Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Constantin Vernicos

Formes harmoniques de longueur constante sur les variétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 117-124
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__117_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 117–124

FORMES HARMONIQUES DE LONGUEUR CONSTANTE SUR LES VARIÉTÉS

Constantin VERNICOS

Prologue

Ces notes correspondent à l'exposé donné au séminaire TSG de Grenoble le 19 décembre 2002 à l'occasion des 20 ans des actes du séminaire. Je les ai cependant complétées en fonction des modifications apportées aux papiers dont elles s'inspirent [Ver02] et [NV04]. Elles se veulent informelles, mais correctes. Pour un exposé plus formel on se reportera aux articles susmentionnés.

1. Motivations

Dans tout ce qui suit nous considérons une variété riemannienne (M^n, g) *compacte* et *orientable*. Le but de cette (longue) section est d'expliquer pourquoi on s'intéresse aux variétés riemanniennes possédant des formes harmoniques de longueur constante.

Pour cela nous allons introduire trois problématiques différentes dans lesquelles elles apparaissent.

1.1. Problème 1 : Variétés géométriquement formelles

Débutons notre exposé en définissant les objets que nous allons étudier.

Définition 1. — *Une métrique Riemannienne est dite « métriquement formelle » si et seulement si le produit extérieur de deux quelconques formes harmoniques est harmoniques.*

Définition 2. — *Une variété M^n sera dite « géométriquement formelle » si et seulement si elle admet une métrique formelle.*

2000 Mathematics Subject Classification : 53C20, 58J50.

REMARQUE 1. — Autrement dit, une variété est géométriquement formelle, si et seulement si elle admet une métrique pour laquelle l'espace $\mathcal{H}^*(M)$ des formes harmoniques est une algèbre.

CONSÉQUENCE. — Soit (M^n, g) une variété métriquement formelle. Soit α une p-forme harmonique alors, en notant $*$ l'opérateur de Hodge, $*\alpha$ est une $(n-p)$-forme harmonique. Ainsi la n-forme $\alpha \wedge (*\alpha)$ est harmonique par l'hypothèse de formalité et est donc proportionnelle à la forme volume *i.e.* $\alpha \wedge (*\alpha) = \|\alpha\|^2 \times$ forme volume. On en déduit donc que $\|\alpha\|$ est constante (c'est ce que l'on appelle la longueur de la forme). Autrement dit on a

PROPRIÉTÉ 1. — *Si (M,g) est métriquement formelle, alors toutes les formes harmoniques sont de longueur constante.*

Si on considère une variété (M^n, g), est-elle géométriquement formelle? La première obstruction vient donc de l'existence de formes harmoniques de longueur constante.

Pour d'autres considérations concernant ces variétés on pourra consulter [Kot01].

1.2. Problème 2 : Spectre macroscopique des nilvariétés

Soit G un groupe de Lie simplement connexe et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Dans l'algèbre on peut définir la suite suivante : $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]$ pour $i \geqslant 1$. S'il existe un entier p tel que $\mathfrak{g}_p = 0$, on dit que l'algèbre est nilpotente et, par abus de langage, que le groupe G est nilpotent — en toute rigueur on devrait dire que le groupe G est unipotent.

Si Γ est un sous-groupe co-compact d'un groupe G nilpotent, alors on dit que la variété compacte $M = G/\Gamma$ est une nilvariété. Dans la suite de cette section ce sont ces variétés qui attirerons notre attention.

À partir de $\mathfrak{g}$ on peut construire une nouvelle algèbre de Lie comme suit : par définition de la nilpotence, il existe un entier p tel que $\mathfrak{g}_p = 0$, on définit alors l'algèbre

$$\mathfrak{g}_\infty = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}. \tag{1}$$

À celle-ci on peut associer un unique groupe de Lie simplement connexe, *le groupe de Lie nilpotent gradué associé à G* que l'on note G_∞.

Il est bien clair que dans le cas où le groupe G est nilpotent et gradué, $G = G_\infty$ (*i.e.* les deux groupes sont isomorphes).

Soit l'espace vectoriel $V_1 = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, V_1 et ses crochets engendrent $\mathfrak{g}_\infty$. On rappel que l'espace tangent en l'élément neutre e de G_∞, noté $T_e G_\infty$ peut être identifier à l'algèbre de Lie de G_∞ et à l'ensemble des champs invariants à gauche. Ainsi V_1 donne naissance à une distribution – communément dite horizontale – correspondant aux champs invariants qu'il détermine dans TG_∞, le fibré tangent au groupe G_∞. On peut faire les remarques suivantes :

1. Si on se donne une métrique sur V_1, elle induit une distance de Carnot-Carathéodory sur G_∞, par restriction aux chemins tangents à V_1 en tout point (ou presqu'en tout point au sens de la mesure).
2. On peut définir un « Laplacien » sous riemannien en se restreignant à la distribution horizontale *i.e.* si $X_1, \dots, X_d$ engendrent V_1, on pose $\Delta_H = \sum X_i^2$

Un dernier élément important réside dans l'isomorphisme suivant :

$$V_1 \simeq H_1(M^n, \mathbb{R}) \tag{2}$$

(Le lecteur curieux consultera [Oni93] qui est une mine de résultats concernant les groupes de Lie).

Ainsi, si g est une métrique riemannienne sur (M^n, g) elle induit :
(α) une norme infinie — norme « sup » — sur les 1-formes ;
(β) un produit scalaire sur les 1-formes, grâce à la norme L^2.
par passage au quotient au H^1 puis par dualité cela induit également
(α) → la norme dite stable sur H_1 et notée $\|\cdot\|_\infty$;
(β) → la métrique d'Albanese sur H_1, notée $\|\cdot\|_{\mathrm{al}}$.

En utilisant la remarque 1 et l'isomorphisme (2), on en déduit deux ensembles particuliers de G_∞ :
(α) → $B_\infty(1)$ la boule unité pour la distance de Carnot associée à $\|\cdot\|_\infty$;
(β) → $B_{\mathrm{al}}(1)$ la boule unité pour la distance de Carnot associée à $\|\cdot\|_{\mathrm{al}}$ (qui est **euclidienne** !).

Enfin de la comparaison des normes sup et L^2 on obtient les inclusions suivantes :

$$B_{\mathrm{al}}(1) \subset B_\infty(1) \subset G_\infty.$$

Ces définitions et remarques en tête on peut énoncer le théorème suivant

THÉORÈME 2 ([Ver02]). — *Soit (M^n, g) une nilvariété, $B_g(\rho)$ la boule géodésique de rayon ρ induite sur son revêtement universel et $\lambda_i(B_g(\rho))$ la i-ème valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet.*

Alors, si λ_i^∞ est la i-ème valeur propre de Δ_∞ (sous laplacien induit par la métrique d'Albanese) sur $B_\infty(1)$ et λ_i^{al} la i-ème valeur propre de Δ_∞ sur $B_{al}(1)$ on a

1. $\lim_{\rho\to\infty} \rho^2\lambda_i(B_g(\rho)) = \lambda_i^\infty \leqslant \lambda_i^{al}$;
2. *en cas d'égalité, toutes les 1-formes harmoniques sont de longueurs constantes.*

C'est de ce théorème que vient notre deuxième problème, puisque la classification du cas d'égalité va de paire avec la classification des nilvariétés ayant toutes leurs 1-formes harmoniques de longueurs constantes.

1.3. Problème 3 : Inégalités isosystoliques stables

Un troisième cadre où de telles variétés apparaissent est celui du cas d'égalité dans les inégalités isosystoliques stables – voir l'article récent de V. Bangert et M. Katz [BK03a] et ses références pour de plus amples détails.

Dans ce domaine on considère des variétés orientées fermées (M^{n+1}, g) telles que $b_1(M) > 0$. Le but de cette théorie est de contrôler le volume de la variété en fonction de la longueur — voir les articles susmentionnées pour plus de précisions — de certaines géodésiques fermées (les systoles). Une inégalité vérifiée par ces variétés est la suivante :

$$\mathrm{stsys}_1(g)\mathrm{sys}_n(g) \leqslant \gamma'_{b_1(X)}\mathrm{vol}_g(X) \tag{3}$$

où $\mathrm{stsys}_1(g)$ est la 1-systole stable de la métrique g (*i.e.* l'inf des normes stable des α dans $H_1(M)$ représentant une courbe fermée), $\mathrm{sys}_n(g)$ étant l'infimum sur les n-volumes de toutes les hypersurfaces non homologue à zéro dans M^{n+1} et $\gamma'_{b_1(M)}$ est la constante de Bergé-Martinet (voir [BK03a] pour la définition exacte).

En cas d'égalité dans (3), toutes les 1-formes sont de longueur constante — voir [BK03b]. En fait on a même une information supplémentaire sur le tore d'Albanese en cas d'égalité.

2. Remarques générales et implications

Cette section est en grande partie le fruit d'un travail avec P.A Nagy [NV04].

2.1. Premier nombre de Betti maximal

Soit (M^n, g) une variété de dimension n dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante. La première remarque que l'on peut faire est qu'on a l'inégalité

$$b_1(M^n) \leqslant n$$

question réflexe, que se passe-t-il en cas d'égalité ?

Proposition 3. — *Si (M^n, g) est une variété dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante alors $b_1(M^n) \leqslant n$, l'égalité ayant lieu si et seulement si (M^n, g) est un tore plat.*

La démonstration du cas d'égalité provient du fait que l'application d'Albanese est alors une isométrie — voir [Lic69] et [ES64] pour d'autres informations sur l'application d'Albanese.

Remarque. — On a donc une obstruction topologique à ce que toutes les 1-formes harmoniques soient de longueur constante.

Notons qu'en général, l'application d'Albanese est une **submersion riemannienne**.

COROLLAIRE 3.1. — *Si on applique le théorème 2 aux tores, alors le cas d'égalité caractérise les tores plats.*

Les seules variétés géométriquement (resp. métriquement) formelles telles que $b_1(M^n) = n$ *sont les tores (resp. tores plats).*

Citons également la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Si* M^n *est géométriquement formelle alors* $b_1(M^n) \neq n-1$.

Preuve. Sinon, considérons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ des formes harmoniques, donc de longueur constante pour la métrique formelle. Alors $*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1})$ est une n-ième forme harmonique de longueur constante ce qui contredit l'hypothèse.

❑

La proposition suivante est un peu bizarre par son énoncé et peu faire sourire (en tout cas pendant l'exposé ce fut le cas, mais était-ce dû à son contenu mathématique ?)

PROPOSITION 5. — *Soit* (M^p, g) *une variété métriquement formelle dont la dimension p est un nombre premier. S'il existe* $1 \leqslant k \leqslant p-1$ *tel que* $b_k(M^p) = C_p^k = b_k(\mathbb{T}^p)$ *alors* (M^p, g) *est un tore plat.*

La démonstration est combinatoire et consiste à montrer que $b_1(M^p) = p$. La question est de savoir si cela est plus général ? On voudrait, par exemple, ne plus avoir l'hypothèse sur la dimension. Une première approche de Paul-Andy Nagy donne

PROPOSITION 6 (P.A. Nagy). — *Si* (M^{2n}, g) *est métriquement formelle, de Kähler et* $b_2(M^{2n}) = C_{2n}^2$ *alors* (M^{2n}, g) *est un tore plat.*

D'où la conjecture

CONJECTURE 1. — *Soit* (M^n, g) *telle que le k-ième nombre de Betti,* $1 \leqslant k \leqslant n$, *vérifie* $b_k(M^n) = C_n^k$ *et que toutes les k-formes harmoniques sont de longueur constante, alors* (M^n, g) *est un tore plat.*

Cette conjecture serait le pendant du théorème classique où l'hypothèse porte sur la courbure positive au lieu de porter sur la longueur des k-formes.

2.2. Cas où le premier nombre de Betti est $n-1$

Nous avons vu qu'une variété de dimension n dont le premier nombre de Betti était $n-1$ ne pouvait pas être géométriquement formelle. Cependant peut-elle avoir toutes ses 1-formes de longueur constante ?

EXEMPLE 1. — Le groupe de Heisenberg de dimension 3 — que l'on peut identifier au quotient du groupe des matrices carrées triangulaires supérieures de $M_3(\mathbb{R})$ avec des 1 sur la diagonale, par le sous-groupe des mêmes matrices à coefficients entiers — muni d'une métrique invariante, est une nilvariété qui vérifie cette hypothèse.

La question suivante est de savoir s'il y a d'autres exemples et si l'on peut les classifier. Nous allons voir dans la suite que l'on garde une certaine rigidité sous l'hypothèse de longueur constante, *i.e.* on aura toujours une structure de groupe de Lie sous-jacente, cependant on gagne une liberté quant aux métriques possibles, contrairement au cas du nombre de Betti maximal.

Pour comprendre les nouvelles métriques en jeu, partons d'un Tore $\mathbb{T}^{n-1}$. Donnons nous une 2-forme ω sur le tore, représentante d'une classe entière dans $H^2_{DR}(\mathbb{T}^{n-1})$. On peut alors construire un $\mathbb{S}^1$ fibré principal sur le tore $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow N \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^{n-1}$ dont la première classe de Chern est $[\omega]$. Cette construction est telle que N hérite d'une structure de nilvariété de rang 2 dont le centre est de dimension 1 — voir R.S. Palais et T.E. Stewart [PS61].

On peut à présent mettre une famille particulière de métrique sur N ainsi construite. On commence par mettre une métrique plate h sur le tore $\mathbb{T}^{n-1}$, puis on prend une 1-forme de connexion principale ϑ et une fonction positive sur $\mathbb{T}^{n-1}$. On construit alors la métrique suivante sur N :

$$g = \pi^* h + f \circ \pi \cdot \vartheta \otimes \vartheta.$$

Différentes propriétés de la métrique peuvent être déduites du triplet (h, f, ω). Par exemple la métrique est invariante à gauche si et seulement si f est constante et ω harmonique pour h.

DÉFINITION 3. — *Soit* $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow N \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^{n-1}$ *une nilvariété de rang* 2 *dont le centre est de dimension* 1. *Une métrique* pseudo-invariante *ou* minimale de type fibré — *minimal bundle-like — sur N est une métrique construite comme ci-dessus, dont la fonction f, du triplet (h, f, ω) la définissant, est constante.*

Cette définition introduite on peut énoncer le lemme suivant :

LEMME 7. — *Soit (N^n, g) une nilvariété de rang 2. Si toutes ses 1-formes harmoniques sont de longueur constante et $b_1(N^n) = n - 1$ alors g est une métrique pseudo-invariante.*

COROLLAIRE 7.1. — *Si on applique le théorème 2 à une nilvariété de rang 2 et de dimension n dont le premier nombre de Betti vaut $n - 1$, alors le cas d'égalité caractérise les métriques pseudo-invariantes.*

REMARQUE. — Dans le groupe de Heisenberg de dimension 3, pour lequel λ^1_{al} ne dépend pas de la métrique (comme pour les tores), le cas d'égalité ne caractérise pas uniquement les métriques invariantes à gauche, mais toutes les métriques pseudo-invariantes. Résultat inattendu de l'auteur qui pensait que le cas d'égalité caractérisait les métriques invariantes à gauche, comme pour les tores.

Notre résultat principal est le suivant pour $n \geqslant 3$.

THÉORÈME 8. — *Soit* (N^n, g) *une variété orientable dont toutes les* 1*-formes harmoniques sont de longueur constante et dont le premier nombre de Betti est* $b_1(N^n) = n - 1$. *Alors* (N^n, g) *est une nilvariété de rang* 2 *et* g *est pseudo-invariante.*

QUESTION. — Peut-on caractériser les métriques invariantes à gauche parmi les métriques pseudo-invariantes ? Commençons par le cas particulier $n = 3$. On a :

THÉORÈME 9. — *Soit* (N^n, g) *une variété orientable dont toutes les* 1*-formes harmoniques sont de longueur constante et dont le premier nombre de Betti est* $b_1(N^n) = n - 1$. *Si en plus, le produit de* 2 *quelconques* 1*-formes harmoniques est une* 2*-forme propre alors* (N^3, g) *est le groupe de Heisenberg de dimension* 3 *muni d'une métrique invariante à gauche.*

Et dans le cas général :

THÉORÈME 10. — *Soit* (N^n, g), $n > 3$ *dont toutes les* 1*-formes sont de longueur constante et dont le premier nombre de Betti vaut* $b_1(N^n) = n - 1$. *Si de plus le produit de* $(n-2)$ *quelconques* 1*-formes harmoniques est une* $(n-2)$ *forme propre alors* (N^n, g) *est une nilvariété de rang* 2 *et* g *est invariante à gauche.*

3. Nouvelle notion : Formalité spectrale

Au vu des deux derniers énoncés, Paul-Andy Nagy et l'auteur proposent de nommer *variété spectralement formelle*, une variété pour laquelle le produit de formes harmoniques est propre.

Les ayant nommées, il ne « reste plus qu'à » les classifier !

Références

[BK03a] V. BANGERT and M. KATZ, *Stable systolic inequalities and cohomology products*, Comm. Pure Appl. Math **56** (2003), (in press).

[BK03b] ———, *Riemannian Manifolds with Harmonic one-forms of constant norm*, available at `http ://www.math.biu.ac.il/~katzmik/publications.html`, preprint 2003.

[ES64] J. EELS and J.P. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian Manifolds*, Am. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[Kot01] D. KOTSCHICK, *On products of harmonic forms*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 3, 521–531.

[Lic69] A. LICHNEROWICZ, *Application harmoniques dans un tore*, C.R. Acad. Sci. Sér. A **269** (1969), 912–916.

[Nag01] P.A. NAGY, *Un principe de séparation des variables pour le spectre du laplacien des formes différentielles et applications*, Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2001, http ://www.unine.ch/math/personnel/equipes/nagy/PN.htm.

[NV04] P.A. NAGY and C. VERNICOS, *The length of Harmonic forms on a compact Riemannian manifold*, à paraître dans les Transactions of the AMS (2004).

[Oni93] A.L. ONISHCHIK (ed.), *Lie groups and Lie algebras I*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, vol. 20, Springer Verlag, 1993.

[PS61] R. S. PALAIS and T. E. STEWART, *Torus bundles over a torus*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 26–29.

[Ver02] C. VERNICOS, *The Macroscopic Spectrum of Nilmanifolds with an Emphasis on the Heisenberg groups*, arXiv :math.DG/0210393, 2002.

[War83] F.W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups*, Graduate texts in Mathematics, no. 94, Springer-Verlag, 1983.

Constantin VERNICOS
Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel
Emile Argand 11
CH-2007 NEUCHÂTEL

Constantin.Vernicos@unine.ch