Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Cyril Lecuire

Une caractérisation des laminations géodésiques mesurées de plissage des variétés hyperboliques et ses conséquences

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 103-115

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__103_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 103–115

UNE CARACTÉRISATION DES LAMINATIONS GÉODÉSIQUES MESURÉES DE PLISSAGE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET SES CONSÉQUENCES

Cyril LECUIRE

Résumé

Dans cet article on donne une caractérisation des laminations géodésiques mesurées qui apparaissent comme la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie sur l'intérieur d'une variété compacte de dimension 3. Après avoir défini la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie, on décrit les grandes lignes de la preuve de cette caractérisation puis on conclut par deux applications de ce résultat et de sa preuve.

1. Introduction

Soit M une variété compacte connexe de dimension 3. Nous dirons que M est une variété hyperbolique si son intérieur admet une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle -1. Si $\partial M \neq \emptyset$ alors M est une variété Haken et d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston, M est hyperbolique si et seulement si elle est irréductible et atoroïdale. Dans la suite, nous allons considérer une variété M de dimension 3, compacte, orientable et hyperbolique, mais nous exclurons les cas où M est homéomorphe à un tore solide $D \times S^1$ ou à un tore épaissi $T \times [0,1]$.

À une métrique hyperbolique complète σ sur $\mathrm{int}(M)$ est associé son cœur convexe $N(\sigma)$: c'est le plus petit fermé de $\mathrm{int}(M)$ qui est localement convexe et tel que l'inclusion $N(\sigma) \subset \mathrm{int}(M)$ est une équivalence d'homotopie. Le bord de $N(\sigma)$ est constitué de surfaces totalement géodésiques qui s'intersectent le long d'une lamination géodésique. La variation de la normale à $\partial N(\sigma)$ transversalement à cette lamination géodésique permet de définir une mesure transverse. On obtient ainsi la lamination géodésique mesurée de plissage de $N(\sigma)$.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 30F40 ; Secondary: 57M50.

Lorsque $N(\sigma)$ a un volume fini, la métrique σ est dite géométriquement finie et il existe une réunion $\lambda^{(p)}$ de courbes simples disjointes correspondant aux pointes de rang 1 de σ et un homéomorphisme $h : M - \lambda^{(p)} \to N(\sigma)$. Cette homéomorphisme h est défini à isotopie près et dépend seulement de la classe d'isotopie de σ. Munissons chacune des courbes qui composent $\lambda^{(p)}$ d'une mesure de Dirac de masse π et ajoutons à cette multi-courbe pondérée l'image par h de la lamination géodésique mesurée de plissage de $N(\sigma)$, on obtient ainsi la lamination géodésique mesurée de plissage λ de σ.

Lorsque σ décrit l'ensemble des classes d'isotopie de métriques hyperboliques géométriquement finies sur $\mathrm{int}(M)$, sa lamination géodésique mesurée de plissage λ ne décrit pas tout l'ensemble des laminations géodésiques mesurées sur ∂M. On a la caractérisation suivante des laminations géodésiques mesurées qui apparaissent comme la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie sur l'intérieur de M :

THÉORÈME 1.1. — *Soient M une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$ une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de M une métrique hyperbolique géométriquement finie non fuchsienne σ dont λ est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) toute feuille fermée de λ a un poids inférieur ou égal à π ;

b) $\exists \eta > 0$ tel que, pour tout anneau essentiel E, $i(\partial E, \lambda) \geqslant \eta$;

c) $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$ pour tout disque essentiel D.

Ce résultat a été prouvé par F. Bonahon et J.-P. Otal dans les cas suivants :

- si ∂M est incompressible;
- si ∂M est compressible et λ est une multi-courbe pondérée.

Dans une première section nous allons donner des définitions plus détaillées des objets qui sont apparus dans cette introduction. Dans une deuxième section nous donnerons les grandes lignes de la preuve du théorème 1.1. Enfin, dans la dernière section, nous énoncerons quelques applications de ce résultat et de sa preuve.

2. Définitions

Soit σ une métrique hyperbolique complète (définie à isotopie près) sur l'intérieur de M; munissons $\mathrm{int}(\tilde{M})$ de la métrique relevée de σ et considérons une isométrie entre $\mathrm{int}(\tilde{M})$ et $\mathbb{H}^3$. Les transformations de revêtement fournissent une représentation fidèle et discrète $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Son image $\rho(\pi_1(M))$ est un groupe kleinien (c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$) finiment engendré et sans torsion et $\mathrm{int}(M)$ munie de la métrique σ est isométrique à $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$. En faisant varier l'isométrie entre $\mathrm{int}(\tilde{M})$ et $\mathbb{H}^3$, on obtient ainsi l'ensemble des représentations conjuguées à ρ. On dira qu'une telle représentation est *associée à σ*.

Le groupe kleinien $\rho(\pi_1(M)) \subset PSL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\hat{\mathbb{C}} = \partial\overline{\mathbb{H}}^3$, son *domaine de discontinuité* $\Omega_\rho \subset \partial\overline{\mathbb{H}}^3$ est le plus grand ouvert sur lequel cette action est proprement discontinue. L'*ensemble limite* L_ρ est le complémentaire de Ω_ρ dans $\partial\overline{\mathbb{H}}^3$, son enveloppe convexe $C(\rho) \subset \mathbb{H}^3$ est le plus petit convexe de $\mathbb{H}^3$ invariant par l'action de $\rho(\pi_1(M))$. Le *cœur de Nielsen* $N(\rho)$ de $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$, est le quotient par $\rho(\pi_1(M))$ de $C(\rho)$ (voir [Th, chap 8] pour plus de détails). Ce convexe $N(\rho)$ est isométrique au cœur convexe $N(\sigma)$ définit dans l'introduction, ce qui nous permet de confondre les deux. La *partie épaisse*, $N(\rho)^{ep}$ du cœur de Nielsen, est le complémentaire dans $N(\rho)$ des pointes de $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$. La représentation ρ est dite *géométriquement finie* si $N(\rho)^{ep}$ est compacte (une définition ici équivalente est que $N(\rho)$ a un volume fini) et *convexe cocompacte* si $N(\rho)$ est compact. La représentation ρ est *fuchsienne* si l'intérieur de $N(\rho)$ est vide.

Lorsque σ est géométriquement finie on peut étendre l'isométrie $\mathrm{int}(M) \to \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M)$ de départ en un homéomorphisme $M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \to (\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\rho)/\rho(\pi_1(M))$ où $\lambda^{(p)}$ est une multi-courbe qui correspond aux pointes de rang 1 de σ et $\partial_{\chi=0}M$ est la réunion des composantes de ∂M de caractéristique d'Euler nulle. Si σ est géométriquement finie et non fuchsienne, la rétraction de $(\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\rho)/\rho(\pi_1(M))$ sur $N(\rho)$ permet de définir (à isotopie près) un homéomorphisme $h : M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \to N(\rho)$ *associés* à σ.

2.1. Laminations géodésiques

Soit S une surface (éventuellement non compacte) munie d'une métrique hyperbolique complète d'aire finie. Une *lamination géodésique* $L \subset S$ est un fermé qui est réunion disjointe de géodésiques complètes plongées dans S. Si on munit S d'une autre métrique hyperbolique complète d'aire finie s', il existe un homéomorphisme naturel $\{$laminations géodésiques de $(S,s)\} \to \{$laminations géodésiques de $(S,s')\}$. Ceci permet de définir l'espace des laminations géodésiques indépendamment du choix de la métrique sur S.

Une géodésique complète plongée contenue dans L est une *feuille* de L. Une *multicourbe* est une lamination géodésique dont toutes les feuilles sont compactes (*i.e.* une réunion de géodésiques simples compactes disjointes). Une lamination géodésique L est dite *minimale* si toute demi-feuille de L est dense dans L. Une lamination géodésique minimale est soit une géodésique fermée, soit un *minimal exceptionnel*.

Une *lamination géodésique mesurée* λ est une lamination géodésique (éventuellement non compacte) munie d'une mesure transverse $d\lambda$, c'est-à-dire que tout arc k plongé dans S transversalement au support $|\lambda|$ de λ et vérifiant $\partial k \subset M - |\lambda|$ est muni d'une mesure transverse $d\lambda_{|k}$ telle que:

– le support de $d\lambda_{|k}$ est $|\lambda| \cap k$;

– si un arc k est homotope à un arc k' par une homotopie laissant $|\lambda|$ invariant, alors $\int_k d\lambda = \int_{k'} d\lambda$.

On munit l'espace $\mathcal{ML}(S)$ des laminations géodésiques mesurées à support compact de la topologie faible*. L'ensemble des multi-courbes pondérées est dense dans $\mathcal{ML}(S)$ (cf. [FLP]).

Si γ est une géodésique simple compacte munie d'une mesure de Dirac de masse $w(\gamma)$, le *nombre d'intersection* $i(\lambda,\gamma)$ est défini par $i(\lambda,\gamma) = w(\gamma) \int_{|\gamma|} d\lambda$. Cette fonction s'étend continuement à $\mathcal{ML}(S)$ (cf. [Bo]).

Étant données une courbe simple compacte c et une métrique hyperbolique s sur S, notons $l_s(c)$ la longueur de la s-géodésique compacte qui est librement homotope à c. Si γ est une géodésique simple compacte munie d'une mesure de Dirac de masse $w(\gamma)$ alors on définit $l_s(\gamma) = w(\gamma) l_s(|\gamma|)$. La fonction l_s ainsi définie sur l'ensemble des multi-courbes pondérées s'étend continuement en une application $l_s : \mathcal{ML}(S) \to \mathbb{R}$.

Lorsque M est une variété hyperbolique de dimension 3, on notera $\mathcal{ML}(\partial M)$ au lieu de $\mathcal{ML}(\partial_{\chi<0} M)$.

2.2. Surfaces plissées

Une *surface plissée* dans une variété M de dimension 3 dont l'intérieur est muni d'une métrique hyperbolique complète est une application $f : S \to M$ d'une surface S dans M qui possède les propriétés suivantes :

- la métrique obtenue en tirant en arrière la métrique par chemin induite par l'inclusion $f(S) \subset M$ est une métrique hyperbolique s sur S;
- tout point de S est contenu dans l'intérieur d'un arc s-géodésique dont l'image par f est un arc géodésique de M;
- si $c \subset S$ est une courbe simple contenue dans une pointe de S et que c ne borde pas de disque dans S alors $f(c)$ n'est pas librement homotope à un point dans M.

Le *lieu de plissage* d'une surface plissée $f : S \to \mathrm{int}(M)$ est l'ensemble des points de S par lesquels passe seulement un arc géodésique dont l'image est un arc géodésique de $\mathrm{int}(M)$. Le lieu de plissage d'une surface plissée est une lamination géodésique (cf. [Th]).

Une surface plissée $f : S \to \mathrm{int}(M)$ est une *surface plissée convexe* si elle borde un sous-ensemble convexe de $\mathrm{int}(M)$.

Soit $f : S \to \mathrm{int}(M)$ une surface plissée convexe et $\tilde{f} : \tilde{S} \to \tilde{M}$ un relevé de f au revêtement universel $\tilde{M}$ de M; un plan de support $P \subset M$ est un plan hyperbolique tel que $P \cap \tilde{f}(\tilde{S}) \neq \varnothing$ et que $\tilde{f}(\tilde{S})$ est entièrement contenu dans l'un des demi-espace bordés par $\tilde{P}$. Soit $k \subset S$ un arc géodésique fermé et $\tilde{k} \subset \tilde{S}$ un relevé de k, une *approximation polygonale de* $\tilde{f}(\tilde{k})$ est une famille finie $\mathfrak{P} = \{(\tilde{x}_i,\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)}) / i = 1,\ldots,p\}$ satisfaisant :

- les $\tilde{x}_i$ sont des points distincts ordonnés de $\tilde{k}$;
- $\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)}$ est un plan tel que $\tilde{f}(\tilde{x}_i) \subset \Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)}$;
- pour tout $i = 1,\ldots,p-1$, $\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)} \cap \Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_{i+1})} \neq \varnothing$;
- la projection de $\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)} \cap \Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_{i+1})}$ sur $\tilde{f}(\tilde{S})$ intersecte le sous-arc de $\tilde{k}$ qui joint $\tilde{x}_i$ à $\tilde{x}_{i+1}$;

On notera $\theta(\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)},\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_{i+1})})$ l'angle dièdre externe entre $\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)}$ et $\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_{i+1})}$.

La *mesure de plissage* $\int_k d\lambda$ de k est définie par :

$$\int_k d\lambda = \inf_{\mathfrak{P}} \sum_{i=1}^{p} \theta(\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_i)},\Pi_{\tilde{f}(\tilde{x}_{i+1})})$$

où $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des approximations polygonales de $\tilde{f}(\tilde{k})$.

D'après [EpM, section 1.11], on définit ainsi une mesure $\tilde{\lambda}$ transverse au lieu de plissage.

Soient σ une métrique géométriquement finie sur l'intérieur de M et ρ un représentation associée à σ; comme on l'a vu plus haut, il existe une multi-courbe $\lambda^{(p)}$ et un homéomorphisme $h : M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \to N(\rho)$. La restriction de h à $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$ est une surface plissée, notons $\gamma \subset \mathcal{ML}(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)})$ sa lamination géodésique mesurée de plissage. Munisson chaque composante de $\lambda^{(p)}$ d'une mesure de Dirac de masse π et considérons la réunion λ de cette multi-courbe pondérée et de γ, λ est la *lamination géodésique mesurée de plissage* de σ.

3. Preuve du théorème 1.1

THEOREM 1.1. — *Soient M une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$ une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de M une métrique hyperbolique géométriquement finie non fuchsienne σ dont λ est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) toute feuille fermée de λ a un poids inférieur ou égal à π;
b) $\exists \eta > 0$ tel que, pour tout anneau essentiel E, $i(\partial E,\lambda) \geqslant \eta$;
c) $i(\lambda,\partial D) > 2\pi$ pour tout disque essentiel D.

3.1. Conditions nécessaires

Expliquons tout d'abord pourquoi la lamination géodésique mesurée de plissage λ d'une métrique géométriquement finie σ sur $\mathrm{int}(M)$ vérifie les conditions a), b) et c).

La condition a) découle directement de la définition de la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie.

La condition c) vient de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un disque simplicial (cf. [BoO]).

Pour voir que la condition b) est satisfaite par λ, il est plus facile de la remplacer par la condition suivante :

b$_1$) la lamination géodésique λ est *anannulaire*: c'est-à-dire que λ intersecte transversalement toute courbe simple fermée qui peut être homotopée dans un tore de ∂M

et toute paire (l_1, l_2) de géodésiques simples (éventuellement confondues) de ∂M dont des relevés distincts à $\partial\tilde{M}$ ont les deux mêmes bouts.

Le fait que la condition b) peut être remplacée par cette condition b_1) est démontré dans [Le1]. Le fait que λ vérifie la condition b_1) découle d'une part de la géométrie des pointes de σ et d'autre part du fait que deux points distincts du bord à l'infini de $\mathbb{H}^3$ sont joints par une unique géodésique (cf. [BoO] et [Le1]).

On notera $\mathscr{P}(M)$ l'ensemble des laminations géodésiques mesurées qui satisfont les conditions a), b) et c).

3.2. Conditions suffisantes

Pour montrer qu'une lamination géodésique mesurée qui vérifie les conditions a), b) et c) est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie, on utilise les deux résultats suivants :

Théorème 3.1 ([BoO]). — *Soient M une variété hyperbolique compacte de dimension 3 et $\alpha \in \mathscr{ML}(\partial M)$ une lamination géodésique mesurée dont toutes les feuilles sont fermées. Il existe sur l'intérieur de M une métrique hyperbolique géométriquement finie non fuchsienne σ dont α est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *toute feuille de α a un poids inférieur ou égal à π ;*
2. *$i(\alpha, \partial A) > 0$ pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans M ;*
3. *$i(\alpha, \partial D) > 2\pi$ pour tout disque essentiel D dans M.*

Proposition 3.2 (Lemme de fermeture). — *Soient M une variété hyperbolique compacte de dimension 3 et $\lambda \in \mathscr{ML}(\partial M)$ une lamination géodésique mesurée appartenant à $\mathscr{P}(M)$. Supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées $\lambda_n \in \mathscr{ML}(\partial M)$ telle que :*

i) pour tout n, λ_n est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie σ_n sur l'intérieur de M ;
ii) les laminations géodésiques mesurées λ_n convergent vers λ pour la topologie de $\mathscr{ML}(\partial M)$;
iii) les supports des λ_n convergent vers le support de λ pour la topologie de Hausdorff ;
iv) pour tout n, les feuilles de poids π de λ sont des feuilles de poids π de λ_n.

Alors, il existe un métrique hyperbolique géométriquement fini σ_∞ dont la lamination géodésique mesurée de plissage est λ.

Voici comment on déduit le théorème 1.1 de ces deux résultats. Soit $\lambda \in \mathscr{ML}(\partial M)$ une lamination géodésique mesurée qui satisfait les conditions a), b) et c); considérons une suite de laminations géodésiques mesurées (λ_n) dont toutes les feuilles sont fermées et qui satisfont les conditions $ii)$, $iii)$ et $iv)$ (l'existence d'une telle suite est prouvée par exemple dans [Pe]).

Nous allons montrer que, quitte à extraire, les λ_n satisfont les hypothèses du théorème 3.1. On en déduit l'existence de métriques σ_n dont les laminations géodésiques mesurées de plissage sont les λ_n. On peut alors appliquer le lemme de fermeture (proposition 3.2) pour conclure à l'existence d'un métrique hyperbolique géométriquement fini σ_∞ dont la lamination géodésique mesurée de plissage est λ.

Comme (λ_n) converge vers λ alors, pour n assez grand, toute feuille de λ_n dont le poids est supérieur à π est une feuille de λ de poids π. De la condition $iu)$, on déduit alors que pour n assez grand, λ_n vérifie la condition 1.

Montrons ensuite que pour tout disque essentiel D, et pour n assez grand, $i(\lambda_n,\partial D) > 2\pi$. Sinon, quitte à extraire, il existe une suite D_n de disques essentiels tels que $i(\partial D_n,\lambda_n) \leqslant 2\pi$. Si quitte à extraire, la suite D_n est constante alors il existe un disque essentiel D tel que $i(\partial D,\lambda) \leqslant 2\pi$, ce qui contredit la condition $c)$. Sinon, quitte à extraire, la suite ∂D_n converge pour la topologie de Hausdorff vers un lamination géodésique μ. D'après le critère de Casson (cf. [Ot1], voir aussi [Le1]), μ possède une feuille *homoclinique* l, c'est-à-dire que tout relevé $\tilde{l}$ de l à $\partial\tilde{M}$ contient deux suites de points (x_n) et (y_n) tels que la distance entre les points x_n et y_n mesurée sur la feuille tend vers l'infini avec n, tandis que leur distance dans $\tilde{M}$ reste bornée. Comme $i(\partial D_n,\lambda_n) \leqslant 2\pi$, on a $i(l,\lambda) \leqslant 2\pi$. Avec une telle feuille homoclinique, on peut construire (cf. [Le1]) ou bien une suite A_n d'anneaux essentiels tels que $i(\lambda,\partial A_n) \longrightarrow 0$, ce qui contredit la condition $b)$, ou bien un méridien D tel que $i(\lambda,\partial D) \leqslant 2\pi$ ce qui contredit la condition $c)$.

Il ne reste plus qu'à prouver la condition 2. du théorème 3.1. Supposons que, quitte à extraire, il existe une suite d'anneaux ou rubans de Möbius essentiels a_n tels que $i(\partial a_n,\lambda_n) = 0$. Quitte à extraire, ∂a_n converge géométriquement vers une lamination géodésique α qui n'intersecte pas λ. On montre alors (cf. [Le1]) qu'un relevé de α dans $\partial\tilde{M}$ contient deux feuilles qui ont les deux mêmes bouts, ce qui contredit la condition $b_1)$.

3.3. Le lemme de fermeture

Nous allons ici décrire les grandes lignes de la preuve du lemme de fermeture. Cette preuve se décompose en deux étapes :

- on montre d'abord que, quitte à extraire, il existe une suite de représentations ρ_n associées aux métriques σ_n qui converge vers une représentation $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ (on dit que la suite extraite de (σ_n) converge algébriquement);
- on montre ensuite que ρ_∞ est géométriquement finie et correspond à une métrique σ_∞ dont la lamination géodésique mesurée de plissage est λ.

Pour la première étape, on utilise des arguments proches de ceux utilisés par Otal dans la preuve du théorème de la limite double (voir [Ot3]). Supposons qu'aucune suite (ρ_n) de représentations associées aux métriques σ_n ne contient de sous-suite convergente, alors d'après la théorie développée par Culler, Morgan et Shalen (cf. [MoS]) une suite de représentations ρ_n associées à une suite extraite de (σ_n) tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel $\mathscr{A}$. Pour un élément a de $\pi_1(M)$, notons $l_{\sigma_n}(a)$ la longueur de la géodésique de $M_n \approx \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$ qui est librement homotope à un lacet représentant a et $l_{\mathscr{A}}(a)$ la distance de translation de l'action de a sur $\mathscr{A}$. Une propriété essentielle de $\mathscr{A}$ est qu'il existe $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ et une suite extraite de (ρ_n) tels que pour tout $a \in \pi_1(M)$ tel que $l_{\sigma_n}(a) \longrightarrow \infty$ et pour tout $b \in \pi_1(M)$, $\frac{l_{\mathscr{A}}(b)}{l_{\mathscr{A}}(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_{\sigma_n}(b)}{l_{\sigma_n}(a)}$.

Pour simplifier, nous allons supposer que les feuilles de λ_n sont toutes fermées. D'une part, c'est ce cas particulier du lemme de fermeture qui est utilisé dans la preuve du théorème 1.1, d'autre part, on peut se ramener à ce cas en construisant une approximation de chacune des laminations géodésiques mesurées λ_n par une multi-courbe pondérée.

La preuve de l'existence d'une suite convergente extraite de (ρ_n) utilise les trois résultats suivants :

Lemme 3.3 ([BoO] et [Le1]). — *Soient M une variété compacte hyperbolique de dimension 3 et $\lambda \in \mathscr{P}(M)$ une lamination géodésique mesurée; supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées λ_n telles que:*

- *pour tout n, λ_n est la lamination géodésique mesurée d'une métrique géométriquement finie σ_n;*
- *les laminations géodésiques mesurées λ_n convergent vers λ.*

Alors les longueurs $l_{\sigma_n}(\lambda_n)$ sont majorées.

Théorème 3.4 ([Ot2]). — *Soient $\rho_n : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ une suite de représentations qui tend vers un action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel $\mathscr{A}$ et $c_n \subset \partial M$ une suite de courbes simples qui convergent pour la topologie de Hausdorff vers une lamination géodésique minimale L qui est réalisée dans $\mathscr{A}$. Alors pour tout $N > 0$, il existe n_N tel que*

$$l_{\sigma_n}(c_n^*) \geqslant N l_{\sigma_0}(c_n^*) \text{ pour tout } n \geqslant n_N.$$

Dans cet énoncé, $l_{\sigma_n}(c_n^*)$ désigne la longueur de la σ_n-géodésique qui est librement homotope á c_n.

Proposition 3.5 ([Le2]). — *Soit $\mathscr{A}$ un arbre réel, $\pi_1(M) \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes et $\lambda \in \mathscr{P}(M)$ une lamination géodésique mesurée; alors au moins une composante connexe de λ est réalisée dans $\mathscr{A}$.*

Ces deux derniers résultats font appel à la définition suivante :

Définition 3.6. — *Soit $\pi_1(M) \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel $\mathscr{A}$; une lamination géodésique $L \subset \partial M$ est réalisée dans $\mathscr{A}$ s'il existe une application $\pi_1(M)$-équivariante de L dans $\mathscr{A}$ dont la restriction à chaque feuille de L est injective.*

Expliquons maintenant comment ces trois résultats permettent de trouver une sous-suite de (ρ_n) qui converge. Comme on l'a mentionné précédemment, dans le cas contraire, une suite extraite de (ρ_n) tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel $\mathscr{A}$. La proposition 3.5 entraine qu'au moins une composante λ^i de λ est réalisée dans $\mathscr{A}$. D'après la condition *iii*), λ^i est la limite pour la topologie de Hausdorff d'une suite (λ_n^i) de composantes de λ_n. Du théorème 3.4, on déduit que $\frac{l_{\sigma_n}(\lambda_n^i)}{l_{\sigma_0}(\lambda_n^i)} \to \infty$. Comme $l_{\sigma_0}(\lambda_n^i) \to l_{\sigma_0}(\lambda^i) > 0$, on a alors $l_{\sigma_n}(\lambda_n) \geqslant l_{\sigma_n}(\lambda_n^i) \to \infty$, ce qui contredit le lemme 3.3.

Passons maintenant à la deuxième étape ; choisissons une suite extraite de (ρ_n) (pour simplifier les notations nous noterons cette suite (ρ_n)) qui converge algébriquement, notons $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ sa limite. D'après [Jor] ρ_∞ est un représentation fidèle et discrète. Nous allons montrer que cette représentation est géométriquement finie et que $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ est homéomorphe à $\mathrm{int}(M)$. Nous en déduirons que ρ_∞ correspond à une métrique σ_∞ dont la lamination géodésique mesurée de plissage est λ. Pour cela nous allons montrer que les surfaces plissées correspondant aux restrictions à $\partial_{\chi<0}M$ d'homéomorphismes h_n associés aux métriques σ_n convergent.

D'après les conditions *iii*) et *iv*), pour n assez grand, la réunion des feuilles de poids π de λ_n ne dépend pas de n, notons la $\lambda^{(p)}$. Notons $h_n : M - \lambda^{(p)} \to N(\sigma_n)$ un homéomorphisme associé à σ_n. La restriction de h_n à $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$ est une surface plissée. Montrons tout d'abord que la suite des métriques induites s_n sur $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$ contient une sous-suite qui converge algébriquement. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant qui nous permettra de comparer les métriques s_n avec les métriques σ_n.

LEMME 3.7 (Une courbe légèrement plissée est quasi-géodésique). — *Soient M une variété hyperbolique de dimension 3 dont le bord est une surface plissée convexe, λ la lamination géodésique mesurée de plissage de ∂M, c une géodésique périodique du bord ∂M qui représente un élément non nul de $\pi_1(M)$ et c^* la géodésique de M dans la classe d'homotopie de c. Soit $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$; il existe des constantes K_ε, A_ε telles que si $i(c,\lambda) \leqslant \varepsilon$ alors $l_M(c) \leqslant K_\varepsilon(l_M(c^*) + A_\varepsilon)$. De plus, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = 1$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon = 0$.*

Démonstration. — Voir [Se], [Le1] ou [Le2] □

Expliquons plus précisemment comment utiliser ce lemme pour montrer l'existence d'une sous-suite de (s_n) qui converge algébriquement. Soit S une composante de $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$ et s_n la métrique induite sur S par la restriction $h_n : S \to \partial N(\sigma_n)$. Supposons qu'aucune suite extraite de s_n ne converge algébriquement ; une suite extraite de (s_n) (que par la suite nous allons simplement noter (s_n)) converge dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller vers une classe projective de laminations géodésiques mesurées (cf. [FLP]), notons μ un représentant de cette classe projective. Comme $l_{s_n}(\lambda_n)$ est bornée (lemme 3.3) et comme (λ_n) converge vers λ, alors $i(\lambda,\mu) = 0$. Si μ contient un minimal exceptionnel, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe simple c telle que $i(c,\lambda) < \varepsilon$ et que $i(c,\mu) > 0$ (cf. [CEG]). Par définition de μ, le fait que $i(c,\mu) > 0$ entraine que $l_{s_n}(c) \to \infty$. Pour n assez grand, $i(\lambda_n,c) < 2\varepsilon$, donc d'après le lemme 3.7, $\exists K,A$ tels que $l_{s_n}(c) \leqslant K(l_{\sigma_n}(c^*) + A)$. On en déduit que $l_{\sigma_n}(c^*) \longrightarrow \infty$ ce qui contredit la convergence algébrique de (ρ_n). La lamination μ ne contient pas de minimal exceptionnel, c'est donc une multi-courbe pondérée.

Soit m une feuille de μ; comme $i(\lambda,\mu) = 0$, m est ou bien une feuille de λ, ou bien disjointe de λ. D'après la condition *iii*), si m est un feuille de λ, c'est une feuille de toutes les laminations géodésiques mesurées λ_n. De plus m n'est pas une feuille de $\lambda^{(p)}$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que le poids de m dans λ_n est majoré par $\pi - \varepsilon$. Soit c une courbe qui intersecte m en un ou deux points et n'intersecte pas $\lambda - m$; on a alors $i(c,\mu) > 0$ donc $l_{s_n}(c) \longrightarrow \infty$. Dans la suite nous allons utiliser un résultat un peu plus fort dont la preuve est un peu plus complexe : la longueur de chaque composante de $c - m$ tend vers l'infini (cf. [Le1]). Chaque composante de $c - m$ est un grand segment géodésique pour la métrique σ_n et l'angle entre deux de ces segments géodésiques est majorés par $\pi - \varepsilon$. Il s'en suit que c est une quasi-géodésique pour la métrique σ_n, c'est-à-dire qu'il existe une constante K indépendante de n telle que $l_{s_n}(c) \leqslant K l_{\sigma_n}(c^*)$. Comme $l_{s_n}(c) \longrightarrow \infty$, ceci contredit la convergence algébrique de σ_n.

On vient de montrer que μ ne contient pas de minimal exceptionnel ni de feuille fermée. On en déduit que le support de μ est vide ce qui contredit notre hypothése de départ qui était qu'une suite extraite de (s_n) tend vers le bord de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. On conclut qu'une suite extraite de (s_n) converge algébriquement.

En suivant [CEG], il ne nous reste plus qu'à démontrer que les surfaces $h_n(S)$ intersectent un même compact pour pouvoir en extraire une sous-suite convergente. Notons $x_n \subset \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$ la projection de l'origine $o \in \mathbb{H}^3$ on a alors le lemme suivant :

LEMME 3.8 ([BoO], lemme 17). — *Un arc k_n, joignant $f_n(S)$ au point base x_n, peut être choisi de longueur uniformément bornée.*

On en déduit l'existence d'une surface plissée $f_\infty : S \to \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ qui est la limite d'une suite extraite de $h_{n|S}$. Faisons la même construction pour chaque composante de $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$. On obtient ainsi une surface plissée $f_\infty : \partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)} \to \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ qui est un homéomorphisme (cf. [BoO] et [Le2]). Comme f_∞ est la limite d'une suite de surfaces plissées convexes, c'est une surface plissée convexe (cf. [BoO]). Ceci entraine que $f_\infty(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}) \subset \partial N(\rho_\infty)$

À chaque feuille c de $\lambda^{(p)}$ correspondent deux bouts de $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$. Les images de ces deux bouts par f_∞ sont deux anneaux totalement géodésiques et non compacts qui sont contenus dans une pointe de $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$. Otons ces deux anneaux de $f_\infty(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)})$ et joignons les deux composantes de bord de la surface restante par un anneau compacte. En opérant de la sorte pour chaque feuille de $\lambda^{(p)}$, on obtient une surface compacte $F_\infty \subset \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$. La même construction effectuée dans M produit une surface S_∞ telle que $S_\infty \cup \partial_{\chi=0}M$ borde une partie compacte de M. Notons F'_∞ la surface obtenue en ajoutant à F_∞ le bord d'un voisinage des pointes de rang 2 de $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$; en modifiant f_∞, on obtient un homéomorphisme $f : S_\infty \cup \partial_{\chi=0}M \to F'_\infty$ qui est homotope à l'inclusion. On en déduit que F'_∞ est homologue à 0 et donc borde un 3-cycle de volume fini. Chaque composante de $F'_\infty - F_\infty$ borde une pointe de rang 2, comme une telle pointe a un volume fini, F_∞ borde un 3-cycle de volume fini. La surface $f_\infty(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}) - F_\infty$ est formée de l'union pour chaque composante c de $\lambda^{(p)}$ de deux anneaux totalement géodésiques, ces deux anneaux sont connectés par un anneau compact contenu dans F_∞ et la surface a_c réunion des deux anneaux non compacts et de l'anneau compact borde un 3-cycle de volume fini. En ajoutant au cocycle bordé par F_∞ les cocycles bordés par les a_c correspondant à toutes les composantes de $\lambda^{(p)}$ on obtient un 3-cycle de volume fini C_∞ bordé par $f_\infty(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)})$.

Chaque composante de $\partial N(\rho_\infty)$ borde un composante de $\mathbb{H}^3 - N(\rho_\infty)$ qui a un volume infini. On en déduit que $C_\infty = N(\rho_\infty)$ et que $f_\infty(\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}) = \partial N(\rho_\infty)$. Par construction, l'homéomorphisme $f_\infty : \partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)} \to \partial N(\rho_\infty)$ est homotope à l'identité, il existe donc une équivalence d'homotopie $M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \to N(\rho_\infty)$ qui coïncide avec f_∞ sur $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$. D'après [Wa], cette équivalence d'homotopie peut être réalisée par un homéomorphisme. En composant cet homéomorphisme avec un homéomorphisme $\mathrm{int}(N(\rho_\infty)) \to \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$, on obtient la métrique géométriquement finie σ_∞ sur $\mathrm{int}(M)$ qui était attendue.

En appliquant des résultats de [Mar] et de [KeS], on montre enfin que λ est la lamination géodésique mesurée de plissage de σ_∞. Ceci conclut la preuve du lemme de fermeture.

4. Autres résultats

4.1. Domaine de Masur

Un *bretzel creux* H est une variété compacte de dimension 3 qui est la somme connexe le long du bord d'une boule de tores solides $D^2 \times S^1$ et de fibrés en intervalles sur des surfaces fermées $\Sigma \times [0,1]$. La variété H est un *petit bretzel creux* si c'est la somme connexe le long du bord de deux fibrés en intervalles sur des surfaces fermées ou d'un fibré en intervalle sur une surface fermée et d'un tore solide. On appellera *grand bretzel creux* un bretzel creux qui n'est pas un petit bretzel creux. Nous allons supposer que $\partial_{\chi<0}H \neq \emptyset$, dans ce cas ∂H possède une unique composante compressible appelée le bord extérieur que nous noterons $\partial_e H$. Notons $\mathcal{PML}(\partial_e H)$ l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées sur $\partial_e H$ et $\mathcal{M}'$ l'adhérence dans $\mathcal{PML}(\partial_e H)$ de l'ensemble des classes projectives de méridiens pondérés (un méridien est une courbe simple fermée qui borde un disque essentiel).

Si H n'est pas un petit bretzel creux, on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e H) \,|\, i(\lambda,\mu) > 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}'\}.$$

Si H est un petit bretzel creux, on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e H) \,|\, i(\lambda,\nu) > 0 \text{ pour tout } \nu \in \mathcal{PML}(\partial_e H)$$

telle qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}'$ telle que $i(\mu,\nu) = 0\}$.

Cet ensemble $\mathcal{O}$ est appelé domaine de Masur. Il a été introduit par H. Masur ([Mas]) pour les feuilletages mesurés sur les bretzels puis par J.-P. Otal ([Ot1]) pour les laminations géodésiques mesurées sur les bretzels creux.

Supposons que H n'est pas un bretzel de genre 2 et notons $\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{ML}(\partial H)$ l'ensemble des laminations géodésiques mesurées dont la classe projective appartient à $\mathcal{O}$. On a $\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}(H)$ et si $\lambda \in \mathcal{D}(H)$ intersecte toute courbe simple contenue dans $\partial_e H$ alors $\lambda \in \widehat{\mathcal{O}}$, en revanche on n'a pas nécessairement $\mathcal{D}(H) \subset \widehat{\mathcal{O}}$ (cf. [Le2]).

Comme l'a remarqué J. Souto, le théorème 1.1 et le fait que $\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}(H)$ permettent de montrer (cf. [Le2]) que $\mathcal{O}$ est connexe.

PROPOSITION 4.1. — *Les ensembles $\widehat{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}$ sont connexes par arc.*

4.2. L'action de $Mod(M)$ sur $\mathcal{ML}(\partial M)$

Les conditions suivantes

iii) les supports des λ_n convergent vers le support de λ pour la topologie de Hausdorff;

iv) pour tout n, les feuilles de poids π de λ sont des feuilles de poids π de λ_n.
qui apparaissent dans le lemme de fermeture (proposition 3.2) permettent seulement d'en simplifier la preuve. On peut supprimer ces conditions pour obtenir le résulats suivant (cf. [Le2]) :

THÉORÈME 4.2. — *Soient M une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et (σ_n) une suite de metriques géométriquement finies non fuchsiennes sur l'intérieur de M; notons $\lambda_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$ la lamination géodésique mesurée de plissage de σ_n. Supposons que λ_n converge dans $\mathcal{ML}(\partial M)$ vers une lamination géodésique mesurée $\lambda \in \mathcal{P}(M)$. Alors la suite (σ_n) contient une sous-suite qui converge vers une métrique géométriquement finie non fuchsienne σ_∞ sur l'intérieur de M dont λ est la lamination géodésique mesurée de plissage.*

Notons $Mod(M)$ le groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes de M; ce groupe agit sur $\mathcal{ML}(\partial M)$ et sur $\mathcal{PML}(\partial M)$. H. Masur ([Mas]) et J.-P. Otal ([Ot1]) ont montré que si M est un bretzel creux alors l'action de $Mod(M)$ sur $\mathcal{O}$ est proprement discontinue.

Le théorème 4.2 permet d'étudier l'action du groupe $Mod(M)$ sur $\mathcal{ML}(\partial M)$: notons $\mathcal{D}(M)$ l'ensemble $\{\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M) \mid \exists \eta > 0$ tel que, pour tout disque ou anneau essentiel E, $i(\partial E,\lambda) \geqslant \eta\}$.

On déduit (cf. [Le2]) du théorème 4.2 que

THÉORÈME 4.3. — *Si M n'est pas un bretzel de genre 2, l'ensemble $\mathcal{D}(M)$ est le domaine de discontinuité de l'action de $Mod(M)$ sur $\mathcal{ML}(\partial M)$.*

Bibliographie

[Bo] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), 71–158.

[BoO] F. Bonahon, J.-P. Otal, *Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3*, Prépublication de l'UMPA n°285 (2001).

[CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, Analytical and Geometrical Aspects of hyperbolic Space (1987), 3–92.

[EpM] D.B.A. Epstein, A.Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (1987), 113–253.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Ponearu, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Seminaire Orsay*, Asterisque No.66-67 (1979).

[KeS] L. Keen, C. Series, *Continuity of convex hull boundaries*, Pac. J. Math. 127 (1988), 457–519.

[Jor] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. 98 (1976), 739–749.

[Le1] C. Lecuire, *Plissage des variété hyperboliques de dimension 3*, Prépublication de l'UMPA n°301 (2002).

[Le2] C. Lecuire, *Structures hyperboliques convexes sur les variétés de dimension 3*, Thèse de doctorat (2003).

[Mar] A. Marden, *The geometry of finitely generated Kleinian groups*, Ann. of Math. 99 (1974), 383–462.

[Mas] H. Masur, *Measured foliations and handlebodies*, Ergodic Theory Dynam. Systems 6 (1986), 99–116.

[MoS] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Degenerations of Hyperbolic structures I: Valuations, trees and surfaces*, Ann. of Math., 120 (1984), 401–476.

[Ot1] J.-P. Otal, *Courants géodésiques et produits libres*, Thèse d'Etat, Université Paris-Sud, Orsay (1988).

[Ot2] J.-P. Otal, *Sur la dégénérescence des groupes de Schottky*, Duke Math. J. 74 (1994), 777–792.

[Ot3] J.-P. Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque 235 (1996).

[Se] C. Series, *Quasifuchsian groups with small bending*, Warwick preprint 2002.

[Pe] J.L. Harer, R.C. Penner, *Combinatorics of train tracks*, Annals of Mathematics Studies 125 (1992).

[Th] W.P. Thurston, *The topology and geometry of 3-manifolds*, Notes de cours, Université de Princeton, 1976–79.

[Wa] F. Waldhausen, *On irreductible 3 manifolds which are sufficiently large*, Ann. Math. 87 (1968), 56–88.

Cyril LECUIRE
U.M.P.A.
ENS Lyon
46, Allée d'Italie
F-69364 LYON Cedex 07 (France)
clecuire@umpa.ens-lyon.fr