ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER

Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions

Annales de l'institut Fourier, tome 18, n° 2 (1968), p. 73-86

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_73_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 73-86.

ISOMORPHISMES ENTRE CERTAINES ALGÈBRES DE RESTRICTIONS

par Yves MEYER

1. Isomorphisme entre $A(\Lambda + V)$ et $A(\Lambda \times V)$.

1.1. *Notations.* — $A(\mathbf{R})$, $A(E)$, $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$.

Par transport de structure d'algèbre de Banach, on définit l'algèbre $A(\mathbf{R})$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments f de $L^1(\mathbf{R})$ (où le produit est le produit de convolution). Si E est une partie fermée de $\mathbf{R}$, soit $I(E)$ l'idéal fermé de $A(\mathbf{R})$ composé de tous les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E et soit $A(E)$ l'algèbre quotient $A(\mathbf{R})/I(E)$ munie de la norme quotient. L'algèbre $A(E)$ est semi-simple, son spectre est E et $A(E)$ peut être identifiée à une sous algèbre de $\mathcal{C}(E)$.

Soit $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues, à valeurs complexes, nulles à l'infini sur $\mathbf{R}$. On dit que le spectre d'un élément g de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ est contenu dans E si pour tout f de $L^1(\mathbf{R})$, on a

$$(1) \qquad \hat{f}|_E = 0 \Longrightarrow \int_{\mathbf{R}} g(x)f(-x)\,dx = 0.$$

On appellera $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$ le sous-espace fermé de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ composé des éléments g vérifiant (1). Les espaces de Banach $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$ et $A(E)$ sont, de façon canonique, en dualité et, si chaque composante connexe de E est un intervalle non nul, la norme d'un élément φ de $A(E)$ est la norme de la forme linéaire que définit cet élément dans le dual de $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$.

Soit $(\Lambda_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermées de $\mathbf{R}$. On définit alors le produit tensoriel topologique complété $\widehat{\bigotimes_{i\in I}} A(\Lambda_i)$ comme l'algèbre de Banach de toutes les fonctions continues sur $\prod_{i\in I}\Lambda_i$ (l'espace produit muni de la topologie produit) et pouvant s'écrire

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \tag{2}$$

où, pour tout n, il existe une partie finie A_n de I et une suite $g_i(x_i)$, $i \in A_n$, d'éléments de $A(\Lambda_i)$ tels que

$$f_n(x) = \prod_{i\in A_n} g_i(x_i) \tag{3}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1}\prod_{i\in A_n} \|g_i\|_{A(\Lambda_i)} < +\infty. \tag{4}$$

La norme de $f(x)$ dans $\widehat{\bigotimes_{i\in I}} A(\Lambda_i)$ est le inf. des quantités (4) étendu à toutes les décompositions (2) de $f(x)$.

Nous retiendrons les deux propriétés suivantes : le produit tensoriel topologique complété est associatif; une partie dense dans $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$ est formée des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Soit enfin $A(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ l'algèbre des restrictions à $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ des éléments de $A(\mathbf{R}^2)$. On a alors :

Proposition 1.1. — *Soient* Λ_1 *et* Λ_2 *deux fermés de* $\mathbf{R}$. *Les deux algèbres* $A(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ *et* $A(\Lambda_1)\widehat{\otimes} A(\Lambda_2)$ *sont isomorphes et isométriques.*

Cette proposition est une conséquence simple de l'égalité $L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) = L^1(\mathbf{R})\widehat{\otimes} L^1(\mathbf{R})$ (Voir Cor. 4 du th. 2 ch. 1, § 2, n° 2, [1]).

1.2. *Le théorème fondamental.*

D'abord une définition.

Définition 1.2.1. — *Soit* Λ *une partie de* $\mathbf{R}$, K *un compact de* $\mathbf{R}$ *et* ε *un nombre réel de* $]0, 1[$. *On dira que le couple* (K, ε) *est adapté à* Λ *si la condition suivante est réalisée : pour toute suite* $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de nombres complexes dont*

tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, on a

$$(1) \qquad \sup_{x\in K}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}\right| \geqslant (1-\varepsilon)\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}\right|$$

(Voir [2], p. 297, prop. 1).

Si A est un nombre réel strictement positif, nous dirons que le couple (A, ε) est adapté à Λ pour exprimer que, si K = [— A, A], le couple (K, ε) est adapté à Λ. Si T est un nombre réel quelconque, le couple (K + T, ε) est encore adapté à Λ dès que le couple (K, ε) l'est.

Si Λ est une partie de **R**, appelons « pas » de Λ la quantité inf $\{|x' - x|\,;\, x\in\Lambda, x'\in\Lambda, x\neq x'\}$.

PROPOSITION 1.2.2. — *Si le couple* (A, ε) *est adapté à* Λ, *alors le pas de* Λ *est supérieur ou égal à* $2(1-\varepsilon)A^{-1}$.

En effet si $\lambda\in\Lambda$, $\lambda'\in\Lambda$ et $\lambda\neq\lambda'$ on a $\|e^{i\lambda x} - e^{i\lambda' x}\|_\infty = 2$ et, au contraire, $\sup_{x\in[-A,\,A]} |e^{i\lambda x} - e^{i\lambda' x}| \leqslant |\lambda - \lambda'|A$. Il suffit alors de tenir compte de (1).

Soit l, $l>0$, assez petit pour que $Al + \varepsilon < 1$. La proposition 1.2.2 montre que les intervalles $[\lambda - l, \lambda + l]$, $\lambda\in\Lambda$, sont deux à deux disjoints.

PROPOSITION 1.2.3. — *Soit* (A, ε) *un couple adapté à* Λ *et* l *un nombre réel strictement positif tel que* $Al + \varepsilon < 1$. *Pour toute suite finie* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ *telle que le spectre de chaque* f_λ *soit contenu dans* $[-l, l]$, *on a la double inégalité*

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda x}\right| \leqslant \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda y}\right| \leqslant (1-\varepsilon-Al)^{-1}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda x}\right|.$$

La première inégalité est évidente : quelques notations seront utiles pour prouver la seconde.

Soit

$$\varphi(x,\,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda y}$$

$$a = \sup\{|\varphi(x,y)|\,;\, -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$$

$$b = \sup\{|\varphi(x,y)|\,;\, -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ |x-y|\leqslant A\}$$

$$c = \sup\left\{\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda x}\right|;\ -\infty<x<+\infty\right\}.$$

Nous allons vérifier les deux inégalités

$$b \geqslant (1 - \varepsilon)a \tag{1}$$
$$|b - c| \leqslant \mathrm{A}la \tag{2}$$

d'où il résultera que

$$c \geqslant b - \mathrm{A}la \geqslant a(1 - \varepsilon - \mathrm{A}l)$$

ce qu'il faut démontrer.

La vérification de (1) est immédiate : par la remarque suivant la définition 1.2.1, on a

$$\forall x,\ \sup\{|\varphi(x,\ y)|;\ x - \mathrm{A} \leqslant y \leqslant x + \mathrm{A}\} \geqslant (1 - \varepsilon)\sup\{|\varphi(x,\ y)|;\ -\infty < y < +\infty\}$$

et en prenant le sup en x, on obtient (1).

L'inégalité (2) est une conséquence facile d'un théorème de Bernstein ([5] th. 2, p. 39) que nous allons d'abord rappeler : si le spectre d'un élément $f(x)$ de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ est contenu dans $[-l, l]$, alors $f(x)$ est dérivable et $\|f'(x)\|_\infty \leqslant l\|f(x)\|_\infty$. On a, par le théorème des accroissements finis,

$$\forall x,\ \forall y,\ |\varphi(x,\ y) - \varphi(y,\ y)| \leqslant |x - y| \sup_{-\infty<u<+\infty} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\ y)\right|.$$

Mais, pour tout y fixé, le spectre de $x \to \varphi(x, y)$ est contenu dans $[-l, l]$ et le théorème de Bernstein donne

$$\forall x,\ \forall y,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\ y)\right| \leqslant l \sup_{-\infty<u<+\infty} |\varphi(u,\ y)|.$$

Finalement

$$\forall x,\ \forall y,\ |\varphi(x,\ y) - \varphi(y,\ y)| \leqslant l|x - y| \sup_{-\infty<u<+\infty} |\varphi(u,\ y)|.$$

En prenant le sup. par rapport aux variables x et y liées par $|x - y| \leqslant \mathrm{A}$, on obtient (2).

THÉORÈME 1. — *Soit, avec les notations ci-dessus,* H *l'homéomorphisme de* $\Lambda + [-l, l]$ *sur* $\Lambda \times [-l, l]$ *défini par* $\mathrm{H}(\lambda + t) = (\lambda, t)$, $\lambda \in \Lambda$, $|t| \leqslant l$. *Soit* V *un fermé contenu dans* $[-l, l]$. *Pour tout élément* Ψ *de* $\mathrm{A}(\Lambda \times \mathrm{V})$, $\varphi = \Psi \circ \mathrm{H}$ *appartient à* $\mathrm{A}(\Lambda + \mathrm{V})$ *et*

$$\|\Psi\|_{\mathrm{A}(\Lambda\times\mathrm{V})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{A}(\Lambda+\mathrm{V})} \leqslant (1 - \mathrm{A}l - \varepsilon)^{-1}\|\Psi\|_{\mathrm{A}(\Lambda\times\mathrm{V})}.$$

En revenant à la définition des algèbres de restrictions on voit qu'il suffit de considérer le cas où $V = [-l, l]$. Soit $E = \Lambda + [-l, l]$ et soit $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ composé des éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ à spectre dans E. Une partie dense dans $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$ est formée des sommes finies $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda x}$ du théorème I. Soit $F = \Lambda \times [-l, l]$ et soit $\mathcal{C}_0^F(\mathbf{R}^2)$ la fermeture dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ de l'ensemble des sommes finies $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda y}$. La norme d'un élément φ de A(E) est égale à la norme de la forme linéaire définie par cet élément dans le dual de $\mathcal{C}_0^E(\mathbf{R})$. De même pour F. Ainsi l'application $\Psi \to \varphi$ n'est autre que la restriction à A(F) de la transposée de l'application $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda x} \to \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)e^{i\lambda y}$ et le théorème I découle de la proposition 1.2.3.

Le théorème I comporte une réciproque.

PROPOSITION 1.2.4. — *Soit, si* $t > 0$,

$$\sigma(t) = \inf\left\{\sup_{|x|\geqslant t}|\hat{f}(x)|;\ f \in L^1[0, 1],\ \|\hat{f}\|_\infty = 1\right\}.$$

(*Le* inf. *ci-dessus est pris par rapport à toutes les fonctions de* $L^1(\mathbf{R})$, *nulles hors de* $[0, 1]$, *normalisées par la condition* $\|\hat{f}\|_\infty = 1$.)

Soit Λ *une partie de* $\mathbf{R}$, l *un nombre réel strictement positif et strictement inférieur au pas de* Λ *et pour tout nombre réel* u *soit* Ψ_u *la fonction définie sur* $E = \Lambda + [0, l]$ *par* $\Psi_u(x) = e^{i\lambda u}$ *si* $\lambda \leqslant x \leqslant \lambda + l$. *Soit* $C = \sup_{-\infty<u<+\infty} \|\Psi_u\|_{A(E)}$. *Alors pour tout polynôme trigonométrique* $P(x)$ *à spectre dans* Λ *et tout* t *on a*

$$\sup_{|x|\leqslant t/l} |P(x)| \geqslant (C^{-1} - \sigma(t))\|P\|_\infty.$$

La preuve est très simple. Posons $P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ et à tout élément f de $L^1(\mathbf{R})$, nul hors de $[0, 1]$, tel que $\|\hat{f}\|_\infty = 1$, associons les éléments de $L^1(\mathbf{R})$

$$F(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda l^{-1} f(l^{-1}(x - \lambda))$$
$$G_u(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda u} l^{-1} f(l^{-1}(x - \lambda)).$$

Alors $F(x)$ et $G_u(x)$ sont nuls hors de $\Lambda + [0, l]$ et l'on a

$$G_u(u) = F(x)\Psi_u^*(x) \qquad \text{d'où} \qquad \|\hat{G}_u\|_\infty \leqslant C\|\hat{F}\|_\infty$$

ou

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i(x+u)\lambda} \hat{f}(lx) \Big| \leqslant C\|\hat{f}(lx)P(x)\|_\infty.$$

En prenant le sup. en u du membre de gauche, il vient

$$\|P\|_\infty \|\hat{f}(lx)\|_\infty = \|P\|_\infty \leqslant C\|\hat{f}(lx)P(x)\|_\infty. \tag{1}$$

Pour tout t, $t > 0$, le membre de droite de (1) peut être majoré par

$$C \sup_{|x|\leqslant t/l} |P(x)| + C\|P\|_\infty \sup_{|x|\geqslant t/l} |\hat{f}(lx)|.$$

En prenant le inf. par rapport à f, on obtient

$$\|P\|_\infty \leqslant C \sup_{|x|\leqslant t/l} |P(x)| + C\|P\|_\infty \sigma(t). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Remarquons que, grâce au théorème de Paley Wiener ([8], p. 24, § 10), pour tout $\lambda > 1$, on a l'estimation

$$\sigma(t) = 0\,(\exp(-t(\log t)^\lambda)) \quad (t \to +\infty).$$

2. Isomorphisme entre $A\left(\sum_{n\geqslant 1} \Lambda_n\right)$ et $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$.

2.1. Varopoulos a montré que, si les compacts $H_1, \ldots, H_n$ de $\mathbf{R}$ sont, en un sens très fort, indépendants, les algèbres $A(H_1 + \cdots + H_n)$ et $A(H_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} A(H_n)$ sont isométriques (Voir [10] th. 4.2.2 pour un énoncé plus précis). Dans le résultat ci-dessous, les H_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont remplacés par des ensembles finis, les Λ_k, mais la condition d'indépendance est remplacée par une condition métrique.

THÉORÈME II. — *Soit* $(\Lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de parties finies de* $\mathbf{R}$ *telle que*

a) $\Lambda_n \subset [0, +\infty[$, $0 \in \Lambda_n$

b) *le pas de* Λ_n *dépasse strictement* $l_{n+1} = \sum_{n+1}^{\infty} \sup(\Lambda_j)$

c) $\operatorname{Card}\Lambda_1 \ldots \operatorname{Card}\Lambda_n . l_{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$.

Soit $E = \sum_{n\geqslant 1} \Lambda_n$.

Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de nombres réels strictement positifs telle que* $\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_n < +\infty$ *et soit, pour tout* n, A_n *un nombre réel positif tel que le couple* (A_n, ε_n) *soit adapté à* Λ_n.

Alors, si $\sum_{n\geqslant 1} A_n l_{n+1} < +\infty$, *les algèbres* $A\left(\sum_{n\geqslant 1}\Lambda_n\right)$ *et* $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$ *sont canoniquement isomorphes.*

Plus précisément soit H_∞ *l'application de* E *sur* $\prod_{n\geqslant 1}\Lambda_n$ *définie par* $H_\infty(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \cdots) = (\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots)$.

Alors l'isomorphisme de $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$ *sur* $A\left(\sum_{n\geqslant 1}\Lambda_n\right)$ *est* $H_\infty : f \to f \circ H_\infty$.

2.2. Dans la preuve du théorème II nous allons distinguer une première étape : l'étude de $A(E)$ y est remplacée par celle de $A(E_n)$ où $E_n = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n + [0, l_{n+1}]$. Par passage à la limite, nous en déduirons le théorème II (en 2.3).

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $(\Lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *une suite de parties finies de* **R** *et* l_{n+1} *un nombre réel strictement positif vérifiant, si* $1 \leqslant j \leqslant n$, *les conditions* a), b) et c) *ci-dessous*

(a) $\Lambda_j \subset [0, +\infty[$, $0 \in \Lambda_j$

(b) *le pas de* Λ_j *dépasse strictement*

$$l_{j+1} = \sup \Lambda_{j+1} + \cdots + \sup \Lambda_n + l_{n+1}.$$

Soit alors H_n *l'homéomorphisme de*

$$E_n = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n + [0, l_{n+1}]$$

sur $P_n = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n \times [0, l_{n+1}]$ *défini par*

$$H_n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + t) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t)$$

si $\lambda_j \in \Lambda_j$, $0 \leqslant t \leqslant l_{n+1}$. *Supposons que le couple* (A_j, ε_j) *soit adapté à* Λ_j *et que l'on ait*

(c) $1 > 2^{-1}A_j l_{j+1} + \varepsilon_j$.

Alors, pour tout élément Ψ *de* $A(P_n)$, $\varphi = \Psi \circ H_n$ *appartient à* $A(E_n)$ *et l'on a*

$$||\Psi||_{A(P_n)} \leqslant ||\varphi||_{A(E_n)} \leqslant \left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(1 - 2^{-1}A_j l_{j+1} - \varepsilon_j)^{-1}\right)||\Psi||_{A(P_n)}.$$

La démonstration de cette proposition s'obtient canonique-

ment, par récurence sur n, à partir du théorème I. Si $n = 1$ on reconnaît le théorème I. Esquissons le passage de n à $n + 1$. Si $W = \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_{n+1} + [0, l_{n+2}]$, grâce au théorème I, $A(\Lambda_1 + W)$ est isomorphe à $A(\Lambda_1) \hat{\otimes} A(W)$ et, grâce à l'hypothèse de récurrence, $A(W)$ est isomorphe à $A(\Lambda_2) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} A(\Lambda_{n+1}) \hat{\otimes} A([0, l_{n+2}])$. En composant ces deux isomorphismes, on obtient l'isomorphisme annoncé avec, pour norme, le produit des normes.

2.3. Passons enfin à la preuve du théorème II. Si, pour tout n, on a $1 > 2^{-1} A_n l_{n+1} + \varepsilon_n$, nous remarquons que, grâce à : $\sum_{n \geqslant 1} A_n l_{n+1} < +\infty$ et à : $\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n < +\infty$, les normes des isomorphismes décrits par la proposition 2.2 sont majorés par une constante C ne dépendant pas de n. Appelons alors $\mathcal{A}_n$ la partie de A(E) (munie de la norme induite) composée de tous les éléments f de A(E) constants sur chaque intervalle $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + [0, l_{n+1}]$. Soit $\mathcal{V} = \bigotimes_{n \geqslant 1} A(\Lambda_n)$ et $\mathcal{B}_n$ la partie de $\mathcal{V}$ formée des éléments g de $\mathcal{V}$ ne dépendant que des n premières coordonnées. Le compact E est de mesure nulle (condition c) du th. I); la réunion des $\mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$, est donc dense dans A(E) (Voir p. ex. [4], 1.3, p. 256). La réunion des $\mathcal{B}_n$ est dense dans $\mathcal{V}$. Les isomorphismes $g \to g \circ H_\infty$ de $\mathcal{B}_n$ sur $\mathcal{A}_n$ dont les normes sont bornées se prolongent, par continuité, en un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur A(E) encore donné par $g \to g \circ H_\infty$ et le théorème II est démontré.

Si l'on n'a pas $1 > 2^{-1} A_n l_{n+1} + \varepsilon_n$ pour tout n, on a au moins ces inégalités pour $n \geqslant N + 1$ car $\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n < +\infty$ et $\sum_{n \geqslant 1} A_n l_{n+1} < +\infty$. Soit alors $E' = \sum_{n \geqslant N+1} \Lambda_n$. Il est aisé de prouver directement que $A(\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_N + E')$ et

$$A(\Lambda_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} A(\Lambda_N) \hat{\otimes} A(E')$$

sont isomorphes. La démonstration précédente montre alors que $A(E')$ et $\widehat{\bigotimes}_{n \geqslant N+1} A(\Lambda_n)$ sont isomorphes. Le théorème II en résulte.

PROPOSITION 2.4. — (Les notations sont les mêmes que celles de la proposition 2.2.)

A tout nombre p *de* $]1, +\infty[$ *on peut associer un nombre réel strictement positif* T_p *tel que, pour toutes les suites*

$$(A_j)_{1\leqslant j\leqslant n},\quad (\Lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\qquad et\qquad (\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$$

vérifiant les hypothèses a), b), c) *de la proposition* 2.2 *avec en outre* $l_{n+1} = (2A_n)^{-1}$

$$0 \leqslant \varepsilon_j \leqslant 2^{-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

et

$$\prod_1^{n-1} (1 - A_j \sup(\Lambda_{j+1}) - \varepsilon_j)^{-1} \leqslant p$$

on ait pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ *à spectre dans* $\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n$

$$\sup_{|x|\leqslant \Lambda_n T_p} |P(x)| \geqslant (8p)^{-1}\|P\|_\infty.$$

Pour montrer ce résultat, on applique les propositions 1.2.4 et 2.2 avec $l_{n+1} = (2A_n)^{-1}$. On a alors

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n} (1 - 2^{-1}A_j l_{j+1} - \varepsilon_j)^{-1} \leqslant 4p, \quad (l_j \leqslant 2 \sup \Lambda_j)$$

et l'on définit T_p par $\sigma(2T_p) \leqslant (8p)^{-1}$.

3. Isomorphismes entre divers $A\left(\sum_{n\geqslant 1} t_n\Lambda_n\right)$.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels normés, α un nombre réel positif et L un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$. Nous dirons que L est, à α près, une isométrie si les normes de L et de L^{-1} sont majorées par $1 + \alpha$. On a alors

THÉORÈME III. — *A toute suite* $(\Lambda_n)_{n\geqslant 1}$ (*resp.* $(\Lambda'_n)_{n\geqslant 1}$) *de parties finies de* $[0, +\infty[$ *on peut associer trois suites* $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(c_n)_{n\geqslant 1}$ (*resp.* $(a'_n)_{n\geqslant 1}$, $(b'_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(c'_n)_{n\geqslant 1}$) *de nombres réels strictement positifs telles que pour toute suite de nombres réels positifs* $(t_n)_{n\geqslant 1}$ (*resp.* $(t'_n)_{n\geqslant 1}$) *vérifiant* c), *les algèbres de restrictions* $A\left(\sum_{n\geqslant 1} t_n\Lambda_n\right)$ *et* $A\left(\sum_{n\geqslant 1} t'_n\Lambda'_n\right)$ *soient canoniquement isomorphes dès que, pour tout* n, $n \geqslant 1$, *les ensembles* Λ_n *et* Λ'_n *vérifient* a) *et* b).

a) $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite de nombres réels positifs telle que* $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n < +\infty$;

b) K_n *est une bijection de* Λ'_n *sur* Λ_n *telle que la bijection* $\tilde{K}_n$ *de* $A(\Lambda_n)$ *sur* $A(\Lambda'_n)$, $f \to f \circ K_n$, *soit, à* α_n *près, une isométrie;*

c) *la suite* $(t_n)_{n\geqslant 1}$ (*resp.* $(t'_n)_{n\geqslant 1}$) *vérifie les deux conditions*

$$b_n t_n > a_{n+1}t_{n+1} + a_{n+2}t_{n+2} + \cdots \quad (n \geqslant 1)$$
$$(resp.\ b'_n t'_n > a'_{n+1}t'_{n+1} + a'_{n+2}t'_{n+2} + \cdots)$$

et $\sum_{n\geqslant 1} c_n \frac{t_{n+1}}{t_n} < +\infty$ $\left(resp.\ \sum_{n\geqslant 1} c'_n \frac{t'_{n+1}}{t'_n} < +\infty\right)$.

d) *L'homéomorphisme* K *de* $E' = \sum_{n\geqslant 1} t'_n \Lambda'_n$ *sur* $E = \sum_{n\geqslant 1} t_n \Lambda_n$ *est défini par*

$$K\left(\sum_{n\geqslant 1} t'_n \lambda'_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} t_n K_n(\lambda'_n) \quad (\lambda'_n \in \Lambda'_n).$$

De plus l'isomorphisme de $A(E)$ *sur* $A(E')$ *est défini par* $f \to f \circ K$.

Le théorème III est une conséquence simple du théorème II. Les conditions c) du théorème III entraînent que $A(E)$ est isomorphe à $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$. En effet, on prend par exemple $\varepsilon_n = n^{-2}$, on choisit A_n assez grand pour que le couple (A_n, ε_n) soit adapté à Λ_n ce qui entraîne que $(A_n t_n^{-1}, \varepsilon_n)$ est adapté à $t_n\Lambda_n$. La première des conditions c) du théorème III est la condition b) du théorème II et la seconde condition c) du théorème III est la condition $\sum_{n\geqslant 1} A_n l_{n+1} < +\infty$ du théorème II.

L'isomorphisme entre $A(E)$ et $A(E')$ provient alors de l'isomorphisme $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} \tilde{K}_n$ entre $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda_n)$ et $\widehat{\bigotimes_{n\geqslant 1}} A(\Lambda'_n)$. (Sur le produit tensoriel d'applications linéaires, voir [1], Ch. I, § 1, n° 2.)

COROLLAIRE. — *Soit* $(t_n)_{n\geqslant 1}$ (*resp.* $(t'_n)_{n\geqslant 1}$) *une suite de nombres réels strictement positifs telle que*

$$n \geqslant 1 \Longrightarrow t_n > t_{n+1} + t_{n+2} + \cdots$$

$$(resp.\ n \geqslant 1 \Longrightarrow t'_n > t'_{n+1} + t'_{n+2} + \cdots)$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{t_{n+1}}{t_n} < +\infty \quad \left(resp.\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{t'_{n+1}}{t'_n} < +\infty\right).$$

Soit E (*resp.* E′) *l'ensemble de toutes les sommes*

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n t_n; \quad x_n \in \{0, 1\} \quad \left(\textit{resp.} \sum_{n\geqslant 1} x_n t'_n; \quad x_n \in \{0, 1\}\right).$$

Soit K *l'homéomorphisme de* E′ *sur* E *défini par*

$$\mathrm{K}\left(\sum_{n\geqslant 1} x_n t'_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} x_n t_n, \qquad x_n \in \{0, 1\}.$$

Alors $f \to f \circ \mathrm{K}$ *définit un isomorphisme de* A(E) *sur* A(E′).

Remarques. — Schneider ([9]) a montré que la condition $\sum_{n\geqslant 1} t_{n+1}/t_n < +\infty$ peut être affaiblie en $\sum_{n\geqslant 1} (t_{n+1}/t_n)^2 < +\infty$ mais que cette dernière condition est la meilleure possible pour que $f \to f \circ \mathrm{K}$ soit un isomorphisme entre A(E) et A(E′).

Si l'application $f \to f \circ \mathrm{K}$ de A(E) sur A(E′) est de norme égale à 1, alors K est la restriction à E′ d'une application, non nécessairement continue, mais **Q** affine de **R** dans **R** (De Leeuw et Katznelson, th. 1.1, p. 122 [3]). McGehee a donné une version du théorème III où le choix de t_{n+1} dépend des relations **Q**-linéaires vérifiées par $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ([6] th. 2, p. 146).

4. Synthèse et unicité.

4.1. Soit E un compact de **R**; une distribution S, à valeurs complexes, dont le support est contenu dans E et dont la transformée de Fourier $\hat{S}$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$ sera dite une pseudomesure. On pose alors $||\mathrm{S}||_{\mathrm{PM}} = ||\hat{\mathrm{S}}||_\infty$ et l'on note PM(E) l'espace de Banach de toutes les pseudomesures de support contenu dans E. Si S appartient à PM(E) et f à $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, on pose $\langle \mathrm{S}, \hat{f} \rangle = \langle \hat{\mathrm{S}}, f \rangle$ et PM(E) devient ainsi une partie du dual de A(**R**).

Le compact E de **R** est un ensemble d'unicité s'il n'existe aucun élément S non nul dans PM(E) dont la transformée de Fourier soit nulle à l'infini. Le compact E de **R** est un ensemble de synthèse si pour tout S dans PM(E) et tout g dans I(E) on a $\langle \mathrm{S}, g \rangle = 0$.

4.2. THÉORÈME IV. — *Soit* E *un compact de* $\mathbf{R}$, $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de parties finies de* $\mathbf{R}$, $(l_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de nombres réels strictement positifs et, pour tout* n, (A_n, ε_n) *un couple adapté à* Γ_n.

On suppose que

a) *pour tout* n, *on a les inclusions*

$$\Gamma_n \subset E \subset \Gamma_n + [-l_{n+1}, l_{n+1}]$$

b) $\underline{\lim}\, \varepsilon_n = \varepsilon < 1$

c) $\overline{\lim}\, A_n l_{n+1} < 1 - \varepsilon$.

Alors E *est un ensemble de synthèse.*

Si, en outre

d) $\overline{\lim}\, A_n l_{n+1} < \dfrac{(1-\varepsilon)^2}{3-\varepsilon}$

alors E *est un ensemble d'unicité.*

La preuve du théorème IV repose sur une technique d'approximation des éléments de PM(E) par des éléments de $PM(\Gamma_n)$ décrite dans le lemme ci-dessous.

LEMME. — *Soit, avec les notations du théorème* IV, S *dans* PM(E) *et soit, si* $n \geqslant 1$, S_n *l'élément de* $PM(\Gamma_n)$ *défini par*

$$S_n(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \delta(x-\gamma) \int_{\gamma - l_{n+1}}^{\gamma + l_{n+1}} dS(t)$$

($\delta(x)$ est la masse 1 en 0).

Alors, si $1 - \varepsilon_n > A_n l_{n+1}$, *on a, pour tout* y *réel,*

(1) $\quad |\hat{S}_n(y) - \hat{S}(y)| \leqslant l_{n+1}|y|(1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} ||S||_{PM}$

(2) $\quad ||S_n||_{PM} \leqslant (1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} ||S||_{PM}$.

Les preuves de (1) et (2) sont semblables et nous présenterons celle de (1).

Soit $E_n = \Gamma_n + [-l_{n+1}, l_{n+1}]$, $P_n = \Gamma_n \times [-l_{n+1}, l_{n+1}]$, $\theta_y(x)$ la fonction, à valeurs complexes, définie sur E_n par

$$\theta_y(x) = e^{ixy} - e^{i\gamma y} \qquad \text{si} \qquad |x-\gamma| \leqslant l_{n+1}$$

et $\Theta_y(\gamma, t)$ la fonction, à valeurs complexes, définie sur P_n par

$$\Theta_y(\gamma, t) = e^{i\gamma y}(e^{ity} - 1).$$

Grâce au théorème I, on a

$$||\theta_y||_{A(E_n)} \leqslant (1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} ||\Theta_y||_{A(P_n)} \cdot$$

Mais $$||\Theta_y||_{A(P_n)} = ||e^{ity} - 1||_{A[-l_{n+1}, l_{n+1}]} \leqslant |y| l_{n+1} \cdot$$

D'où $$||\theta_y||_{A(E_n)} \leqslant (1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} |y| l_{n+1} \cdot$$

Il suffit alors de remarquer que $\hat{S}_n(y) - \hat{S}(y) = \langle S, \theta_y \rangle$ et que $|\langle S, \theta_y \rangle| \leqslant ||S||_{PM} ||\theta_y||_{A(E_n)}$ parce que S est portée par E et donc par E_n qui est de synthèse.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème : grâce aux hypothèses b) et c), les inégalités (1) et (2) montrent que les S_n, $n \geqslant 1$, tendent vers S dans la topologie $\sigma(PM(E), A(R))$; on en déduit aussitôt que E est un ensemble de synthèse. Pour montrer que E est un ensemble d'unicité, nous suivons une méthode de McGehee ([6], p. 143, th. 1). Supposons que $\lim_{u \to +\infty} \hat{S}(u) = 0$ et soit $(m_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$ et telle que $l_{n+1} m_n \to 0$ $(n \to +\infty)$. Dans l'intervalle $[m_n, m_n + 2A_n]$, il y a un x_n tel que $|\hat{S}_n(x_n)| \geqslant (1 - \varepsilon_n) ||\hat{S}_n||_\infty$. On a cependant, par le lemme 2

$$|\hat{S}_n(x_n) - \hat{S}(x_n)| \leqslant l_{n+1}(m_n + 2A_n)(1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} ||S||_{PM}.$$

On en déduit que

$$|\hat{S}(x_n)| \geqslant (1 - \varepsilon_n) ||\hat{S}_n||_\infty - l_{n+1}(m_n + 2A_n)(1 - \varepsilon_n - A_n l_{n+1})^{-1} ||S||_{PM}.$$

Compte tenu de d) et de l'inégalité $||S||_{PM} \leqslant \underline{\lim} ||S_n||_{PM}$, il est impossible que $\hat{S}(x_n)$ tende vers 0 $(n \to +\infty)$.

4.3. *Application aux ensembles* $\sum_{n \geqslant 1} \Lambda_n$.

Nous reprenons les notations et hypothèses du théorème II.

L'ensemble $E = \sum_{n \geqslant 1} \Lambda_n$ *est un ensemble de synthèse et d'unicité.*

On applique le théorème IV avec $\Gamma_n = \sum_1^n \Lambda_j$. La proposition 2.4 nous apprend que le couple $(A_n T_p, 1 - (8p)^{-1})$ est adapté à Γ_n et la condition d) du théorème IV est satisfaite parce que $\overline{\lim}\, A_n l_{n+1} = 0$.

Il est supposé dans la proposition 2.4 que

$$0 \leqslant \varepsilon_j \leqslant 2^{-1} \qquad \text{et} \qquad 1 > A_j \sup(\Lambda_{j+1}) + \varepsilon_j$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Si cela n'est pas, c'est du moins le cas pour $j \geqslant N + 1$. Soit alors $E' = \sum_{n \geqslant N+1} \Lambda_n$. L'ensemble E' est de synthèse et d'unicité et E est la réunion finie de translatés de E' assez éloignés les uns des autres pour que E soit aussi un ensemble de synthèse et d'unicité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 16.

[2] J.-P. Kahane, Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, *Ann. Inst. Fourier*, t. VII (1957), 293-314.

[3] K. De Leeuw et Y. Katznelson, On certain homomorphisms of quotients of group algebras, *Israël J. of Math.*, 2 (1964), 10-126.

[4] Y. Katznelson et W. Rudin, The Stone-Weierstrass property in Banach algebras, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 253-265.

[5] G. G. Lorentz, Approximation of Functions, Holt, Rinehart and Winston (1966).

[6] O. C. McGehee, Certain isomorphisms between quotients of a group algebra, *Pac. J. Math.*, 21 (1957), 133-152.

[7] Y. Meyer, Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 265, 18-19 (1967).

[8] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, *Amer. Math. Soc. Colloquium. Publ.*, 19 (1934).

[9] R. Schneider, Thèse à paraître.

[10] N. Th. Varopoulos, Tensor algebras and harmonic analysis, *Acta Mathematica*, 119 (1967), 51-112.

Manuscrit reçu le 30 janvier 1968.

Yves Meyer,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.