Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

SÉVERINE RIGOT

Transport optimal de mesure dans le groupe de Heisenberg

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 9-23

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 9–23

TRANSPORT OPTIMAL DE MESURE DANS LE GROUPE DE HEISENBERG

Séverine RIGOT

Résumé

On expose ici une solution au problème du transport optimal de mesure dans le groupe de Heisenberg dans le cas où la fonction de coût est le carré de la distance de Carnot-Carathéodory. On explique également comment le transport optimal peut être obtenu comme limite des transports optimaux relatifs à des approximations riemanniennes naturelles du groupe de Heisenberg. Tous ces résultats s'étendent plus généralement au cas des groupes de type H.

1. Introduction

Le problème du transport optimal de mesure a été formulé dès le XVIII[e] siècle par G. Monge. Il connaît depuis une quinzaine d'années un important regain d'intérêt, en raison notamment de ses nombreuses applications qui vont par exemple de l'économie, à la mécanique des fluides, aux équations aux dérivées partielles en passant par les inégalités de Sobolev et des problèmes isopérimétriques (voir par exemple [7], [17], [19]). En termes mathématiques modernes, le problème peut s'énoncer de la manière suivante. Étant données deux mesures boréliennes de probabilité μ et ν sur un espace topologique X, on cherche à minimiser

$$\psi \longmapsto \int_X c(x,\psi(x))\, d\mu(x)$$

parmi toutes les applications de transport ψ entre μ et ν, *i.e.*, les applications boréliennes $\psi : X \to X$ telles que $\psi_\# \mu = \nu$ (la mesure image de μ par ψ est ν, *i.e.*, $\nu(B) = \mu(\psi^{-1}(B))$ pour tout borélien B). La fonction $c(x,y) : X \times X \to \mathbb{R}^+$ représente le coût induit par le transport d'une unité de masse de l'emplacement x à l'emplacement y. Le cas qui nous intéresse ici, et auquel nous nous restreindrons dorénavant, est celui où (X,d) est un espace métrique et $c(x,y) = d(x,y)^2/2$.

2000 Mathematics Subject Classification: 49Q20, 53C17, 43A80.

Dans ce cadre, le résultat le plus général connu jusqu'à présent est dû à R. McCann ([14]). Il assure que si X est une variété riemannienne connexe compacte de classe C^3 et sans bord, d la distance riemannienne induite et si la mesure initiale μ est absolument continue par rapport à la mesure de volume sur X, alors il existe un unique transport optimal. Ce transport est de plus donné par

$$\psi(x) = \exp_x(-\nabla\varphi(x)) \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in X$$

où $\exp_x$ désigne l'application exponentielle riemannienne usuelle et φ une application c-concave adéquate (aussi appelée potentiel de Kantorovich), *i.e.*, une application de la forme

$$\varphi(x) = \inf_{y\in Y} c(x,y) + l(y)$$

avec $Y \subset X$ non vide et $l : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $l \not\equiv +\infty$. On présente ici une extension de ce résultat au cadre sous-riemannien du groupe de Heisenberg muni de sa distance de Carnot-Carathéodory ([3]). Le groupe de Heisenberg est l'exemple le plus simple de groupe de Carnot non commutatif. Ces groupes apparaissent notamment de manière naturelle comme limite de variétés riemanniennes et l'on verra que l'on peut d'ailleurs obtenir le transport optimal comme limite des transports optimaux relatifs aux approximations riemanniennes.

De manière générale, une des principales difficultés quand on cherche à résoudre le problème du transport optimal de mesure tel que formulé plus haut vient du fait que la contrainte $\psi_{\#}\mu = \nu$ est non linéaire en ψ et que l'ensemble des applications de transport entre μ et ν n'est jamais fermé relativement à n'importe quelle topologie raisonnable. Pour contourner ce problème, L. Kantorovich a introduit dans les années 40 la plus large classe $\Pi(\mu,\nu)$ des plans de transport, *i.e.*, des mesures boréliennes de probabilité γ sur l'espace produit $X\times X$ telles que $\pi_{0\#}\gamma = \mu$ et $\pi_{1\#}\gamma = \nu$ ($\pi_0, \pi_1 : X\times X \to X$ désignant les projections canoniques sur le premier et le second facteur respectivement). On cherche alors à minimiser

$$\gamma \longmapsto \int_{X\times X} c(x,y)\, d\gamma(x,y)$$

parmi tous les plans de transport $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$. On peut remarquer que toute application de transport ψ entre μ et ν induit un plan $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ via l'application $(\mathrm{Id}\times\psi)(x) = (x,\psi(x))$, *i.e.*, $\gamma = (\mathrm{Id}\times\psi)_{\#}\mu$, et que ψ et γ ont le même coût. D'autre part, sous des hypothèses très générales, l'existence de plans optimaux découle facilement de résultats classiques d'analyse fonctionnelle.

En tenant compte de cette nouvelle formulation, obtenir l'existence et l'unicité d'une application de transport optimale dans le problème originel de G. Monge revient essentiellement à montrer que tout plan optimal est induit par une application de transport. Il se trouve que l'approche de L. Kantorovich conduit à une importante formulation duale du problème (mais dont on ne parlera pas ici) et donne également des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité qui peuvent souvent permettre de montrer qu'un plan optimal est induit par une application de transport (voir par exemple [2], [5], [6], [8], [9], [14] mais la liste est loin d'être exhaustive). Ces conditions font intervenir l'existence de potentiels c-concaves et cette stratégie conduit alors naturellement à l'étude des applications c-concaves et par suite aux propriétés de différentiabilité de la fonction distance.

Dans le cadre sous-riemannien qui nous intéresse, il n'y a pas unicité des géodésiques minimales, même localement, ce qui peut rendre l'étude de la différentiabilité de la fonction distance assez délicate. Il se trouve que dans le groupe de Heisenberg muni de sa distance de Carnot-Carathéodory on peut caractériser explicitement les équations des géodésiques minimales. Dans l'approche présentée ici ces équations explicites sont un des outils centraux qui permettent de déterminer exactement là où la fonction distance est différentiable (en un sens adéquat). Là où elle n'est pas différentiable, on peut de plus quantifier de manière précise la nature de la singularité. Ceci acquis on dispose alors de tous les ingrédients nécessaires pour revenir à l'étude des applications c-concaves. Signalons que tout ceci s'étend aux groupes de type H qui généralisent de manière naturelle le groupe de Heisenberg (voir [18]).

On expose dans la suite les grandes lignes de la stratégie que l'on vient d'évoquer et l'on renvoie le lecteur à [3] et [18] pour tous les détails. La définition du groupe de Heisenberg, de sa distance de Carnot-Carathéodory et les notions de différentiabilité qui seront utilisées ici sont rappelées dans la section 2. La caractérisation des géodésiques minimales et la manière dont elle peut être utilisée pour l'étude des propriétés de la fonction distance et des applications c-concaves sont explicitées dans la section 3. Enfin la section 4 est plus spécifiquement consacrée au transport optimal de mesure. On y explique comment l'existence et l'unicité du transport optimal découle, via des arguments désormais standards de la théorie générale du transport optimal de mesure, des résultats de la section 3. On y évoquera aussi le fait que le transport optimal peut être obtenu comme limite des transports optimaux relatifs à des approximations riemanniennes naturelles du groupe de Heisenberg.

2. Le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ est un groupe de Lie non commutatif, connexe, simplement connexe et stratifié. Il s'identifie à $\mathbb{R}^{2n+1} \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. On notera ses éléments $x = (\xi,\eta,t) = [\zeta,t]$ où $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ and $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$. La loi de groupe est donnée par

$$[\zeta,t]\cdot[\zeta',t'] = [\zeta+\zeta',t+t'+2\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Im}\zeta_j\overline{\zeta'}_j].$$

Le centre du groupe est $\mathbb{L} = \{[0,t] \in \mathbb{H}^n;\ t \in \mathbb{R}\}$.

On peut définir sur $\mathbb{H}^n$ une famille naturelle de dilatations δ_s, $s > 0$, par $\delta_s([\zeta,t]) = [s\zeta,s^2 t]$. Ces dilatations préservent la structure de groupe. Pour $s < 0$, on pose $\delta_s = -\delta_{|s|}$.

La mesure de Lebesgue $\mathscr{L}^{2n+1}$ sur $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$ est une mesure de Haar biinvariante. Dans toute la suite, quand nous dirons d'une propriété qu'elle est vraie presque partout dans $\mathbb{H}^n$, cela signifiera, sauf précision supplémentaire ou mention explicite du contraire, $\mathscr{L}^{2n+1}$-presque partout.

Les champs de vecteurs invariants à gauche

$$X_j = \partial_{\xi_j} + 2\eta_j \partial_t, \quad Y_j = \partial_{\eta_j} - 2\xi_j \partial_t,$$

aussi appelés champs de vecteurs horizontaux, engendrent l'algèbre de Lie, les seuls commutateurs non triviaux étant $[X_j, Y_j] = -4Z$ où

$$Z = \partial_t.$$

On dit qu'une courbe $\gamma : [0,T] \to \mathbb{H}^n$ est sous-unitaire s'il existe des fonctions mesurables $h_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{j=1}^{n} h_j(s) X_j(\gamma(s)) + h_{n+j}(s) Y_j(\gamma(s))$$

et $\sum_{j=1}^{2n} h_j(s)^2 \leqslant 1$ pour presque tout $s \in [0,T]$. Les champs de vecteurs X_j, Y_j engendrant l'algèbre de Lie, le théorème de Chow assure que l'on peut toujours joindre deux points quelconques par une courbe sous-unitaire. On définit alors la distance de Carnot-Carathéodory entre x et y par

$$d(x,y) = \inf\{T > 0 \,;\, \text{il existe une courbe sous-unitaire } \gamma : [0,T] \to \mathbb{H}^n \text{ telle que } \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\}.$$

Deux propriétés cruciales de cette distance sont l'invariance à gauche, *i.e.*, $d(x\cdot y, x\cdot z) = d(y,z)$ pour tous x, y, $z \in \mathbb{H}^n$, et l'homogénéité, *i.e.*, $d(\delta_s(y), \delta_s(z)) = s\, d(y,z)$ pour tous y, $z \in \mathbb{H}^n$ et $s > 0$. Notons aussi que d induit la topologie euclidienne usuelle sur $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$. On renvoie par exemple à [4], [12] pour de plus amples détails sur les espaces de Carnot-Carathéodory.

Une notion intrinsèque de différentiabilité a été introduite par P. Pansu qui a notamment obtenu dans ce contexte un théorème de type Rademacher. On dit qu'un homomorphisme de groupe $L : (\mathbb{H}^n, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ est homogène si $L(\delta_s(x)) = s\, L(x)$ pour tous $x \in \mathbb{H}^n$ et $s > 0$. Dans tout le reste de cette section Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{H}^n$.

DÉFINITION 2.1. — *On dit qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est Pansu différentiable en $x \in \Omega$ s'il existe un homomorphisme de groupe homogène $L : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - L(x^{-1} \cdot y)}{d(y,x)} = 0.$$

L'application L est alors unique et on la notera $D_{\mathbb{H}} f(x)$.

Cette notion de différentiabilité est étroitement liée aux dérivations le long des champs de vecteurs horizontaux X_j et Y_j. On note $(e_1,\dots,e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$

DÉFINITION 2.2. — *On dit qu'une application $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est différentiable en $x\in\Omega$ le long de X_j (resp. Y_j) si l'application $s\mapsto f(x\cdot\delta_s(e_j))$ (resp. $s\mapsto f(x\cdot\delta_s(e_{n+j}))$) est dérivable en $s=0$ et on notera $X_j f(x)$ (resp. $Y_j f(x)$) la dérivée correspondante.*

On peut remarquer que cette notion de différenciation le long des champs de vecteurs X_j et Y_j coïncide avec la notion usuelle si f est suffisamment régulière. Si f est différentiable en $x\in\Omega$ le long de X_j et Y_j pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, on notera

$$\nabla_{\mathbb{H}} f(x)=(X_1 f(x),\dots,X_n f(x),Y_1 f(x),\dots,Y_n f(x))$$

et

$$|\nabla_{\mathbb{H}} f(x)|=|(X_j f(x)+iY_j f(x))|$$

où $|\zeta|=\sqrt{\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2}$ pour $\zeta\in\mathbb{C}^n$.

Un des liens entre la différentiabilité au sens de Pansu et la différenciation le long de X_j et Y_j est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. — *Si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est Pansu différentiable en $x\in\Omega$ alors f est différentiable en x le long de X_j et Y_j pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$ et*

$$D_{\mathbb{H}} f(x)(\xi,\eta,t)=\sum_{j=1}^n \xi_j X_j f(x)+\eta_j Y_j f(x).$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, un point crucial de la théorie est un théorème de type Rademacher dû à P. Pansu ([16]). Rappelons que l'on dit qu'une application $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est C-lipschitzienne si $|f(x)-f(y)|\leqslant C\,d(x,y)$ pour tous $x,y\in\Omega$.

THÉORÈME 2.4. — *Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application C-lipschitzienne. Alors f est Pansu différentiable presque partout sur Ω et $|\nabla_{\mathbb{H}} f(x)|\leqslant C$ pour presque tout $x\in\Omega$.*

Il sera aussi utile pour nous de considérer les dérivées à droite et à gauche le long des champs de vecteurs X_j et Y_j.

DÉFINITION 2.5. — *Soient $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et $x\in\Omega$. On notera $X_j^+ f(x)$ (resp. $X_j^- f(x)$) la dérivée à droite (resp. à gauche) de l'application $s\mapsto f(x\cdot\delta_s(e_j))$ en $s=0$, quand ces dérivées existent. On définit de manière similaire $Y_j^+ f(x)$ et $Y_j^- f(x)$.*

D'autre part nous aurons besoin de considérer également la dérivation le long du champ de vecteurs Z, qui correspond à la dérivation usuelle par rapport à la dernière variable et qui, étant donnée la forme de la loi de groupe, peut être définie comme suit.

DÉFINITION 2.6. — *On dit qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable le long de Z si l'application $s \mapsto f(x \cdot [0,s])$ est dérivable en $s = 0$ et l'on notera $Zf(x)$ la dérivée correspondante.*

3. Différentiabilité de la distance - Applications c-concaves

Il se trouve que $(\mathbb{H}^n,d)$ est un espace de longueur complet et localemement compact au sens de [11, Définition 1.7]. Il s'ensuit que deux points quelconques peuvent toujours être joints par une géodésique minimale ([11, Théorème 1.10]). Le terme géodésique minimale désignera toujours ici une géodésique minimale de vitesse constante et égale à 1, *i.e.*, une courbe $\gamma : [0,r] \to \mathbb{H}^n$ telle que $d(\gamma(t),\gamma(t')) = |t - t'|$ pour tous $t, t' \in [0,r]$. Signalons que l'on peut montrer que toute géodésique minimale est une courbe sous-unitaire.

On peut facilement trouver dans la littérature les équations explicites des géodésiques minimales de $(\mathbb{H}^n,d)$, voir par exemple [10], [4], [15], mais souvent sans preuve complète. On a détaillé un argument complet permettant la caractérisation de ces géodésiques minimales dans [3] (voir aussi [18] où l'un des arguments a été largement simplifié).

On définit $\mathbb{S} = \{a + ib \in \mathbb{C}^n;\ |a + ib| = 1\}$ et $\mathbb{P} = \mathbb{S} \times [-2\pi,2\pi] \times (0, +\infty)$. On dit qu'une courbe γ est une courbe à paramètre $(a + ib,v,r) \in \mathbb{P}$ si $\gamma : [0,r] \to \mathbb{H}^n$ est de la forme $\gamma(s) = (\xi(s),\eta(s),t(s))$ avec, si $v \neq 0$,

$$\xi_j(s) = \frac{b_j\,(1 - \cos\frac{vs}{r}) + a_j\,\sin\frac{vs}{r}}{v}\, r, \quad \eta_j(s) = \frac{-a_j\,(1 - \cos\frac{vs}{r}) + b_j\,\sin\frac{vs}{r}}{v}\, r,$$

$$t(s) = 2\,\frac{\frac{vs}{r} - \sin\frac{vs}{r}}{v^2}\, r^2,$$

et, si $v = 0$,

$$\gamma(s) = (a_1 s, \ldots, a_n s, b_1 s, \ldots, b_n s, 0).$$

On définit Γ comme l'ensemble des courbes à paramètre $(a + ib,v,r) \in \mathbb{P}$.

THÉORÈME 3.1. — *Les géodésiques minimales partant de 0 sont exactement les courbes de Γ.*

On définit $\Phi : \mathbb{P} \to \mathbb{H}^n$ par $\Phi(a + ib,v,r) = \gamma(r)$ où $\gamma \in \Gamma$ désigne la courbe à paramètre $(a + ib,v,r) \in \mathbb{P}$. Il découle immédiatement de la minimalité des courbes de Γ que

$$d_0(\Phi(a + ib,v,r)) = r \quad \text{pour tout } (a + ib,v,r) \in \mathbb{P} \tag{3.2}$$

où d_0 désigne la distance à l'origine, *i.e.*, $d_0(x) = d(0,x)$ pour tout $x \in \mathbb{H}^n$.

On a en outre la description plus précise suivante :

i) si $x \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$, il existe une unique courbe $\gamma \in \Gamma$ à paramètre $(a + ib,v,r) \in \mathbb{P}$ joignant 0 à x et donc une unique géodésique minimale entre 0 et x, de plus, on a $|v| < 2\pi$,

ii) si $x = [0,t] \in \mathbb{L}^*$ avec $t > 0$, resp. $t < 0$, il existe une infinité de géodésiques minimales joignant 0 à x qui forment une famille de courbes à un paramètre composée des courbes de Γ à paramètre $(a + ib, 2\pi, \sqrt{\pi t})$, resp. $(a + ib, -2\pi, \sqrt{\pi |t|})$, où $a + ib \in \mathbb{S}$.

D'après cette description, il y a donc deux situations radicalement différentes selon que l'on se trouve hors du centre $\mathbb{L}$ ou non. Sur $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$, on va faire jouer au paramètre $(a + ib,v,r) \in \mathbb{D} = \mathbb{S} \times (-2\pi,2\pi) \times (0, +\infty)$ correspondant à la géodésique minimale joignant 0 à $x \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$ le rôle de coordonnées sphériques adaptées à la distance de Carnot-Carathéodory. Cette terminologie est justifiée par (3.2). D'autre part la proposition suivante justifie en outre le fait que l'on puisse considérer ces paramètres comme des coordonnées globales sur $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$ ([3], [15]).

PROPOSITION 3.3. — *L'application Φ est C^1 difféomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$.*

Concrètement ces coordonnées sphériques vont servir d'outils non seulement pour montrer que la fonction d_0 est régulière sur $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$ mais surtout pour obtenir des expressions explicites de ses dérivées selon les champs de vecteurs X_j, Y_j et Z. Ces expressions vont jouer un rôle central dans l'étude de la c-surdifférentielle des applications c-concaves.

PROPOSITION 3.4. — *L'application d_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$. De plus, si $(a + ib,v,r) \in \mathbb{D}$ désignent les coordonnées sphériques de $x \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$, i.e., $x = \Phi(a + ib,v,r)$, on a*

$$X_j d_0(x) = b_j \sin v + a_j \cos v, \quad Y_j d_0(x) = b_j \cos v - a_j \sin v,$$
$$Z d_0(x) = \frac{v}{4r}.$$

Ici le caractère C^1 est sous-entendu au sens usuel via l'identification $\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L} \simeq \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. Les expressions de $X_j d_0$ et $Y_j d_0$ étaient déjà plus ou moins implicitement présentes et connues dans la littérature. C'est surtout l'expression de $Z d_0$ qui constitue le point le plus important, et aussi le plus délicat à obtenir, de cette proposition. Bien que ce soit là un des points essentiels en vue de l'application que nous avons en tête, nous ne donneront pas ici la preuve de ce résultat qui est assez technique. On renvoie à [3, Lemme 3.11], ou [18] pour le cas plus général des groupes de type H, pour tous les détails.

La situation le long de $\mathbb{L}^*$ est radicalement différente, la fonction distance à l'origine y étant singulière. Pour ce qui va nous intéresser dans l'étude des applications c-concaves, il sera de plus particulièrement utile de savoir quantifier précisément la nature de la singularité.

PROPOSITION 3.5. — *Soient $x \in \mathbb{L}^*$ et $j \in \{1,\dots,n\}$. On a*

$$X_j^+ d_0(x) = -1, \quad Y_j^+ d_0(x) = -1,$$
$$X_j^- d_0(x) = 1, \quad Y_j^- d_0(x) = 1$$

Techniquement on démontre cette proposition via une analyse fine des propriétés des coordonnées sphériques introduites plus haut. Le point de départ du raisonnement est le suivant. Si $x \in \mathbb{L}^*$ et $j \in \{1,\dots,n\}$ sont fixés, on pose $f(s) = d_0(x\cdot \delta_s(e_j))$. Comme $x\cdot \delta_s(e_j) \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$ pour $s \neq 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après la proposition 3.4 et l'on sait de plus exprimer $f'(s) = X_j d_0(x\cdot \delta_s(e_j))$ en fonction des coordonnées sphériques de $x\cdot \delta_s(e_j)$. D'autre part, en termes de la fonction f, la conclusion qui nous intéresse se résume à montrer que

$$\lim_{s\to 0^+} f'(s) = -1, \quad \lim_{s\to 0^-} f'(s) = 1.$$

Ceci s'obtient alors en étudiant la limite des coordonnées sphériques de $x\cdot \delta_s(e_j)$ quand $s \to 0^+$ ou $s \to 0^-$. On renvoie à [3, Lemme 3.16] pour tous les détails.

Signalons enfin qu'il découle de *ii*) que si $x = [0,t] \in \mathbb{L}^*$, alors $d_0([0,t]) = \sqrt{\pi|t|}$ et donc

$$Zd_0([0,t]) = \frac{sg(t)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|t|}}.$$

On dispose donc d'un panorama explicite complet des propriétés de différentiabilité de d_0 sur $\mathbb{H}^n$ que l'on va maintenant utiliser pour étudier les applications c-concaves. Rappelons que dans tout cet article on a posé $c(x,y) = d(x,y)^2/2$.

DÉFINITION 3.6. — *On dit qu'une application $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ est c-concave si φ est de la forme*

$$\varphi(x) = \inf_{y\in Y} c(x,y) + l(y) \ \ \textit{pour tout} \ \ x \in \mathbb{H}^n$$

pour un certain sous-ensemble $Y \subset \mathbb{H}^n$ et pour une certaine application $l : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $l \not\equiv +\infty$.

DÉFINITION 3.7. — *Soit $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$. La c-surdifférentielle $\partial_c\varphi(x)$ de φ en $x \in \mathbb{H}^n$ est définie par*

$$\partial_c\varphi(x) = \{y \in \mathbb{H}^n;\ c(x,y) - \varphi(x) \leqslant c(z,y) - \varphi(z) \ \textit{pour tout}\ z \in \mathbb{H}^n\}.$$

La c-surdifférentielle de φ est le graphe de l'application multi-valuée $x \mapsto \partial_c\varphi(x)$, i.e.,

$$\partial_c\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n;\ y \in \partial_c\varphi(x)\}.$$

Le résultat qui nous intéresse ici en vue de l'application au problème du transport optimal de mesure assure que, modulo un ensemble de mesure nulle, la c-surdifférentielle d'une application localement lipschitzienne et c-concave est contenue dans un graphe.

THÉORÈME 3.8. — *Soit $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ une application localement lipschitzienne et c-concave. Il existe un graphe mesurable G tel que $\mathscr{L}^{2n+1}(\pi_0(\partial_c\varphi \setminus G)) = 0$.*

Rappelons que $\pi_0 : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ désigne la projection canonique sur le premier facteur, *i.e.*, $\pi_0(x,y) = x$. Par graphe mesurable, on sous-entend un ensemble G de la forme

$$G = \{(x,\psi(x)) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n;\ x \in S\}$$

pour un certain ensemble mesurable $S \subset \mathbb{H}^n$ et une application mesurable $\psi : S \to \mathbb{H}^n$.

On renvoie une fois de plus à [3, Théorème 4.4] pour une démonstration complète de ce résultat dont nous n'allons donner ici que les principaux arguments. Tout d'abord, le résultat cherché revient essentiellement à montrer que $\partial_c\varphi(x)$ est un singleton pour presque tout $x \in \pi_0(\partial_c\varphi)$. Si φ est localement lipschitzienne alors $X_j\varphi$ et $Y_j\varphi$ existent presque partout d'après le théorème 2.4. D'autre part, on peut montrer grâce à l'expression de Zd_0 obtenue plus haut, que si φ est c-concave alors φ est différentiable presque partout le long de Z (voir [3, Lemme 4.6]).

Proposition 3.9. — *Soit $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ une application c-concave. Alors $Z\varphi(x)$ existe et $|Z\varphi(x)| \leqslant \pi/2$ pour presque tout $x \in \mathbb{H}^n$.*

On considère donc $x \in \pi_0(\partial_c\varphi)$ tel que $X_j\varphi(x)$, $Y_j\varphi(x)$ existent pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ et tel que $Z\varphi(x)$ existe. On commence par exclure le cas où $\partial_c\varphi(x)$ rencontre $x\cdot \mathbb{L}^*$, *i.e.*, on montre que

$$\partial_c\varphi(x) \cap x\cdot \mathbb{L}^* = \varnothing.$$

C'est ici que la nature précise de la singularité de la fonction distance à l'origine d_0 dans les directions horizontales sur $\mathbb{L}^*$ va jouer un rôle. On raisonne par l'absurde et on suppose que l'on peut trouver $y \in \partial_c\varphi(x) \cap x \cdot \mathbb{L}^*$. Par définition de la c-surdifférentielle, on a

$$\varphi(x\cdot \delta_s(e_j)) - \varphi(x) \leqslant c(y,x\cdot \delta_s(e_j)) - c(y,x) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Pour $s > 0$, on divise cette inégalité par s et on passe à la limite quand $s \downarrow 0^+$ pour obtenir en utilisant la proposition 3.5 que $X_j\varphi(x) \leqslant d_0(y^{-1}\cdot x)\, X_j^+ d_0(y^{-1}\cdot x) = -d_0(y^{-1}\cdot x) < 0$. Quand on divise maintenant cette inégalité par $s < 0$ puis que l'on passe à la limite quand $s \uparrow 0^-$, on obtient au contraire $X_j\varphi(x) \geqslant d_0(y^{-1}\cdot x)\, X_j^- d_0(y^{-1}\cdot x) = d_0(y^{-1}\cdot x) > 0$ ce qui donne la contradiction souhaitée.

On suppose maintenant que $\partial_c\varphi(x) \setminus \{x\} \neq \varnothing$ et on considère $y \in \partial_c\varphi(x) \setminus \{x\}$. On vient de montrer que $x^{-1}\cdot y \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$ et on note alors $(a+ib,v,r) \in \mathbb{D}$ ses coordonnées sphériques. On montre que $(a+ib,v,r)$ est donné par

$$a_j = -\frac{X_j\varphi(x)}{|\nabla_{\mathbb{H}}\varphi(x)|}, \quad b_j = -\frac{Y_j\varphi(x)}{|\nabla_{\mathbb{H}}\varphi(x)|}, \quad v = -4Z\varphi(x), \quad r = |\nabla_{\mathbb{H}}\varphi(x)|.$$

ce qui déterminera alors bien y de manière unique. On note $c_y(\cdot) = c(\cdot,y)$. En utilisant l'invariance à gauche de la distance ainsi que celle des champs de vecteurs X_j, Y_j et Z, on déduit de la proposition 3.4 que $X_jc_y(x)$, $Y_jc_y(x)$ et $Zc_y(x)$ existent avec

$$\begin{aligned}
X_jc_y(x) &= d_0(y^{-1}\cdot x)\, X_jd_0(y^{-1}\cdot x) = r'\,(b'_j \sin v' + a'_j \cos v'),\\
Y_jc_y(x) &= d_0(y^{-1}\cdot x)\, Y_jd_0(y^{-1}\cdot x) = r'\,(b'_j \cos v' - a'_j \sin v'),\\
Zc_y(x) &= d_0(y^{-1}\cdot x)\, Zd_0(y^{-1}\cdot x) = v'/4,
\end{aligned}$$

où $(a' + ib', v', r') \in \mathbb{D}$ désignent les coordonnées sphériques de $y^{-1} \cdot x$. D'autre part, comme l'on s'est placé en un point où $X_j\varphi(x)$, $Y_j\varphi(x)$ et $Z\varphi(x)$ existent aussi, il découle de la minimalité de $z \mapsto c_y(z) - \varphi(z)$ en $z = x$ que $X_j\varphi(x) = X_jc_y(x)$, $Y_j\varphi(x) = Y_jc_y(x)$ et $Z\varphi(x) = Zc_y(x)$, *i.e.*,

$$\begin{aligned} r'(b'_j \sin v' + a'_j \cos v') &= X_j\varphi(x), \\ r'(b'_j \cos v' - a'_j \sin v') &= Y_j\varphi(x), \\ v' &= 4\, Z\varphi(x), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, après calculs, la forme annoncée des coordonnées sphériques de $x^{-1} \cdot y$.

Pour conclure il reste à exclure le cas où $x \in \partial_c\varphi(x)$ et $\partial_c\varphi(x) \setminus x \cdot \mathbb{L} \neq \emptyset$. On remarque que l'on a

$$X_jc_x(x) = \lim_{s\to 0} d_0(\delta_s(e_j))^2/2s = \lim_{s\to 0} s/2 = 0$$

par homogénéité. De même, $Y_jc_x(x) = 0$. Donc si $x \in \partial_c\varphi(x)$, on a

$$\nabla_{\mathbb{H}}\, \varphi(x) = \nabla_{\mathbb{H}}\, c_x(x) = 0.$$

D'autre part, on vient de montrer que si $\partial_c\varphi(x) \setminus x \cdot \mathbb{L} \neq \emptyset$ et si $y \in \partial_c\varphi(x) \setminus x \cdot \mathbb{L}$, alors $|\nabla_{\mathbb{H}}\, \varphi(x)| = d(x,y) > 0$ ce qui permet de conclure.

4. Transport optimal de mesure

Cette partie est plus spécifiquement consacrée au transport optimal de mesure. Rappelons qu'étant données deux mesures boréliennes de probabilité sur $\mathbb{H}^n$, on cherche à minimiser

$$\psi \longmapsto \int_{\mathbb{H}^n} c(x,\psi(x))\, d\mu(x)$$

parmi toutes les applications de transport ψ entre μ et ν, *i.e.*, les applications boréliennes ψ telles que $\psi_\# \mu = \nu$, avec $c(x,y) = d(x,y)^2/2$.

Pour $w = (A + iB, v) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times [-\pi/2, \pi/2]$ où A, $B \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\exp_{\mathbb{H}} w = \Phi(\frac{A + iB}{|A + iB|}, 4\, v, |A + iB|).$$

Si $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{H}^n$ est tel que $X_j\varphi(x)$, $Y_j\varphi(x)$ et $Z\varphi(x)$ existent, on notera $\nabla^{IT}\varphi(x)$ le gradient intrinsèque total de φ en x qui prend en compte non seulement les dérivées selon les champs de vecteurs horizontaux X_j et Y_j mais aussi celle selon le champ de vecteurs Z,

$$\begin{aligned} \nabla^{IT}\varphi(x) &= (X_1\varphi(x), \dots, X_n\varphi(x), Y_1\varphi(x), \dots, Y_n\varphi(x), Z\varphi(x)) \\ &\simeq ((X_j\varphi(x) + iY_j\varphi(x)), Z\varphi(x)). \end{aligned}$$

Formellement ces notations vont permettre de mettre en évidence une forte analogie entre la représentation du transport optimal que l'on obtient dans le cas sous-riemannien qui nous intéresse ici et les résultats de R. McCann concernant le cas riemannien rappelés dans l'introduction. On donnera en outre plus loin une justification plus significative de la notation $\exp_{\mathbb{H}}$ en lien avec des approximations riemanniennes naturelles de $(\mathbb{H}^n, d)$.

THÉORÈME 4.1. — *Soient μ et ν deux mesures boréliennes de probabilité sur $\mathbb{H}^n$. On suppose que μ est absolument continue par rapport à $\mathscr{L}^{2n+1}$ et que*

$$\int_{\mathbb{H}^n} d_0(x)^2 \, d\mu(x) + \int_{\mathbb{H}^n} d_0(y)^2 \, d\nu(y) < +\infty.$$

Alors il existe un unique plan optimal $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ entre μ et ν et ce plan est induit par une application de transport ψ, i.e., $\gamma = (\mathrm{Id} \times \psi)_{\#}\mu$. Si $\operatorname{spt}\nu$ est compact, ψ est donnée par

$$\psi(x) = x \cdot \exp_{\mathbb{H}}(-\nabla^{IT}\varphi(x)) \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in \mathbb{H}^n$$

pour une certaine application φ localement lipschitzienne et c-concave.

Réciproquement, si ψ est représentable comme ci-dessus pour une certaine application φ telle que

$$X\varphi(x),\ Y\varphi(x),\ Z\varphi(x) \text{ existent}$$
$$\text{et } \varphi(x) = \min_{y \in \mathbb{H}^n} c(x,y) - \varphi^c(y) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in \mathbb{H}^n,$$

et si

$$\int_{\mathbb{H}^n} d_0(x)^2 + d_0(\psi(x))^2 \, d\mu(x) < +\infty,$$

alors ψ est le transport optimal entre μ et $\nu = \psi_{\#}\mu$.

Ici $\varphi^c(y) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} c(x,y) - \varphi(x)$ désigne la c-transformée de φ.

Signalons que la représentation du transport optimal via le gradient intrinsèque total d'un potentiel de Kantorovich est encore valide si $\operatorname{spt}\nu$ n'est pas compact pourvu que l'on remplace les notions de différentiabilité usuelles par celle de différentielles approximantes (on dit qu'une application φ admet une différentielle approximante en x s'il existe une application $\tilde{\varphi}$ différentiable en x telle que x soit un point de densité 0 de $\{\tilde{\varphi} \neq \varphi\}$ et la différentielle approximante de φ en x est par définition la différentielle de $\tilde{\varphi}$ en x).

Nous allons expliquer ici les grandes lignes de la démonstration de l'existence et de l'unicité de l'application de transport optimale. On renvoie à [3, Théorème 5.1] pour tous les détails ainsi que pour la seconde partie du théorème concernant la caractérisation de l'optimalité.

On part d'un plan optimal $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ du problème de Kantorovich énoncé dans l'introduction et l'on montre tout d'abord que γ est induit par une application de transport, automatiquement optimale, entre μ et ν. Ceci revient essentiellement à montrer que la mesure γ est concentrée sur un graphe (voir par exemple [1]). Il découle de la théorie générale du transport optimal de mesure qu'il existe un potentiel de Kantorovich, *i.e.*, une application c-concave φ telle que $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ est optimal si et seulement si

$$c(x,y) = \varphi(x) + \varphi^c(y) \quad \gamma\text{-presque partout.}$$

Il s'ensuit que si γ est optimal, alors γ est concentré sur la c-surdifférentielle de φ.

En toute généralité, le potentiel φ n'est pas nécessairement automatiquement localement lipschitzien et l'on ne peut pas appliquer directement le théorème 3.8. Pour contourner cette difficulté, on introduit, pour $R > 0$,

$$\varphi_R(x) = \inf_{y \in B_R(0)} c(x,y) - \varphi^c(y)$$

où $B_R(0)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R. L'application φ_R est c-concave, localement lipschitzienne (cela découle essentiellement du fait que l'infimum est pris sur l'ensemble borné $B_R(0)$, voir par exemple [3, Lemme 4.5]) et $\varphi_R \geqslant \varphi$. D'après le théorème 3.8, pour $\mathscr{L}^{2n+1}$-presque tout, et donc μ-presque tout, $x \in \pi_0(\partial_c \varphi_R)$, la c-surdifférentielle $\partial_c \varphi_R(x)$ est un singleton. On en déduit que $\partial_c \varphi(x)$ est aussi un singleton. En effet, sinon on pourrait trouver y, $y' \in \partial_c \varphi(x)$, $y \neq y'$. En considérant $R > \max(d_0(y), d_0(y'))$, on peut alors facilement montrer que $\{y,y'\} \subset \partial_c \varphi_R(x)$ ce qui contredit le fait que $\partial_c \varphi_R(x)$ est un singleton. Il s'ensuit que $\partial_c \varphi$ est, modulo un ensemble de mesure nulle, contenu dans un graphe et donc que γ est concentré à son tour sur un graphe comme annoncé.

L'unicité provient de la linéarité du problème dans la formulation de Kantorovich et de la représentation de tout plan optimal comme mesure sur le produit $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ induite par une application de transport. En effet, si γ et γ' sont deux plans optimaux, alors, par linéarité, $\gamma'' = (\gamma + \gamma')/2$ est encore optimal. Les plans γ, γ' et γ'' sont donc tous trois induits par une application de transport, respectivement ψ, ψ' et ψ'', *i.e.*, $\gamma = (\mathrm{Id} \times \psi)_\# \mu$, $\gamma' = (\mathrm{Id} \times \psi')_\# \mu$ et $\gamma'' = (\mathrm{Id} \times \psi'')_\# \mu = (\gamma + \gamma')/2$. Mais ceci n'est alors possible que si $\psi'' = \psi = \psi'$ μ-presque partout.

Il se trouve que l'on peut obtenir l'espace $\mathbb{H}^n$ muni de sa structure d'espace de Carnot-Carathéodory et de sa distance de Carnot-Carathéodory d comme limite, en un sens adéquat, d'approximations riemanniennes. Nous allons terminer cet exposé en expliquant brièvement comment l'on peut obtenir le transport optimal que nous venons d'exhiber comme limite des transports optimaux relatifs à ces approximations riemanniennes.

Pour fixer les idées, on désignera par M l'ensemble $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa structure d'espace euclidien usuel et de sa structure triviale de variété. En tant que variétés, M et $\mathbb{H}^n$ coïncident. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on note M_ε la variété M munie de la structure riemannienne telle que

$$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z_\varepsilon = \varepsilon Z$$

forment une base orthonormée de $T_x M_\varepsilon$. On notera aussi d_ε la distance riemannienne associée. Cette distance est invariante à gauche relativement aux translations de $\mathbb{H}^n$. On a aussi $d_\varepsilon \leqslant d_{\varepsilon'} \leqslant d$ pour tous $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Il se trouve que $(\mathbb{H}^n,d)$ peut être obtenu comme limite des $(M_\varepsilon,d_\varepsilon)$ au sens où (voir par exemple [13])

$$d = \sup_{\varepsilon>0} d_\varepsilon.$$

On pose $c_\varepsilon(x,y) = d_\varepsilon(x,y)^2/2$ et l'on fixe pour tout le reste de cette partie deux mesures μ et ν qui vérifient les hypothèses du théorème 4.1. On a alors

$$\int_M d_\varepsilon(x)^2\, d\mu(x) + \int_M d_\varepsilon(y)^2\, d\nu(y) < +\infty\,,$$

et l'on sait alors d'après les résultats de R. McCann ([14]) qu'il existe un unique transport optimal ψ_ε entre μ et ν relatif au coût c_ε. Un premier résultat d'approximation assure que le transport optimal entre μ et ν relatif au coût c peut être obtenu comme limite des ψ_ε (voir [3, Théorème 6.2]).

THÉORÈME 4.2. — *Soient μ et ν deux mesures qui vérifient les hypothèses du théorème 4.1. Alors les transports optimaux ψ_ε entre μ et ν relatifs aux coûts c_ε convergent en μ-mesure quand $\varepsilon \downarrow 0$ vers le transport optimal ψ entre μ et ν relatif au coût c.*

R. McCann obtient en outre une caractérisation du transport optimal ψ_ε en termes d'un potentiel c_ε-concave dont le gradient, et sa norme, indiquent dans quelle direction, et sur quelle distance, déplacer la masse de manière optimale et géodésique dans M_ε. Plus précisément, on a

$$\psi_\varepsilon(x) = \exp_x^\varepsilon(-\nabla^\varepsilon\varphi_\varepsilon(x))$$

pour μ-presque tout $x \in M_\varepsilon$, où $\exp_x^\varepsilon$ désigne l'application exponentielle riemannienne usuelle dans M_ε,

$$\nabla^\varepsilon\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^n X_j\varphi_\varepsilon(x)X_j + Y_j\varphi_\varepsilon(x)Y_j + Z_\varepsilon\varphi_\varepsilon(x)Z_\varepsilon \in T_xM_\varepsilon$$

est le gradient de φ_ε et φ_ε est un potentiel de Kantorovich, *i.e.*, une application c_ε-concave telle qu'un plan $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ est optimal relativement au coût c_ε si et seulement si

$$c_\varepsilon(x,y) = \varphi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon^c(y) \quad \gamma\text{-presque partout.} \tag{4.3}$$

Il découle aussi des arguments de [14] que la courbe $s \mapsto \exp_x^\varepsilon(-s\nabla^\varepsilon\varphi_\varepsilon(x))$ est une géodésique minimale sur $[0,1]$ pour μ-presque tout $x \in M_\varepsilon$.

Il se trouve que l'étude asymptotique de $\exp_x^\varepsilon$ et des géodésiques minimales permet de faire le lien avec l'application $\exp_{\mathbb{H}}$ introduite au début de cette partie. Par invariance à gauche, on peut toujours se ramener à l'étude de $\exp_0^\varepsilon$ et l'on a en effet la proposition suivante ([3, Lemme 6.8]).

PROPOSITION 4.4. — *Soit $v^\varepsilon = \sum_{j=1}^n v_j^\varepsilon X_j + v_{n+j}^\varepsilon Y_j + v_{2n+1}^\varepsilon Z_\varepsilon \in T_0M_\varepsilon$ tel que la géodésique $l^\varepsilon(s) = \exp_0^\varepsilon(sv^\varepsilon)$ soit minimale sur $[0,1]$ et tel que $\lim_{\varepsilon\to 0}\exp_0^\varepsilon v^\varepsilon = x$ pour* *un certain* $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$. *Soit* $w = (A+iB,v) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times [-\pi/2,\pi/2]$ *tel que* $x = \exp_{\mathbb{H}} w$. *On a alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v^{\varepsilon}_{2n+1}/\varepsilon = v$$

Si de plus $x \in \mathbb{H}^n \setminus \mathbb{L}$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v^{\varepsilon}_j = A_j\,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} v^{\varepsilon}_{n+j} = B_j\,.$$

Ce comportement asymptotique de $\exp_0^{\varepsilon}$ et des géodésiques minimales est de manière naturelle un outil particulièrement utile pour étudier le comportement asymptotique des gradients des potentiels de Kantorovich φ_ε. On peut en effet montrer que le gradient intrinsèque total du potentiel relatif au coût c peut s'obtenir comme limite des gradients des potentiels relatifs aux approximations riemanniennes ([3, Thérorème 6.11]).

Théorème 4.5. — *Soient* μ *et* ν *deux mesures boréliennes de probabilité sur* $\mathbb{H}^n$. *On suppose que* μ *est absolument continue par rapport à* $\mathscr{L}^{2n+1}$, *que* spt ν *est compact et que* $\int_{\mathbb{H}^n} d_0(x)^2\, d\mu(x) < +\infty$. *Pour* $\varepsilon > 0$, *on considère* $\varphi_\varepsilon : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *un potentiel de Kantorovich* c_ε*-concave qui caractérise l'optimalité relativement au coût* c_ε *comme dans* (4.3), *normalisé de telle sorte que* $\varphi_\varepsilon(0) = 0$. *Alors il existe une application localement lipschitzienne et* c*-concave* $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$X_j\varphi_\varepsilon \overset{L^p_{loc}(d\mu)}{\longrightarrow} X_j\varphi, \quad Y_j\varphi_\varepsilon \overset{L^p_{loc}(d\mu)}{\longrightarrow} Y_j\varphi$$

pour tout $1 \leqslant p < +\infty$ *et* $Z\varphi_\varepsilon$ *converge en* μ*-mesure vers* $Z\varphi$ *sur l'ensemble* $F = \{x \in \mathbb{H}^n;\ \psi(x) \neq x\}$ *où* ψ *est le transport optimal entre* μ *et* ν *relatif au coût* c, *et telle que* $\psi(x) = x \cdot \exp_{\mathbb{H}}(-\nabla^{IT}\varphi(x))$ *pour* μ*-presque tout* $x \in \mathbb{H}^n$. *En outre, tout point limite de tels potentiels* c_ε*-concaves* φ_ε *quand* $\varepsilon \downarrow 0$ *a ces propriétés.*

Signalons pour finir que l'on peut se reporter à [3] pour des résultats similaires à ceux du théorème 4.1 dans le cas où le groupe de Heisenberg est muni de la distance dite de Korányi, définie relativement à une norme homogène naturelle sur $\mathbb{H}^n$, ainsi que pour une extension des résultats d'existence et d'unicité du transport optimal quand la fonction de coût $d(x,y)^2/2$ est remplacée par $d(x,y)^p/p$ pour $p \geqslant 2$. On y trouvera également un certain nombre de problèmes ouverts liés aux propriétés du transport optimal et à d'autres aspects de la théorie du transport optimal de mesure dans le cadre sous-riemannien qui nous a intéressé ici.

Bibliographie

[1] L. Ambrosio, *Lecture notes on optimal transport problems*, Mathematical aspects of evolving interfaces (Funchal, 2000), Lecture Notes in Math., vol. 1812, Springer, Berlin, 2003, 1–52.

[2] L. Ambrosio and A. Pratelli, *Existence and stability results in the* L^1 *theory of optimal transportation*, Optimal transportation and applications (Martina Franca, 2001), Lecture Notes in Math., vol. 1813, Springer, Berlin, 2003, 123–160.

[3] L. AMBROSIO and S. RIGOT, *Optimal mass transportation in the Heisenberg group*, J. Funct. Anal. 208-2 (2004), 261–301.

[4] A. BELLAÏCHE, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in Sub-Riemannian geometry, Progr. Math., vol. 144, Birkhäuser, Basel, 1996, 1–78.

[5] Y. BRENIER, *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math., **305** (1987), 805–808.

[6] Y. BRENIER, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 375–417.

[7] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer*, Current Developments in Mathematics, 1997, 65–126.

[8] W. GANGBO, *An elementary proof of the polar factorization theorem for functions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **128** (1994), 381–399.

[9] W. GANGBO and R.J. MCCANN, *The geometry of optimal transportation*, Acta Math., **177** (1996), 113–161.

[10] B. GAVEAU, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. 139-(1,2) (1977), 95–153.

[11] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemaniennes*, CEDIC, Paris, 1981

[12] M. GROMOV, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in Sub-Riemannian geometry, Progr. Math., vol. 144, Birkhäuser, Basel, 1996,79–323.

[13] D. JERISON and A. SANCHEZ CALLE, *Subelliptic, second order differential operators*, in Complex analysis, III (College Park, Md., 1985–86), 46–77, Lecture Notes in Math., 1277, Springer, Berlin, 1987.

[14] R.J. MCCANN, *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal., **11** (2001), 589–608.

[15] R. MONTI, *Some properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group*, Rend. Mat. Acc. Lincei 11 (2000), 155–167.

[16] P. PANSU, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. (2) 129-1 (1989), 1–60.

[17] S.T. RACHEV and L. RÜSCHENDORF, *Mass transportation problems*, Vol I : Theory, Vol. II : Applications. Probability and its applications, Springer, 1998.

[18] S. RIGOT, *Mass transportation in groups of type H*, preprint.

[19] C. VILLANI, *Topics in mass transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Séverine RIGOT,
Université de Paris-Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 ORSAY cedex (France)

`Severine.Rigot@math.u-psud.fr`