ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

REJEB HADIJI

Solutions positives de l'équation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans un domaine à trou

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 11, n° 3 (1990), p. 55-71

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_3_55_0>

© Université Paul Sabatier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Solutions positives de l'équation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans un domaine à trou

REJEB HADIJI[1]

RÉSUMÉ. — Soient Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < p = (N+2)/(N-2)$. Nous montrons que si Ω possède un petit trou alors le problème $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans Ω, $u > 0$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, admet au moins une solution.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the following non linear elliptic equation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ on Ω, $u > 0$ on Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$, where Ω is a domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ with a little hole, $\mu \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < p = (N+2)/(N-2)$. We show that this problem has at least one solution.

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. On s'intéresse au problème d'existence d'une fonction u vérifiant l'équation elliptique non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \mu u^q & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$; $1 \leq q < p$ et $p = (N+2)/(N-2)$, c'est-à-dire $p+1$ est l'exposant critique pour l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$.

On rappelle que :

1) L'identité de Pohozaev (cf. [12]) appliquée à une solution de (1) donne

$$\mu\left(1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{q+1}\right)\int_\Omega u^{q+1} = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x \cdot n)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 .$$

[1] Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55- 65, 5e étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France)

Il en résulte que si Ω est strictement étoilé, alors pour tout $\mu \leq 0$ l'équation (1) n'a pas de solution.

2) Si Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N > 3$, alors pour tout $\mu > 0$, l'équation (1) possède une solution; (cf. [4]).

3) Dans [6], J.M. Coron a montré que si $\mu = 0$ et si Ω est un domaine avec un petit trou alors l'équation (1) possède une solution.

4) Dans [8], R. Lewandowski a montré que si $\mu = 0$, et Ω est un ouvert borné régulier étoilé de $\mathbb{R}^N$, $N > 4$, contenant 0, et si u_ϵ est la solution de (1) (mise en évidence dans [6]) dans $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(0,\epsilon)$ alors, $|\nabla u_\epsilon|^2 \rightharpoonup S^{N/2}\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac au point 0, $B(0,\epsilon)$ et S seront définies dans la section 2.

5) Dans [13], O. Rey a montré que si $\mu = 0$ et Ω est un ouvert borné régulier privé de k boules centrées en x_i, $1 \leq i \leq k$, et de rayon d, alors pour tout i, $1 \leq i \leq k$, il existe pour tout d assez petit, une solution u de (1) qui se concentre autour de x_i, i.e. $|\nabla u_\epsilon|^2 \rightharpoonup S^{N/2}\delta_{x_i}$ au sens des mesures sur Ω.

6) Dans [1], A. Bahri et J.M. Coron ont montré que, dans le cas où $\mu = 0$ et Ω est ouvert tel que le groupe d'homologie $H_k(\Omega, Z/2Z) \neq 0$ pour au moins un entier k non nul, l'équation (1) possède une solution.

7) Dans [11], G. Mancini et R. Musina ont étudié le problème suivant : Trouver que $u \in K$ tel que $\int \nabla u \nabla(v-u) \geq \int u^p(v-u)$, $\forall\, v \in K$, K est l'ensemble des fonctions $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que $u \geq 0$ presque partout dans Ω et $u \leq \psi$ dans C où C est un sous-ensemble fermé régulier de Ω. Dans ce travail on va s'inspirer de la technique utilisée dans [11].

8) Dans [4], H. Brezis et L. Nirenberg ont montré le théorème suivant. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$. On distingue deux cas :
(i) si $3 < q < 5$, alors pour tout $\mu > 0$, l'équation (1) possède une solution;
(ii) si $1 < q \leq 3$, alors pour tout $\mu > 0$ assez grand, l'équation (1) possède une solution.
De plus si Ω est strictement étoilé alors, pour $\mu > 0$ assez petit, l'équation (1) n'a pas de solution.

Le résultat principal de notre travail est le suivant.

THÉORÈME 1. — *Il existe $\lambda > 1$ tel que si Ω vérifie la condition suivante :* $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\exists\, R_1 > 0$, $\exists\, R_2 > 0$, *tels que :*

$$R_2 > \lambda R_1 \tag{2}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid R_1 \leq |x - x_0| \leq R_2\} \subset \Omega \tag{3}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < R_1\} \not\subset \Omega \tag{4}$$

alors pour tout réel μ, l'équation (1) a au moins une solution.

2. Rappels et notations

Soit $B(a,d)$ (respectivement $\overline{B}(a,d)$) la boule ouverte (respectivement la boule fermée) de $\mathbb{R}^N$ de centre a et de rayon d.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $||\nabla u||_2$ et $|u|_r$ désigne la norme usuelle dans $L^r(\Omega)$, pour $r > 0$.

Considérons

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\left(\int |u|^{p+1}\right)^{2/(p+1)}}$$

On sait (cf. [4]) que :

- S est la meilleure constante pour l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$.
- S est indépendante du domaine Ω, S n'est jamais atteinte quand Ω est borné. En revanche S est atteinte sur $\mathbb{R}^N$ par la famille de fonctions définies par

$$u_{a,\epsilon}(x) = c_N \left[\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x-a|^2}\right]^{\frac{N-2}{2}} \tag{5}$$

où c_N est une constante choisie afin que les fonctions $u_{a,\epsilon}$ soient solutions de

$$-\Delta u = u^p \quad \text{sur } \mathbb{R}^N .$$

On sait que $u_{a,\epsilon}$ se concentre autour de a quand ϵ tend vers 0, et on a :

$$\int |\nabla u_{a,\epsilon}|^2 = \int |u_{a,\epsilon}|^{p+1} = S^{N/2} .$$

L'outil essentiel est une variante du théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz (voir par exemple [3]), dont l'énoncé est le suivant.

THÉORÈME A. — *Soit F une fonction de classe C^1 définie sur un espace de Banach X, et soit K un espace métrique compact. On note K^* un sous-ensemble de K non vide, différent de K, et fermé. On fixe $p^* \in C(K^*; X)$. On pose :*

$$P = \{p \in C(K; X) \mid p = p^* \text{ sur } K^*\}$$
$$c = \inf_{p \in P} \sup_{t \in K} F(p(t)) .$$

On suppose que pour tout p de P on a

$$\max_{t \in K} F(p(t)) > \max_{t \in K^*} F(p^*(t)) .$$

Alors il existe une suite $(u_n) \subset X$ telle que $F(u_n) \to c$ et $F'(u_n) \to 0$.

On considère la fonctionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} \int (u^+)^6 - \frac{\mu}{q-1} \int (u^+)^{q+1}$$

définie sur $H_0^1(\Omega)$.

Rappelons que l'on dit que E satisfait $(PS)_c$ sur $H_0^1(\Omega)$ si pour toute suite (u_n) d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ avec $E(u_n) \to c$ et $E'(u_n) \to 0$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite convergente. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME B. — *Soit (u_n) une suite sur $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $E(u_n) \to c$ et $E'(u_n) \to 0$, alors quitte à extraire une sous-suite notée aussi (u_n), (u_n) est faiblement convergente vers une limite u dans $H_0^1(\Omega)$ et on a $E(u_n) = E(u) + (k/N) S^{N/2} + o(1)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.*

La preuve de ce théorème est contenue dans [14]; (voir aussi [5] et [2]).

Remarques

(a) On note que les points critiques non nuls de E correspondent aux solutions de l'équation (1).

(b) Dans ce qui suit on va supposer que $u = 0$ est la seule solution de (1) dans l'ensemble $\{u \in H_0^1(\Omega) \mid E(u) < (1/N) S^{N/2}\}$, et on va montrer que E possède une valeur critique dans $](1/N) S^{N/2}, (2/N) S^{N/2}[$; sous cette condition et d'après le théorème B on déduit que E vérifie la condition de $(PS)_c$ pour tout $c \in](1/N) S^{N/2}, (2/N) S^{N/2}[$.

3. Démonstration du théorème 1

Rappelons que le résultat est connu si $\mu > 0$ et $N > 3$ (cf. [4]). Nous distinguerons alors deux cas :

3.1 le cas $N = 3$ et $\mu \geq 0$,

3.2 le cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$,

3.1. Le cas $N = 3$ et $\mu \geq 0$

Soit B la boule unité de $H_0^1(\Omega)$. On sait que B est métrisable pour la topologie faible. Soit (f_n) un sous-ensemble dense dans B. On pose $[u-v] = \sum(1/2^n)\langle f_n \mid u-v\rangle$; $[\cdot]$ est une métrique qui définit la topologie faible sur B. On note $E_\epsilon = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| \leq 1 \text{ et } [u] \leq \epsilon\}$.

On a besoin des fonctions suivantes :

$$\Gamma : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(u) = \int |\nabla u|^2 - \int (u^+)^6 - \mu \int (u^+)^{q+1}$$

$$F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^3, \quad F(u) = S^{-3/2} \int x |\nabla u|^2 \, dx .$$

On a alors, en conséquence du lemme de concentration de P.L. Lions (cf. [9], [10]), le lemme suivant.

LEMME 1. — *Pour tout voisinage V de $\overline{\Omega}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\text{si } u \neq 0,\ \Gamma(u) = 0,\ u \in E_{2\epsilon}, \quad E(u) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon \quad \text{alors } F(u) \in V .$$

Preuve. — On raisonne par l'absurde; supposons qu'il existe un voisinage V de Ω tel que, pout tout n, il existe $u_n \not\equiv 0$ vérifant $\Gamma(u_n) = 0$, $E(u_n) = (1/3)S^{3/2} + o(1)$, $u_n \in E_{2/n}$ et $F(u_n) \notin V$. Le fait que u_n converge faiblement vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ entraîne que u_n tend vers 0 dans $L^{q+1}(\Omega)$. Posons

$$E^*(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} \int (u^+)^6 .$$

On a alors

$$E^*(u_n) = \frac{1}{3} S^{3/2} + o(1) .$$

On applique le théorème 2 de [6], on obtient, quitte à extraire une sous-suite, il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ telle que

$$|\nabla u_n|^2 \to S^{3/2}\,\delta_{x_0} \quad (n \to \infty),$$

où la convergence est la convergence vague des mesures sur $\overline{\Omega}$ et δ_{x_0} est la mesure de Dirac en x_0. Par conséquent $F(u_n) \to x_0 \notin V$, d'où une contradiction.

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [\,0\,,\,1\,])$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \le \dfrac{1}{4} \text{ ou si } |x| \ge 2, \\ \varphi(x) = 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} \le |x| \le \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

et soit, pour tout $k \ge 1$, $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [\,0\,,\,1\,])$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi_k(x) = \varphi(kx) & \text{si } |x| < \dfrac{1}{4k} \\ \varphi_k(x) = \varphi\Big(\dfrac{x}{k}\Big) & \text{si } |x| \ge k, \\ \varphi(x) = 1 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On remarque que φ_k vérifie :

$$\begin{cases} \varphi_k(x) = 0 & \text{si } |x| \le \dfrac{1}{4k} \\ & \text{et si } |x| \ge 2k, \\ \varphi_k(x) = 1 & \text{si } \dfrac{1}{2k} \le |x| \le \dfrac{3k}{2}. \end{cases}$$

On va paramétrer la famille de fonctions définie dans (5) par (t, σ) avec $t \in [\,0\,,\,1\,[$ et $\sigma \in \Sigma$, où Σ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Posons alors

$$u_t^\sigma(x) = \left[\frac{1-t}{(1-t)^2 + |x - t\sigma|^2}\right]^{\frac{3}{2}},$$

On voit facilement que $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t^\sigma|^2$ et $\int_{\mathbb{R}^3} |u_t^\sigma|^6$ sont indépendants de $t \in [\,0\,,\,1\,[$ et $\sigma \in \Sigma$; de plus u_t^σ se concentre autour de σ quand σ tend vers 1. On a en outre (cf. [6]) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t^\sigma|^2 = S \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_t^\sigma|^6\right)^{\frac{1}{3}}.$$

On va supposer que $R_1 \leq 1/4k_0$, $R_2 \geq 4k_0$, pour un certain k_0 qu'on fixera ultérieurement. On note alors que $\varphi_k u_t^\sigma \in H_0^1(\Omega)$. Posons

$$v_{t,k}^\sigma(x) = \frac{\left\|\varphi_k u_t^\sigma\right\|^{1/2}}{\left|\varphi_k u_t^\sigma\right|_6^{3/2}} (\varphi_k u_t^\sigma)(x) .$$

On a

$$v_{t,k}^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \Gamma^*(v) = \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \int \left(v_{t,k}^\sigma\right)^6 = 0 .$$

Pour $r > 0$, soit

$$g(r) = E(r v_{t,k}^\sigma) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right) \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \mu \frac{r^{q+1}}{q+1} \int \left(v_{t,k}^\sigma\right)^{q+1} .$$

On a :

$$r g'(r) = \Gamma(r v_{t,k}^\sigma) , \quad g(r) \to \infty \text{ quand } r \to -\infty ,$$
$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(r) > 0 \quad \text{pour } r > 0 \text{ petit} , \quad g(1) < 0 .$$

On en déduit que g atteint son maximum en $r_{t,k}^\sigma$ noté r qui vérifie $\Gamma(r v_{t,k}^\sigma) = 0$ et $0 < r < 1$. On pose alors

$$w_{t,k}^\sigma = r v_{t,k}^\sigma .$$

LEMME 2. — *Les deux énoncés suivants sont vérifiés :*

(a) $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, k_0 \geq 1$ *tel que* $(k \geq k_0) \Rightarrow$

$$\left(\forall\, \sigma \in \Sigma , \quad E(w_{t,k}^\sigma) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + \delta\right) ;$$

(b) $\forall\, \alpha > 0$, $\exists\, \eta > 0$ *tel que* $(\eta < t < 1) \Rightarrow$

$$\left(\forall\, k \geq 1 \text{ et } \sigma \in \Sigma , \quad E(w_{t,k}^\sigma) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + \alpha \text{ et } \left|F(w_{t,k}^\sigma) - \sigma\right| \leq \alpha\right) .$$

Preuve. — On a :

$$E(w_{t,k}^\sigma) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right) \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \frac{\mu}{q+1} \int \left(w_{t,k}^\sigma\right)^{q+1} ,$$

et comme $0 < r < 1$, on déduit :

$$E(w_{t,k}^{\sigma}) \leq \frac{1}{3}\int |\nabla v_{t,k}^{\sigma}|^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\|\varphi_k u_t^{\sigma}\|^2}{|\varphi_k u_t^{\sigma}|_6^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

quantité qui tend vers $(1/3)S^{3/2}$ quand $k \to \infty$, uniformément par rapport à t dans $[\,0\,,\,1\,[$, d'où (a). D'autre part, quand $t \to 1$,

$$\int |\nabla v_{t,k}^{\sigma}|^2 = K_1 + \mathrm{O}(1-t)\,, \quad \text{avec } K_1 = |\nabla U|_2^2 \text{ et } U(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int \left(\varphi_k v_t^{\sigma}\right)^6\right)^{\frac{1}{3}} = K_2 + \mathrm{O}(1-t)\,, \quad \text{avec } K_2 = |U|_6^2\,.$$

D'où

$$E(w_{t,k}^{\sigma}) \leq \frac{1}{3}\,S^{3/2} + \mathrm{O}(1-t) \leq \frac{1}{3}\,S^{3/2} + \alpha$$

dès que t sera assez grand < 1.

Conséquences. — On peut supposer $x_0 = 0$. Fixons V un voisinage compact de $\overline{\Omega}$ ne contenant pas 0. Soit $\epsilon > 0$ correspondant à V comme dans le lemme 1, vérifiant $\sigma + \xi \neq 0$ pour $|\sigma| = 1$ et $|\xi| \leq \epsilon$. D'après le lemme 2, il existe $k_0 \geq 1$ et $t_0 \in]\,\eta\,,\,1\,[$ tels que :

$$E(v_{t,k_0}^{\sigma}) \leq \frac{2}{3}\,S^{3/2} - \epsilon\,, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,\,1\,[\,,$$

$$E(v_{t,k_0}^{\sigma}) \leq \frac{1}{3}\,S^{3/2} + \epsilon \quad \text{et} \quad \left|F(w_{t_0,k_0}^{\sigma}) - \sigma\right| < \epsilon\,, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,.$$

Notons $v_{t,k_0}^{\sigma} = w_t^{\sigma}$.

On fixe $\lambda > 1$, assez grand tel que l'on ait $E(\lambda w_t^{\sigma}) < 0$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$, $\forall\, t \in [\,0\,,\,1\,[$. En vue d'appliquer le théorème A, on définit les ensembles K, K^* et la fonction p^* par :

$$K = [\,0\,,\,1\,] \times \overline{B}(0,1)\,,$$
$$K^* = \partial K = [\,0\,,\,1\,] \times \partial\overline{B}(0,1) \cup \{0,1\} \times \overline{B}(0,1)\,;$$
$$p^* : K \to H_0^1(\Omega)$$
$$p^*(s,t\sigma) = \lambda s w_{t,t_0}^{\sigma}\,.$$

Pour conclure il reste à montrer le lemme suivant.

LEMME 3. — *On a :*

$$\sup_K E(p) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon, \quad \forall\, p \in P.$$

Admettons un instant la conclusion du lemme 3. On a alors

$$\max_{r>0} E\big(r w_t^\sigma\big) = E\big(w_t^\sigma\big) \leq \frac{2}{3} S^{3/2} - \epsilon, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma,\ \forall\, t \in [\,0\,,\,1\,[,$$

$$\max_{r>0} E\big(r w_{t_0}^\sigma\big) = E\big(w_{t_0}^\sigma\big) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma,$$

$$\max_{\partial K} E(p^*) \geq \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_K E(p^*) < \frac{2}{3} S^{3/2}.$$

D'après le lemme 3 on a

$$\sup_K E(p) \geq \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon > \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon \geq \sup_{\partial K} E(p^*)$$

et

$$c = \inf_P \sup_K E(p) \in \Big]\frac{1}{3} S^{3/2}\,,\, \frac{2}{3} S^{3/2}\Big[.$$

On applique alors les théorèmes A et B, on obtient le théorème 1.

Revenons à la démonstration du lemme 3. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in C(K; H_0^1)$ avec $p = p^*$ sur ∂K, et

$$E\big(p(s,\xi)\big) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon, \quad \forall\, (s,\xi) \in K.$$

Considérons l'application $G : K \to \mathbb{R}^4$, définie par

$$G(s,\xi) = \big(s\,,\, F\big(p(s,\xi)\big)\big)\,.$$

On va montrer :

$$\deg\Big(G\,,\, K\,,\, \big(\lambda^{-1}, a\big)\Big) = 1. \tag{6}$$

où deg désigne le degré topologique.

L'application $H : [\,0\,,\,1\,] \times K \to \mathbb{R}^4$, définie par

$$H(t,s,\xi) = tG(s,\xi) + (1-t)(s,\xi) = \big(s\,,\, tF\big(p(s,\xi)\big) + (1-t)\xi\big)$$

est une homotopie entre G et Id_K. Il suffit de vérifier que $(\lambda^{-1}, a) \notin H(t, \partial K)$. Sinon il existe $(s,\xi) \in \partial K$ tel que $H(t,s,\xi) = (\lambda^{-1}, a)$, donc $s = \lambda^{-1}$ et $a = tF\big(p(\lambda^{-1},\xi)\big) + (1-t)\xi = t\big(F(w_{t_0}^{\sigma}) - \xi\big) + \xi$. On en déduit que $\xi \in \Sigma$. Or $tF\big(p(\lambda^{-1},\xi)\big) + (1-t)\xi = t\big(F(w) - \xi\big) + \xi \neq a$ car $\big|F(w_{t_0}^{\sigma}) - \sigma\big| < \epsilon$, d'où une contradiction.

Considérons les ensembles :

$$\begin{aligned} K_1 &= \big\{(s,\xi) \in K \mid p(s,\xi) \in E_\epsilon\big\} \\ K^+ &= \big\{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma\big(p(s,\xi)\big) > 0\big\} \cup \big\{(0,\xi)\big\} \\ K^- &= \big\{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma\big(p(s,\xi)\big) < 0\big\} \\ K^0 &= \big\{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma\big(p(s,\xi)\big) = 0\big\}\ . \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement

$$\text{si } (s,\xi) \in \partial K \text{ et si } 0 \leq s \leq \lambda^{-1}, \text{ alors } (s,\xi) \in K^+ \tag{7}$$

$$\text{si } (s,\xi) \in \partial K \text{ et si } \lambda^{-1} < s \leq 1, \text{ alors } (s,\xi) \in K^- \tag{8}$$

$$(\lambda^{-1}, \sigma) \in K^0\,, \quad \forall\ \sigma \in \Sigma\,. \tag{9}$$

Pour $(s,\xi) \in K^0$, on a

$$\Gamma\big(p(s,\xi)\big) = 0\,, \quad p(s,\xi) \in E_{2\epsilon}\,, \quad p(s,\xi) \neq 0$$

et

$$E\big(p(s,\xi)\big) \leq \frac{1}{3}\,S^{3/2} + 2\epsilon\,.$$

D'après le lemme 1, on déduit que :

$$F\big(p(s,\xi)\big) \in V\,.$$

Par conséquent

$$\forall\ (s,\xi) \in K^0\,, \quad F\big(p(s,\xi)\big) \neq a\,,$$

d'où

$$(\lambda^{-1}, a) \notin G(K^0) = G\left(K_1 \setminus (K^+ \cup K^-)\right)\,,$$

donc

$$\deg\big(G\,,\,K^+\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) + \deg\big(G\,,\,K^-\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = \deg\big(G\,,\,K_1\,,\,(\lambda^{-1},a)\big)\,. \tag{10}$$

On a alors :

$$\forall\ (s,\xi) \in K\,, \quad F\big(p(s,\xi)\big) = a \quad \Rightarrow \quad p(s,\xi) \in E_\epsilon\,. \tag{11}$$

En effet, sinon $a = F\big(p(s,\xi)\big)$ et $p(s,\xi) \notin E_\epsilon$, donc

$$|a| = \big|F\big(p(s,\xi)\big)\big| = S^{-3/2}\big\|p(s,\xi)\big\|^2 \int x \, d\mu \,,$$

avec $d\mu = \big|\nabla p(s,\xi)\big|^2 / \big\|p(s,\xi)\big\|^2 \, dx$. D'après le lemme 2, on a $\int x \, d\mu \in \Omega$. On en déduit

$$|a| \geq c\epsilon^2 \left| \int x \, d\mu \right| \geq c\epsilon^2 \inf_{y \in \Omega} |y| \,,$$

d'où une contradiction pour $|a|$ assez petit.

Ceci prouve que $(\lambda^{-1}, a) \notin G(K \setminus K_1)$ et par conséquent

$$\deg\big(G\,,\, K_1\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = \deg\big(G\,,\, K\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = 1 \,. \tag{12}$$

On va montrer que :

$$\deg\big(G\,,\, K^+\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = 0 \,, \tag{13}$$

$$\deg\big(G\,,\, K^-\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = 0 \,. \tag{14}$$

Preuve de (13) et (14)

On fixe $R > \lambda^{-1}$; $y \in \mathbb{R}^4$, $|y| \geq R \Rightarrow y \notin G(K_1)$.

On définit le chemin $r(t)$ par $r(t) = \big(tR + (1-t)\lambda^{-1}\,,\, a\big)$, pour $t \in [\,0\,,\,1\,]$. On va montrer que $r(t) \notin G(\partial K^+)$. Sinon $\exists\ (s,\xi) \in \partial K^+$ avec

$$\big(Rt + (1-t)\lambda^{-1}\,,\, a\big) = \big(s\,,\, F\big(p(s,\xi)\big)\big) \,.$$

D'où

$$s = tR + (1-t)\lambda^{-1} \geq \lambda^{-1} \quad \text{et} \quad a = F\big(p(s,\xi)\big) \,.$$

Or $\forall\ (s,\xi) \in K^0$, on a $F\big(p(s,\xi)\big) \neq a$, on en déduit $(s,\xi) \notin K^0$. Donc d'après (7) on a $(s,\xi) \in \partial K \cap K^+$, ce qui entraîne que $s < \lambda^{-1}$ et ceci contredit $s \geq \lambda^{-1}$; d'où $r(t) \notin G(\partial K^+)$, donc $\deg\big(G\,,\, K^+\,,\, r(t)\big)$ est bien défini et ne dépend pas de t. Comme $(R,a) \notin G(K_1)$ on a :

$$\deg\big(G\,,\, K^+\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = \deg\big(G\,,\, K^+\,,\, (R,a)\big) = 0 \,.$$

L'égalité (14) se démontre de la même façon en utilisant le chemin $q(t) = \big(-tR\,,\, (1-t)\lambda^{-1}\big)$ pour $t \in [\,0\,,\,1\,]$. On a $\deg\Big(G\,,\, K\,,\, \big(\lambda^{-1}, q(t)\big)\Big)$ ne dépend pas de t, comme $(-R,a) \notin G(K_1)$ on conclut que :

$$\deg\big(G\,,\, K^-\,,\, (\lambda^{-1}, a)\big) = \deg\big(G\,,\, K^-\,,\, (-R,a)\big) = 0 \,.$$

De (7), (12), (13) et (14), on obtient une contradiction. D'où le lemme 3.

3.2. Le cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$

Sans perdre de généralité on va supposer que $x_0 = 0$ et $R_2 = 1$. On pose $s = R_1$. On considère la fonction définie par

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}\int |u|^{q+1} \tag{15}$$

pour $u \in H_0^1(\Omega)$, et on pose

$$H_0^1(\Omega)^+ = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

On va utiliser un argument de [1] pour vérifier que $H_0^1(\Omega)^+$ est invariant par le flot associé à $-\psi$. Il en résulte que les points critiques de $\psi|_{H_0^1(\Omega)^+}$, correspondent aux solutions de (1).

Le flot associé à $-\psi$ est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} = -\psi'(u) = \Delta u + |u|^{p-1}u + \mu|u|^{q-1}u \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega)^+$ alors il existe une solution maximale u sur $[\,0\,,\,T\,[$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} = \Delta u + (u^+)^p + \mu(u^+)^q \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Si on montre que $u > 0$, alors u est une solution de (16) et notre assertion est prouvée. Montrons que $u > 0$; soit $s < T$, on multiplie (17) par u^- et on intègre, on en déduit que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int (u^-)^2 = \int |\nabla u^-|^2\,,$$

donc

$$\frac{d}{ds}\int (u^-)^2 \leq 0$$

et par conséquent

$$\int |u^-(s, u_0)|^2 = 0\,,$$

d'où le résultat.

Soit φ_s une fonction de "*cut-off*" définie comme dans [7] par

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\min\left(2s\,,\ \frac{1+s}{2}\,,\ \frac{3+s}{4}\right)\right] \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ et si } t \geq 1\ . \end{cases}$$

On pose

$$v_{a,\epsilon,s}(x) = c\varphi_s\big(|x|\big)u_{a,\epsilon}(x)$$
$$v_{a,\epsilon}(x) = c\varphi_0\big(|x|\big)u_{a,\epsilon}(x)\,,$$

où

$$c = \frac{\big\|\nabla\varphi_s u_{a,\epsilon}\big\|^{(N-2)/2}}{\big|\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|_{p+1}^{N/2}}\,.$$

On remarque alors que

$$\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int\big|\nabla\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|^2}{\big(\int\big|\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|^{p+1}\big)^{2/(p+1)}}\right]^{\frac{N}{2}} - \mu\int(v_{a,\epsilon,s})^{q+1}\,.$$

Il est facile de prouver les deux lemmes suivants; (cf. [7]).

LEMME 4. — *On a :*

$$\lim_{s\to 0}\big\|\nabla v_{a,\epsilon,s}\big\|_2^2 = \big\|\nabla v_{a,\epsilon}\big\|_2^2$$
$$\lim_{s\to 0}\big\|v_{a,\epsilon,s}\big\|_{p+1}^{p+1} = \big\|v_{a,\epsilon}\big\|_{p+1}^{p+1}$$
$$\lim_{s\to 0}\big\|v_{a,\epsilon,s}\big\|_{q+1}^{q+1} = \big\|v_{a,\epsilon}\big\|_{q+1}^{q+1}$$

uniformément par rapport à $|a| < 3/4 - d$ *(*$d > 0$ *assez petit).*

LEMME 5. — *On a :*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{s\to 0}\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\,S^{N/2}$$

uniformément par rapport à $|a| \leq 3/4 - d$ *;*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{s\to 0}\left|F(v_{a,\epsilon,s}) - \frac{a}{2}\right| = 0$$

où $F(u) = S^{-N/2}\int x|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$ *;*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\,S^{N/2}$$

uniformément par rapport à $|a| = (1+s)/2$ *,* $s \in [\,0\,,\ 1-d\,]$.

Preuve. — Compte tenu du lemme 2.5 de [7], pour établir le lemme 5, il suffit de prouver

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int |\varphi_0(x) u_{a,\epsilon}(x)|^{q+1} \, dx = 0 \, .$$

Or on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_0(x) u_{a,\epsilon}(x)|^{q+1} \leq \int_{B(0,2)} |u_{a,\epsilon}(x)|^{q+1} =$$

$$= \epsilon^{N-(q+1)(N-2)/2} \int_{B(0,2)/\epsilon} \left(1 + |y|^2\right)^{-(q+1)(N-2)/2} dx$$

quantité qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0.

LEMME 6. — *Si l'équation (1) n'admet pas de solution autre que $u = 0$ alors ψ, définie en (15), vérifie $(PC)_c$ sur $H_0^1(\Omega)^+$ pour tout $c \in \left]\left(1/N\right)S^{N/2}, \left(2/N\right)S^{N/2}\right[$.*

Utilisant à nouveau le lemme de concentration de P.L. Lions (cf. [9], [10]) on a le lemme 7.

LEMME 7. — *Pour tout voisinage V compact de $\overline{\Omega}$, il existe $\alpha > 0$ tel que : si $u \neq 0$,*

$$\Gamma^*(u) = \int |\nabla u|^2 - \int |u|^{p+1} = 0$$

et

$$\psi^*(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} \leq \frac{1}{N} S^{N/2} + \alpha \, ,$$

alors

$$F(u) \in V \, .$$

Fin de la démonstration du cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$

Soit α une fonction continue de $\overline{B}(0,1)$ dans $\overline{B}(0,1)$ vérifiant

$$|\alpha(a)| = \frac{1+s}{2} \, , \quad \forall \, a \in \partial \overline{B} \, ,$$

$$|\alpha(a)| \leq \frac{3}{4} - d \, , \quad \forall \, a \in \overline{B} \, .$$

D'après le lemme 2 on peut choisir ϵ et s assez petit tels que

$$\forall \, a \in B \, , \quad \psi\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) < \frac{2}{N} S^{N/2} \tag{18}$$

$$\forall \, a \in B \, , \quad \left| F\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) - \frac{a}{2} \right| < \frac{1}{2} \, . \tag{19}$$

Soit V un voisinage compact de $\overline{\Omega}$ tel que

$$B(0,s) \not\subset V\,, \tag{20}$$

on pose

$$\psi_\epsilon^* = \left\{ u \in H_0^1(\Omega)^+ \mid u \not\equiv 0\,,\ \Gamma(u) = 0\,,\ E^*(u) \leq \epsilon \right\}.$$

D'après le lemme 7, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$F\left(\psi^*_{(1/N)S^{N/2}+\alpha}\right) \subset V\,. \tag{21}$$

D'après le lemme 5, on peut choisir ϵ assez petit tel que :

$$\psi\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) \leq \frac{1}{N}\,S^{N/2} + \alpha\,, \quad \forall\ a \in \partial B\,,\ \forall\ s \in [\,0\,,\,1-d\,]\,. \tag{22}$$

Dans la suite, on choisit ϵ et s de telle sorte qu'on ait (18), (19) et (22), et $\lambda > 1$ tel que $\psi\left(\lambda v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) < 0$.

En vue d'appliquer le théorème A, on définit les ensembles K, K^* et la fonction p^* par

$$p^* : K = [\,0\,,\,1\,] \times \overline{B} \to H_0^1(\Omega)^+ \text{ définie par } p^*(t,a) = \lambda t v_{\alpha(a),\epsilon,s}\,.$$

Il est clair que, d'après (18), on a

$$\frac{1}{N}\,S^{N/2} < c < \frac{2}{N}\,S^{N/2}\,. \tag{23}$$

Compte tenu du théorème A et du théorème 6, pour conclure il reste à montrer :

$$\max_{(t,a)\in\partial K} \psi\left(p^*(t,a)\right) < \max_{(t,a)\in K} \psi\left(p(t,a)\right)\,, \quad \forall\ p \in P\,. \tag{24}$$

Pour prouver (24) il suffit de montrer que

$$\max_{(t,a)\in K} \psi\left(p(t,a)\right) \geq \frac{1}{N}\,S^{N/2} + 2\alpha\,, \quad \forall\ p \in P\,. \tag{25}$$

Si (25) tombe en défaut, il existe p dans P vérifiant pour tout (t,a) de K :

$$\psi\left(p(t,a)\right) \leq \frac{1}{N}\,S^{N/2} + 2\alpha\,. \tag{26}$$

Donc

$$\psi^*\big(p(t,a)\big) \leq \frac{1}{N}\, S^{N/2} + 2\alpha\,. \tag{27}$$

Soit la fonction $T : K \to \mathbb{R}^{N+1}$ définie par $(t,a) \to \big(t/2\,,\, F\big(p(t,a)\big)\big)$.

On vérifie, de la même manière que dans (6), que

$$\deg\left(T\,,\, K\,,\, \left(\frac{1}{\lambda}\,,\, 0\right)\right) = 1\,. \tag{28}$$

Posons

$$\begin{aligned} K^+ &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) > 0\big\} \cup \big\{(0,\xi)\big\}\,,\\ K^- &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) < 0\big\}\,,\\ K^0 &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

On a

$$\deg\big(T\,,\, K^+\,,\, (\lambda^{-1},0)\big) + \deg\big(T\,,\, K^-\,,\, (\lambda^{-1},0)\big) = \deg\big(T\,,\, K\,,\, (\lambda^{-1},0)\big)\,. \tag{29}$$

Nous allons montrer que

$$\deg\left(T\,,\, K^+\,,\, \left(\frac{1}{\lambda}\,,\, 0\right)\right) = 0\,, \tag{30}$$

$$\deg\left(T\,,\, K^-\,,\, \left(\frac{1}{\lambda}\,,\, 0\right)\right) = 0\,. \tag{31}$$

Preuve de (30) et (31). — On fixe $R > 0$ tel que $T(K) \subset B(0,R)$, et on considère le chemin $r : [\,0\,,\,1\,] \to \mathbb{R}^{N+1}$ défini par $r(t) = \big(Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\, 0\big)$. On a $r(t) \notin T(\partial K^+)$. Sinon, il existerait $(t,a) \in \partial K^+$ tel que

$$\big(Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\, 0\big) = \Big(\frac{t}{2}\,,\, F\big(p(t,a)\big)\Big)\,.$$

Puisque $F\big(p(t,a)\big) = 0$ on déduit de (21) que $(t,a) \notin K^0$. Comme $\partial K^+ \subset \partial K \cup K^0$, on a $(t,a) \in \partial K \cup K^+$; or puisque $t \geq \lambda/2$ et $p = p^*$ sur ∂K on déduit que $\Gamma\big(p(t,a)\big) < 0$, ce qui contredit le fait que $(t,a) \in \partial K^+$.

Alors $\deg\big(T\,,\, K^+\,,\, (1/\lambda\,,\, 0)\big)$ est bien défini et ne dépend pas de t, d'où (30).

La formule (31) se démontre de la même façon en utilisant le chemin $e(t) = \big(-Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\, 0\big)$. De (28), (30) et (31), on tire une contradiction. D'où (24).

Remerciements

Je remercie vivement le Professeur H. Brezis qui est à l'origine de cette question et qui m'a beaucoup encouragé. Je remercie également le Professeur J.M. Coron pour ses conseils.

Références

[1] Bahri (A.) and Coron (J.M.) . — *On a non linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988) pp. 253-294.

[2] Brezis (H.) . — *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology,* Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986) pp. S.17-S.39.

[3] Brezis (H.) and Nirenberg (L.) Livre en préparation.

[4] Brezis (H.) and Nirenberg (L.) . — *Positive solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponent,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983) pp. 437-477.

[5] Brezis (H.) and Coron (J.M.) . — *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles,* Archive Rat. Mech. Anal., **89** (1985) pp. 21-56.

[6] Coron (J.M.) . — *Topologie et cas limite des injections de Sobolev,* C.R. Acad. Sc., Paris, **299** (1984) pp. 209-211.

[7] Ding (W.Y.) . — *Positive solutions of* $\Delta u + u^{(N+2)/(N+2)} = 0$ *on contractible domains,* à paraître.

[8] Lewandowski (R.) . — *Little holes and convergence of solutions of* $-\Delta u = u^{(N+2)/(N+2)}$, à paraître.

[9] Lions (P.L.) . — *La méthode de concentration-compacité en calcul des variations* Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, (1982-1983).

[10] Lions (P.L.) . — *The concentration-compactness principle in calculus of variations. Part 1 and 2,* Riv. Math. Iberoamericana, **1** (1985) pp. 145-201 et pp. 45-121.

[11] Mancini (G.) and Musina (R.) . — *Holes and obstacles,* Ann. I.H.P. Analyse non linéaire, **5** (1988) pp. 323-345.

[12] Pohozaev (S.J.) . — *Eingenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady, **6** (1965) pp. 1408-1411.

[13] Rey (O.) . — *Sur un problème variationnel non compact : l'effet de petits trous dans le domaine,* C.R. Acad. Sc. Paris, **308** (1989) pp. 349-352.

[14] Struwe (M.) . — *A global compactness result for elliptic boundary problem involving nonlinearities,* Math. Z., **187** (1984) pp. 511-517.