

HENRI LEBESGUE

**Exposé géométrique d'un mémoire de Cayley sur les
polygones de Poncelet**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 13 (1921), p. 61-91

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1921_3_13_61_0

© Université Paul Sabatier, 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE D'UN MÉMOIRE DE CAYLEY

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Par HENRI LEBESGUE.

On doit à Cayley⁽¹⁾ l'un des mémoires les plus élégants et les plus pénétrants qui aient été écrits sur les polygones de Poncelet. Ce travail est cependant assez peu connu en France; peut-être parce que l'Auteur y fait appel incidemment à la théorie des intégrales abéliennes, tandis qu'en France on préfère voir traiter ces questions algébriquement; peut-être à cause de sa rédaction analytique très condensée.

Je me suis proposé d'en faire un exposé qui soit à la portée des bons élèves de mathématiques spéciales et, pour le rendre plus intuitif, je lui ai donné une forme entièrement géométrique. La traduction géométrique des résultats de Cayley est d'ailleurs immédiate, mais j'ai tenu aussi à légitimer géométriquement ces résultats. Cela m'a conduit à écrire un long travail remplaçant simplement quatre pages de Cayley; mon but est d'ailleurs d'inciter ceux qui s'intéressent à la géométrie à lire complètement et à travailler sérieusement le mémoire de Cayley.

On ne trouvera presque rien ici qui ne soit connu; peut-être puis-je cependant faire remarquer que, dans toutes les questions où interviennent des courbes de genre un, l'emploi du théorème d'Abel comme moyen d'élimination peut toujours être remplacé, comme je le fais ici, par l'emploi de la théorie algébrique de la résiduation de Sylvester. J'appelle aussi l'attention sur la méthode que j'ai employée pour démontrer le théorème de Poncelet. Le principe en est dû au D^r Hart; elle présente, en commun avec d'autres travaux du même Auteur, l'avantage de fournir des constructions linéaires pour des éléments qui sont déterminés sans ambiguïté.

Beaucoup des travaux sur les polygones de Poncelet font appel à des considérations de continuité pour la distinction, souvent imprécise, entre les tangentes qu'il faut mener pour aboutir à un polygone de Poncelet et celles qui n'en donnent pas

⁽¹⁾ *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1861. Voir aussi *Philosophical Magazine*, 1853.

un. Toutes ces difficultés disparaissent par la méthode que j'ai adoptée. Elle m'a permis de distinguer avec plus de netteté qu'on ne le fait d'habitude ceux des polygones inscrits dans une conique Γ d'un faisceau ponctuel, et dont les côtés sont tangents à d'autres coniques C_i du faisceau, auxquels s'appliquent le théorème de Poncelet et ceux auxquels il ne s'applique pas. Je les ai appelés respectivement les polygones circonscrits aux coniques C_i et les polygones tangents aux coniques C_i .

I

[1] **Lemme.** — *Considérons un faisceau ponctuel F de coniques et soit Γ une conique de ce faisceau. Il existe des quadrangles dont les quatre sommets A, B, C, D sont sur Γ et dont les trois couples de côtés opposés AB, CD ; AC, BD ; AD, BC sont respectivement tangents à trois coniques du faisceau F . Les six points de contact de ces trois coniques et des six côtés sont sur une droite Δ .*

Le quadrangle est déterminé quand on connaît deux côtés et les points de contact correspondants.

Donnons-nous d'abord deux côtés consécutifs AB et AC . Il y a deux coniques de F tangentes à AB ; soit (I) celle qui est tangente à AB au point de contact M qui nous est donné. Soit (II) la conique de F tangente à AC au point de contact P choisi. La droite Δ est la droite MP . Δ coupe (I) en M et en un autre point N ; je dis que la tangente à (I) en N passe par C .

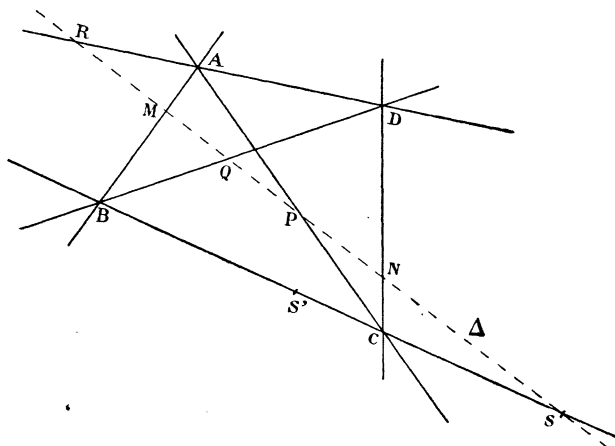


FIG. I.

Soit, en effet, Φ le faisceau ponctuel de coniques déterminé par (I) et la conique constituée par les droites AB et CN . F et Φ déterminent sur AC les mêmes couples de points, car tous deux donnent le couple A, C et la conique (I) est commune aux

deux faisceaux. Or, dans F , se trouve la conique (II) qui coupe AC en deux points confondus en P , donc il existe dans Φ une conique qui coupe AC en deux points confondus en P . Et comme cette conique, comme toutes les coniques de Φ , passe par N et est tangente à AB en M , elle se réduit à la droite Δ prise double. Donc toutes les coniques de Φ , et en particulier la conique (I), sont tangentes en N à CN .

On voit de même que, si Q est le second point de rencontre de (II) et de Δ , la tangente à (II) en Q passe par B et par le second point de rencontre D de Γ et de CN .

Maintenant, remarquons que les deux faisceaux F et Φ déterminent sur AD les mêmes couples de points, puisqu'ils déterminent tous deux le couple A, D et que la conique (I) est commune aux deux faisceaux. Donc, l'intersection R de Δ et de AD est le point de contact de AD et d'une conique de F , la conique (III). En vertu des résultats précédents, cette conique (III) est aussi tangente à BC au point de rencontre S de BC et de Δ .

Supposons maintenant que l'on nous ait donné les côtés opposés AB, CD tangents en M et N à une conique (I) du faisceau F . Le raisonnement fait en dernier lieu prouve que R est le point de contact de AD et d'une conique de F . Donc, on peut considérer le quadrangle comme déterminé par les côtés consécutifs AB, AD et les points de contact M et R ; nous sommes ramenés au cas précédent.

[2] **Polygones circonscrits et polygones tangents.** — Le triangle ABC du raisonnement précédent est un triangle quelconque inscrit dans Γ ; il vient donc d'être prouvé que si une droite Δ coupe les côtés AB et AC de ce triangle en deux points M et P de contact de ces côtés avec deux coniques de F , elle coupe aussi le troisième côté BC en un point S de contact avec une conique de F . *Les six points de contact, avec des coniques de F , des côtés d'un triangle inscrit dans Γ sont situés trois à trois sur quatre droites.*

Si donc un triangle ABC est inscrit dans Γ et si ses côtés sont tangents respectivement à trois coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ de F , deux cas peuvent se présenter : ou bien les trois points de contact sont en ligne droite, nous dirons alors que *le triangle est tangent à $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$* , ou bien la droite Δ joignant les deux points de contact M et P situés sur AB et AC coupe BC au point S conjugué harmonique, par rapport à BC , du point de contact S' considéré. Dans ce cas les droites CM, BP, AS' concourent. Nous dirons alors que *le triangle est circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$* .

D'une façon plus générale, soit $ABCD \dots KL$ un polygone inscrit dans Γ et dont les côtés successifs sont tangents à des coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ du faisceau F . Soit (AC) celle des coniques de F telle que ABC soit circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, (AC)$. Soit (AD) celle des coniques de F telle que ACD soit circonscrit à $(AC), \Gamma_3, (AD)$. Et ainsi de suite. Suivant que AKL est tangent à $(AK), \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ ou leur est circonscrit, nous dirons que $ABCD \dots KL$ est *tangent* ou *circonscrit* à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

La distinction entre ces deux cas se fait facilement par des relations analogues à celles de Menelaüs et de Jean de Ceva, ce qui montre d'ailleurs que cette distinction ne dépend pas du choix du sommet A qui nous a servi⁽¹⁾.

[3] **Théorème de Poncelet.** — *Étant données des coniques $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ faisant partie d'un même faisceau ponctuel, s'il existe un polygone inscrit dans Γ et circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, il en existe une infinité d'autres.*

Pour déterminer un de ces polygones, on peut se donner arbitrairement :

- 1° *L'ordre dans lequel les côtés successifs seront tangents à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$; soit $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n$ cet ordre;*
- 2° *Celle des tangentes à Γ'_1 qui portera un côté du polygone;*
- 3° *Celui des deux points de rencontre de cette tangente et de Γ par lequel passera le côté du polygone tangent à Γ'_2 .*

Cas du triangle. — Soit ABC un triangle inscrit dans Γ et circonscrit aux coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; soient α, β, γ les points de contact situés respectivement sur BC, CA, AB. Soit B'C' une autre tangente à Γ_1 ; B' et C' sont sur Γ et nous voulons qu'ils jouent respectivement les rôles de B et C; soit α' le point de contact de B'C' et de Γ_1 .

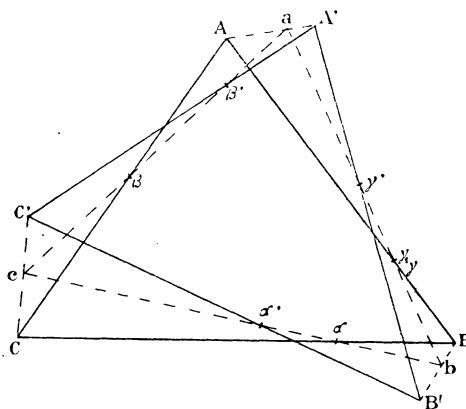


FIG. 2.

BCB'C' est un quadrangle auquel s'applique notre lemme. La droite Δ est ici $\alpha\alpha'$. Elle rencontre BB' en b, CC' en c et il y a une conique S de F qui est tangente à BB' en b et à CC' en c.

(1) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont les sommets d'un polygone de n côtés inscrits dans Γ et si $A_i A_{i+1}$ est tangent à Γ_i au point a_i , on aura $\prod \frac{A_i a_i}{a_i A_{i+1}} = +1$, si le polygone est circonscrit aux coniques Γ_i , et $\prod \frac{A_i a_i}{a_i A_{i+1}} = -1$, s'il leur est tangent.

Construisons maintenant le quadrangle inscrit dans Γ et déterminé par CA , CC' et les points de contact β et c . Soit A' le quatrième sommet de ce quadrangle, soient β' et a les points de rencontre de βc avec $C'A'$ et AA' . β' est point de Γ_3 , a est point de S .

La figure $BB'AA'$ est un quadrangle inscrit dans Γ , pour lequel la droite Δ est la droite ab . Cette droite rencontre AB et $A'B'$ en deux points γ_1 et γ' appartenant à une même conique Γ de F . Je dis que cette conique est Γ_3 , c'est-à-dire que γ_1 est le point γ et non pas le conjugué harmonique de γ par rapport à AB . Les droites AA' , BB' , CC' , étant tangentes à S , ne sont pas concourantes, donc les triangles ABC et abc d'une part, $A'B'C'$, abc d'autre part ne sont pas homologues. Les points α , β , γ_1 , d'une part; α' , β' , γ' , d'autre part, ne sont donc pas en ligne droite. ABC et $A'B'C'$ sont circonscrits à Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 . Par suite, γ_1 est en γ et le triangle $A'B'C'$ est circonscrit aux coniques Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 .

Le cas du triangle est entièrement traité; car, changer l'ordre de Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 en conservant le côté $B'C'$ tangent à Γ_1 , reviendrait à intervertir les rôles des points B' et C' dans notre raisonnement.

REMARQUES. — Par l'emploi de relations analogues à celles dont il a été parlé au paragraphe précédent, on aurait pu éviter le raisonnement par l'absurde qui nous a servi.

Le fait que AA' , BB' , CC' sont trois tangentes à une conique S du faisceau, le fait que les côtés opposés de l'hexagone $AB'CA'BC'$ sont tangents à la même conique et les faits analogues, qu'on rencontre dans le cas général, sont l'origine de propriétés géométriques variées que je me contente de signaler.

[4] **Cas général.** — Soit $ABC \dots KL$ un polygone inscrit dans Γ et circonscrit aux coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, prises dans cet ordre. Conservant les notations utilisées précédemment, on a des triangles ABC ; ACD ; $\dots$; AKL circonscrits respectivement à $\Gamma_1, \Gamma_2, (AC)$; $(AC), \Gamma_2, (AD)$; $\dots$; $(AK), \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$.

Nous nous donnons une droite $A'B'$ tangente à Γ_1 et celui A' de ses points de rencontre avec Γ qui jouera le rôle de A dans la construction d'un polygone analogue à $ABC \dots KL$. Or, nous avons appris à construire des triangles $A'B'C'$; $A'C'D'$; $\dots$; $A'K'L'$ circonscrits respectivement à $\Gamma_1, \Gamma_2, (AC)$; $(AC), \Gamma_2, (AD)$; $\dots$; $(AK), \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$; donc les sommets $A', B', C', \dots, K', L'$ de ces triangles sont aussi ceux du polygone cherché.

Montrons qu'on peut intervertir l'ordre de Γ_1 et Γ_2 , par exemple. En effet, si B_1 est le quatrième sommet du quadrangle déterminé par AB , BC et les points de contact de ces droites avec Γ_1 et Γ_2 , le polygone $AB_1CD \dots KL$ est circonscrit à $\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$. Et comme toute permutation effectuée sur les coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ peut être remplacée par une suite de transpositions de deux coniques consécutives, le théorème est entièrement démontré.

REMARQUE. — On notera que, dans tous les cas, la démonstration résulte de l'application répétée de cette sorte de transposition dont le lemme nous a appris la possibilité. Malgré la forme un peu artificielle de son énoncé, ce lemme apparaît ainsi comme intimement lié au théorème de Poncelet.

[5] Le théorème de Poncelet nous permet de déduire de la connaissance d'un polygone inscrit dans Γ et circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, prises dans cet ordre, l'existence de polygones analogues formant une famille. Si l'on modifie l'ordre, on a $\frac{1}{2}(n-1)!$ familles. Mais il peut y avoir d'autres polygones satisfaisant aux mêmes conditions; l'existence supposée connue d'un tel polygone ne rentrant dans aucune des $\frac{1}{2}(n-1)!$ familles prévues entraînerait l'existence de $\frac{1}{2}(n-1)!$ nouvelles familles.

Le nombre $\frac{1}{2}(n-1)!$ qui vient d'être donné suppose que les coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ soient toutes différentes, tandis que les raisonnements antérieurs ne supposaient rien de semblable. D'une façon générale, si l'on peut avec $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ former N permutations circulaires, de sens déterminé, qui soient différentes, le théorème de Poncelet fournit $\frac{N}{2}$ familles de polygones inscrits à Γ et circonscrits à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, dès que l'on connaît un tel polygone.

II

[6] **Représentation des coniques d'un faisceau à l'aide des points d'une cubique.**
— Si, d'un point A , on mène des tangentes aux coniques d'un faisceau ponctuel $C + \lambda\Gamma = 0$, le lieu $\mathcal{C}$ des points de contact, dont l'équation s'obtient par élimination de λ entre la relation précédente et l'équation de la polaire $P + \lambda\Pi = 0$ de A , est, comme l'on sait, la cubique $C\Pi - \Gamma P = 0$.

Remarquons, en passant, que notre lemme nous donne le moyen de fixer géométriquement le degré de $\mathcal{C}$. Soient M et P deux points de $\mathcal{C}$, le lemme nous a appris à trouver sur MP un autre point R appartenant à $\mathcal{C}$ (*fig. 1*). Je dis qu'il n'y en a pas d'autre: en effet, soit R' un point de $\mathcal{C}$ situé sur MP et différent de M et de P . Avec les droites AR' et AM comme côtés et les points de contact R' et M , on détermine un quadrangle inscrit dans la conique Γ passant par A , le côté de ce quadrangle opposé à AM sera tangent à la conique (I) au point de rencontre de MR' et de (I). Ce côté sera donc CD tangent à (I) en N ; le quadrangle ne diffère donc pas de $ABCD$; R' est en R .

[8] Nous pouvons maintenant préciser : c'est par une propriété des trois points représentatifs m_1, m_2, m_3 situés sur les tangentes 1, 2, 3 d'un même groupe, que nous allons caractériser la situation des coniques $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

La cubique $\mathcal{C}$ et la cubique constituée par les trois droites $m_1 M; m_2 m'_2; m_3 m'_3$ ont en commun, en plus des six points $m_1, M, m_2, m'_2, m_3, m'_3$, le point A et enfin le point Z pris deux fois.

Dans le faisceau ponctuel déterminé par ces deux cubiques, il s'en trouve une qui se décompose en la droite $Mm'_2 m'_3$ et une conique, donc : les trois points m_1, m_2, m_3 sont les points de rencontre, autres que A et Z, de $\mathcal{C}$ avec une conique passant par A et Z et tangente en Z à $\mathcal{C}$.

La réciproque est vraie et résulte du même raisonnement fait en sens inverse; car puisque $Mm'_2 m'_3$ sont en ligne droite, ABCD est un quadrangle dont le côté BC est tangent à Γ_3 en un point μ_3 de $Mm'_2 m'_3$ et les côtés de ABC sont respectivement tangents à $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ en trois points m_1, m'_2, μ_3 non en ligne droite.

On définit donc tous les groupes de trois coniques associées par la considération des systèmes de trois points de rencontre variables de $\mathcal{C}$ avec les coniques du réseau ponctuel de coniques qui passent par A et Z et sont tangentes à $\mathcal{C}$ en Z.

Chaque groupe $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ est d'ailleurs défini par le système m_1, m_2, m_3 et par le système m'_1, m'_2, m'_3 .

[9] **La cubique de Cayley.** — Il n'y aurait aucune difficulté à utiliser la cubique $\mathcal{C}$ pour traiter le cas général du théorème de Poncelet et pour en déduire les relations que l'on doit à Cayley; mais on gagnera en clarté à passer de la cubique $\mathcal{C}$ à celle introduite par Cayley.

R_1 et R_2 étant deux fonctions rationnelles de X et Y, les formules

$$x = R_1(X, Y); \quad y = R_2(X, Y)$$

font correspondre, aux deux points m_i et m'_i représentatifs d'une conique Γ_i , deux nouveaux points représentatifs M_i et M'_i qui, quand Γ_i varie, décrivent une courbe $\mathcal{C}_0$. Pour qu'un point de $\mathcal{C}_0$ ne soit représentatif que d'une seule conique du faisceau, il faut que la transformation entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ soit birationnelle de courbe à courbe; ce que nous supposerons. Les points m_1, m_2, m_3 représentatifs de trois coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ associées par rapport à Γ , sont les intersections avec $\mathcal{C}$ d'un réseau de coniques

$$\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \mu_3 C_3 = 0;$$

la transformation considérée remplace ce réseau par un autre, formé de courbes dont chacune coupe $\mathcal{C}_0$ en trois points variables seulement et, par suite, quelle que soit $\mathcal{C}_0$, la relation entre les points représentatifs sera toujours analogue.

Si $C + \lambda I' = 0$ est l'équation du faisceau de coniques donné ($I' = 0$ étant celle qui passe par A), les points représentatifs sur $\mathcal{C}$ de cette conique sont obtenus en la coupant par la polaire $P + \lambda II = 0$ de A. Ceci conduit à la résolution d'une équation du second degré et l'on trouve, pour les coordonnées x, y des points représentatifs, deux couples de valeurs données par deux fonctions rationnelles de λ et d'un radical du second degré portant sur un polynôme en λ . Ce polynôme en λ ne s'annule que si les points représentatifs se confondent : donc, pour la conique I' , ($\lambda = \infty$), et pour les coniques décomposables; par suite ce polynôme est tout simplement le discriminant $D(\lambda)$ de la conique $C + \lambda I' = 0$, et l'on a :

$$x = R_1(\lambda, \sqrt{D(\lambda)}), \quad y = R_2(\lambda, \sqrt{D(\lambda)}),$$

R_1 et R_2 étant deux fonctions rationnelles que l'on peut naturellement prendre du premier degré en $\sqrt{D(\lambda)}$.

D'ailleurs, connaissant x et y , $P + \lambda II = 0$ donne λ et on en déduit ensuite $\sqrt{D(\lambda)}$ par la résolution de l'une ou l'autre des équations $x = R_1$, $y = R_2$ du premier degré en $\sqrt{D(\lambda)}$.

Donc le point

$$X = \lambda, \quad Y = \sqrt{D(\lambda)}$$

décrit une courbe $\mathcal{C}_0$; cette courbe est la cubique de Cayley

$$Y^2 = D + \Theta X + \Theta_1 X^2 + \Delta X^3;$$

$D, \Theta, \Theta_1, \Delta$ sont les invariants simultanés des deux coniques C et I' .

La conique polaire de Z par rapport à $\mathcal{C}$ passe par les points de contact des tangentes $ZA, Z\alpha, Z\beta, Z\gamma$ à $\mathcal{C}$ issues de Z et elle est tangente à $\mathcal{C}$ en Z ; donc les sommets α, β, γ du triangle autopolaire constituent un groupe de points représentatifs de trois coniques associées qui sont évidemment ici les coniques décomposables du faisceau. Directement, il est facile de voir que les triangles dont le théorème de Poncelet affirme l'existence, sont, pour ce système de trois coniques associées, des triangles inscrits dans I' et dont les côtés passent respectivement par α, β, γ . Dire qu'il existe de tels triangles, c'est dire que l'homologie de pôle γ , transformant en elle-même chaque conique du faisceau, est le produit des deux homologies analogues de pôles α et β . Plus simplement encore, si, par une transformation homographique, on a ramené les coniques à avoir le même centre, c'est dire que le produit des symétries obliques par rapport aux deux diamètres conjugués communs donne la symétrie par rapport au centre.

Donc, les trois coniques décomposables sont associées; mais les valeurs de λ cor-

respondantes annulent $D(\lambda)$, donc les trois points représentatifs sont sur l'axe $Y=0$ de $\mathcal{C}_0$. En utilisant la théorie de la résiduation de Sylvester, que je rappellerai plus loin, on en conclut de suite que, *sur la cubique $\mathcal{C}_0$ de Cayley, les points représentatifs de trois coniques associées, correspondant aux tangentes d'un même groupe, sont en ligne droite.*

[10] Pour passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_0$ on peut aussi raisonner géométriquement. Les coniques découpant sur $\mathcal{C}$ les systèmes de trois points m_1, m_2, m_3 que nous considérons, ont trois points fixes. Une transformation du second ordre convenablement choisie remplacera ces coniques par des droites quelconques, donc transformera $\mathcal{C}$ en une nouvelle cubique sur laquelle les correspondants des points m_1, m_2, m_3 seront en ligne droite. Les points fixes des coniques n'étant pas tous trois distincts, la transformation à employer sera singulière.

Soit $X=0$ l'équation de AZ , soit $Z=0$ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en Z , soit $Y=0$ l'équation d'une droite quelconque issue de A .

La transformation

$$Xy = Yx, \quad Xx = kZz,$$

remplace les coniques

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 xz + \mu_3 yz = 0,$$

qui définissent les systèmes de trois points associés sur $\mathcal{C}$, par les droites

$$k\mu_1 Z + \mu_2 X + \mu_3 Y = 0;$$

par suite elle transforme $\mathcal{C}$ comme nous le désirons. On voit que deux points transformés m et M sont en ligne droite avec A et que les deux droites Zm et ZM se correspondent dans une involution qui admet $X=0$ et $Z=0$ comme rayons correspondants.

La conique $x^2=0$ se transforme en la droite $Z=0$; or cette conique déterminait sur $\mathcal{C}$ trois points m confondus en A et pour lesquels la position limite de Am était la tangente AZ à Γ . Donc les trois transformés de ces trois points confondus en A sont confondus en Z ; Z est donc un point d'inflexion de $\mathcal{C}_0$; la tangente en ce point est $Z=0$.

La conique polaire du point Z par rapport à $\mathcal{C}_0$ se compose de la tangente $Z=0$ à cette courbe et d'une droite, $D=0$, qui passe par les points de contact $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ des tangentes à $\mathcal{C}_0$ issues de Z . $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont les transformés de α, β, γ ; $D=0$ est donc la transformée de la conique polaire de Z par rapport à $\mathcal{C}$. Soit $E=0$ la droite portant les points caractéristiques de $C=0$ sur la cubique $\mathcal{C}_0$.

Prenant $Z=0$ pour droite de l'infini, posons

$$x = u \frac{E}{Z}, \quad y = v \frac{D}{Z}; \quad u \text{ et } v \text{ étant deux constantes.}$$

$\mathcal{C}_0$ aura une équation de la forme :

$$y^2 = \text{polynôme du troisième degré en } x;$$

quant à x c'est, pour chaque point de $\mathcal{C}_0$, une fonction homographique de λ qui devient nulle ou infinie en même temps que λ . En choisissant u , on peut donc prendre $x = \lambda$. Le polynôme en x s'annule alors pour les trois valeurs de λ qui donnent $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, c'est-à-dire pour celles qui donnent les coniques décomposables. Donc, en choisissant v , l'équation de $\mathcal{C}_0$ sera :

$$y^2 = D(x).$$

Remarquons encore que le point Z' autre que Z , obtenu en menant par A une tangente à la conique (Z) du faisceau qui passe par Z , se transforme en le point A . Ceci étant, nous pouvons préciser la relation entre le faisceau de coniques et la cubique $\mathcal{C}_0$ de Cayley supposée tracée par rapport à des axes de coordonnées cartésiennes quelconques x et y , grâce à l'équation : $y^2 = \Delta(x)$; soit A_0 l'un des points de $\mathcal{C}_0$, caractéristique de (Z) ; on peut effectuer sur le faisceau donné une transformation homographique amenant A en A_0 , Z au point à l'infini de l'axe des y et telle que chaque tangente à une conique du faisceau issue de A porte le point M correspondant à cette conique sur $\mathcal{C}_0$. Après cette transformation, entre l'abscisse x du point de contact m de cette tangente et l'abscisse X de M on a une relation involutive dans laquelle l'abscisse de A_0 et l'abscisse infinie se correspondent.

Ajoutons que A_0 peut être pris au hasard sur $\mathcal{C}_0$, à condition de faire varier A sur Γ .

[11] Le passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_0$ peut aussi se faire en n'utilisant que la transformation ordinaire du second ordre. Soient, en effet, m_1, m_2, m_3 les points caractéristiques, relatifs à un même groupe, de trois coniques associées; menons par ces trois points une conique. Elle coupera $\mathcal{C}$ en trois points O, I, J . De la théorie de la résiduation, il résulte de suite que le réseau des coniques passant par O, I, J découpe lui aussi sur $\mathcal{C}$ les systèmes de trois points variables que nous cherchons.

Dès lors, une transformation du second ordre admettant O, I, J comme points singuliers transformera $\mathcal{C}$ en une cubique sur laquelle les systèmes de trois points associés sont formés de points alignés. Si l'on prend I et J pour points cycliques, on emploiera une transformation par rayons vecteurs de pôle O .

Pour démontrer que la cubique $\mathcal{C}_0$ obtenue est bien celle de Cayley, remarquons que l'on peut toujours prendre pour $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ le système formé par Γ et deux fois l'une quelconque des coniques du faisceau. Soit A_1 le transformé du point A , point caractéristique de Γ sur $\mathcal{C}$. Associons Γ et une conique particulière Γ' du faisceau prise double, le triangle ABC correspondant aura, par exemple, AB et AC confondus suivant une même tangente à Γ' . Les points caractéristiques de Γ' qu'on devra considérer comme d'un même groupe seront donc les deux points différents et les transformés de ces deux points seront en ligne droite avec A_1 . En prenant Γ' confondue avec Γ , on voit que A_1 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_0$. A chaque valeur de λ est associée une droite issue de A_1 et portant les deux points caractéristiques de la conique relative à cette valeur λ . A une droite issue de A_1 ne correspond qu'une valeur de λ , car cette droite ne coupe $\mathcal{C}_0$ qu'en deux points en dehors de A_1 . Ces droites correspondent homographiquement à λ .

Enfin les points transformés de α, β, γ sont trois points en ligne droite en lesquels les trois tangentes à $\mathcal{C}_0$ concourent en A_1 , puisque les deux points caractéristiques d'une conique décomposable sont confondus. Donc, en prenant la droite $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ comme axe des x et A_1 pour point à l'infini de l'axe des y , la droite de l'infini étant la tangente à $\mathcal{C}_0$ en A_1 , on pourra bien ramener l'équation de $\mathcal{C}_0$ à la forme $y^2 = \Delta(x)$.

[12] Lorsqu'il s'agit d'un faisceau de circonférences, la cubique $\mathcal{C}$, qui passe toujours par les points de base du faisceau, est une cubique circulaire. La proposition démontrée au numéro 8 prend alors la forme suivante :

Si d'un point A de la circonférence Γ on mène des tangentes aux circonférences du faisceau donné, la circonférence circonscrite au triangle des trois points de contact relatifs à des circonférences associées par rapport à Γ et à des tangentes d'un même groupe passe par un point fixe.

On reconnaît facilement que ce point est le pied o de la perpendiculaire AA_1 abaissée de A sur l'axe du faisceau.

Cette proposition est susceptible d'une vérification très élémentaire (voir plus loin, [18]).

[13] **La théorie de la résiduation de Sylvester.** — Pour ne pas interrompre le raisonnement, j'ai rejeté ici l'exposé de cette théorie très simple, qui n'est que l'application au cas des cubiques des théorèmes généraux, relatifs aux courbes algébriques, que l'on doit à Gergonne, Jacobi, Plücker. On peut résumer la théorie en disant : *Si, parmi les $3(m+n)$ points de rencontre d'une cubique et d'une courbe de degré $m+n$, il y en a $3m$ qui sont sur une courbe de degré m , les $3n$ autres sont sur une courbe de degré n .*

La démonstration repose sur les faits suivants : deux courbes de degré p ont en commun p^2 points, si elles n'ont pas de parties communes; pour déterminer une

courbe de degré p il suffit de connaître $\frac{p(p+3)}{2}$ de ses points; par $\frac{p(p+3)}{2} - 1$ points il passe un faisceau linéaire de courbes de degré p ayant en commun p^2 points communs, à moins que toutes les courbes passant par les points donnés n'aient une partie commune.

Soient C_3, C_{m+n}, C_m les trois courbes données dans l'énoncé; C_3 et C_m ont en commun les points A au nombre de $3m$; j'appelle b l'un, déterminé, des points de rencontre de C_3 et C_{m+n} qui n'est pas sur C_m et j'appelle B le groupe des $3n - 1$ autres points.

Je détermine la courbe C_n de degré n par la condition de passer les points B et par

$$\frac{n(n+3)}{2} - (3n-1) = \frac{(n-3)n}{2} + 1$$

autres points que je choisis n'appartenant pas à une même courbe de degré $n-3$. Dans ces conditions C_n ne contient pas C_3 .

Les courbes C_{m+n} et $C_m + C_n$ de degré $m+n$ ont en commun les points A et B, en nombre $3(m+n) - 1$, je vais démontrer qu'elles ont en commun le point b . Ce point b est le seul point qu'elles peuvent avoir encore en commun sur C_3 , donc elles ont en dehors de C_3

$$(m+n)^2 - 3(m+n) = (m+n)(m+n-3) \text{ points au moins.}$$

Par $\frac{(m+n-3)(m+n)}{2}$ de ces points je fais passer une courbe C_{m+n-3} de degré $m+n-3$. Les trois courbes $C_{m+n}, C_m + C_n, C_3 + C_{m+n-3}$ ont en commun

$$\frac{(m+n)(m+n-3)}{2} + 3(m+n) - 1 = \frac{(m+n)(m+n+3)}{2} - 1 \text{ points.}$$

Donc en général elles forment un faisceau ponctuel et ont $(m+n)^2$ points communs. $3(m+n)$ de ces points doivent appartenir à C_3 ; nous connaissons déjà les $3m$ points A de C_m , les $3n - 1$ points B de C_n , donc le dernier point est sur C_n et comme il appartient nécessairement à C_{m+n} , la proposition est démontrée.

Reste cependant l'hypothèse dans laquelle les trois courbes de degré $m+n$ ont une partie commune C_p . Il faut alors que C_p appartienne à C_{m+n} et soit à C_m , soit à C_n . Il suffira de reprendre la démonstration du théorème pour les points d'intersection de C_3 et de $C_{m+n} - C_p$, sachant que $3(m-p)$ ou $3m$ de ces points sont sur $C_m - C_p$ ou sur C_m .

Sylvester dit de deux systèmes de points qui, pris dans leur ensemble, constituent l'intersection complète d'une cubique et d'une courbe algébrique, qu'ils sont *résiduels*

l'un de l'autre; l'énoncé précédent peut alors être formulé comme il suit : *Si deux systèmes de points ont un même résiduel, tout résiduel de l'un est résiduel de l'autre.*

En effet, soient A et A' les deux systèmes admettant le même résiduel R et soit ρ un autre résiduel de A. Par hypothèse, $A + R$, $A' + R$, $A + \rho$ sont respectivement les intersections de la cubique avec trois courbes C, C', Γ . La courbe $C' + \Gamma$ rencontre la cubique aux points $A + A' + R + \rho$, et comme les points $A + R$ sont sur une courbe C, les points $A' + \rho$ sont sur une courbe Γ' .

On peut ajouter que si A et A' contiennent le même nombre de points, C et C' d'une part, Γ et Γ' d'autre part sont du même degré. La démonstration n'exclut pas le cas où l'un des résiduels R ou ρ ne contiendrait aucun point.

Cette proposition, dont l'application aux numéros précédents est immédiate, va nous permettre d'effectuer, en quelque sorte géométriquement, les éliminations qui seraient nécessaires, analytiquement, pour passer du théorème de Poncelet, démontré pour le cas du triangle, au théorème général.

[14] Condition pour qu'il existe des polygones inscrits dans Γ et circonscrits à $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. — S'il existe de tels polygones, les coniques seront dites associées par rapport à Γ , soit ABCD ... KL un polygone répondant à la question et dont le sommet A est celui qui a servi à construire la cubique C; les côtés successifs sont tangents aux coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, prises dans cet ordre. Soit (AC), (AD) ... les coniques dont il a été question dans la définition des polygones circonscrits. Les tangentes issues de A aux trois coniques associées $\Gamma_1, \Gamma_2, (AC)$ se répartissent en deux groupes 1, 2, c; 1', 2', γ . De même pour les tangentes à (AC), $\Gamma_3, (AD)$; notons ces tangentes $\gamma, 3, d$; c, 3', δ . Puis nous noterons les tangentes à Γ_1 et (AE) de façon que nos deux groupes s'appellent $\delta, 4, e$; d, 4', ε , etc. Nous avons ainsi réparti nos tangentes en deux groupes 1, 2, 3, 4, ... n; 1', 2', 3', ... n'. Il est évident que la tangente 1 prise pour premier côté, peut être associée à 2' prise pour second côté. D'autre part, il existe un triangle admettant pour côtés 2 et γ et circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, (AC)$; il existe aussi, toujours d'après la répartition en groupes, un triangle ayant pour côtés γ et 3' et circonscrit à (AC), $\Gamma_3, (AD)$, donc 2 et 3' peuvent être pris pour côtés d'un polygone inscrit dans Γ et circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$.

Donc, comme dans le cas du triangle, notre répartition en deux groupes est telle que chaque tangente du premier groupe peut être associée avec la tangente portant le numéro suivant et faisant partie de l'autre groupe. Mais il y a plus, montrons que si l'on permute l'ordre des coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ la division des tangentes en deux groupes ne sera pas modifiée. Il suffira de le prouver par la transposition de Γ_1 et Γ_2 . Or, soit LA la tangente n, AB sera la tangente 1', donc AC, la tangente c, construisons le quadrangle ABCB' déterminé par AB et BC et leurs points de contact avec Γ_1 et Γ_2 . Nous savons que AB'CD ... L est circonscrit aux coniques $\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$, mais le côté AB' qui est associé à AC ou c est le côté 2', donc LA ou n est associée à 2'.

En résumé, *les tangentes issues de A peuvent être partagées en deux groupes tels que tous les polygones de sommets A, dont le théorème de Poncelet prouve l'existence, aient un côté appartenant à chacun des deux groupes.*

[15] Cette séparation des tangentes en deux groupes entraîne une séparation analogue pour les points caractéristiques de $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sur $\mathcal{C}$, puis pour ceux sur $\mathcal{C}_0$. C'est une propriété des points d'un même groupe, caractéristiques des coniques associées $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, que nous allons obtenir.

Nous supposons comme ci-dessus que ces points $1, 2, 3, 4, \dots$, sont tels qu'on puisse les réunir à des points $c, \gamma; d, \delta; \dots$ en groupe de trois points associés $1, 2, c; \gamma, 3, d; \delta, 4, e, \dots; c$ et γ, d et $\delta, \dots$ étant différents, mais relatifs à une même conique. Supposons qu'il s'agisse des points sur $\mathcal{C}_0$.

$1, 2, c$ sont en ligne droite, ainsi que $\gamma, 3, d$. Donc $1, 2, 3, d$ sont résiduels de c, γ . Mais la droite $c\gamma$ passe par le point Z à l'infini sur l'axe des y ; donc $c\gamma$ admet Z pour résiduel. Ce point Z étant un point d'inflexion, admet comme résiduel ce même point Z pris deux fois, comme on le voit en coupant $\mathcal{C}_0$ par sa tangente en Z . Mais $1, 2, 3, d$ et Z ayant le même résiduel c, γ tout résiduel de l'un est un résiduel de l'autre et $1, 2, 3, d, Z, Z$ sont sur une conique. Réciproquement, si cette condition est remplie et si c est en ligne droite avec $1, 2$ et γ avec $3, d$, on voit, par le même raisonnement, que la droite $c\gamma$ passe par Z .

Donc : *pour que quatre coniques soient associées par rapport à Γ , il faut et il suffit que leurs points caractéristiques d'un même groupe soient sur une parabole de direction asymptotique oy .*

$1, 2, 3, d, Z, Z$ sont sur une conique; $\delta, 4, e$ sont en ligne droite; $1, 2, 3, 4, e, Z, Z$ sont donc résiduels de d, δ dont Z est un autre résiduel. Donc, en raisonnant comme précédemment, $1, 2, 3, 4, e, Z, Z$ sont résiduels de Z, Z ou encore $1, 2, 3, 4, e, Z$, sont résiduels de Z, Z, Z dont un résiduel ne contient aucun point. Par suite $1, 2, 3, 4, e, Z$ sont sur une conique. La réciproque est immédiate.

Donc : *pour que cinq coniques soient associées par rapport à Γ , il faut et il suffit que leurs points caractéristiques d'un même groupe soient sur une conique dont oy est une direction asymptotique.*

Le raisonnement est maintenant bien clair, nous pouvons conclure : *pour que $(3n - p)$ points de $\mathcal{C}_0$ soient les points caractéristiques d'un même groupe pour $3n - p$ coniques ($p = 0, 1, 2$) associées par rapport à Γ , il faut et il suffit que ces points soient sur une courbe de degré n admettant oy pour direction asymptotique d'ordre p .*

[16] Pour la cubique $\mathcal{C}$ l'énoncé est aussi facile à obtenir, mais il est moins simple, parce que Z n'est plus un point d'inflexion. Cependant, si A est pris sur un côté $\alpha\beta$ du triangle autopolaire commun, Z est alors au troisième sommet γ de ce triangle et comme, dans le cas général, $Z\gamma$, polaire de A par rapport à la conique

décomposable (γ), coupe $\mathcal{C}$ en Z et en deux points situés en γ , Z est un point d'inflexion quand A est sur $\alpha\beta$. Examinons rapidement le cas de cette cubique $\mathcal{C}_1$.

Z admet des résiduels connus; d'abord Z, Z ; puis aussi A, A ; et encore I, J si I et J sont deux points de base du faisceau en ligne droite avec Z . Écrivons cela ainsi :

$$Z\mathcal{R}Z, Z; \quad Z\mathcal{R}A, A; \quad Z\mathcal{R}I, J.$$

Supposons obtenue la condition pour qu'un groupe de points, les points G et le point c_1 , soient caractéristiques d'un système de $n - 1$ coniques associées, sous la forme suivante : il faut que G, c_1 ait pour résiduel g ;

$$G, c_1\mathcal{R}g;$$

passons au système formé d'une conique de plus, γ_1 étant point caractéristique de la même conique que c_1 , on a, nous le savons [14], en appelant $n - 1$ et n ceux des points caractéristiques des deux dernières coniques qui sont du même groupe que γ_1 ,

$$\gamma_1, n - 1, n\mathcal{R}A, Z, Z$$

ou

$$\gamma_1, n - 1, n\mathcal{R}A, A, A.$$

Donc

$$G, g\mathcal{R}c_1, \\ n - 1, n, A, A, A\mathcal{R}\gamma_1,$$

et

$$G, g, n - 1, n, A, A, A\mathcal{R}c_1, \gamma_1\mathcal{R}Z\mathcal{R}A, A,$$

ou

$$G, n - 1, n\mathcal{R}g, A, A, A, A, A.$$

Donc, quand on augmente le nombre des coniques associées de une unité, il faut augmenter de cinq fois le point A le groupe des points de base du système linéaire de courbes découpant sur $\mathcal{R}$ les groupes de points caractéristiques.

Or, puisque

$$A, A\mathcal{R}Z; \quad A, A, A, A, A, A\mathcal{R}Z, Z, Z;$$

c'est dire que l'on peut toujours supprimer six fois A toutes les fois qu'on obtient A six fois au moins (ceci revient à dire que A est un point sextactique, ce qui est connu).

Concluons :

Pour que $6n - q$ points de la cubique $\mathcal{C}_1$, relative à un point A d'un côté du triangle autopolaire commun, soient les points caractéristiques d'un même groupe de $6n - q$ coniques associées par rapport à Γ ($q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), il faut et il suffit que ces points soient sur une courbe de degré $2n$ coupant $\mathcal{C}_1$ en q points confondus en A.

[17] Cet énoncé pourra toujours être transformé en se rappelant que deux A peuvent toujours être remplacés par deux Z ou par I, J. Pour un faisceau de circonférences ayant en commun (à distance finie) deux points de base I' et J', et pour un point A pris sur l'axe du faisceau, la condition s'exprimera en disant que les points caractéristiques sont : pour le cas du triangle, sur une circonférence passant par A, ou sur une conique passant par A, I' et J', ou sur une conique tangente à Γ en A et admettant en A un cercle osculateur passant par le centre de Γ , ou sur une conique passant par A admettant pour asymptote la parallèle I''J'' à I'J' menée par le symétrique de A par rapport à I'J'; pour le cas du quadrilatère, sur une circonférence ou sur une conique passant par I' ou J', ou sur une conique tangente à Γ en A, ou sur une conique admettant I''J'' pour asymptote.

Pour le cas du pentagone et de l'hexagone, l'énoncé général n'est pas susceptible de transformation à moins, bien entendu, que l'on ne remplace le système des coniques découpant les groupes de points caractéristiques par un système de courbes de degré supérieur à 2.

[18] **Emploi de la géométrie élémentaire.** — Je réunis ici les démonstrations élémentaires des résultats les plus simples concernant le cas des faisceaux de circonférences.

Si l'on veut masquer l'emploi de l'involution dans la démonstration des propriétés du quadrangle [1], on peut dire : Soit ABC un triangle inscrit à la circonférence Γ et dont les côtés sont tangents respectivement en α, α' ; β, β' ; γ, γ' à des circonférences $(\alpha), (\alpha')$; ... du faisceau. Les milieux a, b, c de $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ sont sur l'axe radical et l'on a :

$$\overline{c\gamma^2} = \overline{c\gamma'^2} = \overline{cA} \times \overline{cB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = - \frac{\gamma' A}{\gamma' B}.$$

On en déduit :

$$\frac{\overline{\gamma A^2}}{\overline{\gamma B^2}} = \frac{\overline{\gamma' A^2}}{\overline{\gamma' B^2}} = \frac{\overline{\gamma A^2} - \overline{\gamma' A^2}}{\overline{\gamma B^2} - \overline{\gamma' B^2}} = \frac{(\gamma A + \gamma' A)(\gamma A - \gamma' A)}{(\gamma B + \gamma' B)(\gamma B - \gamma' B)} = \frac{2cA \times \gamma\gamma'}{2cB \times \gamma\gamma'} = \frac{cA}{cB}.$$

Puis de

$$\frac{cA}{cB} \times \frac{aB}{aC} \times \frac{bC}{bA} = 1, \quad \text{on tire} \quad \left[\frac{\gamma A}{\gamma B} \times \frac{\alpha B}{\alpha C} \times \frac{\beta C}{\beta A} \right]^2 = 1.$$

sont les seuls points de contact des circonférences du faisceau avec des tangentes issues de A . Donc sur la circonférence $oabc$, on ne peut pas avoir un autre point de contact a_1 , car on aurait aussi un point b_1 formant avec a_1 et c un système de trois points associés et les points a'_1 et b'_1 correspondants devraient être sur $a'b'd$.

[19] $\Gamma, (a), (b), (e), (f)$ étant des circonférences d'un même faisceau, pour qu'il existe des quadrilatères inscrits dans Γ et circonscrits à $(a), (b), (e), (f)$, il faut et il suffit que les points de contact de quatre droites tangentes respectivement à $(a), (b), (e), (f)$ et issues d'un point A situé sur Γ et sur l'axe du faisceau, soient sur une circonférence.

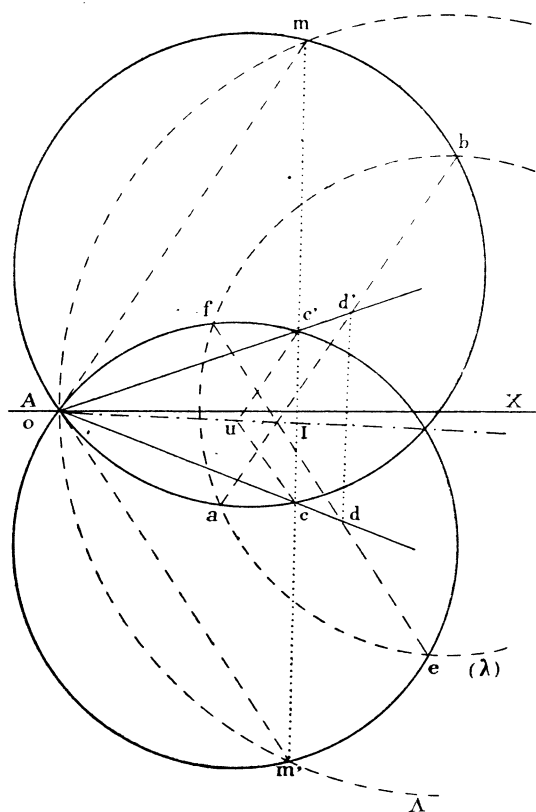


FIG. 7.

Les circonférences $(a), (b), (e), (f)$ sont associées si, et seulement si, il existe une circonférence (c) associée à la fois à (a) et (b) , et à (e) et (f) . Il faut préciser; si c et c' sont les deux points représentatifs de (c) , on doit avoir des points représentatifs a, b, e, f tels que A, a, b, c d'une part, A, e, f, c' d'autre part, soient sur une circonférence.

Dans le cas qui nous occupe, A et o étant confondus, il en est de même de a et a' ; les droites ab et $a'b'$ sont symétriques par rapport à l'axe Ax du faisceau et puisque, si m est le second point de rencontre de la circonférence abc avec la parallèle à AA_1 menée par c , co' et om sont aussi symétriques en direction par rapport à cet axe, ab est parallèle à om .

Nous savons de plus que $a'b'$ passe par un point connu d de Ac ; de même ab passe par le point analogue d' de $A'c'$; d' est le symétrique de d par rapport à Ax . ef passe donc par d , si (a) , (b) , (e) , (f) sont associées. Pour prouver que, dans ces conditions, a, b, e, f sont sur une même circonférence, il suffit de montrer que ab et ef se coupent sur l'axe radical des circonférences $Aabc$, $Aefc'$. L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{Ac}{Ad}$ transforment ab et ef en deux droites $c'u$, cu , dont le point de rencontre u doit être, il faut le prouver, sur l'axe radical considéré. Or les triangles Amm' , $uc'c$ sont homothétiques par rapport au point I de rencontre de Au et mm' ; de sorte que l'on a :

$$\frac{Im}{Ic'} = \frac{Im'}{Ic} \quad \text{ou} \quad Im \times Ic = Im' \times Ic';$$

donc I est sur l'axe radical. Cet axe est donc la droite Aiu .

Pour la suite, remarquons que la circonférence $abef$ ayant son centre sur les perpendiculaires aux milieux des cordes ab et ef , respectivement parallèles à Am et Am' , est concentrique à la circonférence (Δ) circonscrite au triangle Amm' .

Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque : si quatre points caractéristiques a, b, e, f sont sur une circonférence (λ) , les quatre circonférences (a) , (b) , (e) , (f) sont associées.

En effet, aux trois points a, b, e , on peut certainement associer un autre point de (λ) formant un système de quatre points associés; il suffit donc de prouver que les points e et f de la figure 7 sont déterminés quand on connaît Γ , A , AX , a, b et (λ) . Or, on construit de suite (Δ) , puis m , puis m' et c , puis d et enfin la droite ef .

[20] Il n'y aurait pas non plus de difficulté sérieuse à démontrer directement les énoncés donnés au numéro [17], relatifs aux systèmes de trois, quatre, cinq, six circonférences associées. Je me contente d'examiner le cas de trois coniques parce que la démonstration mettra bien en évidence la nature de la cubique $\mathcal{C}_1$.

Soit une circonférence passant par A et soient a, b, c trois points de $\mathcal{C}_1$ situés sur cette circonférence. ab coupe Ac' en un point que nous avons appelé précédemment d et que nous noterons maintenant γ' ; de même bc et Aa' se coupent en α' et ca et Ab' en β' . L'angle $\alpha'A\beta'$ est égal à aAb , donc à acb . Le quadrilatère $Ac\alpha'\beta'$

est donc inscriptible et entre les angles on a : $\angle \alpha' \beta' = \angle \alpha \beta'$ ou $\angle \alpha \alpha'$. De même $\angle \alpha' \gamma' = \angle \beta \alpha$ et comme $\angle \alpha \alpha' = \angle \beta \alpha$, α', β', γ' sont en ligne droite.

Soient e, e' les points représentatifs d'une circonférence du faisceau; traçons la circonférence Ace qui est coupée en p par la perpendiculaire cp à AX . Nous savons que Ap et $\gamma'e$ sont parallèles. Mais $Apc = Aec$ et $Apc = \gamma'ey$, donc $Aec = \gamma'ey$; en d'autres termes, $\gamma'ec$ et Aee' ont les mêmes bissectrices. Puisque Aee' ne dépend pas des points a, b, c on voit que les bissectrices de Aee' sont aussi celles de $\alpha'ea, \beta'eb, \gamma'ec$.

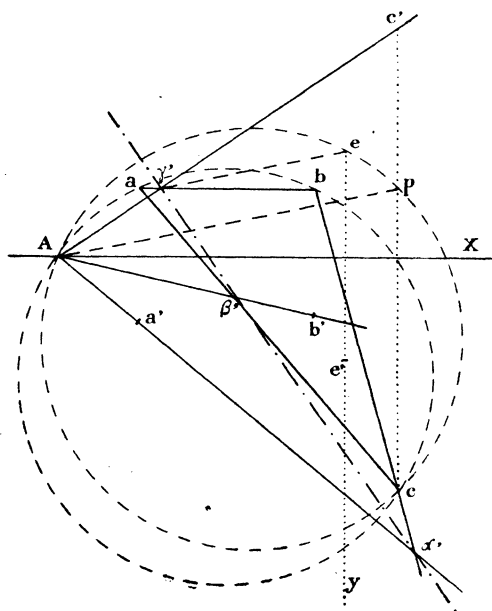


FIG. 8.

Les deux faisceaux de droites $[eA, ea, eb, ec]$ et $[ee', e\alpha', e\beta', e\gamma']$ sont donc superposables; de même $[e'A, e'a, e'b, e'c]$ et $[e'e, e'\alpha', e'\beta', e'\gamma']$ sont superposables. Or, puisque α', β', γ' sont en ligne droite, $[ee', e\alpha', e\beta', e\gamma']$ et $[e'e, e'\alpha', e'\beta', e'\gamma']$ ont même rapport anharmonique; donc il en est de même de $[eA, ea, eb, ec]$ et $[e'A, e'a, e'b, e'c]$, c'est-à-dire qu'il existe une conique passant par A, a, b, c, e, e' .

En prenant e et e' aux points de base du faisceau, ou en les faisant tendre vers A , ou en les éloignant à l'infini dans la direction perpendiculaire à AX , on obtient les divers énoncés du numéro [17]. Les réciproques se démontrent sans peine.

[21] **Retour à la cubique de Cayley.** — Convenons de prendre pour points caractéristiques de la conique (a) , non plus les points a et a' qui nous ont servi jusqu'ici, mais les points x et x' en lesquels les droites Aa , Aa' sont touchés par une

conique du faisceau autre que (a). Nous venons de voir que, dans le cas particulier où A a été choisi sur l'un des côtés du triangle autopolaire commun, α, β, γ sont en ligne droite ainsi que α', β', γ' . Ainsi, grâce à ce nouveau choix, la cubique $\mathcal{C}_1$ jouit de la propriété essentielle de la cubique $\mathcal{C}_0$ de Cayley.

Le fait que α', β', γ' sont en ligne droite, que nous avons démontré par la géométrie élémentaire, était d'ailleurs évident. En effet $\mathcal{C}_1$ est, pour le cas du faisceau de cercles dont nous nous occupons, une cubique circulaire, et la tangente en A est parallèle à l'asymptote réelle de $\mathcal{C}_1$. Donc $\mathcal{C}_1$ est analagmatique et A est un centre d'analagmatie; la transformation qui fait passer de a à α est donc une inversion qui, aux trois points a, b, c situés sur une circonférence passant par A, fait correspondre trois points α, β, γ en ligne droite.

Mais il y a plus; puisque trois points associés a, b, c sont sur une circonférence passant par A, les deux points cycliques et A constituent un système de trois points de base d'un réseau de coniques découpant sur $\mathcal{C}_1$ les triades de points associés. L'inversion que nous faisons subir à $\mathcal{C}_1$ pour passer des points a, b, c aux points α, β, γ est donc celle qui a été prévue au numéro [11] et qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_0$.

Ainsi la cubique $\mathcal{C}_1$, quand on la considère comme lieu des points α, α' , est identique à la cubique $\mathcal{C}_0$. Nous avons donc là un moyen entièrement géométrique de définir la cubique de Cayley.

III

[22] Avant de donner les relations dues à Cayley et qui expriment analytiquement les résultats obtenus dans le chapitre précédent, nous allons examiner ce que deviennent ces résultats dans le cas où il s'agit de polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre.

Nous avons déjà dit au numéro [5], que les considérations qui nous ont servi ne sont pas modifiées quand on suppose que plusieurs des coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ du théorème de Poncelet sont identiques. Si, par exemple, on considère un triangle ABC circonscrit à trois coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, il n'y aura rien à changer à la figure 2 quand deux de ces coniques ou ces trois coniques seront identiques. Mais il convient d'examiner aussi le cas où Γ_1 et Γ_2 sont confondues et où les deux côtés AB, BC respectivement tangents à Γ_1 et Γ_2 sont aussi confondus. Le troisième côté AC est alors tangent à Γ au point A, C. Γ_3 peut donc être, ou Γ , ou la seconde conique tangente à la tangente en A, C; mais, dans cette seconde hypothèse, ABC serait un triangle tangent comme le montre la relation de Menelaüs. Γ_3 est donc confondu avec Γ et la figure 2, qui prend la forme ci-contre, 2 bis, montre que les triangles $A'B'C'$ qu'on déduit de ABC ont, comme celui-ci, leurs côtés $A'B'$ et $A'C'$ confondus.

Plus généralement, si $ABCD \dots L$ est circonscrit aux coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ et si Γ_1 et Γ_2 étant identiques, AB et CB sont confondus, tous les polygones $A'B'C'D' \dots L'$ circonscrits aux mêmes coniques placées dans le même ordre, que l'on déduit de $ABCD \dots L$, auront leurs côtés $A'B'$ et $C'B'$ confondus. De sorte que, en supprimant les deux côtés confondus, les côtés restant forment des polygones $C'D' \dots L'$

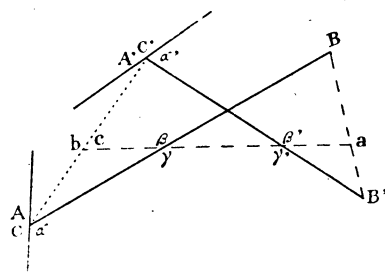


FIG. 2 bis.

circonscrits à $\Gamma_3, \dots$. Inversement, en adjoignant à un tel polygone une tangente à Γ_1 issue de C' , qui jouera le rôle de $B'C'$, on aura un polygone $A'B'C' \dots L'$. De tels polygones $A'B' \dots L'$ ne sont donc pas intéressants puisqu'ils se ramènent de suite à des polygones plus simples; aussi convient-on toujours de ne s'occuper que des polygones dans lesquels ne se trouve aucun couple de côtés tels que AB et BC .

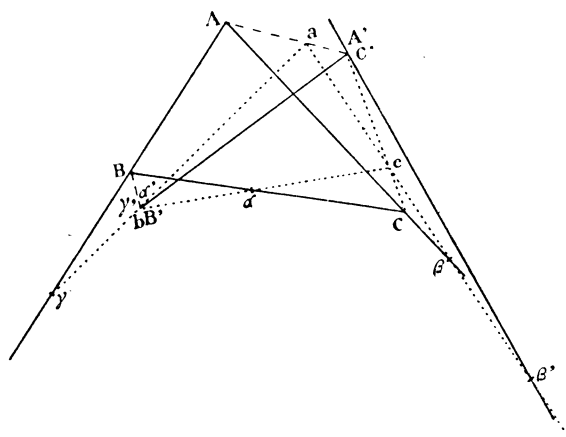


FIG. 2 ter.

Il y a cependant une exception. Partons d'un triangle ABC circonscrit à $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et construisons un triangle analogue dont le côté $A'B'$ admette pour extrémité B' l'un des points de base de notre faisceau ponctuel F . La figure 2 prend alors la forme ci-contre, 2 ter; de sorte que $A'B'C'$ est constitué par deux côtés confondus $A'B'$ et

$C'B'$ tangents à Γ_1 en B' et une tangente commune à Γ et à Γ_3 . Inversement d'ailleurs, la connaissance de ce triangle spécial $A'B'C'$, et d'un côté AB avec son point de contact γ , permet de remonter à ABC .

Il résulte facilement de là que, s'il existe un polygone formé de n côtés différents, inscrit dans Γ et circonscrit à Γ_1 , le polygone analogue ayant pour premier sommet un point A commun à Γ et Γ_1 est constitué, si n est impair, par $\frac{n-1}{2}$ côtés $AB, BC, \dots JK$, puis par la tangente en K à Γ , puis par $KJ, \dots CB, BA$; si n est pair, on a $\frac{n}{2}$ côtés $AB, BC, \dots JK$, puis par $KJ, \dots CB, BA$; mais, d'après ce que nous avons vu, tous les polygones qu'on peut déduire de celui-ci, et par suite en particulier le polygone primitif, seraient aussi constitués par des côtés deux à deux confondus si le point extrême K n'était pas commun à Γ et à Γ_1 . K est donc bien un point commun à Γ et Γ_1 ; le polygone considéré admet deux points de base pour sommets. Il y a aussi, pour m pair, des polygones qui admettent deux tangentes communes à Γ et Γ_1 pour côtés.

Les polygones repliés de deux espèces ainsi obtenus sont les seuls polygones à côtés confondus faisant partie des familles de polygones inscrits à Γ et circonscrits à Γ_1 . Il faut remarquer que, même pour un tel polygone, si A est un sommet non commun à Γ et Γ_1 , les deux côtés qui y aboutissent sont différents. Donc, dans tous les cas, les tangentes d'un même groupe (voir [14]) issues de A sont toutes confondues.

Que l'on ait pris pour représenter les coniques du faisceau Γ, Γ_1 des points de la cubique $\mathcal{C}$ ou de la cubique de Cayley, les n points représentatifs d'un même groupe, qu'il faut considérer pour exprimer qu'il y a un polygone de n côtés inscrit à Γ et circonscrit à Γ_1 , sont donc confondus. Donc : *pour qu'il existe un polygone de $3n - p$ côtés inscrit à Γ et circonscrit à Γ_1 , il faut et il suffit qu'il existe une courbe de degré n , admettant oy pour direction asymptotique d'ordre p , qui ait un contact d'ordre $3n - p - 1$ avec la cubique de Cayley $\mathcal{C}_0$, $y^2 = \Delta(x)$, en l'un des points représentatifs de la conique Γ_1 .*

[23] Lorsqu'il s'agit de polygones d'un petit nombre de côtés, cet énoncé permet d'utiliser des propriétés connues des cubiques. Par exemple, cherchons les coniques Γ_1 faisant partie d'un faisceau et qui soient inscrites dans un triangle inscrit dans la conique Γ donnée du faisceau. L'énoncé précédent montre que Γ_1 a pour points représentatifs l'un des points d'inflexion de $\mathcal{C}_0$ autres que le point à l'infini Z . Or $\mathcal{C}_0$ a huit points d'inflexions, autres que Z , deux à deux en ligne droite avec Z , donc il existe quatre coniques $\Gamma_1, \Gamma_1', \Gamma_1'', \Gamma_1'''$ répondant à la question. Et, comme les points d'inflexion sont trois à trois en ligne droite, à chaque couple Γ_1, Γ_1' , on peut associer une troisième conique, Γ_1'' ou Γ_1''' , telle qu'il existe des triangles circonscrits à ce système de trois coniques et inscrits dans Γ .

D'une façon générale, si Γ_1 et Γ_2 sont deux coniques du faisceau inscrites dans des polygones de p côtés inscrits dans Γ , les deux coniques Γ_3 et Γ_4 qui forment avec Γ_1 et Γ_2 deux systèmes de trois coniques associées par rapport à Γ , — les deux systèmes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$. — sont elles-mêmes inscrites dans des polygones de p côtés inscrits à Γ . En effet, soient A_1 et A_2 deux des points représentatifs de Γ_1 et Γ_2 . Par hypothèse p fois A_1 a pour résiduel le point Z pris un certain nombre q de fois et de même p fois A_2 a pour résiduel q fois Z . Soit B le troisième point de rencontre de la droite A_1A_2 et de la cubique de Cayley C_0 ; B est le point représentatif de Γ_3 ou Γ_4 . Coupons C_0 par p fois la droite A_1A_2B et q fois la droite de l'infini; nous obtenons p fois A_1 , p fois A_2 , p fois B et $3q$ fois Z . Or p fois A_1 a pour résiduel q fois Z , p fois A_2 a pour résiduel q fois Z , en enlevant ces $2(p+q)$ points des $3(p+q)$ points de section obtenus, il reste p fois B et q fois Z . Ainsi B est bien le point représentatif d'une conique inscrite dans des polygones de p côtés inscrits dans Γ .

Cette proposition résulte d'ailleurs plus simplement encore de notre théorème fondamental. Soit $\alpha\beta_1 \dots \lambda_1\alpha$ un polygone de p côtés inscrit dans Γ et circonscrit à Γ_1 et $\alpha\beta_2 \dots \lambda_2\alpha$ un polygone analogue relatif à Γ_2 . Le polygone $\alpha\beta_1 \dots \lambda_1\alpha\beta_2 \dots \lambda_2\alpha$ est un polygone de $2p$ côtés circonscrit à p coniques identiques à Γ_1 et à p coniques identiques à Γ_2 . Modifions l'ordre de ces coniques, nous nous trouvons conduits à considérer des polygones $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon \dots \alpha$ à $2p$ côtés dont les côtés successifs sont alternativement tangents à Γ_1 et à Γ_2 . Les droites $\alpha\gamma, \gamma\epsilon, \dots$ enveloppes l'une des coniques Γ_3 ou Γ_4 de l'énoncé et le polygone $\alpha\gamma\epsilon \dots \alpha$ à p côtés.

Il faut remarquer d'ailleurs que si $p = rs$ il se peut que le polygone $\alpha\gamma\epsilon \dots \alpha$ n'ait que r côtés réellement distincts et qu'il faille parcourir s fois la suite des r côtés distincts pour retrouver $\alpha\gamma\epsilon \dots \alpha$. Ceci se présente toujours, en particulier, si Γ_1 et Γ_2 sont identiques, auquel cas Γ_3 et Γ_4 sont identiques, et que, de plus, p soit pair, $p = 2p'$; puisque cela revient à dire qu'en joignant de deux en deux les sommets d'un polygone à $2p'$ côtés ou à un polygone à p' côtés.

Ces faits se généralisent d'eux-mêmes : k coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_k$ du faisceau, inscrites dans des polygones à p côtés inscrits dans Γ , étant données, on peut toujours leur adjoindre une conique Γ_{k+1} de même nature, de façon à obtenir $k+1$ coniques associées par rapport à Γ , à moins que ces k coniques soient elles-mêmes associées par rapport à Γ .

En particulier, une conique Γ_1 étant donnée, si $\alpha\beta\gamma \dots \alpha$ est un polygone de p côtés inscrit dans Γ et circonscrit à Γ_1 , on déduit de là $E\left(\frac{p-2}{2}\right)$ coniques analogues; celles qui sont enveloppes des diagonales obtenues en joignant les sommets de $\alpha\beta\gamma \dots \alpha$ respectivement de deux en deux, de trois en trois, etc.

[24] Si $p = rs$, la conique enveloppe des diagonales joignant les sommets de r en r est inscrite dans un polygone de s côtés inscrit dans Γ . La recherche des coni-

ques relatives à une valeur donnée de p est donc un problème qui se décompose algébriquement, quand p n'est pas premier. Cela est bien connu de ceux qui ont étudié la division des fonctions elliptiques, nous allons nous borner à indiquer comment se traduit géométriquement cette décomposition.

Soit $\alpha\beta\gamma \dots \lambda\alpha$ un polygone à p côtés inscrit dans Γ et circonscrit à une conique Γ_1 . Soit A l'un des points représentatif de Γ_1 ; le triangle $\alpha\beta\gamma$ est circonscrit à un système de trois coniques associées par rapport à Γ , savoir Γ_1 pris deux fois, et une conique $(\alpha\gamma)$ dont le point représentatif, du même groupe que A , est le second point de rencontre de $\mathcal{C}_0$ et de la tangente à $\mathcal{C}_0$ en A . Ce point A_2 est donc ce que l'on appelle le tangentiel de A .

Le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ définit un système de quatre coniques associées par rapport à Γ , savoir trois fois Γ_1 et une conique $(\alpha\delta)$ dont le point représentatif, du même groupe que A , est le troisième point de rencontre de $\mathcal{C}_0$ et de la droite A'_2A ; A'_2 étant le second point caractéristique de $(\alpha\gamma)$. Du point A_3 ainsi obtenu, on passe de même à un point A_4 aligné avec A'_3 et A ; et ainsi de suite. Le point A_p est en Z .

Si $p = rs$, on peut rechercher d'abord les points P caractéristiques des coniques inscrites dans des polygones de s côtés inscrits dans Γ ; puis les points A pour lesquels A_p est en l'un de ces points P . Par exemple, pour $r = 2$, ayant trouvé un point P , il reste à mener de P les tangentes à $\mathcal{C}_0$; les points de contact de ces tangentes sont les points A . Appliquons cette remarque.

Z définit la seule conique du faisceau que l'on puisse regarder comme inscrite dans un polygone *fermé* de *un* côté inscrit dans Γ ; savoir Γ elle-même.

Les tangentes à $\mathcal{C}_0$ menées de Z , touchent $\mathcal{C}_0$ en ses points de rencontre avec son axe, points qui caractérisent les coniques décomposables du faisceau. Ces coniques sont les seules qui soient inscrites dans un polygone *fermé* de *deux* côtés inscrit dans Γ .

Si des trois points ainsi obtenus on mène des tangentes à $\mathcal{C}_0$ on obtient douze points de contact qui définissent les six coniques inscrites dans des quadrilatères inscrits dans Γ . Et l'on traitera ainsi, de proche en proche, le cas de $p = 2^n$.

Traisons encore le cas de $p = 6 = 2 \times 3$. Nous savons que les points P caractéristiques des coniques relatives aux triangles inscrits dans Γ sont les points d'inflexion de $\mathcal{C}_0$, les coniques relatives aux hexagones sont les points de contact de $\mathcal{C}_0$ avec les tangentes qu'on peut lui mener par les points d'inflexion. Cela est bien d'accord avec ce résultat connu, que les points ainsi obtenus, appelés points sextactiques, sont ceux en lesquels $\mathcal{C}_0$ est coupée en six points confondus par certaines coniques surosculatrices.

Si un point A répond à une valeur de p , tous les points $A_2, A_3, A_4, \dots$ répondent également à cette valeur de p ou à l'un de ses diviseurs. Ces points forment une suite périodique, puisque A_p est en Z . D'après la construction même des A_i successifs, A_{p+1} est identique à A' , A_{p+2} à A'_2 , etc; A_{p-1} est identique à A , A_{p-2} à A_2 , etc.

Parmi cette suite se trouvent tous les tangentiels successifs de A; en effet, le premier tangentiel de A est le point A_2 ; le tangentiel de A'_2 sera donc A_1 ; le tangentiel de A'_1 sera A_3 , etc.

Si $p = 2^n(2q + 1)$, le $n^{\text{ième}}$ tangentiel de A devra être caractéristique d'une conique relative aux polygones à $2q + 1$ côtés.

Soit maintenant p impair; on peut trouver k et m tels que $2^k = mp + 1$; donc A_{2^k} est identique à A_{mp+1} donc à A ou A' suivant la parité de m . Si, de plus, on a $2^l = mp - 1$; A_{2^l} sera aussi identique à A ou A'.

Par exemple, pour $p = 3$; $l = 2$, $m = 1$, A_2 est en A; le premier tangentiel de A est en A.

Pour $p = 5$; $l = 2$, $m = 1$, A_4 est en A; le second tangentiel de A est en A'.

Pour $p = 7$; $l = 3$, $m = 1$, A_8 est en A; le troisième tangentiel de A est en A.

Pour $p = 9$; $k = 3$, $m = 1$, A_8 est en A'; le troisième tangentiel de A est en A'.

Pour $p = 11$; $l = 5$, $m = 3$, A_{32} est en A; le cinquième tangentiel de A est en A.

Tout point A répondant à une valeur finie de p n'a donc qu'un nombre fini de tangentiels différents et, suivant la façon dont se ferme la suite périodique de ses tangentiels successifs, ou la façon dont se termine la suite limitée de ses tangentiels, on peut déterminer à quelle valeur de p répond le point A.

[25] Pour terminer, je vais donner les formules dues à Cayley et qui traduisent certains des résultats précédents. C_0 étant mis sous la forme $y^2 = \Delta(x)$, formule dans laquelle $\Delta(x)$ est le discriminant de la conique $\Gamma + xC = 0$, du faisceau F, et Γ étant la conique circonscrite aux polygones considérés, n valeurs de x définiront un système de n coniques associées si elles sont toutes les abscisses des points d'intersection à distance finie de C_0 et d'une courbe algébrique. En remplaçant dans l'équation de cette courbe y^2 par $\Delta(x)$ autant de fois que cela est possible, on la remplace par une nouvelle courbe d'équation :

$$(1) \quad P(x)y + Q(x) = 0.$$

D'où, pour les abscisses des points d'intersection, l'équation en x :

$$P^2(x)\Delta(x) - Q^2(x) = 0.$$

Elle aura trois racines pour P de degré 0 et Q de degré 1,
 elle en aura quatre pour P de degré 0 et Q de degré 2,
 elle en aura cinq pour P de degré 1 et Q de degré 2,
 elle en aura six pour P de degré 1 et Q de degré 3; etc.

D'où la condition de Cayley :

$$\begin{vmatrix} C_3 & C_4 & C_5 & \dots & C_{p+1} \\ C_4 & C_5 & C_6 & \dots & C_{p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+1} & C_{p+2} & C_{p+3} & \dots & C_{2p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même, pour le cas des polynômes à $2p + 1$ côtés, on a :

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_3 & C_4 & \dots & C_{p+1} \\ C_3 & C_4 & C_5 & \dots & C_{p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+1} & C_{p+2} & C_{p+3} & \dots & C_{2p} \end{vmatrix} = 0.$$
