ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

V. AVANISSIAN
XAVIER FERNIQUE

Sur l'analyticité des distributions harmoniques d'ordre infini

Annales de l'institut Fourier, tome 18, n° 2 (1968), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 1-9.

SUR L'ANALYTICITÉ DES DISTRIBUTIONS « HARMONIQUES D'ORDRE INFINI »

par V. AVANISSIAN et X. FERNIQUE

1. Introduction.

1.1. Une fonction $u(x_1, \ldots, x_d)$ à valeurs réelles définie dans un domaine D de $\mathbf{R}^d$ est dite « harmonique d'ordre infini » si elle est indéfiniment différentiable et si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes : (Δ^p désignant le laplacien itéré p fois)

i) pour tout compact K de D, on a :

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sup_{x\in K}\left[\frac{|\Delta^p u(x)|}{(2p)\,!}\right]^{\frac{1}{p}}\right)=0.$$

ii) pour tout compact K de D, on a :

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{\int_K |\Delta^p u(x)|\,dx}{(2p)\,!}\right]^{\frac{1}{p}}=0.$$

La condition i) est due à N. Aronszajn [1]. La condition ii) moins restrictive et son équivalence avec i) sont dues à P. Lelong [5]. Toutes les fonctions « harmoniques d'ordre infini » sont analytiques réelles dans D et sont prolongeables comme fonctions analytiques complexes dans la cellule d'harmonicité de D. La classe $\mathcal{H}_\infty(D)$ des fonctions « harmoniques d'ordre infini » dans D contient évidemment les fonctions harmoniques et polyharmoniques d'ordre fini dans D. Si D est l'espace entier $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{H}_\infty(\mathbf{R}^d)$ coïncide avec la classe des

fonctions analytiques réelles dans tout $\mathbf{R}^d$ en vertu de l'inégalité :

$$|\Delta^p f(a_1, \ldots, a_d)| \leqslant (2p)! d^p (2\pi)^{-d} r^{-2p} \mathrm{M}(r),$$

où f est analytique réelle dans tout $\mathbf{R}^d$ et $\mathrm{M}(r)$ est le maximum de $|f(x_1 + iy_1, \ldots, x_d + iy_d)|$ dans le polydisque de centre $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{R}^d$ de rayon r dans l'espace des d variables complexes. Si D est différent de $\mathbf{R}^d$, toute fonction analytique réelle dans D n'est pas nécessairement de la classe $\mathscr{H}_\infty(\mathrm{D})$.

Dans ce travail, on étudie la régularité des distributions qui vérifient une condition analogue à ii), (il en résultera d'ailleurs l'équivalence de i) et ii). Les principaux résultats ont fait l'objet d'une note aux Compte Rendus de l'Académie des Sciences [2].

1.2. *Notations.*

Les notations sont dans une large mesure celles utilisées couramment en théorie des distributions [6] : on note $\mathbf{R}^d$ l'espace numérique réel de dimension d, $x = (x_1, \ldots, x_d)$ l'un de ses points, et $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+ - \{0\}$. Pour tout ouvert G de $\mathbf{R}^d$, on note $\mathcal{D}(\mathrm{G})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans G; pour toute partie compacte K de $\mathbf{R}^d$, par exemple contenue dans G, on note $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ la partie de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) = \mathcal{D}$ constituée par les fonctions dont le support est contenu dans K. La topologie de $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ étant définie par la famille (N_p) indexée par la famille $\mathbf{N}^d$ des d-uples d'entiers positifs $p = (p_1, \ldots, p_d)$ des semi-normes définies par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_\mathrm{K}, \qquad \mathrm{N}_p(\varphi) = \sup_{x \in \mathrm{K}} \left| \frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_d} \varphi}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}} \right|,$$

$\mathcal{D}(\mathrm{G})$ sera muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ où K parcourt une suite croissante de parties compactes de G dont les intérieurs $\mathring{\mathrm{K}}$ recouvrent G. L'espace des distributions sur G muni de sa topologie usuelle sera noté $\mathcal{D}'(\mathrm{G})$ (ou $\mathcal{D}'$ s'il n'y a pas de confusion possible). Rappelons qu'une distribution T sur G est dite fonction indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans G s'il existe une fonc-

tion f indéfiniment différentiable (resp. analytique) dans G telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int f\varphi \, dx;$$

une telle fonction est évidemment unique, on identifie alors T et f.

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, on pose :

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_x |\varphi(x)|,$$

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left[\int |\varphi(x)|^2 \, dx\right]^{1/2},$$

$$\Lambda^m \varphi = \frac{\partial^{md}}{\partial x_1^m \ldots \partial x_d^m} \varphi \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Remarquons que la famille :

$$\left(\left[\int |\Lambda^m \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2}\right)_{m \in \mathbf{N}}$$

est une famille de semi-normes continues sur $\mathcal{D}$ et que la famille de leurs carrés est une famille de formes quadratiques positives continues sur $\mathcal{D}$.

1.3. *Topologie sur* $\mathcal{D}_K$.

Il sera utile pour la suite de définir la topologie de $\mathcal{D}_K$ par la suite des semi-normes $(\|\Delta^m \varphi\|_{L^2})_{m \in \mathbf{N}}$. Elle sera en effet équivalente à la topologie définie par la famille $(N_p)_{p \in \mathbf{N}^d}$, en vertu des inégalités classiques suivantes :

LEMME. — *Si dans* $\mathbf{R}^d$, *le cube*

$$\{x \in \mathbf{R}^d \mid |x_j| < r, \ j = 1, \ \ldots, \ d\}$$

contient le compact K, *alors pour tout élément* φ *de* $\mathcal{D}_K$, *on a :*

$$\|\varphi\|_{L^2} \leqslant r^{d/2} \|\varphi\|_\infty, \tag{1}$$

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant d, \qquad \|\varphi\|_\infty \leqslant r \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right\|_\infty, \tag{2}$$

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant r^{d/2} \left[\int |\Lambda^1 \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2}, \tag{3}$$

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad \|\Lambda^m \varphi\|_{L^2} \leqslant r^d \|\Lambda^{m+1} \varphi\|_{L^2}, \tag{4}$$

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad \|\Lambda^{2m} \varphi\|_{L^2} \leqslant (2\pi)^{2m(d-1)} \|\Delta^m \varphi\|_{L^2}, \tag{5}$$

Démonstration du lemme. — Toutes ces inégalités sont classiques; pour la démonstration des trois premières, nous renvoyons à ([4], III, 1.2). La quatrième s'en déduit immédiatement : il suffit en effet, par substitution de la vérifier dans le cas où $m = 0$, elle résulte alors de (1) et (3); nous démontrons la cinquième : en désignant par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, on a :

$$\|\Lambda^{2m}\varphi\|_{L^2}^2 = \int \left|\frac{\partial^{2md}\varphi}{\partial x_1^{2m} \dots \partial x_d^{2m}}\right|^2 dx = \int \left|\mathcal{F}\frac{\partial^{2md}}{\partial x_1^{2m} \dots \partial x_d^{2m}}\varphi\right|^2 dy$$

$$= \int \prod_{j=1}^{d} |2\pi y_j|^{4m} |\mathcal{F}\varphi|^2 \, dy \leqslant (2\pi)^{4m(d-1)} \int \left[\sum_{j=1}^{d} (2\pi y_j)^2\right]^{2m} |\mathcal{F}\varphi|^2 \, dy$$

$$= (2\pi)^{4m(d-1)} \int |\mathcal{F}\Delta^m\varphi|^2 \, dy = (2\pi)^{4m(d-1)} \int |\Delta^m\varphi|^2 \, dy$$

$$= (2\pi)^{4m(d-1)} \|\Delta^m\varphi\|_{L^2}^2.$$

Les inégalités (2) et (3) montrent bien que toute semi-norme de la famille $(N_p)_{p\in\mathbf{N}^d}$ est majorée par une semi-norme continue de la forme $\varphi \longmapsto \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2}$; la famille de ces semi-normes engendre donc la topologie de $\mathcal{D}_K$. L'inégalité (4) montre alors que pour toute famille finie (m_i, a_i), $(m_i \in \mathbf{N},\ a_i \in \mathbf{R}_+^*)$, il existe un couple (m, a) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2} \leqslant a\} \subset \bigcap_i \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\Lambda^{m_i}\varphi\|_{L^2} \leqslant a_i\}.$$

Ceci montre que l'ensemble des Λ-boules :

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\Lambda^m\varphi\|_{L^2} \leqslant \alpha\}_{m\in\mathbf{N},\,\alpha>0}$$

constitue une base des voisinages de l'origine dans $\mathcal{D}_K$.

Les inégalités (4) et (5) permettent alors d'utiliser comme base les Λ-boules d'indice pair, puis les Δ-boules. Ceci démontre :

PROPOSITION 1. — *Pour tout voisinage* V *de l'origine dans* $\mathcal{D}_K$, *il existe un couple* (m, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tel que* :

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\Delta^m\varphi\|_{L^2} \leqslant a\} \subset V. \tag{6}$$

2. Distributions « harmoniques d'ordre infini ».

2.1. DÉFINITION 1. — *Soient* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbf{R}^d$, $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs*

et ρ *un nombre réel positif ou nul; on dira qu'une distribution* T *appartient à* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *si elle vérifie la propriété suivante :*

$$(7) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \qquad \limsup_{p \to \infty} \left[\frac{|\langle \Delta^p T, \varphi \rangle|}{\lambda_p} \right]^{1/p} \leqslant \rho.$$

On remarquera que $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ est stable par dérivation.

DÉFINITION 2. — *On dit qu'une distribution* T *est « harmonique d'ordre infini » dans* G *si elle est élément de*

$$A_\infty[((2p!))_{p \in \mathbf{N}}, 0, G].$$

On dit qu'une fonction f *sur* G *est « harmonique d'ordre infini » dans* G *au sens des distributions si la distribution* T *qui lui est canoniquement associée l'est.*

On remarquera que toute fonction « harmonique d'ordre infini » au sens ii) l'est aussi au sens des distributions.

2.2. PROPOSITION 2. — *Soit* T *un élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$; *alors pour tout nombre* σ *strictement supérieur à* ρ, *la suite* $\left(\frac{1}{\lambda_n} \sigma^{-n} \Delta^n T \right)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite bornée dans* $\mathcal{D}'(G)$; *pour tout sous-ensemble ouvert* Ω *relativement compact de* G, *il existe un couple* (p_0, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tel que :*

$$(8) \quad \forall (\varphi, n) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T, \varphi \rangle| \leqslant a \lambda_n \sigma^n ||\Delta^{p_0} \varphi||_{L^2}$$

Démonstration. — Pour tout entier positif n, considérons l'application $R_{\sigma, n}$ de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par :

$$R_{\sigma, n}(\varphi) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\lambda_p \sigma^p} |\langle \Delta^p T, \varphi \rangle|;$$

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}(G)$, la suite $(R_{\sigma, n}(\varphi))_{n \in \mathbf{N}}$ converge en croissant vers une limite $R_\sigma(\varphi)$ en vertu de (7). La suite

$$\left(\frac{\langle \Delta^n T, \varphi \rangle}{\lambda_n \sigma^n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

a alors tous ses termes majorés par $R_\sigma(\varphi)$; d'où le premier résultat ([6], Th. IX, p. 72; [3], Corr. 1. P. 22.). La même référence montre alors qu'il existe un nombre M et un

voisinage V de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ tels que :

$$\forall(\varphi,\ n) \in V \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T,\ \varphi\rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M;$$

appliquons la proposition 1 à la trace de V sur $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}$; il existe un couple (p_0, a) de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}} \qquad \text{et} \qquad \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2} \leqslant a \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ |\langle \Delta^n T,\ \varphi\rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M;$$

par homogénéité, on déduit :

$$\forall(\varphi,\ n) \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}} \times \mathbf{N}, \qquad |\langle \Delta^n T,\ \varphi\rangle| \leqslant \lambda_n \sigma^n M a \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2};$$

c'est le deuxième résultat.

COROLLAIRE 1. — *Soient* T *un élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$, σ *un nombre strictement supérieur à* ρ *et* K *un sous-ensemble compact de* G; *il existe alors un voisinage* V *de l'origine dans* $\mathbf{R}^d$ *et un couple* (p_0, a) *de* $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ *tels que :*

$$\forall(\varphi,\ x,\ n) \in \mathcal{D}(V) \times K \times \mathbf{N}, \quad |(\Delta^n T * \varphi)(x)| \leqslant a\lambda_n \sigma^n \|\Delta^{p_0}\varphi\|_{L^2} \tag{9}$$

Démonstration. — On choisit un voisinage V relativement compact de l'origine dans $\mathbf{R}^d$ tel que $(K - V)$ soit un sous-ensemble ouvert relativement compact de G noté Ω. Soient x un élément de K et φ un élément de $\mathcal{D}$ ayant son support dans V; la fonction $t \longmapsto \varphi(x - t)$ a alors son support dans Ω. Appliquons donc la proposition 2 : (8) s'écrit :

$$|\Delta^n T * \varphi(x)| = |\langle \Delta^n T_t,\ \varphi(x - t)\rangle| \leqslant a\lambda_n \sigma^n ||\Delta^{p_0}\varphi(x - t)||_{L^2} = a\lambda_n \sigma^n ||\Delta^{p_0}\varphi||_{L^2};$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 1. — *Toute distribution* T *élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *est une fonction (au sens usuel) indéfiniment différentiable.*

Démonstration. — Soient σ un nombre strictement supérieur à ρ, Ω un sous-ensemble ouvert relativement compact de G et T un élément de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ de sorte qu'on puisse appliquer la formule (8). Soit de plus H le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^d)$ engendré algébriquement par les $\Delta^{p_0}\varphi$ où φ parcourt

$\mathcal{D}(\Omega)$. La formule (8) appliquée à $n = p_0$ montre que T est une forme linéaire continue sur H pour la topologie induite par celle de $L^2(\mathbf{R}^d)$. Elle peut donc se prolonger en une forme linéaire $\hat{T}$ continue sur $L^2(\mathbf{R}^d)$; les propriétés élémentaires de cet espace montrent que cette forme linéaire $\hat{T}$ est définie par une fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$; pour tout élément φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a alors :

$$\langle \Delta^{p_0} T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, \Delta^{p_0}\varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, \Delta^{p_0}\varphi \rangle_{H^*, H} = \langle \hat{T}, \Delta^{p_0}\varphi \rangle_{L^2(\mathbf{R}^d)}$$
$$= \int f(x) \Delta^{p_0}\varphi(x)\, dx = \langle f, \Delta^{p_0}\varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \Delta^{p_0} f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

ceci signifiant que $\Delta^{p_0}(T - f)$ est nul dans Ω au sens des distributions.

Comme l'opérateur Δ^{p_0} est analytique hypoelliptique, $T - f$ est en fait une fonction indéfiniment différentiable dans Ω et T est une fonction localement de carré sommable dans Ω. La stabilité de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ montrant qu'il en est de même pour toutes les dérivées de T, on en déduit ([6], p. 191, Th. XIX) que T est dans Ω une fonction indéfiniment différentiable; d'où le résultat en utilisant une suite croissante d'ouverts relativement compacts recouvrant G.

THÉORÈME 2. — *Soit* T *une distribution élément de* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$; *pour toute partie compacte* K *de* G *et tout* σ *strictement supérieur à* ρ, *il existe un nombre* $c = c(K, \sigma)$ *et un entier* $k = k(K, \sigma)$ *positifs tels que :*

$$(10) \quad \forall (x, n) \in K \times \mathbf{N}, \qquad |(\Delta^n T)(x)| \leqslant c\sigma^n(\lambda_n + \lambda_{n+k}\sigma^k)$$

Démonstration. — Soient V un voisinage relativement compact de l'origine dans $\mathbf{R}^d$ et (p_0, a) un couple de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}_+^*$ tels qu'on puisse appliquer aux données de l'énoncé la formule (9). Soient de plus k un entier strictement supérieur à p_0, γ une fonction de $\mathcal{D}(V)$ et E_k la solution élémentaire de l'opérateur Δ^k; un argument élémentaire de prolongement montre que γE_k qui a son support dans V est assez régulière pour qu'on puisse la substituer à φ dans la formule (9); comme par ailleurs la différence $(\Delta^k(\gamma E_k) - \delta)$ est une fonction ζ indéfiniment différentiable à support compact contenu dans V à laquelle on peut aussi appliquer la formule (9),

on obtient :

$$\begin{aligned}|(\Delta^n T)(x)| = |(\Delta^n T * \check{\delta})(x)| &= |(\Delta^n T * \Delta^k(\gamma E_k))(x) - (\Delta^n T\zeta)(x)| \\ &\leqslant |(\Delta^{n+k} T * \gamma E_k)(x) + |(\Delta^n T * \zeta)(x)| \\ &\leqslant a[\lambda_{n+k}\sigma^{n+k}||\Delta^{p_0}(\gamma E_k)||_{L^2} + \lambda_n\sigma^n||\Delta^{p_0}\zeta||_{L^2}] \\ &\leqslant \sup(||\Delta^{p_0}(\gamma E_k)||_{L^2},\ ||\Delta^{p_0}\zeta||_{L^2}) a(\lambda_n\sigma^n + \lambda_{n+k}\sigma^{n+k}) \\ &\leqslant c\sigma^n(\lambda_n + \lambda_{n+k}\sigma^k);\end{aligned}$$

c'est le résultat.

THÉORÈME 3. — *Soient* $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs tels que :*

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right]^{1/n} \leqslant 1; \tag{11}$$

alors, pour tout sous-ensemble ouvert G *de* $\mathbf{R}^d$ *et tout nombre positif* ρ, *pour qu'une distribution* T *appartienne à* $A_\infty(\lambda, \rho, G)$ *il faut et il suffit qu'elle possède les deux propriétés suivantes :*

a) T *est une fonction indéfiniment différentiable.*

b) *Pour toute partie compacte* K *de* G, *on a :*

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in K}\frac{|(\Delta^n T)(x)|}{\lambda_n}\right]^{1/n} \leqslant \rho.$$

Démonstration. — Si T est un élément de $A_\infty(\lambda, \rho, G)$, la propriété a) résulte du théorème 1 ; la propriété b) résulte du théorème 2 puisque la relation (11) montre que :

$$\limsup_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n}\right)^{1/n} \leqslant 1$$

la réciproque est immédiate.

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une distribution soit « harmonique d'ordre infini » sur un ouvert* G *de* $\mathbf{R}^d$, *il faut et il suffit qu'elle coïncide (au sens des distributions) avec une fonction harmonique d'ordre infini au sens usuel dans* G.

Remarque. — Soit dans l'ouvert D de $\mathbf{R}^d$ une fonction u indéfiniment différentiable vérifiant la condition ii). On vérifie immédiatement que la distribution associée vérifie la définition 2. Le théorème 3 montre alors que la fonction u

vérifie la condition i); d'où *une nouvelle démonstration de l'équivalence* i) $\rightleftharpoons$ ii).

COROLLAIRE 3. — *Soit* T *une distribution sur* $\mathbf{R}^d$; *pour que la fonction*

$$\varphi \longmapsto \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{|\langle \Delta^n T, \varphi\rangle|}{(2n)!}\right]^{1/n} \tag{12}$$

soit bornée sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, *il faut et il suffit qu'elle soit identiquement nulle.*

En effet, le théorème 3 montre que si la fonction (12) est bornée, la distribution T est une fonction analytique (1) dans tout $\mathbf{R}^d$; on sait alors que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in K} \frac{|\Delta^n T(x)|}{(2n)!}\right]^{1/n} = 0$$

pour tout compact K de $\mathbf{R}^d$; on en déduit le résultat.

(1) La condition : $\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(2n)!}|\Delta^n f(x)|\right]^{1/n} \leqslant M(x), \sup_{x\in K} M(x) < \infty$, pour tout compact K inclus dans G caractérise en effet les fonctions analytiques dans G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN, Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, *C.R.*, 205 (1937).

[2] V. AVANISSIAN et X. FERNIQUE, Sur les distributions harmoniques d'ordre infini, *C.R.*, 204 (1967), p. 1056.

[3] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Ch. III, Hermann, (1964).

[4] X. FERNIQUE, Processus linéaires, processus généralisés, *Ann. Inst. Fourier*, 17, 1 (1967).

[5] P. LELONG, Sur la définition des fonctions harmoniques d'ordre infini, *C.R.*, 223 (1946), p. 372.

[6] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, édition 1966, Hermann, Paris.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1967

V. AVANISSIAN et X. FERNIQUE
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université de Strasbourg
67-Strasbourg.