f est constante.

Voici l'analogue de ce théorème dans notre cadre.

Définitions. — 1) *Soit* $\tilde{\Omega}'$ *un compactifié de* $\tilde{\Omega}'$. *On dira qu'un ensemble* $A' \subset \Omega'$ *est polaire* (*relativement à* S') *s'il*

existe $\varphi \in S'$ *telle que :*

pour tout $y \in A'$ $\lim\limits_{\substack{x \in \Omega' \\ x \to y}} \varphi(x) = +\infty$ *(où* $x \to y$ *dans* $\tilde{\Omega}'$*).*

2) *Une application* f *de* Ω *dans* Ω' *sera dite pseudo-bornée (relativement à* S *et* S′*) si pour tout* $\varphi \in S'$, *il existe* $u \in S$ *avec :* $u \geqslant \varphi \circ f$ *dans* Ω.

Il est clair que si f *est pseudo-bornée et si* $e' \subset \Omega'$ *est polaire alors* $f^{-1}(e')$ *est polaire dans* Ω *(relativement à* S*).*

Il semble que le théorème de Riesz soit en fait relatif aux transformations pseudo-bornées, et que l'hypothèse d'analyticité que l'on fait dans le cadre classique soit inutilement forte.

THÉORÈME 9. — *Soit* f *une application pseudo-bornée de* Ω *dans* Ω' *et non constante. Soit* $A' \subset E'$ *un ensemble polaire et* $A \subset M$. *Supposons que pour tout* $h \in A$ *on ait :* $\mathcal{A}(h) \subset A'$.

Alors A *est de mesure extérieure nulle pour la mesure* μ *donnée sur* M.

Démonstration. — Soit $s' \in S'$ telle que : $\lim\limits_{\substack{y \in \Omega' \\ y \to A'}} s'(y) = +\infty$.

Considérons les ensembles : $\omega'_a = \{y \in \tilde{\Omega}' ;\ \tilde{s}'(y) > a\}$ où $\tilde{s}'$ est la prolongée de s' à $\tilde{\Omega}'$ par limite inférieure. Pour tout $a \in \mathbf{R}^+$, ω'_a est un ouvert de Ω' qui contient par hypothèse $\mathcal{A}(h)$ $\forall h \in A$. D'après la proposition 4, on a

$$f^{-1}(\omega'_a \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h.$$

Soit $\varphi \in S$, telle que $\varphi \geqslant s' \circ f$ dans Ω. D'après l'hypothèse D, la fonction φ admet μ-presque partout sur M une limite finie selon les filtres $\mathcal{F}_h$. Il est clair qu'en tout point h de A on a : $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} \varphi = +\infty$ car

$$\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi \geqslant \limsup_{x \in \Omega,\ x \to h,\ \mathcal{F}_h} s' \circ f(x)$$

$$= \limsup_{x \in \omega_\alpha,\ x \to h,\ \mathcal{F}_h} s' \circ f(x) \geqslant \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}^+.$$

Donc A est contenu dans l'ensemble des $h \in M$ où une fonction de S n'a pas de limite fine finie; par suite $\mu^*(A) = 0$.

Remarque 10. — On voit que la démonstration repose essentiellement sur la propriété de Naïm-Doob. Elle montre que si f est une application de Ω dans Ω' pour laquelle le théorème de Riesz est vrai, alors toute application g telle que

$$\varphi \circ g \leqslant \varphi \circ f$$

pour tout $\varphi \in S'$ vérifie aussi le théorème.

Il est clair aussi que le théorème subsiste pour les applications f de Ω dans Ω' telles que pour tout $\varphi \in S'$, $\varphi \circ f$ admet une limite fine finie μ-*pp* sur M. On peut obtenir une formulation analogue au théorème de Doob cité plus haut si on se place dans le cadre suivant, qui correspond au cadre classique.

On suppose que Ω' est muni d'une *théorie axiomatique de* M. *Brelot* [2] avec unicité des potentiels normalisés à support ponctuel. Ω' se trouve alors canoniquement plongé dans une base compacte du cône $S^+(\Omega')$ des fonctions surharmoniques positives dans Ω' et on prend pour $\tilde{\Omega}'$ l'adhérence de Ω' dans cette base, le cône S^+ étant muni de la topologie de la convergence en graphe. $\tilde{\Omega}'$ est le compactifié de Martin de Ω' et $\Delta' = \tilde{\Omega}' \setminus \Omega'$. Soit Δ'_1 la frontière minimale de Ω' dans $\tilde{\Omega}'$; soit μ'_1 la mesure associée à la fonction 1 (supposée harmonique).

Proposition 11. — *Soit* $A' \subset \Delta'$ *de mesure extérieure nulle pour la mesure* μ'_1. *Alors il existe* $s' \in S^+(\Omega')$ *telle que :*

$$\lim_{x' \in \Omega',\, x' \to A'} s'(x') = +\infty \quad (\textit{où } x' \to A' \textit{ dans } \tilde{\Omega}')$$

Démonstration. — *a*) Soit O un ouvert de Δ', (F_n) une suite croissante de fermés de Δ'_1 tels que $O = \bigcup_n F_n$ et $\mu'_1(\delta F_n) = 0 \ \forall n$, où δF_n est la frontière de F_n dans O. On pose $K_n = \overline{F_n - F_{n-1}}$ (adhérence dans O). D'après un résultat de Gowrisankaran ([6], p. 350), pour tout compact $K \subset \Delta'$ si on pose :

$$1_K = \int_K h \, d\mu'_1(h)$$

il existe une suite décroissante (ω_p) d'ouverts de $\tilde{\Omega}'$ telle

que

$$\bigcap_p \omega_p = \mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad 1_{\mathrm{K}} = \lim_{p \to \infty} \mathrm{R}_1^{\omega_p \cap \Omega'}.$$

En appliquant ce résultat aux compacts (K_n) on voit qu'il existe une suite d'ouverts (ω_{k_n}) de $\tilde{\Omega}'$ tels que, x_0 étant un point donné de Ω', on ait :

$$\mathrm{R}_1^{\omega_{k_n} \cap \Omega'}(x_0) \leqslant 2 \int_{\mathrm{K}_n} h(x_0) d\mu_1'(h).$$

Si on pose

$$s = \sum_n \mathrm{R}_1^{\omega_{k_n} \cap \Omega'}$$

on a

$$s_{\mathrm{O}}(x_0) \leqslant 2 \int_{\mathrm{O}} h(x_0) d\mu_1'(h) < + \infty.$$

s_{O} est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω' et on a

$$\liminf_{x \in \Omega',\, x \to h \in \mathrm{O}} s_{\mathrm{O}}(x) \geqslant \liminf_{\substack{x \in \Omega' \\ x \to h \in \mathrm{O} \cap \omega_{k_n}}} \mathrm{R}_1^{\omega_{k_n} \cap \Omega'}(x) = 1.$$

b) Soit (O_n) une suite décroissante d'ouverts de Δ' tels que $\mathrm{O}_n \supset \mathrm{A}'$ $\forall n$ et $\sum_n \mu_1'(\mathrm{O}_n) < + \infty$ ce qui est possible, car $\mu^*(\mathrm{A}') = 0$. A chaque O_n on associe s_{O_n} par le procédé de *a*). Soit $s = \sum_n s_{\mathrm{O}_n}$. Il est clair que $s \not\equiv + \infty$ car $s(x_0) < + \infty$ et d'autre part $\lim_{\substack{x \to h \in \mathrm{A}' \\ x \in \Omega'}} s(x) = + \infty$. Le théorème de Riesz prend alors la forme suivante qui étend celle que nous avions donnée dans [9].

THÉORÈME 12. — *Soit* $\mathrm{A}' \subset \tilde{\Omega}'$ (*compactifié de Martin de* Ω') *tel que* $\mathrm{A}' \cap \Delta'$ *soit de* μ_1'*-mesure extérieure nulle,* $\mathrm{A}' \cap \Omega'$ *soit polaire (au sens ordinaire).*

Soit f *une application pseudo-bornée non constante de* Ω *dans* Ω' *et* $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$ *tel que :*

$$\mathcal{C}(f,\ h) \subset \mathrm{A}', \qquad \forall h \in \mathrm{A}.$$

Alors A *est de mesure extérieure nulle pour la mesure* μ *sur* M.

En particulier, quand Ω et Ω' sont deux *surfaces de Riemann* hyperboliques, on retrouve l'énoncé donné au début de ce paragraphe, car une application analytique de Ω dans Ω' est nécessairement pseudo-bornée, sauf si elle est constante.

B. LE THÉORÈME DE FATOU.

Ce théorème fondamental assure dans le cas classique, l'existence pour une fonction analytique bornée sur le disque plan d'une limite angulaire presque partout à la frontière. Il a été généralisé dans [5] et [3] au cas des surfaces de Riemann sous la forme suivante :

Si Ω *et* Ω' *sont deux surfaces de Riemann hyperboliques, et si* f *est une application analytique de* Ω' *dans* Ω *et* Ω_M, Ω'_M *les frontières de Martin, alors* f *possède presque partout sur* Ω_M *une limite fine dans* $\Omega' \cup \Omega'_M$.

Nous allons en démontrer un analogue dans notre cadre général, ce qui fournira en particulier un *théorème de Fatou pour certaines correspondances entre deux espaces harmoniques au sens de Bauer.*

Hypothèses. — Soit Ω' un espace L.C.D. muni d'un cône S' tel que (Ω', S') soit un couple surharmonique, les éléments de S' étant des fonctions s.c.i. sur Ω'. $\tilde{\Omega}'$ est un compactifié de Ω'.

On supposera que (Ω, S) est un couple surharmonique tel que la « frontière » associée, M [2] soit un espace mesuré $M = (M, \mathfrak{T}, \mu)$, $\mu \geqslant 0$ tel que pour $A \subset \Omega$, l'ensemble $\mathcal{E}_A$ de h où A est effilé est mesurable.

Conditions pour qu'une application f *possède une limite fine presque partout aux points minimaux où elle est bornée.*

PROPOSITION 13. — *Soit* f *une application de* Ω *dans* Ω' *telle qu'il existe un ensemble* $\mathcal{D}$ *de fonctions numériques sur* Ω', *dénombrable et séparant* Ω', *vérifiant la propriété :*

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, $\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi \circ f$ *existe et est finie* μ-*pp sur* M.

Alors f *a une limite fine* $\mu - pp$ *aux points* $h \in M$ *où elle est bornée* (c'est-à-dire $\mu - pp$ *sur* $M \setminus M(f)$).

Pour démontrer la proposition on aura besoin du

LEMME 14. — *Soit* φ *une fonction réelle définie sur* Ω, *possédant une limite fine finie* $\mu - pp$ *sur* M,

$$\psi(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} \varphi$$

[2] C'est-à-dire l'ensemble des génératrices extrémales de H.

Soit $a \in \mathbf{R}$; *posons :*

$$U_a = \{\varphi > a\}$$

$$N_a = \left\{h \in M;\ U_a \quad \text{et} \quad \left[U_a \text{ non effilés en } h\right\}\right.$$

On a alors

$$N_a \subset \{\psi = a\},$$

à un ensemble μ*-négligeable près.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que d'après le théorème 8, la fonction ψ est μ-mesurable.

Soit $h \notin \{\psi = a\}$ et tel que $\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi$ existe et soit finie. Si $\lim \varphi < a$, il existe $B \in \mathcal{F}_h$ tel que $B \subset \{\varphi < a\} \subset \left[U_a$. Donc $\left[U_a \in \mathcal{F}_h$. Si $\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi > a$ il existe $B' \in \mathcal{F}_h$ tel que $B' \subset U_a$ donc $U_a \in \mathcal{F}_h$; ψ étant définie $\mu - pp$, le lemme s'ensuit.

Pour $e \subset \Omega$ notons $M(e) = \{h \in M;\ e \in \mathcal{F}_h\}$.

Le lemme précédent s'écrit :

$$M \setminus \left(M(U_a) \cup M\left(\left[U_a \right) \right) \right) \subset \{\psi = a\}$$

à un ensemble μ-négligeable près.

Démonstration de la proposition. — D'après le théorème 8, on sait que $M(f)$ est mesurable dans M, et pour tout $\nu \in \mathfrak{D}$, si on pose

$$\psi_\nu(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} \nu \circ f,$$

ψ_ν définie μpp sur M est mesurable.

Pour tout $\nu \in \mathfrak{D}$, soit donc D_ν un ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{R}$ tel que :

$$\mu\{h \in M;\ \psi_\nu(h) = a\} = 0, \qquad \forall a \in D_\nu.$$

On pose :

$$U_a^\nu = f^{-1}\{x' \in \Omega';\ \nu(x') > a\}.$$

D'après le lemme précédent, on a :

$$\mu\left\{ M \setminus \left(M(U_a^\nu) \cup M\left(\left[U_a^\nu \right) \right) \right) \right\} = 0.$$

pour $\nu \in \mathfrak{D}$ et $a \in D_\nu$.

Posons

$$B = \bigcup_{v\in\mathfrak{D}} \bigcup_{a\in D_v} \Big\{ M \setminus \Big(M(U_a^v) \cup M\Big(\Big[U_a^v \Big) \Big) \Big\}.$$

On a $\mu(B) = 0.$

Soit maintenant $h \in M \cap \big[M(f) \cap \big[B$. On a $\mathcal{A}(h) \subset \Omega$ d'après la propriété de $M(f)$. Si $\mathcal{A}(h)$ n'était pas réduit à un point, soient y_1 et y_2 distincts dans $\mathcal{A}(h)$. Il existe par hypothèse $v \in \mathfrak{D}$ tel que $v(y_1) \neq v(y_2)$. Soit $a \in D_v$ tel que si l'on pose $U_a'^v = \{v > a\}$ on ait par exemple $y_2 \in U_a'^v$ et $v(y_2) < a$. Il est clair que ni $f^{-1}(U_a'^v) = U_a^v$ ni $\big[U_a^v$ n'appartiennent au filtre $\mathfrak{F}_h$. Donc $h \in M \setminus \Big(M(U_a^v) \cup M\Big(\Big[U_a^v \Big) \Big)$. Par suite $h \in B$, ce qui contredit le choix de h dans $M \setminus B$.

Donc

$$M \cap \big[M(f) \cap \big[B \subset L_f;$$

c'est-à-dire $$\mu\Big(M \cap \big[M(f) \cap \big[L_f \Big) = 0.$$

c.q.f.d.

La même technique de séparation permet de démontrer le

THÉORÈME 15. — *Soit* (Ω, S) *un couple surharmonique dont la frontière minimale* M *est un espace mesuré* $(M, \mathfrak{T}, \mu)$ *tel que si* $E \subset \Omega$, *l'ensemble des* $h \in M$ *où* E *est effilé est mesurable. Soit* Y *un espace compact et* $f\colon \Omega \to Y$ *telle que pour une suite* $(u_n) \subset \mathcal{C}(Y)$ *séparant* Y, $\lim\limits_{\mathfrak{F}_h} u_n \circ f$ *existe* μ *— pp sur* M *pour tout* n. *Alors* f *a une limite fine* μ *— pp à la frontière minimale* M *de* Ω.

Nous allons voir que les résultats précédents s'appliquent en théorie de Bauer, et dans le cadre de celle-ci, nous donnerons des critères pour que f ait une limite fine sur l'ensemble $M(f)$ presque partout (dans un sens à préciser). La conjonction de ces résultats nous donnera un ensemble de conditions sur f pour qu'elle possède une limite fine presque partout à la frontière minimale.

3. Cas de la théorie axiomatique de Bauer.

A partir de maintenant on se place dans le cadre des espaces harmoniques de Bauer.

Espaces harmoniques. — L'étude abstraite a été conduite en vue de l'application à la théorie des fonctions surharmoniques de Bauer [1]. On appellera *espace harmonique* un espace localement compact à base dénombrable muni d'une axiomatique de Bauer comportant l'axiome de convergence de Doob, la séparation par les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$. La constante 1 sera supposée harmonique; cette hypothèse, comme on le verra, n'ayant rien d'essentiel.

Ω et Ω' sont deux espaces harmonique de Bauer; S et S' (resp. H, H') sont les cônes de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ (resp. harmoniques $\geqslant 0$) correspondants. M et M' sont les fonctions minimales non identiquement nulles de H et H'. On définit pour une application f de Ω dans Ω' les ensembles $H(f)$, $M(f)$, $\mathcal{A}(h)$, comme dans le cadre abstrait.

Représentation intégrale. — On sait que H est métrisable faiblement complet et réunion de ses chapeaux. De plus H est réticulé. La représentation intégrale y est donc une application directe des théorèmes de Choquet sur les cônes saillants faiblement complets [4] (3). La fonction 1 a été supposée harmonique. Il existe donc une *mesure conique* μ_1 et une seule (maximale) sur M telle que

$$1 = \int h \, d\mu_1(h).$$

Lorsqu'on dira par la suite « $\mu_1 - pp$ », cela signifiera : presque partout pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ maximale localisée de μ_1 sur un chapeau de H.

Les résultats suivants sont nécessaires pour l'étude des limites fines d'application de Ω dans Ω'.

LEMME 16. — *Soit* $E \subset \Omega$ *un ensemble quelconque; soit* $u \in S^+$ *et* $(u_n) \subset S^+$ *suite croissante vers* u. *Alors*

$$R_u^E = \sup_n R_{u_n}^E \qquad \text{et} \qquad \hat{R}_u^E = \sup_n \hat{R}_{u_n}^E.$$

Ceci est un cas particulier d'un résultat de [3'].

LEMME 17. — *Pour toute partie* $E \subset \Omega$ *et tout* $x \in \Omega$, *l'application* $(u, x) \longmapsto \hat{R}_u^E(x)$ *de* $H \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *est borélienne,*

(3) La représentation intégrale des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans la théorie de Bauer a été faite par G. Mokobodzki en 1965.

H *étant muni de la topologie de la convergence en graphe. L'application* $u \longmapsto \hat{R}_u^E(x)$ *est limite simple d'une suite de fonctions affines boréliennes de première classe.*

Ce lemme peut être déduit directement d'un résultat de G. Mokobodzki et D. Sibony [8].

PROPOSITION 18. — *Pour toute partie* $E \subset \Omega$ *l'ensemble* $\mathcal{E}_E$ *des* $h \in M$ *où* E *est effilé est borélien.* (H *est muni de la topologie de la convergence compacte*).

Démonstration. — En effet si (x_n) est une suite dense dans Ω, on a

$$\mathcal{E}_E = \{h \in M;\ \hat{R}_h^E \not\equiv h\} = \bigcup_n \{h \in M;\ \hat{R}_h^E(x_n) \neq h(x_n)\}.$$

d'où le résultat d'après le lemme précédent.

Il en résulte que pour toute application f de Ω dans Ω', l'ensemble $M(f)$ est un borélien de M. (cf. th. 8).

Rappelons enfin que S est réticulé pour son ordre propre (ou spécifique) que l'on désignera par $\prec$.

DÉFINITION 19. — *On dit qu'une application* f *de* Ω *dans* Ω' *est de type* (A) *si elle vérifie la condition :*

« *pour toute* $v' \in H'$, $v' \circ f \in S$ ».

LEMME 20. — *Soit* $f\colon \Omega \to \Omega'$ *une application de type* (A). *Si* $u_1, u_2 \in H(f)$, *alors la borne supérieure spécifique de* u_1 *et* u_2 *est dans* $H(f)$.

Démonstration. — Soit u cette borne supérieure. On a $u \leqslant u_1 + u_2$ et $v = u_1 + u_2 \in H(f)$ par additivité de la réduite. Or il existe $w \in H$ tel que $v = w + u$, et pour tout e' complémentaire de compact dans Ω' on a

$$R_v^{f^{-1}(e')} = R_w^{f^{-1}(e')} + R_u^{f^{-1}(e')} = v = w + u.$$

Donc $R_u^{f^{-1}(e')} = u$.

COROLLAIRE 21. — *Pour toute* $s \in S$, *l'ensemble* $\{u \in H(f);\ u \leqslant s\}$ *est filtrant croissant pour l'ordre spécifique ; son enveloppe supérieure pour l'ordre naturel est un élément de* $H(f)$.

Démonstration. — La première partie résulte du lemme précédent. Soit

$$w = \sup \{u \in \mathrm{H}(f);\ u \leqslant s\}.$$

La fonction w est enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant croissant dans H, majoré par $s \in \mathrm{S}$, donc w est harmonique. On peut donc d'après le lemme topologique de Choquet écrire $w = \sup_n u_n$ où $(u_n) \subset \mathrm{H}(f)$ est une suite croissante. Le lemme 18 permet de voir que $w \in \mathrm{H}(f)$.

Introduisons maintenant un opérateur utilisé sous une forme plus particulière dans [3] pour les surfaces de Riemann et les applications analytiques.

Soit f une application de Ω dans Ω', *ouverte.*

DÉFINITION 22. — *Pour tout* $\varphi \in \mathrm{S}$ *on pose*

$$\mathrm{E}\varphi = \inf \{\varphi' \in \mathrm{S}', \varphi' \circ f \geqslant \varphi\}$$

et $\mathrm{E}\varphi \equiv +\infty$ *si l'ensemble ci-dessus est vide.*

Posons pour tout $\varphi \in \mathrm{S}$,

$$\overline{\varphi}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x) & \text{si} \quad y \in f(\Omega). \\ 0 \quad \text{si} & y \in \Omega' \setminus f(\Omega). \end{cases}$$

f étant ouverte, $\overline{\varphi}$ est une fonction s.c.i. sur Ω' pour tout $\varphi \in \mathrm{S}$ (la réciproque étant vraie si par exemple les ouverts du type $\{\varphi > \lambda\}_{\substack{\varphi \in \mathrm{S} \\ \lambda \in \mathbf{R}^+}}$ forment une base de la topologie de Ω).

L'opérateur E ne sera utilisé que dans la preuve du lemme 28.

PROPOSITION 23. — *L'opérateur* E *est sous-additif et vérifie les propriétés :*

1° $(\varphi \in \mathrm{S}) \Longrightarrow (\mathrm{E}\varphi \in \mathrm{S}')$

2° $(\mathrm{E}\varphi = 0) \Longrightarrow (\varphi = 0)$.

Démonstration. — On a $\mathrm{E}\varphi = \inf \{\varphi'_\alpha \in \mathrm{S}';\ \varphi'_\alpha \geqslant \overline{\varphi}$ sur $\Omega'\}$, c'est-à-dire $\mathrm{E}\varphi = \mathrm{R}_{\overline{\varphi}}^{\Omega'}$; $\overline{\varphi}$ étant s.c.i. et $\widehat{\inf \varphi'_\alpha}$ appartenant à S', la proposition s'ensuit.

Remarque. — La condition « f est ouverte » ne sert qu'à assurer que $E\varphi \in S'$ et pourra donc dans tous les résultats qui suivent être remplacée par cette dernière condition.

Pour la suite on utilisera surtout le résultat suivant :

PROPOSITION 24. — *Soit* $u \in H(f)$. *Alors si* $Eu \not\equiv +\infty$, *on a* $Eu \in H'$.

Démonstration. — Soit ω' un ouvert relativement compact de Ω'. On a $u = R_u^{\complement f^{-1}(\omega')}$ par définition de $H(f)$. Donc

$$\begin{aligned} Eu = E\left(R_u^{\complement f^{-1}(\omega')}\right) &= \inf\left\{\varphi' \in S';\ \varphi' \circ f \geqslant R_u^{\complement f^{-1}(\omega')}\right\} \\ &\leqslant \inf\left\{\varphi' \in S';\ \varphi' \circ f \geqslant u \text{ sur } \complement f^{-1}(\omega')\right\} \\ &\leqslant \inf\left\{\varphi' \in S';\ \varphi' \geqslant Eu \text{ sur } \complement\omega'\right\} \end{aligned}$$

car si $\varphi' \geqslant (Eu)$ sur $\complement\omega'$, alors $\varphi' \circ f \geqslant (Eu) \circ f \geqslant u$ sur $f^{-1}(\complement\omega')$.

Par suite $Eu \leqslant R_{Eu}^{\omega'}$ donc $Eu = R_{Eu}^{\omega'}$.

PROPOSITION 25. — *Supposons que pour toute* $u' \in H'$ *on ait* $u' \circ f \in S$. *Si* $h \in M(f)$ *et* $Eh \not\equiv +\infty$, *alors* Eh *est une fonction minimale de* H'.

Démonstration. — Soit $\varphi' \in H'$, $\varphi' \not\equiv 0$ telle que $\varphi' \leqslant Eh$. On a $Eh = Eh - \varphi' + \varphi'$. Donc $h \leqslant (Eh - \varphi') \circ f + \varphi' \circ f$. Donc, puisque par hypothèse $(Eh - \varphi') \circ f$ et $\varphi' \circ f$ sont dans S, on peut décomposer h en $h_1 + h_2$ avec

$$h_1 \leqslant (Eh - \varphi') \circ f \qquad \text{et} \qquad h_2 \leqslant \varphi' \circ f.$$

D'après la proposition précédente, Eh_1 et Eh_2 sont dans H'; par suite il existe α_1 et α_2 nombres réels $\geqslant 0$ tels que : $h_i = \alpha_i h$ $(i = 1,2)$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Aucun des α_i n'est nul si on suppose φ' distincte de Eh. On a

$$Eh \leqslant Eh_1 + Eh_2 \leqslant Eh - \varphi' + \varphi' = Eh.$$

Donc, puisque $Eh_2 \leqslant \varphi'$ et $Eh_1 \leqslant Eh - \varphi'$ on a

$$Eh_1 = Eh - \varphi' \quad \text{et} \quad Eh_2 = \varphi' = \alpha_2 Eh_2.$$

c.q.f.d.

La définition suivante est justifiée par le Corollaire 21.

DÉFINITION 26. — *Soit f une application de type* (A) *de* Ω *dans* Ω'. *On définit un opérateur* I_f *de* H' *dans* $H(f)$ *par la formule suivante :*

$$I_f v' = \sup \{u \in H(f);\ u \leqslant v' \circ f\}, \qquad \forall v' \in H'.$$

Notation. — Pour toute $v' \in H'$ on désignera par $\mu_{v'}$ la mesure conique associée à la partie harmonique v de $v' \circ f$ dans la formule de représentation intégrale :

$$v = \int_M h \, d\mu_{v'}(h).$$

PROPOSITION 27. — *Pour toute* $v' \in H'$, *on a :*

$$I v' = \int_{M(f)} h \, d\mu_{v'}(h)$$

Démonstration. — 1° Soit $u = \int_{M(f)} h \, d\mu_{v'}(h)$. Alors $u \in H(f)$, car pour tout ouvert ω' relativement compact dans Ω', si on pose $\omega = f^{-1}(\omega')$, on a pour tout $x \in \Omega$

$$\hat{R}_u^{\complement\omega}(x) = \int_{M(f)} \hat{R}_h^{\complement\omega}(x) \, d\mu_{v'}(h) = \int_{M(f)} h(x) \, d\mu_{v'}(h) = u(x)$$

d'après le lemme 17.

2° Il est clair que u est la plus grande fonction harmonique appartenant à $H(f)$ et minorant la partie harmonique de $v' \circ f$. Donc $u = I v'$.

LEMME 28. — *Soit h' harmonique minimale dans* Ω, $h' \not\equiv 0$; *soit* $e' \subset \Omega'$ *avec* $e' \in \mathcal{F}_{h'}$. *Posons :*

$$e = f^{-1}(e') \qquad \text{et} \qquad M(e) = \{h \in M;\ e \in \mathcal{F}_h\}.$$

Si f est ouverte, alors :

$$I h' = \int_{M(f) \cap M(e)} h \, d\mu_{h'}(h).$$

Démonstration. — On sait que $I h' = \int_{M(f)} h \, d\mu_{h'}(h)$.

L'ensemble $M(e)$ étant borélien, il suffit de démontrer que la fonction

$$u = \int_{M(f) \cap (M \setminus M(e))} h \, d\mu_{h'}(h)$$

est nulle sur Ω.

On a $u \in H(f)$ car la réduite régularisée commute avec l'intégration, comme on l'a déjà vu. De plus $u \leqslant Ih'$, et $u = \hat{R}_u^{\complement e}$ car les h qui interviennent dans la formule de u ne sont pas dans $M(e)$. On a donc :

$$u = \hat{R}_u^{\complement e} \leqslant \hat{R}_{Ih'}^{\complement e} \leqslant \hat{R}_{h' \circ f}^{\complement e}.$$

Utilisons maintenant l'opérateur E introduit précédemment. On a :

$$Eu \leqslant h'.$$

Donc $Eu = \alpha h'$ car Eu est harmonique d'après la proposition 24. Mais d'après la démonstration de cette même proposition on a :

$$Eu = \hat{R}_{Eu}^{\complement e'} = \alpha \hat{R}_{h'}^{\complement e'}.$$

Or par hypothèse $e' \in \mathcal{F}_h$; donc $\hat{R}_{h'}^{\complement e'}$ est un potentiel; on a donc une contradiction sauf si $\alpha = 0$ auquel cas $Eu = 0$ et par suite $u = 0$.

Corollaire. 29. — *Pour toute* $h' \in M'$, *si* f *est ouverte, on a :*

$$Ih' = \lim_{\substack{e = f^{-1}(e') \\ e' \in \mathcal{F}_{h'}}} \int_{M(f) \cap M(e)} h \, d\mu_{h'}(h).$$

Démonstration. — Il suffit de passer à la limite dans la formule du lemme précédent.

Définition 30. — *Un compactifié* $\tilde{\Omega}'$ *de* Ω' *sera dit de type* ($\mathcal{M}\mathfrak{b}$) *s'il est métrisable et s'il existe une injection* i *de* $\Omega' \cup M_0$ *dans* $\tilde{\Omega}'$ (*où* M_0 *est obtenu en identifiant les éléments proportionnels de* M) *telle que :*
pour tout voisinage U′ *de* $i(h')$ ($h' \in M_0$) *dans* $\tilde{\Omega}'$, $U' \cap \Omega'$ *appartient au filtre fin* $\mathcal{F}_{h'}$.

Remarque. — On n'exige pas que l'injection i soit continue.

Corollaire 31. — *Soit* $\tilde{\Omega}'$ *un compactifié de type* ($\mathcal{M}\mathfrak{b}$) *et* $f : \Omega \to \Omega'$ *une application ouverte de type* (A). *Alors*

pour toute $h' \in M'$ *on a*:

$$Ih' = \int_{M(f)\cap \hat{f}^{-1}(h')} h \, d\mu_{h'}(h).$$

Démonstration. — Soit (U'_α) un système fondamental de voisinages de h' (c'est-à-dire de l'image de h' par l'injection i) dans $\tilde{\Omega}'$. On a $\Omega' \cap U'_\alpha \in \mathcal{F}_h$, $\forall \alpha$, et on a vu au début que

$$\hat{f}^{-1}(h') = \bigcap_\alpha \{h \in M; f^{-1}(U'_\alpha \cap \Omega') \in \mathcal{F}_h\}.$$

Par suite en appliquant le corollaire précédent on a le résultat.

THÉORÈME 32. — *Soient* Ω *et* Ω' *deux espaces* L.C.D. *munis d'une théorie axiomatique de Bauer (axiome* K_D*), les constantes étant harmoniques. Soit* f *une application ouverte de* Ω *dans* Ω' *telle que pour toute* $u' \in H'$, $u' \circ f \in S$. *Alors pour tout* $\tilde{\Omega}'$ *compactifié de type* $(\mathfrak{M})$ *de* Ω', f *possède une limite fine presque partout sur* $M(f)$ *pour la mesure* μ_1 *sur* M *associée à la fonction* 1 *dans la représentation intégrale.*

Démonstration. — On a en effet d'une part $\mu_1 = \int \mu_{h'} d\mu'_1(h')$, où μ_1 et μ'_1 sont les mesures associées à 1 dans Ω et Ω', et d'autre part le corollaire 31 signifie que

$$\mu_{h'}[M(f) \setminus \hat{f}^{-1}(h')] = 0 = \mu_{h'}[M(f) \setminus \hat{f}^{-1}(M')]$$

pour tout $h' \in M'$. Par suite $\mu_1[M(f) \setminus \hat{f}^{-1}(M')] = 0$, autrement dit $\hat{f}$ est défini $\mu_1 - pp_1$ sur $M(f)$.

THÉORÈME 33. — *Soient* Ω *et* Ω' *deux espaces* L.C.D. *munis d'une théorie axiomatique de Bauer avec axiome de convergence de Doob et constantes harmoniques. Soit* f *une application de* Ω *dans* Ω'.

1° *S'il existe dans* Ω *une suite* (v_n) *de fonctions séparant* Ω' *et telle que* $\lim_{\mathcal{F}_h} v_n \circ f$ *existe et soit finie* $\mu_1 - pp$ *sur* M (*où* μ_1 *est la mesure représentative de la fonction* 1), *alors la limite* $\hat{f}$ *de* f *existe* $\mu_1 - pp$ *sur* $M \setminus M(f)$.

2° *Si* f *est ouverte et telle que* $(u' \in H') \Longrightarrow (u' \circ f \in S)$, *alors* $\hat{f}$ *existe* $\mu_1 - pp$ *sur* $M(f)$.

Remarque importante. Il est facile de voir que l'hypothèse « f ouverte » peut être remplacée par la suivante : pour tout $u \in H$, Eu appartient à S', seule conséquence de la première à avoir été utilisée.

Application.

Allure d'un potentiel à la frontière minimale.

Soit p un potentiel sur Ω, $p > 0$. C'est une application de Ω dans $\Omega' =]0, \to]$. Ω' est muni d'un système naturel de fonctions surharmoniques, les fonctions surharmoniques positives étant les fonctions concaves croissantes.

Nous allons identifier l'ensemble $M(p)$. On a

$$M(p) = \{h \in M;\ \forall \alpha, \beta \in]0, \to[;\ R_h^{(p<\alpha)\cup(p>\beta)} = h\}.$$

Soit M_a l'ensemble des $h \in M$ tels que $\{p \leqslant a\} \in \mathcal{F}_h$. Du fait que M_a est mesurable pour μ_1, soit $u = \int_{M \setminus M_a} h d\mu_1(h)$. On a $R_u^{(p \geqslant a)} = u$ par définition des M_a. Donc

$$u \leqslant R_1^{(p \geqslant a)} \leqslant \inf\left(\frac{p}{a}, 1\right).$$

Donc $u = 0$. Par suite $M(p) = M_a = M$ pour tout $a > 0$ à un ensemble μ_1-négligeable près. Cela démontre également le

THÉORÈME 34. — *Pour tout potentiel p dans Ω, $\lim_{\mathcal{F}_h} p$ existe et vaut 0, μ_1-presque partout pour $h \in M$.*

On donne plus loin le théorème de Doob correspondant aux fonctions harmoniques.

Signalons enfin que dans le cas où Ω et Ω' sont deux surfaces de Riemann hyperboliques on obtient le théorème de Fatou démontré par Constantinescu-Cornea et Doob.

4. Allure à la frontière minimale d'une fonction surharmonique positive.

Soit $v \in S$, $v = u + p$. Nous allons montrer que u — la partie harmonique de v — a une limite fine $\mu_1 - pp$ aux points minimaux $h \in M$.

1. *Cas d'une fonction harmonique bornée.*

Notons H_b les fonctions bornées de H. Montrons que pour toute $u \in H_b$, $\lim_{\mathcal{F}_h} u$ existe $\mu_1 - pp$ sur M. On peut toujours supposer $u \leqslant 1$, ce qu'on fera.

LEMME 35. — *Soient* u_1 *et* u_2, *harmoniques* $\geqslant 0$ *bornées telles que* $1 = u_1 + u_2$, u_1 *et* u_2 *étant étrangères* (*pour l'ordre de* H).

Alors $\lim_{\mathcal{F}_h} u_1$ *et* $\lim_{\mathcal{F}_h} u_2$ *existent* μ_1*-presque partout sur* M.

Démonstration. — En effet la fonction $q = \inf(u_1, u_2)$ est un potentiel, donc d'après ce qui précède, possède μ_1-presque partout la limite 0 pour $h \in M$, suivant les filtres $\mathcal{F}_h$. Par suite il en est de même pour la fonction $\sup(u_1, u_2)$.

Soient μ_{u_1} et μ_{u_2} les mesures coniques associées à u_1 et u_2. Il est clair que pour tout chapeau K de H, contenant u_1 et u_2, deux localisées de μ_{u_1} et μ_{u_2} sur K sont des mesures étrangères.

Considérons les ensembles

$$e_1 = \{u_1 \leqslant u_2\}$$
$$e_2 = \{u_2 < u_1\}.$$

On a $\hat{R}^{e_1}_{u_1} \leqslant \inf(u_1, u_2)$ qui est un potentiel. Donc e_1 est effilé $\mu_{u_1} - pp$ sur M. Donc $\int e_1 = e_2 \in \mathcal{F}_h$ pour μ_{u_1}-presque tout $h \in M$. De même $e_1 \in \mathcal{F}_h$ pour μ_{u_2}-presque tout $h \in M$.

Par suite, il existe $B \subset M$, négligeable pour la mesure μ_1, tel que si $h \in M \setminus B$, e_1 ou e_2 appartiennent au filtre $\mathcal{F}_h$ c'est-à-dire que $\sup(u_1, u_2)$ vaut u_1 ou u_2 sur un élément du filtre fin.

Par suite $\lim_{\mathcal{F}_h} u_1$ et $\lim_{\mathcal{F}_h} u_2$ existent $\mu_1 - pp$ pour $h \in M$.

PROPOSITION 36. — *Soit* u *une fonction harmonique bornée* $\geqslant 0$ *sur* Ω. *Alors* $\lim_{\mathcal{F}_h} u$ *existe* $\mu_1 pp$ *sur* M.

Démonstration. — L'espace vectoriel $H_b - H_b$ étant complètement réticulé, il est bien connu qu'on peut l'identifier à

l'espace $\mathcal{C}(X)$ de fonctions continues sur un espace X compact *stonien*, donc totalement discontinu.

Soit $\varepsilon > 0$ et $u \in H_b$. Il existe $(\omega_i)_{i \leqslant n}$ un recouvrement fini de X tel que l'oscillation de u sur chaque ω_i soit $\leqslant \varepsilon$ et tel que les ω_i soient ouverts, fermés et deux à deux disjoints. Posons

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in \omega_i} u(x) \right) . 1_{\omega_i}$$

où 1_{ω_i} est la fonction caractéristique de l'ouvert ω_i qui est continue dans X, donc s'identifie à un élément u_i de H_b.

Il est clair qu'on a

$$0 \leqslant u - u_\varepsilon \leqslant \varepsilon . 1.$$

Par suite : toute $u \in H_b$ est limite uniforme dans Ω d'une suite de fonctions $(u_n) \subset H_b$ telle que chaque u_n s'écrive

$$u_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i u_n^i$$

avec $\sum_{i=1}^{k_n} u_n^i = 1$ pour tout n, u_n^i et u_n^j étant étrangères si $i \neq j$. D'après le lemme précédent, chaque u_n a donc une limite fine μ_1 presque partout à la frontière minimale M; il en est donc de même de u. c.q.f.d.

2. *Cas d'une fonction surharmonique* $\geqslant 0$ *quelconque.*

Soit $v \in S$ (surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω). Soit (p_n) une suite de potentiels à support compact dans $\mathbf{R}^+$ (pour la théorie du potentiel standard sur $\mathbf{R}^+$) qui sépare $\mathbf{R}^+$. Chaque p_n est borné, étant constant en dehors d'un intervalle $]0, a]$ (a fini). Donc pour tout n on a

$$p_n \circ v = u_n + q_n$$

où u_n est la partie harmonique de la fonction $p_n \circ v$ surharmonique dans Ω et q_n la partie potentiel. Il est clair que u_n est bornée, donc d'après la proposition précédente possède une limite fine $\mu_1 - pp$ sur M. On a déjà vu que $\lim_{\mathcal{F}_h} q_n = 0$ $\mu_1 - pp$ pour $h \in M$. Donc $\lim p_n \circ v$ existe (et est finie) $\mu_1 - pp$ pour tout n. On applique alors notre Théorème 33 (compte tenu de la remarque qui le suit), ce qui permet

d'affirmer que $\mu_1 - pp$ pour $h \in M, \lim_{\mathcal{F}_h} v$ existe dans $[0, +\infty]$. Montrons que l'ensemble où cette limite vaut $+\infty$ est μ_1-négligeable. Si e_n est l'ensemble des $h \in M$ où $(v > n)$ est non effilé, soit $u_n = \int_{e_n} h\, d\mu_1(h)$. On a $u_n = R_{u_n}^{(v>n)}$ donc

$$\int_{e_n} h\, d\mu_1(h) \leqslant R_1^{(v>n)} \leqslant \frac{v}{n}.$$

Donc $\bigcap_n e_n$ est μ_1-négligeable. On a donc démontré le

THÉORÈME 37. — *Pour toute v surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω, $\lim_{\mathcal{F}_h} v$ existe et est finie $\mu_1 - pp$ pour h dans la frontière minimale* M *de* Ω.

La fonction 1 ne jouant aucun rôle essentiel dans cette question, on a en fait

THÉORÈME 37'. — *Pour toute u harmonique > 0 dans Ω et toute v surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω, $\lim_{\mathcal{F}_h} \frac{v}{u}$ existe et est finie $\mu_1 - pp$ pour $h \in M$, où μ_u est la mesure conique maximale représentant u.*

Le problème de Dirichlet associé aux filtres fins.

Remarque. — Pour toute $u \in H$, il existe u_1, $u_2 \in H$: $u = u_1 + u_2$, où u_1 ne majore aucune fonction harmonique $\geqslant 0$ bornée dans Ω autre que O, et u_2 l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions bornées de H.

Démonstration. — C'est une conséquence triviale et bien connue du fait que H est réticulé.

Suivant une terminologie classique, u_1 sera dite composante *singulière* de u, et u_2 sa composante *quasi bornée*.

LEMME 38. — *Toute fonction harmonique $u \in H$, singulière, est telle que $\lim_{\mathcal{F}_h} u = 0$ μ_1 presque partout.*

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, $\inf(u, \lambda)$ est un potentiel.

DÉFINITION 39. — *Une fonction numérique* φ *définie sur une partie* $A \subset H$ *est dite conique si elle est constante sur toute intersection de* A *avec une génératrice du cône* H.

Pour $A \subset M$ *on désignera par* 1_A *la fonction (conique) qui vaut* 1 *sur toute génératrice passant par* A *et* O *sur toute génératrice ne rencontrant pas* A.

Si $A \subset M$ *est* μ_1*-mesurable,* $1_A . \mu_1$ *définit une mesure conique.*

PROPOSITION 40. — *Pour toute partie* $A \subset M$ μ_1*-mesurable, si on pose*

$$u = \int h . 1_A(h)\, d\mu_1(h)$$

alors

$$\lim_{\mathcal{F}_h} u = \hat{u}(h) = 1_A(h) \quad \mu_1 - pp.$$

Démonstration. — Soit $A' = M \setminus A$, et $u' = \int h . 1_{A'}(h) d\mu_1(h)$. On voit sans peine que u et u' sont étrangères. Donc

$$\lim_{\mathcal{F}_h} [\inf (u, u')] = \inf (\hat{u}, \hat{u}') = 0 \quad \mu_1 - pp.$$

$\hat{u} + \hat{u}' = 1$, et, en reprenant l'argument du lemme 35 sur les ensembles $(u < u')$ et $(u' < u)$ on en tire que $\hat{u} = 1_A$, $\mu_1 - pp$, et $u' = 1_{A'}$, $\mu_1 = pp$.

PROPOSITION 41. — *Pour toute fonction* u *bornée de* H *on a*

$$u = \int h\hat{u}(h)\, d\mu_1(h).$$

Démonstration. — 1° Supposons que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ avec $\sum_{1}^{k} u_i = 1$ et u_i étrangère à u_j si $i \neq j$. Alors d'après la proposition précédente on a

$$u = \int h\hat{u}(h) d\mu_1(h).$$

2° Comme u est limite uniforme dans Ω d'une suite de fonctions du type précédent, la proposition résulte du lemme.

LEMME 42. — *Soit* $(u_n) \subset H_b$, (u_n) *convergeant uniformément dans* Ω *vers* $u \in H_b$. *Alors* $\hat{u}_n$ *converge uniformément sur*

M *vers* $\hat{u}$ *sauf sur l'ensemble* μ_1*-négligeable où l'une des fonctions* $\hat{u}_n$, $\hat{u}$ *n'est pas définie.*

La démonstration est immédiate.

Appelons *résolutive* toute fonction conique φ sur M qui est μ_1-sommable et telle que si $u = \int h\varphi(h)d\mu_1(h)$, on ait $\lim_{\mathcal{F}_h} u = \varphi(h)$ $\mu_1 - pp$.

On démontre de manière standard que toute fonction φ conique sur M, qui est μ_1-sommable est résolutive, en utilisant ici le résultat précédent qui assure que toute fonction bornée sur M et mesurable est résolutive.

Par suite :

THÉORÈME 43. — *Pour tout* $u \in H^+$, u *de base* 1, *la fonction* $\hat{u} = \lim_{\mathcal{F}_h} u$ *est* μ_1*-sommable et*

$$u = \int h\hat{u}(h)d\mu_1(h).$$

On a ainsi démontré les résultats essentiels concernant le problème de Dirichlet associé aux filtres fins $\mathcal{F}_h$. On trouvera une démonstration directe d'un énoncé plus général dans un article à paraître de l'auteur (4).

5. Les applications de type B1.

Ces applications apparaissent de façon naturelle quand on s'intéresse à l'ensemble des valeurs prises par la fonction limite $\hat{f}$. Dans le cas classique où Ω est le disque plan, une fonction analytique f sur Ω est de type Bl si la fonction $\hat{f}$ des limites angulaires presque partout sur $\{|z| = 1\}$ est à valeurs dans la frontière $\partial(f(\Omega))$ de l'ensemble des valeurs de f. Ces applications ont été définies et étudiées dans le cas des surfaces de Riemann par M. Heinz [7], Constantinescu-Cornea [3] et Doob [5].

Dans ce paragraphe Ω et Ω' seront deux espaces harmoniques au sens de M. Bauer; les constants sont supposés harmoniques. Soit μ_1 la mesure conique représentant la fonc-

(4) Voir ce même volume.

tion 1. L'expression « $\mu_1 - pp$ » signifiera toujours « presque partout sur M pour toute localisée de la mesure μ_1 ». $\tilde{\Omega}'$ est un compactifié de Ω'.

DÉFINITION 44. — *Une application f de Ω dans Ω' est de type* Bl *si*

i) $\hat{f}$ *est définie* $\mu_1 - pp$ *sur* M;

ii) *pour tout potentiel* $p' > 0$ *dans* Ω', $\lim_{\mathcal{F}_h} p' \circ f$ *existe et vaut* 0 $\mu_1 - pp$.

THÉORÈME 45. — *Soit* $f: \Omega \to \Omega'$ *de type* Bl. *Alors*

$$M(f) = M$$

à un ensemble μ_1*-négligeable près.*

La démonstration repose sur le

LEMME 46. — *Soit p' un potentiel > 0 dans Ω' tel que* $\varphi(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} p' \circ f$ *existe et soit finie* $\mu_1 pp$ *sur* M. *Alors* $(M \setminus M(f)) \cap L_f \subset \{h \in M;\ \varphi(h) > 0\}$ *à un ensemble* μ_1*-négligeable près (ce qu'on notera* (μ_1)*).*

Démonstration. — Soit $\alpha > 0$, $U'_\alpha = \{p' > \alpha\}$, $U_\alpha = f^{-1}(U'_\alpha)$. Soit $h \in M$ tel que $\varphi(h) < \alpha$. Il existe alors $e_h \in \mathcal{F}_h$ tel que $e_h \subset \complement U_\alpha$ donc $U_\alpha \notin \mathcal{F}_h$. Donc

$$\{h \in M;\ \varphi(h) \geqslant \alpha\} \supset \{h \in M;\ U_\alpha \in \mathcal{F}_h\}\ (\mu_1)$$

Soit $h \in (M \setminus M(f)) \cap L_f$. On a $\hat{f}(h) \in \Omega$; donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\hat{f}(h) \in U'_\alpha$ donc $U_\alpha \in \mathcal{F}_h$. Par suite

$$(M \setminus M(f)) \cap L_f \subset \bigcup_{\alpha > 0} \{h \in M;\ \varphi(h) \geqslant \alpha\} \quad (\mu_1)$$

c'est-à-dire

$$(M \setminus M(f)) \cap L_f \subset \{h \in M;\ \varphi(h) > 0\} \quad (\mu_1)$$

c.q.f.d.

Le théorème résulte alors du fait que pour tout p' potentiel > 0 dans Ω' on a $\varphi(h) = 0$ $\mu_1 pp$; et comme $\mu_1(M \setminus L_f) = 0$ on a bien $M = M(f)$ (μ_1).

THÉORÈME 47. — *Soit f une application de Ω dans Ω', telle que $\hat{f}$ existe $\mu_1 pp$. On suppose que $M(f) = M$ (μ_1). Si f vérifie l'une des conditions suivantes*

i) *f est ouverte;*

ii) *pour tout $u \in H$, $Eu \in S'$;*
alors f est de type Bl.

Démonstration. — On sait que la condition i) implique ii). Supposons ii). Pour tout $h \in M(f) \cap L_f$, on a vu que Eh est harmonique minimale dans Ω'. Soit

$$e' \in \mathcal{F}_{Eh'}, \qquad \text{et} \qquad e = f^{-1}(e').$$
$$E\left(R_h^{\complement e}\right) = R_{Eh}^{\complement e'}.$$

Par suite $R_h^{\complement e} \not\equiv h$ donc $f^{-1}(e') \in \mathcal{F}_h$. Soit alors un potentiel $p' > 0$ dans Ω'. Pour tout $h \in M(f) \cap L_f$ on a $\lim_{\mathcal{F}_h} p' \circ f = 0$ car dans Ω' $\lim_{y \to Eh} p'(y) = 0$. D'où le résultat.

Remarque. — Quand on prend $\Omega' =]0, \to [$ et S' : cône des fonctions concaves croissantes $\geqslant 0$ sur Ω' *on voit que tout potentiel $p > 0$ dans Ω est une application de type Bl.*

Remarque. — Il est clair que les applications de type Bl que nous avons introduites généralisent celles définies sur les surfaces de Riemann.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, *Lecture Notes*, Springer Verlag, 1966.

[2] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, *Séminaire de Math. Sup.*, Montréal, 1965.

[3] C. CONSTANTINESCU et A. CORNEA, Uber das Verhalten der analytischen Abbildungen Riemannischer Flächen..., *Nagoya Math. Journ.*, 17 (1960).

[3'] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA et N. BODOC, Axiomatic theory of harmonic functions-Balayage *A.I.F* 15/2 (1965).

[4] G. CHOQUET, Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, *Proc. of the Internat. Congr. of Math.* (1962).

[5] J. L. DOOB, Conformally invariant cluster value theory, *Illinois Journ. of Math.*, 5 (1961), p. 521, 547.

[6] K. Gowrisankaran, Extreme harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier* 13/2, (1963).
[7] M. Heinz, On the Lindelöf principle, *Ann. of Math.* (2) 61, 440-473 (1955).
[8] G. Mokobodzki et D. Sibony, Sur l'opération de réduite, (à paraître).
[9] D. Sibony, Généralisation de la théorie de Constantinescu-Cornea-Doob sur l'allure à la frontière d'applications analytiques, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Mars 1965.

Manuscrit reçu le 25 février 1968

Daniel Sibony.
Institut Henri-Poincaré, 11, rue P.-Curie,
Paris, 5e.