Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Ivan K. Babenko

Géométrie systolique des variétés de groupe fondamental $\mathbf{Z}^2$

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 25-52
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 25–52

GÉOMÉTRIE SYSTOLIQUE DES VARIÉTÉS DE GROUPE FONDAMENTAL $\mathbf{Z}_2$

Ivan K. BABENKO

Résumé

D'après un résultat de M. Gromov, les espaces projectifs $\mathbf{R}P^m$ sont des variétés essentielles et donc les constantes systoliques $\sigma_m = \sigma(\mathbf{R}P^m)$ sont strictement positives. Dans cet article, pour une variété fermée M de dimension m et un épimorphisme ϕ de son groupe fondamental sur $\mathbf{Z}_2$, nous étudions la constante ϕ-systolique $\sigma_\phi(M)$ comme une fonction de deux variables : M et ϕ. Le principal résultat montre que, dans le cas orientable, cette fonction ne prend que deux valeurs : 0 et σ_m. Quelques résultats associés sont également établis.

1. $\mathbf{Z}_2$-systoles unidimensionnelles

Pour une variété riemannienne fermée non simplement connexe (M, g) de dimension m, désignons par $\mathrm{sys}_1(M, g)$ (ou $\mathrm{sys}(M, g)$) la plus petite longueur d'une ligne géodésique fermée non contractile sur M. Cette valeur est appelée *la systole* ou *1-systole* de M respectivement à la métrique g.

On sait actuellement que, pour des variétés vérifiant certaines conditions topologiques, la systole vérifie l'inégalité isopérimétrique globale suivante :

$$\mathrm{sys}(M, g)^m \leqslant C(M)\,\mathrm{Vol}(M, g), \tag{1.1}$$

où $m = \dim M$ et $C(M)$ est une constante strictement positive ne dépendant que de la topologie de M. Ce phénomène a été découvert pour la première fois par C. Loevner, en 1949 (voir [6]). Il a démontré que toute métrique riemannienne g sur le tore bidimensionnel T^2 vérifie :

$$\mathrm{sys}(T^2, g)^2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Vol}(M, g).$$

De plus, l'égalité est vérifiée si et seulement si g est une métrique plate équilatérale.

2000 Mathematics Subject Classification : 53C23, 57Q99.

La principale direction de recherche en géométrie et en topologie des systoles unidimensionnelles consiste à étudier l'invariant numérique suivant de M :

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{sys}_1(M,g)^m}, \tag{1.2}$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M. Le nombre (1.2) est appelé *constante systolique* de M. On voit que la stricte positivité de $\sigma(M)$ est équivalente au fait que M vérifie l'inégalité (1.1). Les deux questions suivantes résument les principaux enjeux de la géométrie systolique :

1. *Quelles sont les conditions topologiques sur M, qui assurent la stricte positivité de $\sigma(M)$?*
2. *Dans le cas où $\sigma(M) > 0$, quelle est sa valeur exacte ?*

Une bonne forme de réponse à la première question a été trouvée par M. Gromov [13] il y a plus que vingt ans : il s'agit de la notion de variété *essentielle*. Pour une variété quelconque (non simplement connexe) M, il existe une application

$$\Phi : M \longrightarrow K(\pi_1(M), 1), \tag{1.3}$$

unique à homotopie près, où $K(\pi_1(M), 1)$ est le complexe bien connu d'Eilenberg-MacLane, voir par exemple [21]. Soit $[M]_{\mathbf{k}}$ la classe fondamentale de M considérée à coefficients dans $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$ si M est orientable et à coefficients dans $\mathbf{k} = \mathbf{Z}_2$ sinon. Cette classe nous fournit un élément

$$\Phi_*([M]_{\mathbf{k}}) \in H_m(K(\pi_1(M), 1); \mathbf{k}).$$

La variété M est dite *essentielle* si $\Phi_*([M]_{\mathbf{k}}) \neq 0$ et *non-essentielle* sinon. Le résultat suivant de M. Gromov [13] donne une condition suffisante et maniable sur M pour garantir la stricte positivité de $\sigma(M)$.

THÉORÈME DE GROMOV. — *Pour chaque variété essentielle M,*

$$\sigma(M) > 0.$$

Pour les variétés orientables, il est en fait nécessaire que M soit essentielle pour assurer la stricte positivité de $\sigma(M)$, comme cela a été démontré dans [1]. Dans cet article, l'invariance homotopique de $\sigma(M)$ a également été prouvée. Cela signifie que deux variétés équivalentes à homotopie près ont la même constante systolique σ.

La seconde question représente un problème très difficile. La valeur exacte de $\sigma(M)$ n'est connue que dans les trois cas suivants : le tore bidimensionnel T^2 (C. Loewner) ; le plan projectif $\mathbf{R}P^2$ (P. Pu 1952, [20]) ; la bouteille de Klein K^2 (C. Bavard 1986, [5]). Pour certaines variétés M, des bornes inférieures pour $\sigma(M)$ plus ou moins satisfaisantes sont connues. Cette question est assez avancée dans le cas des surfaces. On peut trouver plus d'informations à ce sujet dans [7], [12], [13] et [16]. Actuellement, on est encore bien loin du calcul précis de $\sigma(M)$, même pour des variétés topologiquement assez simples comme les espaces projectifs ou un peu plus général comme les espaces lenticulaires.

Le plan projectif $\mathbf{R}P^2$ est l'unique surface ayant $\mathbf{Z}_2$ comme groupe fondamental. Le problème systolique dans le cas $\pi_1(M) = \mathbf{Z}_2$ est donc complètement résolu dans le cas $\dim M = 2$. La topologie des variétés, dont le groupe fondamental est $\mathbf{Z}_2$, est très variée dans les dimensions supérieures. Le but principal de cet article est d'étudier $\sigma(M)$ comme une fonction de M sur le sous-ensemble des variétés M ayant pour groupe fondamental $\mathbf{Z}_2$. En étudiant ce problème, nous aurons besoin de comparer les constantes systoliques de variétés de groupes fondamentaux différents. Dans ce but, nous utiliserons la notion de ϕ-systole. Fixons un groupe G de présentation finie. Soit M une variété fermée telle qu'il existe un épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \to G$. Désignons par $\operatorname{sys}_\phi(M,g)$ la plus petite longueur d'une ligne géodésique fermée non $\phi_\sharp$- triviales. Ici $\phi_\sharp$ désigne l'application induite par ϕ sur les classes de conjugaison. Cela nous amène à définir la constante ϕ-systolique

$$\sigma_\phi(M) = \inf_g \frac{\operatorname{Vol}(M,g)}{\operatorname{sys}_\phi(M,g)^m}, \tag{1.4}$$

où comme dans (1.2), g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M. En considérant les différents épimorphismes $\phi\colon \pi_1(M) \to G$ (si ils existent), nous obtiendrons les différentes constantes systolique $\sigma_\phi(M)$. Ici, G est fixé, et l'on ne fait varier que M et ϕ.

Pour chaque épimorphisme ϕ, une application analogue à celle de (1.3) est définie uniquement à homotopie près

$$\Phi\colon M \longrightarrow K(G,1), \tag{1.5}$$

si l'application induite sur les groupes fondamentaux Φ_* coïncide avec ϕ. Par analogie avec la définition ci-dessus, la variété considérée est dite *ϕ-essentielle* si $\Phi_*([M]_k) \neq 0$. Remarquons qu'une variété M peut être essentielle au sens absolu et en même temps non-essentielle pour certains choix de ϕ. Le théorème de M.Gromov reste valable pour l'invariant σ_ϕ si on remplace « essentielle » par « ϕ-essentielle ». Nous allons étudier dans ce travail le cas $G = \mathbf{Z}_2$. Pour les ϕ-systoles qui apparaissent dans ce cas, nous utilisons la dénomination de *$\mathbf{Z}_2$-systoles.*

Parmi les variétés m-dimensionnelles ayant $\mathbf{Z}_2$ comme groupe fondamental, l'espace projectif $\mathbf{R}P^m$ est la variété canonique. Pour l'aspect systolique, cette canonicité est liée au fait que $\mathbf{R}P^m$ représente le m-squelette de l'espace $K(\mathbf{Z}_2,1)$. Comme on le verra cette propriété topologique triviale joue un rôle fondamental en géométrie des $\mathbf{Z}_2$-systoles.

On voit facilement que chaque espace projectif $\mathbf{R}P^m$ est une variété essentielle et le théorème de Gromov implique donc que

$$\sigma_m \colon = \sigma(\mathbf{R}P^m) > 0.$$

Comme nous le verrons, la suite $\{\sigma_m\}_{m=1}^{\infty}$ représente une suite de constantes fondamentales en géométrie des $\mathbf{Z}_2$-systoles, bien que l'on ne connaisse leurs valeurs exactes que pour $m = 1$ et 2 ($\sigma_2 = \frac{2}{\pi}$, [20]). Il serait intéressant de calculer toutes ces constantes, ou au moins de les estimer de manière assez fine. Actuellement ce problème est loin d'être résolu. Les métriques à courbure sectionnelle constante donnent la borne supérieure suivante :

$$\sigma_m \leqslant \frac{\frac{m}{2}}{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2}+1)},$$

ou Γ est la fonction d'Euler. Cette borne montre que la suite $\{\sigma_m\}_{m=1}^{\infty}$ décroît très rapidement.

Dans ce travail nous démontrons les résultats suivants :

THÉORÈME 1.1. — *Soient M une variété orientable de dimension m et $\phi\colon \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$ un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ ne peut prendre que deux valeurs : 0 et σ_m. De plus, si m est pair, $\sigma_\phi(M) = 0$ pour chaque épimorphisme ϕ.*

COROLLAIRE. — *Une variété orientable m-dimensionnelle M, de groupe fondamentale $\mathbf{Z}_2$, est essentielle, si et seulement si*

$$\sigma(M) = \sigma_m.$$

L'invariant $\sigma_\phi(M)$ est une fonction des deux arguments M et ϕ. En fonction de ces arguments, on peut formuler une condition topologique simple, qui attribue à $\sigma_\phi(M)$ la valeur 0 ou σ_m. Chaque épimorphisme ϕ se factorise naturellement sur l'épimorphisme

$$\phi_*\colon H_1(\pi_1(M);\mathbf{Z}_2) \longrightarrow \mathbf{Z}_2, \tag{1.6}$$

qui à son tour est un élément du premier groupe de $\mathbf{Z}_2$-cohomologie

$$\phi_* \in H^1(\pi_1(M);\mathbf{Z}_2) \simeq H^1(M;\mathbf{Z}_2).$$

THÉORÈME 1.2. — *Pour une variété orientable M de dimension m et un épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$, l'égalité $\sigma_\phi(M) = \sigma_m$ est vérifiée si et seulement si $(\phi_*)^m \neq 0$ dans $H^m(M;\mathbf{Z}_2)$.*

Il semble que dans le cas non-orientable, l'invariant σ_ϕ ne prenne de nouveau que les deux valeurs 0 et σ_m. Malheureusement, nous ne pouvons pas le démontrer dans le cadre de notre approche. Dans un passage, que nous soulignerons par la suite, nous utilisons l'existence de la classe fondamentale sur $\mathbf{Z}$. Mentionnons encore un effet qui n'apparaît que pour les variétés non-orientables : on considère le revêtement double $\widetilde{M}_\phi$ correspondant au sous-groupe normal $\ker\phi \subset \pi_1(M)$. Ce revêtement peut être orientable comme non-orientable. Il semble que ces deux cas soient systoliquement différents. Pour les variétés non-orientables, nous ne démontrerons que la version faible du théorème 1.1.

THÉORÈME 1.3. — *Soient M une variété non-orientable de dimension m et ϕ: $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$\sigma_\phi(M) \leqslant \sigma_m.$$

Si m est impair et $\widetilde{M}_\phi$ est orientable, alors $\sigma_\phi(M) = 0$.

Le reste de cet article est consacré aux démonstrations des résultats énoncés. Dans la suite, nous utilisons de manière essentielle le concept de *degré absolu*, ainsi que les théorèmes de structure pour les applications dont le degré absolu est égal à 1. De telles applications jouent un rôle important dans certains problèmes de topologie. Comme cela a été démontré dans [22], chaque application de degré 1 entre deux variétés fermées est déformable en une application monotone. En termes non-formels, on peut dire que, à homotopie près, les applications de degré 1 se représentent comme des « contractions » topologiques (les assertions exactes seront formulées par la suite). Les essais de construction d'applications réciproques pour les applications de degré 1 nous amènent au problème de résolution des « singularités topologiques ». Le procédé de construction de telles applications réciproques nécessite tout de suite de travailler dans une classe d'espaces plus large que la classe des variétés. Nous travaillerons donc dans la classe des polyèdres simpliciaux finis. Cela nous amène donc aux problèmes systoliques sur les polyèdres riemanniens finis. Cette approche a déjà été bien utile en géométrie systolique. En particulier, elle a permis tout récemment d'avancer dans le problème des rigidités systoliques et intersystoliques des systoles de dimensions supérieures, voir [2], [3], [4], [15].

2. Bornes supérieures des constantes systoliques et degré absolu des applications

Ce chapitre est consacré à la partie la plus simple de la démonstration des résultats énoncés, il s'agit de la majoration de σ_ϕ. Plus précisément nous démontrons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1. — *Soient M une variété de dimension m et ϕ: $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$ un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ vérifie l'inégalité*

$$\sigma_\phi(M) \leqslant \sigma_m.$$

De plus, $\sigma_\phi(M) > 0$ si et seulement si $\phi_*^m \neq 0$ dans $H^m(M; \mathbb{Z}_2)$.

L'ingrédient principal de notre démonstration est le résultat sur la structure des applications, dont le degré vaut 0 ou 1. Parmi les définitions du degré d'une application $f: M_1 \to M_2$ entre deux variétés de même dimension, deux définitions sont bien connues : le $\mathbb{Z}$-degré $\deg f$ (défini si les deux variétés sont orientables) et le $\mathbb{Z}_2$-degré $\deg_2 f$ (toujours défini, mais contenant moins d'information sur f). Le degré le plus utile pour la géométrie est celui que l'on appelle le *degré absolu* $\operatorname{adeg} f$. Il est défini pour chaque f, et c'est un entier positif ou nul. La définition de ce degré, qui dépend fortement des groupes fondamentaux de M_1 et M_2, est assez technique et nous renvoyons le lecteur à [9]. Rappelons certaines propriétés de ce degré dont nous allons nous servir.

1. Si M_i, $i = 1, 2$ sont orientables, alors adeg $f = |\deg f|$;
2. Dans tous les cas, adeg $f \equiv \deg_2 f \mod 2$;
3. adeg f contrôle le nombre minimal de points dans $g^{-1}(y), y \in M_2$ où $g \sim f$ à homotopie près.

Le contenu exact de la troisième propriété est donné par le théorème suivant de Hopf, voir [9] pour la démonstration.

Théorème de Hopf. — *Soit $f: M_1 \to M_2$ une application continue entre deux variétés de même dimension m. Alors, il existe une application g homotope à f et un disque plongé $B^m \subset M_2$ tels que $g: g^{-1}(B^m) \to B^m$ soit un revêtement à* adeg f *feuillets.*

La proposition 2.1 est une conséquence immédiate des propositions suivantes.

Lemme 2.2. — *Soient M une variété de dimension m et $\phi: \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$ un épimorphisme. Alors, il existe une application $f: M \to \mathbf{R}P^m$ vérifiant les propriétés suivantes :*

a). l'application induite sur les groupes fondamentaux $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(\mathbf{R}P^m)$ est égale à ϕ ;

b). adeg $f \in \{0, 1\}$. *De plus,* adeg $f = 1$ *si et seulement si $\phi_*^m \neq 0$. En outre,* adeg $f = 0$ *si m est pair et M est orientable, ou bien si m est impair, M est non-orientable mais $\widetilde{M}_\phi$ est orientable.*

Lemme 2.3. — *Soit $f: M_1 \to M_2$ une application continue entre deux variétés de même dimension m, telle que l'application induite $f_*: \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2)$ soit un épimorphisme. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sigma_{f_*}(M_1) \leqslant \operatorname{adeg} f \cdot \sigma(M_2). \tag{2.1}$$

Cette proposition coïncide avec la proposition 2.2 de [1] et sa démonstration peut être obtenue en reprenant mot à mot la démonstration de [1]. En effet nous n'aurons besoin que des cas où adeg $f \in \{0, 1\}$. Le cas adeg $f = 0$ est une conséquence immédiate du lemme 8.4 [1] et si adeg $f = 1$, alors la démonstration de (2.1) se trouve à la page 32 de [1].

Le problème de classification à homotopie près des applications continues d'un polyèdre fini m-dimensionnel dans $\mathbf{R}P^m$ a été étudié dans [10] et [11]. Dans le lemme 2.2, nous avons besoin de construire une application spéciale vérifiant certains propriétés homologiques. L'existence d'une telle application peut être déduite des résultats de [11]. Nous préférons ici donner une démonstration directe pour montrer la nature géométrique particulière de cette application.

Démonstration du lemme 2.2. — L'épimorphisme ϕ définit à homotopie près une application $\Phi: M \to \mathbf{R}P^\infty$, qui vérifie l'égalité $\Phi_* = \phi$ sur les groupes fondamentaux. En choisissant Φ déjà cellulaire par rapport à la décomposition canonique de $\mathbf{R}P^\infty$ et une décomposition de M, on obtient une application $\Phi\colon M \to \mathbf{R}P^m$ vérifiant $\Phi_* = \phi$. Remarquons que cette dernière application n'est pas, à ce stade, définie de façon unique, et notre but est de montrer que nous pouvons la choisir de sorte qu'elle vérifie les conditions du lemme. On considère séparément les cas suivants :

1. *M est orientable,*

a) $m = 2k+1$. Soit $h_1 : S^m \to \mathbf{R}P^m$ la projection canonique, posons $h_{-1} = h_1 \circ \tau$ où τ est la réflection de S^m respectivement au plan $x_1 = 0$ de $\mathbf{R}^{m+1}$. Il est évident que $\deg h_\epsilon = 2\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$. On considère la suite d'applications

$$M \xrightarrow{l} M \vee S^m \xrightarrow{\Phi \vee h_\epsilon} \mathbf{R}P^m, \tag{2.2}$$

où l'application l contracte en un point une sphère plongée localement $S^{m-1} \subset B^m \subset M$. Posons $\Phi_1 = (\Phi \vee h_\epsilon) \circ l$, nous obtenons de (2.2) que $\deg \Phi_1 = \deg \Phi + 2\epsilon$ et $(\Phi_1)_* = \Phi_*$ sur $\pi_1(M)$. En itérant ce procédé avec un choix convenable de ϵ, nous voyons facilement que nous obtenons une application $f = \Phi_s$, qui vérifie la condition $\deg f = 0$ ou 1. Puisque dans le cas considéré M et $\mathbf{R}P^m$ sont orientables, $\operatorname{adeg} f = \deg f$.

b) $m = 2k$. Cette situation correspond au type IIb) de [9] et par définition $\operatorname{adeg} \Phi = 0$.

2. *M est non-orientable,*

a) $m = 2k$. On considère le revêtement double $\widetilde{M}_\phi$. Si $\widetilde{M}_\phi$ est non-orientable, alors l'application Φ ci-dessus est du type III [9] et, par définition, $\operatorname{adeg} \Phi = 0$ si $\deg_2 \Phi = 0$ et $\operatorname{adeg} \Phi = 1$ si $\deg_2 \Phi = 1$.

Supposons que $\widetilde{M}_\phi$ est orientable, dans ce cas, il admet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_\phi & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} & S^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{R}P^m \end{array}$$

Cette application Φ est du type Ib) et, par définition, $\operatorname{adeg} \Phi = |\deg \widetilde{\Phi}|$. On procède de manière analogue au cas 1a). On considère le diagramme suivant :

$$\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{l}} \widetilde{M} \vee S^m \vee S^m \xrightarrow{\widetilde{\Phi} \vee q_\epsilon \vee q_\epsilon} S^m, \tag{2.3}$$

où $\widetilde{M} \vee S^m \vee S^m$ est le bouquet équivariant sous l'involution $\nu\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}, M = \widetilde{M}/\nu$ renversant l'orientation ; q_ϵ est un automorphisme de la sphère S^m de degré $\epsilon = \pm 1$. Remarquons que toute la suite (2.3) est équivariante par rapport à l'involution ν. Posons $\widetilde{\Phi}_1 = (\widetilde{\Phi} \vee q_\epsilon \vee q_\epsilon) \circ \tilde{l}$; puisqu'elle est ν-équivariante, cette application se factorise sur l'application $\Phi_1 : M \to \mathbf{R}P^m$. On voit aussi que $\deg \Phi_1 = \deg \Phi + 2\epsilon$. En itérant cette construction avec un choix convenable de ϵ, nous arrivons en quelques étapes à une application $f = \Phi_s$, telle que $\operatorname{adeg} f = |\deg \widetilde{\Phi}_s| \in \{0, 1\}$.

b) $m = 2k+1$. Si $\widetilde{M}_\phi$ est non-orientable, alors Φ correspond au type III de [9] et, comme ci-dessus, nous obtenons $\operatorname{adeg} \Phi = 0$, si $\deg_2 \Phi = 0$ et $\operatorname{adeg} \Phi = 1$, si $\deg_2 \Phi = 1$.

Ensuite, si $\widetilde{M}_\phi$ est orientable, alors Φ correspond au type IIc) de [9] et, par définition, $\operatorname{adeg}\Phi = 0$.

Ainsi nous avons démontré l'existence d'une application $f: M \to \mathbf{R}P^m$ qui vérifie les conditions a). et b). du lemme 2.2. Il reste à remarquer que $\operatorname{adeg} f \equiv \deg_2 f \mod 2$ et nous en déduisons que $\phi_*^m = f^*(e^m) \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{adeg} f = 1$. Ceci achève la démonstration. □

3. Minorations des constantes systoliques

La proposition suivante est fondamentale pour démontrer les théorèmes énoncés dans la partie 1.

PROPOSITION 3.1. — *Soit M une variété orientable de dimension m admettant une application*

$$f: M \longrightarrow \mathbf{R}P^m \tag{3.1}$$

de degré 1. Alors $\sigma_{f_*}(M) = \sigma_m$ où f_* est l'application induite sur les groupes fondamentaux.

Remarque. — Si le degré de f dans (3.1) est non-nul, alors f_* est automatiquement un épimorphisme des groupes fondamentaux.

On voit maintenant que les théorèmes 1.1, 1.2, 1.3 sont des conséquences directes et immédiates des propositions 2.1, 3.1 et du lemme 2.2. Il nous reste donc à prouver la proposition 3.1, dont la démonstration est techniquement la plus compliquée. Les parties 4 et 5 de ce travail y sont consacrées. Les propositions 2.1, 2.2 et 3.1 nous éclairent également sur la nature algébrique de la constante systolique. On considère l'ensemble de toutes les paires $\{(M, \phi)\}$, où M est une variété orientable de dimension m et $\phi: \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_2$ est un épimorphisme. Introduisons une structure de semi-groupe en posant

$$(M, \phi) + (N, \psi) = (M\#N, \phi * \psi), \tag{3.2}$$

où $\phi * \psi$ est le produit libre de deux homomorphismes ϕ et ψ agissant sur $\pi_1(M\#N) = \pi_1(M) * \pi_1(N)$ (si $m > 2$). Pour $m = 2$, $\phi * \psi$ sera le produit amalgamé. Notons $\mathcal{M}_\phi^m$ ce semi-groupe. En comparaison avec la théorie du bordisme, nous ne considérons ici que la somme connexe de deux variétés, choix justifié par la nature géométrique du problème. Définissons ensuite l'application

$$\sigma_m: \mathcal{M}_\phi^m \longrightarrow \mathbf{Z}_2, \tag{3.3}$$

par la formule $\sigma_m(M, \phi) = \frac{\sigma_\phi(M)}{\sigma_m} \mod 2$.

THÉORÈME 3.2. — *L'application σ_m est un homomorphisme.*

Démonstration. — On obtient du théorème 1.1 que $\sigma_m = 0$ si m est pair. Considérons deux paires $(M_i, \phi_i), i = 1, 2$, la dimension m étant impaire. Soient $f_i \colon M_i \to \mathbf{R}P^m, i = 1, 2$ les applications du lemme 2.2. Puisque les $M_i, i = 1, 2$ sont orientables et m est impair, le degré absolu coïncide avec le degré entier, et on a donc deg $f_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2$. On considère la suite d'applications

$$M_1 \# M_2 \xrightarrow{h} M_1 \vee M_2 \xrightarrow{f_1 \vee f_2} \mathbf{R}P^m \vee \mathbf{R}P^m \xrightarrow{p} \mathbf{R}P^m, \tag{3.4}$$

où h contracte en un point la sphère du recollement et p agit comme l'identité sur chaque composante du bouquet. Il est évident que

$$(p \circ (f_1 \vee f_2) \circ h)_* = \phi_1 * \phi_2 \text{ et } \deg(p \circ (f_1 \vee f_2) \circ h) = \deg f_1 + \deg f_2.$$

Si $\deg f_1 = \deg f_2 = 1$, on tire du lemme 2.2 l'existence d'une autre application $f \colon M_1 \# M_2 \to \mathbf{R}P^m$ telle que $f_* = \phi_1 * \phi_2$ et $\deg f = 0$. Si $\deg f_1 + \deg f_2 < 2$, on prend pour f l'application (3.4). Dans les deux cas, l'application déduite du lemme 2.2

$$f \colon M_1 \# M_2 \longrightarrow \mathbf{R}P^m$$

vérifie la congruence suivante

$$\deg f \equiv (\deg f_1 + \deg f_2) \mod 2.$$

Le théorème est maintenant immédiat d'après la proposition 3.1 et le lemme 2.3. □

4. Géométrie différentielle sur les polyèdres simpliciaux finis

Nous avons déjà noté que travailler dans la catégorie lisse sur des problèmes systoliques n'est pas commode. Pour ces raisons, nous considérons notre problème variationnel dans la classe des polyèdres riemanniens finis et CW-complexes finis. L'efficacité de cette approche a été montrée plusieurs fois, voir [1], [2], [3], [4], [15], [16]. Définissons d'abord les objets nécessaires, voir [18], [21] pour les détails. Par polyèdre simplicial, nous entendons toujours un espace topologique muni d'une triangulation. Tous les polyèdres considérés ensuite seront des polyèdres finis et donc compacts. Les complexes cellulaires (CW-complexes) utilisés seront aussi finis et donc compacts. Remarquons que la plupart des propositions sur les polyèdres et CW-complexes utilisées dans la suite sont valables dans des situations plus générales. Nous en resterons au cadre fini seulement pour des raisons d'application géométrique.

Définition 4.1. — *Un complexe cellulaire fini X est dit triangulé compatiblement si*

1. *X est triangulé ;*
2. *pour chaque k-cellule (B^k, χ) de X, $\chi(B^k(\frac{1}{2}))$ est un sous-polyèdre simplicial de X.*

Ici $B^k(r)$ est la boule euclidienne k-dimensionnelle de rayon r, $B^k = B^k(1)$; χ est l'application caractéristique d'une cellule.

Il est bien connu (voir, par exemple, [19]) que chaque complexe cellulaire fini est équivalent à homotopie près à un complexe cellulaire triangulé compatiblement. Si $f: X \to Y$ est une application continue de deux complexes cellulaires finis triangulés compatiblement, alors elle est équivalente à homotopie près à une application cellulaire et simpliciale en même temps. Tous les complexes cellulaires considérés ci-dessous sont supposés triangulés compatiblement. Toutes les applications sont supposées cellulaires et simpliciales.

Soient P un polyèdre et $\tau \subset P$ un simplexe de la triangulation considérée. Ce simplexe est homéomorphe par définition au q-simplexe standard $\Delta^q = \mathrm{conv}\{e_0, \dots, e_q\} \subset \mathbf{R}^{q+1}$, où conv est l'enveloppe convexe et $\{e_i\}_{i=0}^{q}$ est un repère orthonormé. Les coordonnées cartésiennes $\{x_i\}_{i=0}^{q}$ de $\mathbf{R}^{q+1}$ donnent les coordonnés barycentriques dans Δ^q et celles de $\tau \subset P$. Chaque ouvert U de l'hyperplan $\sum_{i=0}^{q} x_i = 1$ qui contient Δ^q sera nommé un *voisinage extérieur* de $\tau \subset P$.

DÉFINITION 4.2. — *Une métrique riemannienne sur un polyèdre P est une famille de métriques riemanniennes $\{g_\tau\}_{\tau \subset P}$, où τ parcourt tous les simplexes de P, qui vérifie les conditions :*

1. *Chaque g_τ est une métrique riemannienne lisse dans un voisinage extérieur de τ.*
2. *Pour chaque paire de simplexes $\tau_1, \tau_2 \subset P$, on a l'égalité*

$$g_{\tau_1} \mid_{\tau_1 \cap \tau_2} = g_{\tau_2} \mid_{\tau_1 \cap \tau_2}$$

considérée comme une égalité de deux formes quadratiques dans les coordonnées barycentriques de $\tau_1 \cap \tau_2$.

Une structure simpliciale sur P permet de travailler avec les applications lisses par morceaux de l'intervalle $I(1) = [0, 1]$ dans P. Si P est muni d'une métrique riemannienne g, on peut définir la longueur d'un chemin lisse par morceaux $\alpha: I(1) \to P$ en posant comme d'habitude

$$l_g(\alpha) = \int_0^1 \mid \alpha' \mid_g dt.$$

On utilise cette longueur pour définir la métrique sur P de la même manière que dans le cas des variétés

$$\rho_g(x, y) = \inf_{\alpha} l_g(\alpha), \tag{4.1}$$

où α parcourt l'ensemble des chemins lisses par morceaux joignant $x, y \in P$. Obtenu de cette façon, l'espace métrique (P, ρ) est un espace de longueur.

Considérons un polyèdre riemannien (P, g) et un épimorphisme

$$\phi: \pi_1(P) \longrightarrow G$$

où G est un groupe fixé de présentation fini (par exemple $G = \mathbf{Z}_2$).

DÉFINITION 4.3. — *La borne inférieure*

$$\mathrm{sys}_{\phi}(P,g) = \inf_{\gamma} l_g(\gamma),$$

où γ parcourt l'ensemble des courbes fermées, lisses par morceaux, non $\phi_{\sharp}$-triviales, est appelée la ϕ-systole de (P,g).

Pour un polyèdre riemannien quelconque (P,g) et pour chaque k-simplexe $\tau \in P$, son k-volume $\mathrm{Vol}_k(\tau, g)$ est bien défini. Si $\dim P = m$, la somme totale des m-volumes de tous les m-simplexes est appelée *volume* de P dans la métrique g. On note cette valeur $\mathrm{Vol}(P,g)$. Remarquons que $\mathrm{Vol}(P,g)$ coïncide avec la mesure de Hausdorff m-dimensionnelle pour la métrique (4.1).

Définissons la constante ϕ-systolique pour un polyèdre quelconque P de dimension m comme dans le cas des variétés

$$\sigma_{\phi}(P) = \inf_{g} \frac{\mathrm{Vol}(P,g)}{\mathrm{sys}_{\phi}(P,g)^m}, \tag{4.2}$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes simpliciales sur P.

Comme dans le cas des variétés, on peut définir les polyèdres essentiels et démontrer un théorème analogue au théorème de Gromov, voir aussi [13]. Nous n'allons pas nous servir de cette notion pour les polyèdres. Remarquons seulement qu'il existe deux types d'essentialité pour les polyèdres. Essentialité algébrique qui se définit avec la « classe fondamentale » du polyèdre et essentialité géométrique qui se définit avec les applications dans les complexes de dimension inférieure. Ces deux notions coïncident pour les variétés si on fait le choix convenable des coefficients en homologie. Elles ne sont pas équivalentes pour un polyèdre arbitraire, voir aussi le dernier chapitre.

Soit $f\colon X \to Y$ une application simpliciale entre deux polyèdres. Si g est une métrique riemannienne sur Y, son image réciproque $f^*(g)$ est une forme quadratique symétrique non-négative, mais en géneral dégénérée (si f n'est pas un homéomorphisme). Pour obtenir une vraie métrique sur X assez proche de $f^*(g)$, prenons une métrique fixée h sur X. Par exemple, on peut utiliser comme h la métrique induite par le plongement canonique $X \to \Delta^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$, où N est le nombre de sommets de X. Pour $t > 0$, on pose ensuite $f^t(g) = f^*(g) + t^2 h$, ceci définit une métrique riemannienne (simpliciale) sur X. Appelons cette métrique la *t-image réciproque* de g, voir aussi [1], où des métriques analogues ont été construites un peu différemment. Il est évident que f contracte les distances par rapport aux métriques $f^t(g)$ et g pour chaque $t > 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Lip}\, f \leqslant 1,\ t > 0. \tag{4.3}$$

Nous allons travailler dans la suite seulement avec de petites valeurs du paramètre t. On voit facilement (voir aussi [1]), que la proposition suivante est vérifiée :

LEMME 4.4. — *Soit $f\colon X \to Y$ une application simpliciale entre deux polyèdres. Alors il existe une constante C ne dépendant que du type combinatoire de X, Y, f, telle* *que pour chaque métrique riemannienne g sur Y et chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\mathrm{Vol}_k(X, f^t(g)) \leqslant C\,\mathrm{Vol}_k(Y, g) + \varepsilon, \quad t < \delta.$$

DÉFINITION 4.5. — *Une application simpliciale $f : X \to Y$ entre deux polyèdres simpliciaux est appelée k-monotone, si pour chaque k-simplexe $\tau \subset Y$ et pour chaque point intérieur $y \in \mathring{\tau}$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble connexe dans X.*

Les applications m-monotones des polyèdres m-dimensionnels jouent un rôle fondamental dans la suite. Dans ce cas-là, la m-monotonie signifie que l'image réciproque d'un m-simplexe ouvert quelconque est un seul m-simplexe ouvert, ou bien cette image réciproque est vide. On voit facilement qu'on peut prendre $C = 1$ dans le lemme précédent pour une application m-monotone f.

LEMME 4.6. — *Soient K_i, $i = 1, 2$ deux polyèdres m-dimensionnels et $\phi_i : \pi_1(K_i) \to G$ deux épimorphismes. S'il existe une application m-monotone $f : K_1 \to K_2$ telle que $\phi_1 = \phi_2 \circ f_*$, alors*

$$\sigma_{\phi_1}(K_1) \leqslant \sigma_{\phi_2}(K_2).$$

Démonstration. — Prenons un ε positif et soit g une métrique simpliciale quelconque sur K_2. Prenons $t < \delta = \delta(\varepsilon)$ comme dans le lemme 4.4. Avec (4.3) on obtient

$$\mathrm{sys}_{\phi_1}(K_1, f^t(g)) \geqslant \mathrm{sys}_{\phi_2}(K_2, g).$$

Ceci avec le lemme 3.1 nous amène à l'inégalité suivante

$$\frac{\mathrm{Vol}(K_1, f^t(g))}{(\mathrm{sys}_{\phi_1}(K_1, f^t(g)))^m} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(K_2, g) + \varepsilon}{(\mathrm{sys}_{\phi_2}(K_2, g))^m},$$

ce qui achève la démonstration, puisque ε est arbitraire. □

Soient K un polyèdre et $h : S^{k-1} \to K$ une application simpliciale. On a l'homéomorphisme évident

$$K \bigcup_h B^k = Z(h) \bigcup_{S^{k-1}} CS^{k-1},$$

où Z(h) est le cylindre de l'application h et CX est le cône sur l'espace X. En appliquant la triangulation du cylindre d'une application simpliciale [19] et en prolongeant cette triangulation sur le cône, nous obtenons une triangulation sur $K \cup_h B^k$ qui coïncide avec la triangulation donnée sur K. Nous utiliserons toujours dans la suite cette façon de prolonger une triangulation donnée sur une cellule recollée par une application simpliciale.

LEMME 4.7. — *Soient K un polyèdre m-dimensionnel et $\phi : \pi_1(K) \to G$ un épimorphisme. Supposons qu'un polyèdre $L = K \cup_h B^k$ soit obtenu par recollement du disque k-dimensionnel, $k < m$ par une application (simpliciale) h, telle que la classe d'homotopie $\{h\} \in \ker \phi$ si $k = 2$. Alors,*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_{\hat{\phi}}(L),$$

où $\widehat{\phi}$ est la factorisation naturelle de ϕ ($\widehat{\phi} \neq \phi$ seulement si $k = 2$ et $\{h\} \neq 0$).

Démonstration. — L'inclusion $K \to L$ vérifie les conditions du lemme 4.6, ceci implique l'inégalité $\sigma_\phi(K) \leqslant \sigma_{\widehat{\phi}}(L)$. Pour démontrer l'inégalité opposée, nous prenons une métrique simpliciale quelconque g sur K et nous allons la prolonger sur L tout entier. Posons $l = \mathrm{sys}_\phi(K, g) + 3$ et choisissons r pour vérifier l'inégalité Lip $h < 1$, si sur la sphère S^{k-1} on prend une métrique ds_r^2 de courbure constante $\frac{1}{r}$.

On considère le cylindre $S^{k-1} \times [0, l]$ muni de la métrique suivante :

$$g' = \begin{cases} (h^*(g)(1-u) + u\,ds_r^2) + du^2, & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ ds_r^2 + du^2, & 1 \leqslant u \leqslant l \end{cases} \tag{4.4}$$

Ici u est la coordonnée sur l'intervale $[0, l]$, $h^*(g)$ est l'image réciproque de la métrique g donnée sur S^{k-1} induite par l'application simpliciale h.

On recolle ensuite une demi-sphère k-dimensionnelle de rayon r sur le bord $S^{k-1} \times \{l\}$ du cylindre. Ceci nous prolonge la métrique g' sur le disque B^k. Remarquons que la condition

$$g'|_{S^{k-1}\times\{0\}} = h^*(g)$$

nous assure le recollement métrique de g et g' dans une métrique unie sur $K \underset{h}{\cup} B^k$: nous la désignons par $\tilde{g}$.

Pour des raisons de dimension, la cellule recollée n'a pas de contribution dans le volume : $\mathrm{Vol}(L, \tilde{g}) = \mathrm{Vol}(L, g)$. La construction de la métrique $\tilde{g}$ nous garantit que la constante de Lipschitz de l'inclusion $(K, g) \to (L, \tilde{g})$ n'excède pas 1, et alors $\mathrm{sys}_{\widehat{\phi}}(L, \tilde{g}) \leqslant \mathrm{sys}_\phi(K, g)$.

On considère une courbe fermée non $\widetilde{\phi}_\#$-triviale γ sur L, telle que sa $\tilde{g}$-longueur vérifie l'inégalité :

$$l_{\tilde{g}}(\gamma) < \mathrm{sys}_\phi(K, g) + 1. \tag{4.5}$$

Cette courbe ne peut pas appartenir complètement au sous-domaine $u \geqslant 1$ (c'est-à-dire appartenir à l'intérieur de la cellule B^k), puisque elle serait contractile. Ceci implique que γ intersecte le sous-domaine $K \cup \{u \leqslant 1\}$. Si cette courbe intersecte aussi le sous-domaine $\{u \geqslant \frac{l}{2}\}$, sa longueur est supérieure ou égale à $\mathrm{sys}_\phi(K, g) + 1$, grâce au choix de l. Ceci est en contradiction avec (4.5) et nous en déduisons donc l'inclusion

$$\gamma \subset K \cup \left\{u \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Soit

$$p\colon K \cup \left\{u \leqslant \frac{1}{2}\right\} \to K$$

la projection naturelle, la construction de la métrique $\tilde{g}$ nous garantit Lip $p \leqslant 1$.

Nous voyons alors que la courbe $\gamma' = p(\gamma)$ appartient à K, est non ϕ-triviale (p est la rétraction par déformation) et que sa longueur vérifie $l_g(\gamma') \leqslant l_{\tilde{g}}(\gamma)$. Ceci implique

$$\mathrm{sys}_g(K) \leqslant \mathrm{sys}_{\tilde{g}}(L),$$

la démonstration est donc achevée. □

Soient K un polyèdre de dimension m, P un polyèdre de dimension strictement inférieure à m et $h\colon P \to K$ une application simpliciale. On considère le cylindre

$$Z(h) = P \times [0,1] \bigcup_{(p,1)=h(p)} K$$

de cette application, il est évident que $\dim Z(h) = m$. L'inclusion $j\colon K \to Z(h)$ et la projection $p\colon Z(h) \to K$, sont toutes les deux m-monotones. Elles sont également des équivalences d'homotopie, et induisent donc des isomorphismes des groupes fondamentaux. En appliquant le lemme 4.6 sur j et p, nous obtenons

LEMME 4.8. — *Soient K et P deux polyèdres et* $\dim P < \dim K = m$. *Alors pour chaque application simpliciale $h\colon P \to K$ et chaque épimorphisme $\phi\colon \pi_1(K) \to G$, l'égalité suivante est vérifiée*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_\phi(Z(h)).$$

LEMME 4.9. — *Soient K un polyèdre de dimension m et $P \subset K$ un sous-polyèdre,* $\dim P < m$, *qui soit contractile dans lui-même. Alors pour un épimorphisme quelconque $\phi\colon \pi_1(K) \to G$, l'égalité suivante est vérifiée*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_\phi(K \bigcup_P CP).$$

Démonstration. — La contractilité de P assure l'existence d'une rétraction $r\colon CP \to P$, qui baisse la dimension. On considère la suite d'applications

$$K \xrightarrow{i} K \bigcup_P CP \xrightarrow{r'} K,$$

où r' est le prolongement de r par l'identité sur chaque simplexe de $\overline{K \setminus P}$. Les deux applications i et r' sont m-monotones et elles induisent des isomorphismes sur les groupes fondamentaux. Le lemme maintenant est immédiat d'après le lemme 4.6. □

LEMME 4.10. — *Soient P un polyèdre de dimension inférieure à m et $K_i = P \cup_{h_i} B^m$, où les applications $h_i\colon S^{m-1} \to P$, $i = 0, 1$ sont homotopes. Alors il existe une équivalence homotopique m-monotone entre K_0 et K_1.*

Démonstration. — Soit $H\colon S^{m-1} \times I \to P$ une homotopie entre h_0 et h_1. Définissons l'équivalence homotopique $F\colon K_0 \to K_1$ par les formules suivantes :

$$\begin{cases} F(x) = x; & x \in P \\ F(x) = 2x; & x \in B^m(\frac{1}{2}) \\ F(s,r) = H(s, 2(1-r)); & x \in B^m(1) \setminus B^m(\frac{1}{2}). \end{cases}$$

Dans la dernière formule, on pose $x = (s,r)$ où $s \in S^{m-1}, r \in [\frac{1}{2}, 1]$ et on identifie $B^m(1) \setminus B^m(\frac{1}{2}) \simeq S^{m-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$.

En appliquant le théorème d'approximation simpliciale, nous pouvons considérer la dernière application comme simpliciale. La condition de m-monotonicité est vérifiée, puisque $\dim P \leqslant m-1$ et que $F^{-1}(x)$ contient un seul point quel que soit $x \in \overset{\circ}{B^m}$. □

La démonstration du lemme suivant est analogue à la précédente.

Lemme 4.11. — *Soient P_i, $i = 0, 1$ deux polyèdres équivalents à homotopoie près de dimension inférieure à m et $H\colon P_0 \to P_1$ une équivalence d'homotopie simpliciale. Si $h_0\colon S^{m-1} \to P_0$ est une application simpliciale et $h_1 = H \circ h_0$, alors il existe une équivalence d'homotopie m-monotone entre les deux polyèdres*

$$K_i = P_i \bigcup_{h_i} B^m, \quad i = 0, 1.$$

Remarque. — Les lemmes 4.10 et 4.11 sont évidemment valables si le nombre des m-cellules recollées est supérieur à 1.

Corollaire 4.12. — *Soient les polyèdres K_i, $i = 0, 1$ vérifiant les conditions du lemme 4.10 ou bien celles du 4.11. Alors pour chaque épimorphisme*

$$\phi\colon \pi_1(K_i) \longrightarrow G, i = 0, 1,$$

on a l'égalité :

$$\sigma_\phi(K_0) = \sigma_\phi(K_1).$$

Pour chaque paire polyèdrale $P \subset K$ l'espace quotient K/P possède la triangulation naturelle. Cette triangulation peut être obtenue à partir de la première subdivision barycentrique de la triangulation donnée sur K. On compte dans la suite que pour chaque paire polyèdrale $P \subset K$, l'espace quotient K/P est muni de cette triangulation.

Lemme 4.13. — *Soient K un polyèdre de dimension m et P un sous-polyèdre contractile dans lui-même,* $\dim P < m$. *Alors pour chaque épimorphisme $\phi\colon \pi_1(K) \to G$, on a l'égalité*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_\phi(K/P).$$

Remarque. — Il semble que la restriction dimensionnelle $\dim P < m$ est, en général, importante. Un contre-exemple (même un-dimensionnel, K est un graphe) se trouve dans [1]. Cet effet est très lié avec le fait que $\sigma_\phi(K)$ n'est pas un invariant homotopique pour un polyèdre K quelconque (voir [1]). Par contre, rappelons que l'invariance homotopique de $\sigma_\phi(K)$ est valable si K est une variété. Dans ce contexte, nous sommes dans le cadre général, c'est-à-dire K est un polyèdre fini quelconque.

Démonstration. — Il est évident que la projection naturelle $K \to K/P$ est (après une subdivision barycentrique) une application m-monotone. En appliquant le lemme 4.6 nous obtenons

$$\sigma_\phi(K) \leqslant \sigma_\phi(K/P).$$

On définit une application

$$l\colon K \longrightarrow K\bigcup_P CP$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $l(P) = c \in CP$, où c désigne le sommet du cône ;
2. Il existe un voisinage (polyèdral) $U \supset P$ tel que $l\colon K \setminus U \to K \setminus P$ est un homéomorphisme et $l(\overline{U}) \subseteq CP$.

On obtient de 1. que l se factorise sur l'application

$$\tilde{l}\colon K/P \longrightarrow K\bigcup_P CP.$$

Soit r' l'application qui figure dans la démonstration du lemme 4.9. Puisque $\dim P < m$, nous obtenons que l'application $r' \circ \tilde{l}$ diminue la dimension de tous les m-simplexes $\tau \subset K$ tels que $\tilde{l}(\tau) \subset CP$.

On voit maintenant que la condition 2. assure la m-monotonicité de l'application $r' \circ l\colon K/P \to K$, ceci avec le lemme 4.6 implique l'inégalité principal

$$\sigma_\phi(K) \geqslant \sigma_\phi(K/P).$$

Pour finir la démonstration, il reste à construire une application l.

On considère un simplexe de dimension k $\tau(v_0, v_1, \dots, v_k)$ et un entier $-1 \leqslant p \leqslant k-1$. Notons

$$w_{ij} = \frac{v_i + v_j}{2},\ 0 \leqslant i \leqslant p;\ p+1 \leqslant j \leqslant k,$$

les milieux des arêtes joignant les sommets $\{v_0, \dots, v_p\}$ avec les sommets $\{v_{p+1}, \dots, v_k\}$.

Le sous-ensemble $\operatorname{conv}(\{w_{ij}\}_{i=0,\, j=p+1}^{p,\, k})$ divise τ en deux convexes :

$$\tau_+(p,k) = \operatorname{conv}(v_0, \dots, v_p; \{w_{ij}\}),\ \tau_-(p,k) = \operatorname{conv}(\{w_{ij}\}; v_{p+1}, \dots, v_k).$$

Si $p = -1$ nous posons $\tau_+(-1,k) = \varnothing$, $\tau_-(-1,k) = \tau(v_0, \dots, v_k)$.

On voit facilement que la correspondance des sommets

$$\begin{array}{rcl} s_+(p,k)(v_\alpha) & = & v_\alpha;\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant p \\ s_+(p,k)(w_{i\beta}) & = & v_\beta;\quad 0 \leqslant i \leqslant p,\quad p+1 \leqslant \beta \leqslant k \end{array}$$

définit de manière correcte une application des corps convexes :

$$s_+(p,k)\colon \tau_+(p,k) \longrightarrow \tau(v_0, \dots, v_k).$$

De la même manière la correspondance des sommets

$$\begin{array}{rcll} s_-(p,k)(w_{i\beta}) & = & v_\beta; & 0 \leqslant i \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \beta \leqslant k \\ s_-(p,k)(v_\beta) & = & c; & p+1 \leqslant \beta \leqslant k \end{array}$$

nous définit une application des corps convexes :

$$s_-(p,k)\colon \tau_-(p,k) \longrightarrow \tau(v_{p+1},\dots,v_k,c) = C\tau(v_{p+1},\dots,v_k).$$

Ces deux applications $s_\pm(p,k)$ sont concordantes sur la frontière commune

$$\mathrm{conv}\{w_{ij}\} = \tau_+(p,k) \cap \tau_-(p,k)$$

et elles définissent l'application continue

$$s(p,k)\colon \tau(v_0,\dots,v_k) \longrightarrow \tau(v_0,\dots,v_k) \cup C\tau(v_{p+1},\dots,v_k). \tag{4.6}$$

Remarquons aussi que la restriction de l'application (4.6) sur $\tau_+(p,k) \setminus \mathrm{conv}\{w_{ij}\}$ est un homéomorphisme.

Ensuite en passant, si il est nécessaire, à une subdivision de la triangulation donnée, nous pouvons considérer P comme un sous-polyèdre complet dans K. Cela signifie que si tous les sommets d'un simplexe de K appartiennent à P, ce simplexe, lui même, appartient à P. On considère le sous-polyèdre $N \subset K$ maximal disjoint de P. Pour chaque simplexe $\tau \notin N$, on a

$$\tau(v_0,\dots,v_k), \ \text{où}\ \tau(v_0,\dots,v_p) \subset N, \tau(v_{p+1},\dots,v_k) \subset P.$$

On définit l sur τ en posant $l|_\tau = s(p,k)$, où $s(p,k)$ est l'application (4.6). On voit sans peine que toutes les applications définies sur les simplexes différents n'appartenant pas à N sont concordantes et qu'elles définissent l'application

$$l\colon \overline{K \setminus N} \longrightarrow \overline{K \setminus N} \bigcup_P CP.$$

En prolongeant l sur N comme l'application identique, nous obtenons une application qui vérifie les propriétés 1. et 2. précédentes. Ceci achève la démonstration. □

Remarque. — L'application construite, en général, n'est pas simpliciale sur $\overline{K \setminus N}$. Ce défaut est facile à corriger si on passe à une subdivision suffisante.

5. Constantes systoliques pour les polyèdres orientables

En utilisant la technique développée dans §4, nous finissons la démonstration de la proposition 3.1 et donc les démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2.

DÉFINITION 5.1. — *Un polyèdre X de dimension m est appelé orientable si $H_m(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ et $H_{m-1}(X;\mathbf{Z})$ n'a pas de torsion ;*

X est appelé non-orientable si $H_m(X;\mathbf{Z}) = 0$ et $H_{m-1}(X;\mathbf{Z})$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_2$.

Cette définition correspond à la définition de l'orientabilité des pseudo-variétés (voir [21]), toutefois, nous aurons besoin dans la suite d'une catégorie plus large que la catégorie des pseudo-variétés. Remarquons que les polyèdres utilisés par la suite ne seront même pas m-dimensionnellement homogènes [21].

La proposition 3.1 est la conséquence directe de la proposition générale suivante et du lemme 2.3.

PROPOSITION 5.2. — *Soit X un complexe cellulaire fini avec une seule cellule de dimension supérieure m. Supposons que X est orientable, possède une triangulation cohérente avec la structure cellulaire et admet une application $f: X \to \mathbf{R}P^m$ induisant un épimorphisme des groupes fondamentaux et un isomorphisme en $\mathbf{Z}_2$-homologie m-dimensionnelle, alors*

$$\sigma_{f_*}(X) \geqslant \sigma_m. \tag{5.1}$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'énoncé de la proposition implique l'imparité de m. En effet, supposons m pair. En appliquant l'homomorphisme de Bockstein sur les $\mathbf{Z}_2$-classes fondamentales, nous obtenons

$$\beta([\mathbf{R}P^{2k}]_2) = \beta(f_*([X]_2)) = f_*(\beta([X]_2)) = f_*(0) = 0,$$

puisque l'orientabilité de X implique $\beta([X]_2) = 0$. D'autre part,

$$\beta([\mathbf{R}P^{2k}]_2) \in H_{m-1}(\mathbf{R}P^{2k}; Z)$$

est le générateur. Cette contradiction nous montre que m est forcément impair, ce qui sera supposé dans la suite de la démonstration.

On construit un nouveau polyèdre K de dimension m vérifiant les propriétés suivantes :

1). $\pi_1(K) = \mathbf{Z}_2$, il existe une inclusion $i: X \subset K$ telle que $i_* = f_*$ sur les groupes fondamentaux ;

2). $\sigma(K) = \sigma_{f_*}(X)$;

3). il existe une application m-monotone $h: \mathbf{R}P^m \to K$, induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux.

On voit que 2), 3) et le lemme 4.6 implique l'inégalité (5.1).

Nous construisons le polyèdre K en recollant des cellules par un procédé récursif, posons $K_1 = X$.

Le sous-groupe ker $f_* \subset \pi_1(X)$ est de présentation finie comme un sous-groupe d'indice 2. En recollant le nombre nécessaire de disques 2-dimensionnels par des applications simpliciales, nous obtenons un CW-complexe fini

$$K_2 = K_1 \bigcup_{j_2} B^2_{j_2}$$

et l'inclusion $i_{12}\colon K_1 \to K_2$, tels que $\pi_1(K_2) = \mathbf{Z}_2$ et $(i_{12})_* = f_*$. Enfin, on prolonge la triangulation donnée sur K_1 sur les disques deux-dimensionnels recollés, par le procédé donné en §4. Cela définit une triangulation cohérente sur K_2 et i_{12} devient une application simpliciale.

Ensuite, en éliminant par récurrence les groupes homotopiques supérieurs des CW-complexes qui apparaissent, nous obtenons la suite des CW-complexes

$$K_r = K_{r-1} \bigcup_{j_r} B^r_{j_r};\ r = 2,3,\dots,m-1 \tag{5.2}$$

et la suite des inclusions naturelles

$$i_{pq}\colon K_p \longrightarrow K_q;\ 2 \leqslant p < q \leqslant m-1. \tag{5.3}$$

On triangule en accord avec les structures cellulaires les complexes (5.2) (comme il est fait en §4), avec cela les inclusions (5.3) deviennent simpliciales. Le dernier complexe construit K_{m-1} vérifie les propriétés suivantes :

a) $\pi_1(K_{m-1}) = \mathbf{Z}_2$;

b) $\pi_k(K_{m-1}) = 0; 2 \leqslant k \leqslant m-2$;

c) $(i_{1m-1})_* = f_*$ sur les groupes fondamentaux;

d) $(i_{1m-1})_*\colon H_m(X;\mathbf{k}) \longrightarrow H_m(K_{m-1};\mathbf{k})$ est un isomorphisme pour chaque anneau $\mathbf{k}$;

e) $\sigma(K_{m-1}) = \sigma_{f_*}(X)$.

Les propriétés a)–c) sont évidentes de par la construction ; toutes les cellules attachées sont de dimension inférieure à m, ceci implique d) ; enfin le lemme 4.7 implique e).

Remarquons ensuite que les propriétés a) et b) garantissent l'existence d'une application

$$h\colon \mathbf{R}P^{m-1} \longrightarrow K_{m-1},$$

qui induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. On considère le cylindre $\widetilde{K} = Z(h)$ de cette application. Le procédé de construction de K_{m-1} nous définit la structure cellulaire dessus avec une seule cellule de dimension m. La structure simpliciale concordante est également définie. On prend sur $\mathbf{R}P^{m-1}$ la structure cellulaire canonique (une cellule dans chaque dimension) et on munit $\mathbf{R}P^m$ d'une structure simpliciale concordante. En appliquant le théorème sur l'approximation simpliciale, on peut considérer l'application h comme cellulaire et simpliciale en même temps par rapport aux structures cellulaires et simpliciales considérées. Ceci nous définit les structures cellulaires et simpliciales concordantes sur $\widetilde{K}$ (voir [19]).

Le lemme 4.8 avec e). implique maintenant

$$\sigma(\widetilde{K}) = \sigma(K_{m-1}) = \sigma_{f_*}(X). \tag{5.4}$$

On prolonge l'inclusion $i_{1m-1}\colon X \to K_{m-1} \subset \widetilde{K}$ et on voit facilement que le polyèdre $\widetilde{K}$ vérifie les propriétés a)., b). et c). puisqu'il est équivalent à homotopie près à K_{m-1}. De plus, l'inclusion $i\colon \mathbf{R}P^{m-1} \to \widetilde{K}$ induit l'isomorphisme des groupes fondamentaux.

Enfin on passe à l'étape finale de la construction du polyèdre K, elle consiste à éliminer les cellules « superflues » dans $\widetilde{K}$. Remarquons que $\widetilde{K}$ contient déjà plus qu'une cellule de dimension m (exactement 2 si on munit $\mathbf{R}P^{m-1}$ de la structure canonique). Des cellules m-dimensionnelles peuvent encore apparaître pendant le procédé d'élimination que nous allons effectuer. Notons $\mathbf{e}_*^m$ l'unique m-cellule de X. Puisque $X \subset \widetilde{K}$ est un sous-complexe, alors $\mathbf{e}_*^m$ est une cellule de $\widetilde{K}$. Nous appelons *principale* cette cellule, qui va jouer un rôle essentiel dans la suite. Les autres m-cellules ne seront pas importantes.

La paire $(\widetilde{K}, \mathbf{R}P^{m-1})$ est $m-2$-connexe et par un procédé topologique général, on peut supprimer toutes les cellules de $\widetilde{K}$ n'appartenant pas à $\mathbf{R}P^{m-1}$ de dimension inférieure ou égale à $m-2$. Ce procédé est bien connu en théorie d'homotopie, mais notre but est de contrôler correctement certains invariants géométriques des polyèdres obtenus. Pour cela nous redétaillons ce procédé sous un angle géométrique. Soit $\mathbf{R}P^{m-1} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \mathbf{e}^k$ la décomposition canonique.

Pas 0 : suppression des cellules de dimension 0. Soit $\mathbf{e}^0(\alpha)$ une 0-cellule de $\widetilde{K}$ différente de $\mathbf{e}^0$. Compte-tenu de la connexité de $\widetilde{K}$, il existe un chemin (simplicial) $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$; $\gamma(0) = \mathbf{e}^0, \gamma(1) = \mathbf{e}^0(\alpha)$ passant dans le 1-squelette de $\widetilde{K}$. On recolle le disque B^2 avec $\widetilde{K}$ par l'application $\gamma(t)$ définie sur le demi-cercle « sud » $\partial B^2 = \{x^2+y^2 = 1\}$. Le polyèdre obtenu $\widetilde{K} \bigcup_\gamma B^2$ admet une rétraction par déformation sur $\widetilde{K}$ qui est évidemment m-monotone. On obtient du lemme 4.6

$$\sigma(\widetilde{K} \bigcup_\gamma B^2) = \sigma(\widetilde{K}).$$

Ensuite, en contractant en un point le demi-cercle « nord » du disque recollé, nous supprimons la cellule $\mathbf{e}^0(\alpha)$. Notons $\widetilde{K}(\alpha)$ le polyèdre obtenu. Grâce au lemme 4.13, ce passage respecte l'invariant σ : $\sigma(\widetilde{K}(\alpha)) = \sigma(\widetilde{K})$. En itérant convenablement cette opération, nous supprimons toutes les 0-cellules sauf $\mathbf{e}^0$. Nous notons $\widetilde{K}_1$ le polyèdre obtenu ; par construction, il est équivalent à homotopie près à $\widetilde{K}$ et, comme nous l'avons prouvé, $\sigma(\widetilde{K}_1) = \sigma(\widetilde{K})$.

Pas 1 : suppression en dimension 1. Ce pas est un peu différent du pas 0 et des suivants, et nous l'exposons donc de manière plus détaillée. Soit $\mathbf{e}_\alpha^1$ une 1-cellule de $\widetilde{K}_1$ différente de $\mathbf{e}^1$. Les cellules $\mathbf{e}_\alpha^1$ et $\mathbf{e}^1$ se représentent comme deux cercles plongés dans $\widetilde{K}_1$ avec un seul point commun $\mathbf{e}^0$. Deux possibilités apparaissent :

(1) : $\mathbf{e}_\alpha^1$ et $\mathbf{e}^1$ sont homotopes ; (2) : $\mathbf{e}_\alpha^1$ est contractile (dans $\mathbf{e}^0$).

On considère la première possibilité. En interprétant les 1-cellules comme des applications du cercle, nous obtenons $\mathbf{e}_\alpha^1 \circ \mathbf{e}^1 \sim 0$. Alors, il existe une application (simpliciale) du 2-disque $F_\alpha : B^2 \to \widetilde{K}_1$ telle que, sur le demi-cercle « nord » de ∂B^2, elle coïncide avec $\mathbf{e}^1$ et, sur le demi-cercle « sud », elle coïncide avec $\mathbf{e}_\alpha^1$. Considérons le disque 3-dimensionnel $B^3 = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ muni de la structure cellulaire suivante :

$$f_\pm^0 = \{(0,\pm 1, 0)\}; \quad f_\pm^1 = \{(\pm\cos t, \sin t, 0); -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\};$$

$$f^2_\pm = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0 (z < 0)\};\quad f^3 = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 < 1\}.$$

Recollons ce disque avec $\widetilde{K}_1$, en prenant sur f^2_- l'application F_α. (On suppose de plus que f^1_+ est envoyée par $\mathbf{e}^1$, respectivement f^1_- est envoyée par $\mathbf{e}^1_\alpha$.) Le polyèdre obtenu $\widetilde{K}_1 \bigcup_{F_\alpha} B^3$ est déformable sur $\widetilde{K}_1$ (le long les segments verticaux du disque B^3) et cette déformation est m-monotone, puisqu'elle baisse la dimension. En appliquant le lemme 4.6, nous obtenons $\sigma(\widetilde{K}_1) = \sigma(\widetilde{K}_1 \bigcup_{F_\alpha} B^3)$. Strictement dit, pour appliquer le lemme 4.6, il faut trianguler B^3 à l'aide d'une triangulation cohérente avec la structure cellulaire considérée et de telle façon que la déformation considérée plus haut soit simpliciale.

Ensuite, en contractant la cellule « libre » f^2_+ le long les demi-cercles verticaux : $y =$ const, $z > 0$, nous déformons la cellule $\mathbf{e}^1_\alpha$ en $\mathbf{e}^1$, et nous obtenons un polyèdre $\widetilde{K}_1(\alpha)$ équivalent à homotopie près à $\widetilde{K}_1$. Une petite modification du lemme 4.13 nous garantit que σ ne se modifie pas par cette opération. Remarquons que cette modification du lemme 4.13 est nécessaire uniquement si $m = 3$. Si la dimension m est > 3, ce passage est automatique et toutes les applications impliquées sont m-monotones pour des raisons dimensionnelles.

(2). La deuxième possibilité correspond au cas général pour toutes les k-cellules, $k \geqslant 2$, et il est considéré plus bas. En itérant convenablement ce procédé de suppression des 1-cellules, nous supprimons toutes les 1-cellules sauf $\mathbf{e}^1$. Notons $\widetilde{K}_2$ le polyèdre final. Il est équivalent à homotopie près à $\widetilde{K}_1$, et donc à $\widetilde{K}$. Comme nous l'avons montré, $\sigma(\widetilde{K}_2) = \sigma(\widetilde{K})$.

Pas $k \geqslant 2$: suppression des cellules en dimension $k \geqslant 2$.

Supposons que toutes les cellules de $\widetilde{K}$ de dimensions $l < k; k \geqslant 2$ n'appartenant pas à $\mathbf{R}P^{m-1}$ sont déjà supprimées. Nous notons $\widetilde{K}_k$ le polyèdre obtenu. Soit $\mathbf{e}^k_\alpha$ une cellule k-dimensionnelle de $\widetilde{K}_k$ n'appartenant pas à $\mathbf{R}P^{m-1} \subset \widetilde{K}_k$. Grâce à l'hypothèse d'induction, cette cellule est recollée par une application

$$u_\alpha\colon S^{k-1} \longrightarrow \mathbf{R}P^{k-1} \subset \mathbf{R}P^{m-1} \subset \widetilde{K}_k,$$

qui est triviale à homotopie près dans $\mathbf{R}P^{m-1}$ (puisque $k < m-1$). Grâce au lemme 4.11, à son tour, on peut compter que u_α est triviale, c'est-à-dire

$$\mathbf{e}^k_\alpha \bigcup \mathbf{R}P^{m-1} \simeq S^k \bigvee \mathbf{R}P^{m-1}.$$

Ensuite, nous associons $\mathbf{e}^k_\alpha$ à une sphère plongée $S^k \subset \widetilde{K}_k$. Ce plongement étant homotopiquement trivial ($\pi_k(\widetilde{K}_k) = 0$, $k \leqslant m-2$), il existe alors une homotopie $F_\alpha\colon B^{k+1} \to \widetilde{K}_k$ (que nous supposons simpliciale) telle que $F_\alpha \,|\, \partial B^{k+1} = \chi_{\mathbf{e}^k_\alpha}$, où χ signifie l'application caractéristique d'une cellule. On fait ensuite comme dans les pas 0 ou 1(2). On considère la boule B^{k+2}, et on la recolle avec $\widetilde{K}_k$ par l'application F_α considérée sur la demi-sphère « sud » $\partial_{\text{sud}} B^{k+2} \subset \partial B^{k+2}$. Le polyèdre obtenu $\widetilde{K}_k \bigcup_{F_\alpha} B^{k+2}$ est déformable sur $\widetilde{K}_k$ (le long des segments verticaux du disque B^{k+2}) et cette déformation est m-monotone. On obtient du lemme 4.6,

$$\sigma(\widetilde{K}_k) = \sigma(\widetilde{K}_k \bigcup_{F_\alpha} B^{k+2}).$$

Comme dans les pas 0 et 1(2), on contracte en un point le disque plongé $\partial_{\text{nord}}B^{k+2} \subset \partial B^{k+2}$ et on supprime par cette opération la cellule $\mathbf{e}_\alpha^k$. Le lemme 4.13 implique immédiatement que ce passage ne modifie pas l'invariant σ. En itérant un nombre nécessaire de fois cette opération, nous supprimons toutes les k-cellules n'appartenant pas à $\mathbf{R}P^{m-1}$. Ceci nous ramène au CW-complexe $\widetilde{K}_{k+1}$ muni d'une triangulation cohérente (avec sa structure cellulaire) et équivalent à homotopie près à $\widetilde{K}_k$, et de plus

$$\sigma(\widetilde{K}_k) = \sigma(\widetilde{K}_{k+1}).$$

L'induction est achevée.

Nous pouvons reconduire le procédé de suppression des cellules jusqu'à la dimension $k = m-2$ comprise. Le polyèdre $\widetilde{K}_{m-2}$ obtenu comme résultat de ce procédé sera le polyèdre K qui nous intéresse. Nous avons démontré que $\sigma(K) = \sigma(\widetilde{K})$ et compte-tenu de (5.4), ceci implique que

$$\sigma(K) = \sigma_{f_*}(X). \tag{5.5}$$

L'application naturelle

$$i : \widetilde{K} \longrightarrow K \tag{5.6}$$

est une équivalence homotopique, et alors de d). nous obtenons que la composition des applications

$$i \circ i_{1,m-1} \colon X \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow K \tag{5.7}$$

induit un isomorphisme

$$(i \circ i_{1,m-1})_* \colon H_m(X;\mathbf{k}) \longrightarrow H_m(K;\mathbf{k})$$

quel que soit l'anneau $\mathbf{k}$. Soient K^{m-1} le $(m-1)$-squelette du CW-complexe K, $\chi_{\mathbf{e}_*^m}$ l'application caractéristique de la cellule principale $\mathbf{e}_*^m$. Nous avons donc l'isomorphisme suivant

$$H_m(B^m, \partial B^m; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\chi_{\mathbf{e}_*^m}} H_m(K, K^{m-1}; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{j_*^{-1}} H_m(K, \mathbf{Z}_2),$$

où j_* est l'homomorphisme de la suite exacte de la paire (en général, j_*^{-1} est défini partiellement).

On considère la structure cellulaire du CW-complexe K. Par la construction $K^{m-2} = \mathbf{R}P^{m-2}$ et soit

$$K^{m-1} = \mathbf{R}P^{m-1} \bigcup_{\alpha=1}^{r} \mathbf{e}_\alpha^{m-1}.$$

Toutes les applications de recollement

$$u_\alpha \colon S^{m-2} \longrightarrow K^{m-2} \subset \mathbf{R}P^{m-1}, 1 \leqslant \alpha \leqslant r$$

sont contractiles dans $\mathbf{R}P^{m-1}$, et alors K^{m-1} est équivalent à homotopie près au bouquet

$$K^{m-1} \simeq \mathbf{R}P^{m-1} \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}. \tag{5.8}$$

Selon le lemme 4.11, un changement du squelette de dimension inférieure à m par un CW-complexe de la même dimension et équivalent à homotopie près au squelette ne change pas l'invariant σ. Alors nous pouvons compter sur le fait que la structure cellulaire de K^{m-1} est donnée par la formule (5.8). Soit $u_*: S^{m-1} \to K^{m-1} = \mathbf{R}P^{m-1} \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}$ l'application de recollement de la cellule principale $\mathbf{e}_*^m$ avec K^{m-1}. On considère le sous-complexe $K' = (K^{m-1} \bigcup_{u_*} \mathbf{e}_*^m) \subset K$ obtenu comme ce seul recollement de la cellule principale. La cellule principale n'est rien d'autre que l'image par l'application (5.7) de l'unique m-cellule du polyèdre X. Alors l'application $l = i \circ i_{1,m-1}$ est en réalité une application dans K'

$$l\colon X \longrightarrow K' \subset K. \tag{5.9}$$

On tire de l'asphérisité de $\mathbf{R}P^m$ (jusqu'à la dimension $m-1$ comprise) que l'application initiale f se prolonge en une application $f_{m-1}\colon K_{m-1} \to \mathbf{R}P^m$. Grâce à une équivalence homotopique $K_{m-1} \simeq \widetilde{K} \simeq K$, cette application à son tour se prolonge en une application

$$\widehat{f}\colon K \longrightarrow \mathbf{R}P^m.$$

Alors f se décompose à homotopie près : $f \simeq \widehat{f} \circ l$. On obtient que l'application induite en m-homologie

$$\widehat{f}_*\colon H_m(K';\mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_m(\mathbf{R}P^m;\mathbf{Z}_2)$$

est un isomorphisme puisque f_* est un isomorphisme.

Ensuite, chaque application $g\colon \mathbf{R}P^{m-1} \to \mathbf{R}P^m$ induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux est homotope à l'inclusion canonique. Compte-tenu de (5.8), nous pouvons donc supposer que $\widehat{f}\,|_{\mathbf{R}P^{m-1}}$ est l'inclusion canonique et que $\widehat{f}$ contracte chaque terme S_α^{m-1} de (5.8) en un point.

Pour le revêtement universel $\widehat{K}^{m-1}$ de K^{m-1}, on a la décomposition suivante

$$\widehat{K}^{m-1} = \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}(-) \bigvee S^{m-1}(0) \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}(+);\ \theta, \tag{5.10}$$

où θ est l'involution correspondante sur $\widehat{K}^{m-1}$. Avec ceci, on suppose que l'involution θ agit sur la décomposition (5.10) de la manière suivante : sur $S^{m-1}(0)$, θ est la symétrie centrale ; les bouquets $\bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}(\pm)$ sont attachés aux pôles nord et sud de la sphère $S^{m-1}(0)$ conformément et θ transfère $S_\alpha^{m-1}(\pm)$ avec $S_\alpha^{m-1}(\mp)$. Si m est impair, θ renverse l'orientation sur $S^{m-1}(0)$ et nous supposons que les orientations de $S_\alpha^{m-1}(\pm)$ et S_α^{m-1} sont choisies de telle façon que θ envoie $S_\alpha^{m-1}(\pm)$ sur $S_\alpha^{m-1}(\mp)$ en changeant l'orientation.

On considère les générateurs de $\pi_{m-1}(\widehat{K}^{m-1}) \simeq \pi_{m-1}(K^{m-1})$:

$$a_\alpha^\pm, 1 \leqslant \alpha \leqslant r; b \tag{5.11}$$

correspondant aux inclusions des $(m-1)$-sphères dans (5.10) et d'après le choix des orientations plus haut. Ensuite, on considère l'application de recollement u_* de la cellule principale et son relèvement $\hat{u}_*: S^{m-1} \to \hat{K}^{m-1}$. On décompose la classe homotopique $\{\hat{u}_*\}$ dans la base (5.11).

$$\{\hat{u}_*\} = \sum_{\alpha=1}^{r} q_\alpha^- a_\alpha^- + qb + \sum_{\alpha=1}^{r} q_\alpha^+ a_\alpha^+. \tag{5.12}$$

On voit sans peine de (5.12) que l'application induite en homologie par $\hat{f}$

$$\hat{f}_*: H_m(K'; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_m(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}) \tag{5.13}$$

est la multiplication par q. Puisque cette dernière application (5.13) est aussi non triviale modulo 2, nous obtenons que q est impair.

On considère maintenant l'opérateur frontière dans l'espace des m-chaînes cellulaires correspondant à la décomposition cellulaire (5.8). On obtient de (5.12) l'égalité

$$\partial \mathbf{e}_*^m = \sum_{\alpha=1}^{r} (q_\alpha^+ - q_\alpha^-) \mathbf{e}_\alpha^{m-1}. \tag{5.14}$$

Remarquons que la cellule $\mathbf{e}^{m-1} \subset \mathbf{R}P^{m-1}$ ne figure pas dans cette formule puisque m est impair. L'égalité $H_m(K'; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ implique $\partial \mathbf{e}_*^m = 0$, et avec (5.14), nous obtenons

$$q_\alpha^+ = q_\alpha^-, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{5.15}$$

On passe à la construction d'une application m-monotone

$$\mathbf{R}P^m \longrightarrow K' \subset K$$

conservant les groupes fondamentaux. On définit l'application de la sphère $S^{m-1} = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^m$ dans elle-même par la formule suivante

$$\hat{\mathbf{q}}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (r\cos(q\phi), r\sin(q\phi), x_3, \ldots, x_m),$$

où $re^{i\phi} = x_1 + ix_2$. Compte-tenu de la parité de q, cette application commute avec la symétrie centrale de la sphère et elle définit donc l'application suivante

$$\mathbf{q}: \mathbf{R}P^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}P^{m-1}. \tag{5.16}$$

Cette dernière application induit un isomorphisme des groupes fondamentaux et la multiplication par q dans $\pi_{m-1}(\mathbf{R}P^{m-1})$. Définissons finalement l'application $F = F(q; q_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant r)$ comme une application composée à l'aide du diagramme suivant

$$\mathbf{R}P^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}P^{m-1} \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1} \xrightarrow{\mathbf{q} \bigvee_{\alpha=1}^{r} \hat{\mathbf{q}}_\alpha^+} \mathbf{R}P^{m-1} \bigvee_{\alpha=1}^{r} S_\alpha^{m-1}. \tag{5.17}$$

L'application à gauche de ce diagramme crée r « bulles » sur $\mathbf{R}P^{m-1}$ en contractant en un point r sphères disjointes localement plongées $S_\alpha^{m-2} \subset \mathbf{R}P^{m-1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$. En considérant les revêtements universels, on voit facilement que sur π_{m-1}, F induit l'application suivante

$$F_*(b) = -\sum_{\alpha=1}^{r} q_\alpha^+ a_\alpha^- + qb + \sum_{\alpha=1}^{r} q_\alpha^+ a_\alpha^+, \tag{5.18}$$

qui, selon (5.15), correspond à la décomposition (5.12). En prenant le cône sur l'application F, nous obtenons l'application finale

$$\mathbf{R}P^m = \mathbf{R}P^{m-1} \bigcup_b CS^{m-1} \xrightarrow{CF} K^{m-1} \bigcup_{F_*(b)} CS^{m-1}.$$

Il est clair que cette application induit un isomorphisme des groupes fondamentaux et, de par sa construction, elle est m-monotone. Avec le lemme 4.6, on tire de là que

$$\sigma(\mathbf{R}P^m) \leqslant \sigma(K^{m-1} \bigcup_{F_*(b)} CS^{m-1}). \tag{5.19}$$

En comparant (5.12) et (5.18), nous voyons que $\{u_*\} = F_*(b)$, ceci avec le lemme 4.10 implique l'égalité

$$\sigma(K^{m-1} \bigcup_{F_*(b)} CS^{m-1}) = \sigma(K'). \tag{5.20}$$

Puisque $K' \subset K$ est un sous-polyèdre, nous obtenons d'après le lemme 4.6,

$$\sigma(K') \leqslant \sigma(K). \tag{5.21}$$

En réunissant (5.19), (5.20), (5.21) et (5.5), nous sommes amenés à l'inégalité finale

$$\sigma(\mathbf{R}P^m) \leqslant \sigma_{f_*}(X),$$

ce qui achève la démonstration. □

6. Remarques finales

1. Si X est un polyèdre non-orientable, nous pouvons seulement conclure, à la place de (5.15) que :

$$q_\alpha^+ \equiv q_\alpha^- \mod 2,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r.$$

Dans le cadre de notre approche, ceci ne nous permet malheureusement pas de construire une application « réciproque » $\mathbf{R}P^m \to K'$.

Soulignons une autre difference entre le cas orientable et non-orientable. Pour le groupe $\mathbf{Z}_2$, les variétés essentielles orientables n'existent qu'en dimension impaire. Les variétés essentielles non-orientables existent, par contre, dans chaque dimension supérieure à 1. La complexité du problème systolique pour les variétés non-orientables est liée à l'existence de deux types de paires (M, ϕ) non-orientables comme indiquées en §2. Ces types dépendent de l'orientabilité du revêtement double $\widetilde{M}_\phi$ et, dans le cas de la dimension paire, les variétés essentielles existent pour les deux types.

Ces deux types des paire (M, ϕ) apparaissent déjà en dimension 2 et l'alternative

$$\sigma_\phi = \sigma_2 \text{ ou } 0$$

reste en suspens pour une surface non-orientable arbitraire et un épimorphisme $\phi \colon \pi(M) \to \mathbf{Z}_2$ quelconque.

2. Il semble que l'inégalité énoncée dans la proposition 5.2 puisse être transformée en l'égalité $\sigma_{f_*}(X) = \sigma_m$ pour un polyèdre orientable de dimension m. Malheureusement, dans le cadre de notre approche, cela n'est pas réalisable. Un exemple assez simple et intéressant est donné par le polyèdre suivant

$$X_{(3)} = \mathbf{R}P^2 \bigcup_{3b} B^3,$$

où $b \in \pi_2(\mathbf{R}P^2)$ est un générateur. On choisit également une application $f \colon X_{(3)} \to \mathbf{R}P^3$, qui soit l'identité sur le 2-squelettes, et satisfaisant la proposition 5.2.

Cet exemple nous ramène à la question générale suivante :

Soient X un polyèdre fini orientable et $\phi \colon \pi_1(X) \to \mathbf{Z}_2$ un épimorphisme. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour la constante systolique $\sigma_\phi(X)$ en fonction de X et de ϕ ?

La notion d'essentialité et le théorème de Gromov sont valables dans le cas des polyèdres finis riemanniens. Le polyèdre $X_{(3)}$ considéré plus haut est évidemment essentiel et donc $\sigma(X_{(3)}) > 0$, mais malheuresement, on ne sait pas calculer cette valeur exactement !

L'essentialité de Gromov est un invariant algébrique. Cet invariant est lié à *l'essentialité géométrique.* Soient X un polyèdre fini (orientable) de dimension m, G un groupe de présentation fini et $\phi \colon \pi_1(X) \to G$ un épimorphisme. Disons que X est *géométriquement ϕ-essentiel* s'il n'existe aucune application $f \colon X \to K$, avec K polyèdre, qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\dim X > \dim K$;
2. $\ker f_* = \ker \phi$ sur les groupes fondamentaux.

L'essentialité algébrique de Gromov implique évidemment l'essentialité géométrique. Dans le cas des variétés orientables, ces deux notions d'essentialité sont équivalentes comme cela est démontré dans [1]. L'exemple suivant nous montre que, dans le cas général, c'est-à-dire pour un polyèdre quelconque, les deux notions sont différentes. Posons

$$X_{(2)} = \mathbf{R}P^2 \bigcup_{2b} B^3.$$

On peut voir facilement que $X_{(2)}$ est géométriquement essentiel. D'autre part, si $h \colon X_{(2)} \to \mathbf{R}P^\infty$ est l'application canonique alors l'application induite

$$h \colon H_3(X_{(2)}; \mathbf{k}) \longrightarrow H_3(\mathbf{R}P^\infty; \mathbf{k})$$

sera triviale quelque soient les coefficients **k**. Ceci nous conduit à poser la question suivante :

Est-ce qu'il existe des paires (X, ϕ), *où* X *est un polyèdre (orientable)* ϕ*-essentiel, telles que* $\sigma_{\phi}(X) = 0$ *?*

Je remercie Florent Balacheff, qui m'a aidé à rédiger ce texte.

Références

[1] I. Babenko, *Asymptotic invariants of smooth manifolds*, Russian Acad. Sci. Izv. Math., Vol. 41 (1993), pp. 1-38.

[2] I. Babenko and M. Katz, *Systolic freedom of orientable manifolds*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, T 31 (1998), pp. 787-809.

[3] I. Babenko, M. Katz and A. Suciu, *Volumes, middle-dimensional systoles, and Whitehead products*, Math. Res. Lett., Vol 5, (1998), pp. 461–471.

[4] I. Babenko, *Forte souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres*, Annales de l'Institut Fourier, Vol 52-5 (2002), pp. 1259–1284.

[5] C. Bavard, *Inégalité isopérimétrique pour la bouteille de Klein*, Math. Annalen., Vol 274 (1986), pp. 439–441.

[6] M. Berger, *A l'ombre de Loewner*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., T 5, (1972), pp. 241–260.

[7] M. Berger, *Systoles et applications selon Gromov*, exposé 771 Séminaire N. Bourbaki 1992/93 Astérisque, Vol 216 (1993), pp. 279–310.

[8] M. Berger, *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, Vol 100 (1998), pp. 45-208.

[9] D.B.A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. of London Math. Soc. Vol 16(3) (1966), pp. 369-383.

[10] I.I. Gordon, *Classification of the mappings of closed surfaces into the projective plane*. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) Vol 78 (1951), pp. 625–627.

[11] I.I. Gordon, *Classification of the mappings of an n-dimensional complex into an n-dimensional real projective space*. Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., Vol 16 (1952), pp. 113–146.

[12] M. Gromov, *Systoles and intersystolic inequalities*, (Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honeur de Marcel Berger, Collection SMF n°1 (1996), pp. 291–362.

[13] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., Vol 18, (1983), pp. 1–147.

[14] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser, 1999.

[15] M. Katz and A. Suciu, *Volume of Riemannian manifolds, geometric inequalities, and homotopy theory*, in Rothenberg Festschrift (M. Farber, W. Lueck, S. Weinberger, eds), Contemporary Mathematics, AMS, 1999.

[16] C. Croke, M. Katz, *Universal volume bounds in Riemannian manifolds*, Surveys in Differential Geometry, Vol VIII (2003), pp. 109-137.

[17] P. Olum, *Mapping of manifolds and the notion of degree*, Annals of Math., Vol 58(2) (1953), pp. 458–480.

[18] L.S. Pontrryagin, *Foundations of combinatorial Topology*, Graylock Press, 1952.

[19] M.M. Postnikov, *Lectures on algebraic topology. Homotopy theory of cell complexes*. "Nauka", Moscow, 1985.

[20] P.M. Pu, *Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds*, Pacific J. of Math., Vol 2 (1952), pp. 55–71.

[21] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[22] A.H. Wright, *Monotone Mappings and Degree One Mappings Between PL-Manifolds*, Geometric Topology, Proc. Conf. Parc City, Utah, 1974, Lecture Notes in Math., Vol 438, Springer-Verlag, Berlin (1975), pp. 441–459.

Ivan K. BABENKO
UMR 5149 (CNRS)
Département des Sciences Mathématiques
Université Montpellier II
Case courrier 051 - Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5 (France)

babenko@darboux.math.univ-montp2.fr